arXiv:2305.04659v1 [math.CT] 8 May 2023

颜色霍普夫代数的半阿贝尔条件

ANDREA SCIANDRA

摘要。最近， [22] 证明了任意域 $\Bbbk$上的余交换霍普夫代数范畴是半阿贝尔的。我们将这一结果推广到余交换颜色霍普夫代数范畴，即对任意斜对称双特征标，在 G上取值于G-分次向量空间的对称幺半范畴中的余交换霍普夫幺半群范畴；其中 G 是一个阿贝尔群，且 G 为有限生成群， $\Bbbk$ 的特征不为 2（若 G 是奇数基数的有限群，则不需要此条件）。我们还证明，该范畴是作用可表示的、局部代数笛卡尔闭的，进而是代数相干的。特别地，取 $G = \mathbb{Z}_2$时，这些结果适用于余交换超霍普夫代数范畴。此外，我们证明，在对 G 和 $\Bbbk$作出相同假设的条件下，余交换颜色霍普夫代数范畴中的阿贝尔对象所构成的阿贝尔范畴，恰由那些同时也是交换的余交换颜色霍普夫代数组成。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 2 2.1. 幺半范畴 2 2.2. 半阿贝尔范畴 4 3. 颜色霍普夫代数 4 3.1. 分次（余）代数 5 3.2. 颜色双代数与颜色霍普夫代数 5 4. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 的极限、余极限与原型模性 7 4.1. 等化子 8 4.2. 二元积 8 4.3. 余等化子 9 4.4. 余积 10 4.5. 原型模性 13 5. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 的正则性 13 5.1. 从颜色霍普夫代数到超霍普夫代数 16 5.2. 颜色霍普夫代数的广义 Newman 定理 20 6. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 的半阿贝尔条件 26 6.1. 一些推论 27 参考文献 28

1. 引言

半阿贝尔范畴的概念由 G. Janelidze 等人在 [25] 中引入，旨在概括群、环和代数所具有的典型代数性质。正如 [25], 中所述，半阿贝尔范畴为有意义地处理根基与Winvalid】【。

2010 数学学科分类号。 主要分类 18E13；次要分类 18M05；16T05；16W50。关键词和短语。 半阿贝尔范畴、正则范畴、对称幺半范畴、色 Hopf 代数、超霍普夫代数。本文写作期间，作者是“代数与几何结构及其应用国家研究组”（GNSAGA-INdAM）的成员。作者获得了 MIUR 国家研究项目 PRIN 2017 的部分资助。

交换子理论以及非阿贝尔结构的（上）同调理论。半阿贝尔范畴具有丰富的性质，例如，半直积、内部作用和交叉模等概念在其中都具有自然的定义。半阿贝尔范畴的一些例子包括群范畴、李代数范畴、（结合）环范畴以及紧群范畴。在 [21] M. Gran 等人证明了，当域 $\Bbbk$ 的特征为 0 时，域上余交换霍普夫代数的范畴（记为 $\mathbf{Hopf}_{\Bbbk,\mathrm{coc}}$）是半阿贝尔范畴。随后，这一结果在 [22] 中被推广到了任意特征。因此，自然会产生这样一个问题：这一结论是否也适用于余交换颜色霍普夫代数范畴，即 $\mathbf{Vec}_G$ 中的余交换霍普夫幺半群范畴，其中 $\mathbf{Vec}_G$ 是由 G 分次的向量空间构成的范畴，我们将其记为 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$。这里，$G$ 是一个阿贝尔群，因为我们知道，在这种情况下，通过在 G 上使用斜对称双特征标来修正 $\mathbf{Vec}_\Bbbk$ 中由通常的张量翻转所给出的编织，$\mathbf{Vec}_G$ 将成为一个对称幺半范畴。我们证明，当阿贝尔群 G 是有限生成的，且域 $\Bbbk$ 的特征不为 2 时，$\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 是半阿贝尔范畴（如果 G 是基数为奇数的有限群，则不需要这一特征条件）。这一结果推广了普通余交换霍普夫代数的相关结论，因为我们可以通过将 G 取为平凡群来恢复 $\mathbf{Hopf}_{\Bbbk,\mathrm{coc}}$；在这种情况下，对称幺半范畴 $\mathbf{Vec}_G$ 恰好就是 $\mathbf{Vec}_\Bbbk$。此外，如果我们考虑 $G=\mathbb{Z}_2$，便可得到广泛应用于数学和物理学的余交换超 Hopf 代数范畴在 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$ 时是半阿贝尔范畴。

本文的结构如下。在回顾有关幺半范畴和（颜色）霍普夫代数的一些基本概念与结果之后，我们通过明确构造极限和余极限，证明 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 的完备性与余完备性；再利用一个范畴论结果，证明 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 的原型模性。我们还注意到 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 是局部可呈示的，而对对称幺半范畴中（余交换的）霍普夫幺半群所成的范畴而言，这一点一般并无保证。接着，我们沿用 [22] 中相同的步骤，证明 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 的正则性。特别地，通过结合关于余交换超 Hopf 代数的 [27, Theorem 3.10 (3)]，以及从 [7] 中的范畴 $\mathbf{Vec}_G$ 到范畴 $\mathbf{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$ 的带编织的强幺半函子，我们得到 K. Newman [30,Theorem 4.1] 的一个推广：当 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$ 且阿贝尔群G 有限生成时，该推广适用于余交换色霍普夫代数。随后，借助 [25], 中给出的等价刻画，我们得到 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 是半阿贝尔的；这里仍假设阿贝尔群 G 有限生成且 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$。最后，我们还证明，在对 G 和 $\Bbbk$ 作相同假设的条件下，范畴 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 作用可表示且局部代数笛卡尔闭（因而代数相干）；并且 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 中的阿贝尔对象所成的范畴由那些同时也是交换的余交换色霍普夫代数组成，因此该范畴是阿贝尔的。

2. 预备知识

2.1. 幺半范畴。首先，我们回顾一些关于幺半范畴的基本事实，详见 [31, 4]。设 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{I}\ a,l,r)$ 为一个幺半范畴。为使公式更加紧凑，当上下文明确时，我们将 $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{I})$ 中的约束 a, l 和 r 省略；在计算中通常也不写出 a，因为在需要时其含义是明确的。我们知道，可以考虑 $\mathcal{M}$ 中的幺半群范畴 $\mathbf{Mon}(\mathcal{M})$，其对象记为 (A,m,u)；以及 $\mathcal{M}$ 中的余幺半群范畴 $\mathbf{Comon}(\mathcal{M})$，其对象记为 (C,Δ,ϵ)。回忆一下，若存在幺半群态射 $i\colon M'\to M$，且它是 $\mathcal{M}$ 中的单态射，则幺半群 M' 是幺半群 M 的子幺半群。类似地，若存在余幺半群态射 $i\colon C'\to C$，且它是 $\mathcal{M}$ 中的单态射，则余幺半群 C' 是余幺半群 C 的子余幺半群。若 $\mathcal{M}$ 具有编织 c，则范畴 $\mathbf{Mon}(\mathcal{M})$ 和 $\mathbf{Comon}(\mathcal{M})$ 在相同的约束 a,l,r 下成为幺半范畴。在此情形下，设 $\mathcal{M}$ 中的幺半群为 (M_1,m_1,u_1) 和 (M_2,m_2,u_2)，则张量积 $\otimes$ 满足 $(M_1,m_1,u_1)\otimes(M_2,m_2,u_2):=(M_1\otimes M_2,m,u)$，其中

$$m:=(m_1\otimes m_2)\circ(\mathrm{Id}_{M_1}\otimes c_{M_2,M_1}\otimes \mathrm{Id}_{M_2})\quad\text{and}\quad u:=(u_1\otimes u_2)\circ r_{\mathbf{I}}^{-1}.$$

$\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 的单位对象为 $(\mathbf{I}\ r_{\mathbf{I}}, \mathrm{Id}_{\mathbf{I}})$。类似地，设 $\mathcal{M}$ 中的余幺半群为 $(C_1, \Delta_1, \epsilon_1)$ 和 $(C_2, \Delta_2, \epsilon_2)$，则 $(C_1, \Delta_1, \epsilon_1) \otimes (C_2, \Delta_2, \epsilon_2) := (C_1 \otimes C_2, \Delta, \epsilon)$ 是一个余幺半群，其中

$$\Delta := (\mathrm{Id}_{C_1} \otimes c_{C_1,C_2} \otimes \mathrm{Id}_{C_2}) \circ (\Delta_1 \otimes \Delta_2) \quad \text{and} \quad \epsilon := r_{\mathbf{I}} \circ (\epsilon_1 \otimes \epsilon_2).$$

$\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 的单位对象由 $(\mathbf{I}\ r^{-1}\mathbf{I}\ , \mathrm{Id}_{\mathbf{I}})$ 给出。当 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 和 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 是幺半范畴时，我们可以考虑其中的幺半群和余幺半群。因此我们有

$$\mathrm{Bimon}(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Mon}(\mathrm{Comon}(\mathcal{M})) \cong \mathrm{Comon}(\mathrm{Mon}(\mathcal{M})) \tag{1}$$

其中 $\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 中双幺半群的范畴，因为对于 $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$，$m$ 和 u 是余幺半群态射这一事实，等价于 Δ 和 ϵ 是幺半群态射（例如参见 [4, 命题 1.11]），而

$$\mathrm{Mon}(\mathrm{Mon}(\mathcal{M})) \cong \mathrm{Mon}_{\mathrm{c}}(\mathcal{M}) \quad \text{and} \quad \mathrm{Comon}(\mathrm{Comon}(\mathcal{M})) \cong \mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M}) \tag{2}$$

它们分别是 $\mathcal{M}$ 中交换幺半群和余交换余幺半群的范畴，这可由埃克曼–希尔顿论证得到：Δ_C 是余幺半群态射，当且仅当 C 是余交换的；m_A 是幺半群态射，当且仅当 A 是交换的（例如参见 [4, 第 1.2.7] 节）。回顾一下，幺半群 (A, m, u) 在 $m = m \circ c_{A,A}$ 时是交换的；余幺半群 (C, Δ, ϵ) 在 $c_{C,C} \circ \Delta = \Delta$ 时是余交换的。还要注意，若存在双幺半群态射 $i\colon B' \to B$，且它在 $\mathcal{M}$ 中是单态射，则双幺半群 B' 是双幺半群 B 的子双幺半群。给定 $(C, \Delta, \epsilon) \in \mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 和 $(A, m, u) \in \mathsf{Mon}(\mathcal{M})$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(C, A)$ 是一个带卷积乘积的（普通）幺半群；给定 $f, g\colon C \to A$ 属于 $\mathcal{M}$，其乘积为 $f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$，单位元为 $u \circ \epsilon$。因此，我们可以考虑 $\mathcal{M}$ 中霍普夫幺半群的范畴 $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$，其对象是 $\mathcal{M}$ 中配备态射 $S\colon B \to B$（对极）的双幺半群 B，该态射是 Id_B 的卷积逆元。幺半范畴 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 和 $\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 可能不是带编织结构的，因此范畴 $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$、$\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$、$\mathsf{Mon}_{\mathrm{c}}(\mathcal{M})$ 和 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 可能不是幺半范畴；但是，当带编织结构的范畴 $\mathcal{M}$ 是对称的，即对 $\mathcal{M}$ 中任意 X 和 Y，都有 $c_{X,Y}^{-1} = c_{Y,X}$ 时，这些范畴都是带相同编织 c 和相同约束 a, l, r 的对称带编织结构的范畴，其中约束来自 $\mathcal{M}$（参见 [4, 第 1.2.7] 节）。事实上，若 $\mathcal{M}$ 是对称的，给定 $\mathcal{M}$ 中的幺半群 A 和 B，则 $c_{A,B}\colon A \otimes B \to B \otimes A$ 是幺半群态射，因此 $\mathsf{Mon}(\mathcal{M})$ 是对称幺半范畴；对偶地，$\mathsf{Comon}(\mathcal{M})$ 也是对称幺半范畴。反复应用这些结果并使用 (1) 和 (2)，可推得 $\mathsf{Bimon}(\mathcal{M})$、$\mathsf{Mon}_{\mathrm{c}}(\mathcal{M})$ 和 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 也都是对称幺半范畴。此外，若 $\mathcal{M}$ 是对称的，给定 $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$ 中的 (B, S_B) 和 $(B', S_{B'})$，则 $(B, S_B) \otimes (B', S_{B'}) := (B \otimes B', S_B \otimes S_{B'})$ 属于 $\mathsf{Hopf}(\mathcal{M})$。对极是双幺半群态射 $S\colon B \to B^{\mathrm{op},\mathrm{cop}}$，其中 $(B^{\mathrm{op},\mathrm{cop}}, m^{\mathrm{op}}, u, \Delta^{\mathrm{cop}}, \epsilon)$ 是双幺半群，且 $m^{\mathrm{op}} = m \circ c_{B,B}$ 以及 $\Delta^{\mathrm{cop}} = c_{B,B} \circ \Delta$，因此它满足

$$m \circ c_{B,B} \circ (S \otimes S) = S \circ m \quad \text{and} \quad (S \otimes S) \circ \Delta = c_{B,B} \circ \Delta \circ S$$

因此，如果 B 是交换的，那么 S 是幺半群态射；而如果 B 是余交换的，那么 S 是余幺半群态射。还要注意，如果 B 是交换的或余交换的，那么 $S^2 = \mathrm{Id}_B$。事实上，例如，如果 B 是余交换的，那么

$$m \circ (S \otimes S^2) \circ \Delta = m \circ (\mathrm{Id}_B \otimes S) \circ (S \otimes S) \circ \Delta = m \circ (\mathrm{Id}_B \otimes S) \circ c_{B,B} \circ \Delta \circ S = u \circ \epsilon \circ S = u \circ \epsilon$$

并且，类似地，$m \circ (S^2 \otimes S) \circ \Delta = u \circ \epsilon$。由于下文会多次用到这些事实，而且特别是 $\mathsf{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 是一个幺半范畴这一事实对于我们证明原型模性至关重要，因此我们将在对称幺半范畴中进行讨论。

最后，回顾一下，给定幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{I}\ a, l, r)$ 和 $(\mathcal{M}', \otimes, \mathbf{I}', a', l', r')$（为方便记号起见，我们不对 $\otimes$ 使用不同的记号），幺半函子 $(F, \phi^0, \phi^2) : (\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{I}\ a, l, r) \to (\mathcal{M}', \otimes, \mathbf{I}', a', l', r')$ 由一个函子 $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$、对于每个 $X, Y \in \mathcal{M}$ 的态射 $\phi^2_{X,Y}\colon F(X \otimes Y) \to F(X) \otimes F(Y) \in \mathcal{M}'$（该态射关于 X 和 Y 自然），以及一个态射 $\phi^0\colon F(\mathbf{I}) \to \mathbf{I}' \in \mathcal{M}'$ 组成，并满足

$$(\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \phi^2_{Y,Z}) \circ \phi^2_{X,Y\otimes Z} \circ F(a_{X,Y,Z}) = a'_{F(X),F(Y),F(Z)} \circ (\phi^2_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_{F(Z)}) \circ \phi^2_{X\otimes Y,Z}$$

and

$$l'_{F(X)} \circ (\phi^0 \otimes \mathrm{Id}_{F(X)}) \circ \phi^2_{\mathbf{I},X} = F(l_X) \quad \text{and} \quad r'_{F(X)} \circ (\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \phi^0) \circ \phi^2_{X,\mathbf{I}} = F(r_X).$$

此外，如果对于每个 $X, Y \in \mathcal{M}$， ϕ^0 和 $\phi^2_{X,\,Y}$ 都是同构，则称 F 为强函子；如果对于每个 $X, Y \in \mathcal{M}$，ϕ^0 和 $\phi^2_{X,\,Y}$ 都是恒等态射，则称其为严格函子。若 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 分别是带编织结构的（对称）带编织结构范畴，编织分别为 c 和 c'，则若 $c'_{F(X),\,F(Y)} \circ \phi^2_{X,\,Y} = \phi^2_{Y,\,X} \circ F(c_{X,\,Y})$，称 F 为（对称）带编织结构的函子。

若 $\mathcal{M}$ 是域 $\Bbbk$上的向量空间范畴 $\mathsf{Vec}_\Bbbk$，则我们有通常所说的 $\Bbbk$-代数、$\Bbbk$-余代数、 $\Bbbk$-双代数和 $\Bbbk$-霍普夫代数，通常省略 $\Bbbk$而不写出。下文中我们始终省略 $\Bbbk$，但默认其存在。关于霍普夫代数理论中的经典结果和概念，请参见 [35] 和 [37]。

2.2. 半阿贝尔范畴。 这里我们回顾半阿贝尔范畴概念所需的一些定义。关于函子的极限和余极限，以及范畴论中的其他基本概念，请参见 [10, 26]。

有限完备范畴 $\mathcal{C}$ 是正则的，如果 $\mathcal{C}$ 中的任意态射都可分解为一个正则满态射（即 $\mathcal{C}$中一对态射的余等化子）后接一个单态射；此外，正则满态射在沿任意态射作拉回时保持稳定。 $\mathcal{C}$ 中对象 X 上的一个关系，是三元组 (R, r_1, r_2) 的等价类，其中 $\mathcal{C}$的对象 R及一对联合单态射 $r_1, r_2 \colon R \to X$构成该三元组；若两个三元组 (R, r_1, r_2) 和 (R', r'_1, r'_2) 彼此都可经由对方分解，则将它们视为相同。在 $\mathcal{C}$中，对象 X 上的关系 R 若满足自反、对称和传递性，便称为等价关系。正则范畴 $\mathcal{C}$ 是（Barr）正合的，如果 $\mathcal{C}$ 中的任意等价关系R 都是有效的，即它是 $\mathcal{C}$中某个态射的核对。还需回顾的是，按照 [11], 的意义，范畴 $\mathcal{C}$是原模的，如果它对任意态射都存在分裂满态射的拉回，并且点纤维化的所有逆像函子都反映同构。我们知道，例如 [11, 命题 3.1.2], 所述，若 $\mathcal{C}$ 是带基点的（即有一个零对象）且有限完备，则只需要求分裂短五引理在 $\mathcal{C}$中成立，便可刻画其原型模性。最后，范畴 $\mathcal{C}$ 是半阿贝尔的，如果它带基点、有限余完备、（Barr）正合且原模。关于半阿贝尔范畴的诸多细节和性质，可参见[11]。

3. 颜色霍普夫代数

本节回顾颜色霍普夫代数的定义，以及它们与普通霍普夫代数的区别。我们考虑任意域 $\Bbbk$ 上的 G-分次向量空间范畴 Vec_G，其中 G 是一个群。我们会逐步对群 G 添加条件，以说明为何需要这些条件。Vec_G 中的对象是向量空间 $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$，其中对于每个 $g \in G$， V_g 都是 V 的向量子空间；Vec_G 中的态射是线性映射 $f \colon V \to W$，它们保持分次，即对于每个 $g \in G$，都有 $f(V_g) \subseteq W_g$。我们知道，这个范畴是幺半范畴，其中 $\otimes$ 是 $\mathsf{Vec}_\Bbbk$ 的张量积，单位对象为 $\Bbbk = \bigoplus_{g\in G} \Bbbk_g$，其中 $\Bbbk_g = \{0\}$ 在 $g \neq 1_G$ 且 $\Bbbk_{1_G} = \Bbbk$ 时成立， 1_G 为 G 的单位元。事实上，给定 $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ 和 $W = \bigoplus_{g\in G} W_g$，我们有 $V \otimes W = \bigoplus_{g\in G} (V \otimes W)_g$，其中 $(V \otimes W)_g = \bigoplus_{a\in G} (V_a \otimes W_{a^{-1}g})$。此外，结合约束以及左、右单位约束与 $\mathsf{Vec}_\Bbbk$ 中的通常约束相同。

注释 3.1。请记住，范畴 Vec_G 与左余模范畴 ${}^{\Bbbk G}\mathfrak{M}$ 同构，其中左余模是定义在群代数 $\Bbbk G$ 上的，其同构由 $F \colon \mathsf{Vec}_G \to {}^{\Bbbk G}\mathfrak{M}, V = \bigoplus_{g\in G} V_g \mapsto (V, \rho)$ 给出，其中 $\rho(\sum_{g\in G} v_g) = \sum_{g\in G} g \otimes v_g$且 $F(f) = f$；其逆映射由 $G \colon {}^{\Bbbk G}\mathfrak{M} \to \mathsf{Vec}_G, (V, \rho) \mapsto V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ 给出，其中 $V_g = \{w \in V \mid \rho(w) = g \otimes w\}$ 且 $G(f) = f$。已知 ${}^{\Bbbk G}\mathfrak{M}$ 是一个格罗滕迪克范畴，因而是阿贝尔范畴，因为对于以 C 为余代数的 ${}^{C}\mathfrak{M}$（以及 $\mathfrak{M}^{C}$），这一性质通常成立；但对于环上的余代数，这一性质并非总是成立（例如参见 [16, 3.13]）。因此，这里的单态射恰好是单射映射，而满态射恰好是满射映射。注意，给定一个分次向量空间 $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ 和一个向量子空间 $V' \subseteq V$，我们总可以考虑分次向量空间 $\bigoplus_{g\in G} V' \cap V_g \subseteq V'$。此外， V' 是 V 的一个分次子空间。

如果它是一个分次向量空间，使得包含映射 $i: V' \to V$ 属于 Vec_G，当且仅当对于每个 $x \in V'$，即满足 $x = \sum_{g\in G} x_g$ 与 $x_g \in V_g$，都有 $x_g \in V'$ 对任意 $g \in G$成立；此时 V' 具有诱导分次 $V' = \bigoplus_{g\in G} V'_g$，其中 $V'_g = V' \cap V_g$。此外，我们总可以考虑分次向量空间 $\bigoplus_{g\in G} V_g/(V_g \cap V')$，并且存在一个向量空间的典范同构 $\bigoplus_{g\in G} \frac{V_g}{V_g\cap V'} \cong \frac{\bigoplus_{g\in G} V_g}{\bigoplus_{g\in G} V_g\cap V'}$，在 V' 是 V 的分次子空间时，它就是 V/V'。此时，我们还可以考虑 $\bigoplus_{g\in G}(V_g + V')/V'$，其中对于每个 $g \in G$，$(V_g + V')/V'$ 都是 V/V' 的向量子空间。注意，对于每个 $g \in G$， $V_g/(V_g \cap V') \cong (V_g + V')/V'$ 作为向量空间典范同构，因此 $\bigoplus_{g\in G}(V_g + V')/V'$ 和 $\bigoplus_{g\in G} V_g/(V_g \cap V')$ 可在 Vec_G 中视为相同。因此，当 V' 是 V 的分次子空间时，我们有 $V/V' = \bigoplus_{g\in G}(V_g + V')/V'$ 属于 Vec_G，称为商分次向量空间。

注 3.2。我们回顾一下，若 $f: A \to B$ 属于 Vec_G，则 $\ker(f)$ 和 $\mathrm{Im}(f)$ 分别是 A 和 B 的分次子空间。若 f 是满射，则 $B = f(A)$ 的分次是由 A 经由 f 唯一诱导出的，即对每个 $g \in G$，都有 $B_g = f(A_g)$。

3.1.分次（余）代数。 范畴 $\mathrm{Mon}(\mathsf{Vec}_G)$ 和 $\mathrm{Comon}(\mathsf{Vec}_G)$ 的对象分别称为 G-分次代数 和 G-分次余代数，通常省略 G。关于分次代数和分次余代数的许多细节和性质，可参见 [28, 29]。请注意，分次代数和分次余代数通常指在 $\mathbb{N}$上分次的代数和余代数，而在此处，分次始终是在 G上定义的。

分次代数是一个代数 (A, m, u)，其中 $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ 是一个分次向量空间，并且 m 和 u 保持分次，即对于每个 $h, k \in G$，我们都有 $A_hA_k \subseteq A_{hk}$ 和 $u(\Bbbk) \subseteq A_{1_G}$；而分次代数态射是保持分次的代数态射。由于 Vec_G 中的单态射恰好是单射映射，分次代数 (A, m, u) 的子幺半群称为分次子代数，是一个分次子空间 $V \subseteq A$，满足 $1_A \in V$和 $m(V\otimes V) \subseteq V$。实际上，在这种情况下， V是一个分次向量空间，对每个 $g \in G$ 都有 $V_g = V \cap A_g$，并且是一个代数，且

$$V_gV_h = m((V\cap A_g)\otimes(V\cap A_h)) = m((V\otimes V)\cap(A_g\otimes A_h)) \subseteq m(V\otimes V)\cap m(A_g\otimes A_h) \subseteq V\cap A_{gh} = V_{gh}$$

对每个 g、$h \in G$ 均成立。此外，若我们考虑 A 的分次双边理想 I，使得 $A/I = \bigoplus_{g\in G}(A_g + I)/I$ 是分次向量空间，则我们知道 $(A/I, u_{A/I}, m_{A/I})$ 是一个代数，其运算为 $u_{A/I} = \pi \circ u_A$ 和 $m_{A/I} \circ (\pi \otimes \pi) = \pi \circ m_A$，其中 $\pi: A \to A/I$ 是典范投影；它是分次的，因为 $u_{A/I}$ 和 $m_{A/I}$ 属于 Vec_G，而 π、 u_A 和 m_A 属于 Vec_G；它称为分次代数商。

类似地，分次余代数是一个余代数 (C, Δ, ϵ)，其中 $C = \bigoplus_{g\in G} C_g$ 是分次向量空间，并且 Δ 和 ϵ 保持分次，也就是说，对于每个 $g \in G$，有 $\Delta(C_g) \subseteq \bigoplus_{h\in G}(C_h \otimes C_{h^{-1}g})$，且 $\epsilon(C_g) \subseteq \delta_{g,1_G}\Bbbk$；分次余代数的态射是保持分次的余代数态射。分次余代数 (C, Δ, ϵ) 的子余幺半群称为分次子余代数，它是一个分次向量子空间 $V \subseteq C$，满足 $\Delta(V) \subseteq V \otimes V$($\epsilon(V) \subseteq \Bbbk$ 是自动成立的)。事实上，在这种情况下， V是一个分次向量空间、一个余代数，并且

$$\Delta(V_g) = \Delta(V \cap C_g) \subseteq \Delta(V) \cap \Delta(C_g) \subseteq (V \otimes V) \cap (C \otimes C)_g = (V \otimes V)_g,$$

对每个 $g \in G$ 都成立。实际上请注意，由于 V是 C的分次子空间，因此 $V \otimes V$是 $C\otimes C$的分次子空间。若 I是 C的分次双边余理想，则 C/I是一个分次向量空间，并且是一个余代数，其 $\Delta_{C/I} \circ \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_C$且 $\epsilon_{C/I} \circ \pi = \epsilon_C$，其中 $\pi: C \to C/I$是典范投影。因此， C/I 是分次余代数，因为 $\Delta_{C/I}$和 $\epsilon_{C/I}$ 显然保持分次，这是因为 ϵ_C、 Δ_C 和 π 属于 Vec_G，它称为商分次余代数。

3.2. 颜色双代数和颜色霍普夫代数。我们有兴趣研究 Vec_G 中的霍普夫幺半群，但为此，我们首先需要 Vec_G 具有带编织结构。可以利用 G 上的双特征标 ϕ 为 Vec_G 赋予编织（例如参见 [7]），即一个映射 $\phi: G \times G \to \Bbbk - \{0\}$，满足

$$\phi(gh, l) = \phi(g, l)\phi(h, l) \quad \text{and } \phi(g, hl) = \phi(g, h)\phi(g, l) \quad \text{for every } g, h, l \in G.$$

由此立即可得，对于所有 $g \in G$， $\phi(1_G, g) = \phi(g, 1_G) = 1_{\Bbbk}$。幺半范畴 Vec_G是带编织结构的，其编织为 $c_{X,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X$，满足 $c_{X,Y}(x \otimes y) = \phi(g,h) y \otimes x$，其中 $x \in X_g, y \in Y_h$ 和 $g, h \in G$，该定义作用于分次的各分量上，并通过线性性扩展，对 Vec_G中的每个X 和 Y均成立。为了使编织属于 Vec_G，群 G 需要是阿贝尔群，正如 [7, 第 1.1] 节或 [5, 第 193]页所述。因此，从现在起，我们始终假设G 是一个阿贝尔群。如前所述，我们还希望范畴 Vec_G 是对称的，因此必须要求 ϕ 是 G 上的交换因子，即 G上的斜对称双特征标；也就是说， ϕ还满足以下条件： $\phi(g,h)\phi(h,g) = 1_{\Bbbk}$，其中 g, $h \in G$。我们通常在分次的各分量上进行运算，并约定所有映射均通过线性性扩展。对于编织，我们采用与 [7] 相同的记号，并写作 $c(x \otimes y) = \phi(|x|, |y|) y \otimes x$，其中 $x \in X$ 和$y \in Y$，意指在齐次分量上进行运算并通过线性性扩展。注意，给定X, Y 以及 Vec_G中的 Z，六边形关系

$$(\mathrm{Id}_Y \otimes c_{X,Z}) \circ (c_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z) = c_{X,Y\otimes Z} \quad \text{and} \quad (c_{X,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y) \circ (\mathrm{Id}_X \otimes c_{Y,Z}) = c_{X\otimes Y,Z}$$

关于元素 $x \in X$、 $y \in Y$ 和 $z \in Z$，用 ϕ 表示，恰好是

$$\phi(|x|,|y|)\phi(|x|,|z|) = \phi(|x|,|y||z|) = \phi(|x|,|y\otimes z|) \text{ and } \phi(|x|,|z|)\phi(|y|,|z|) = \phi(|x||y|,|z|) = \phi(|x\otimes y|,|z|).$$

还要注意，如果 X 和 Y 是分次余代数，那么

$$l_X \circ (\epsilon_Y \otimes \mathrm{Id}_X) \circ c_{X,Y} = l_X \circ c_{X,\Bbbk} \circ (\mathrm{Id}_X \otimes \epsilon_Y) = r_X \circ (\mathrm{Id}_X \otimes \epsilon_Y)$$

以及 $r_Y \circ (\mathrm{Id}_Y \otimes \epsilon_X) \circ c_{X,\ Y} = l_Y \circ (\epsilon_X \otimes \mathrm{Id}_Y)$，其在元素 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 上为

$$\phi(|x|,|y|)\epsilon(y)x = x\epsilon(y) \quad \text{and} \quad \phi(|x|,|y|)y\epsilon(x) = \epsilon(x)y. \tag{3}$$

注意，如果 $y \in Y_g$ 满足 $g \neq 1_G$，那么 $\epsilon(y) = 0$；如果 $y \in Y_{1_G}$，那么 $\phi(|x|,|y|) = 1_{\Bbbk}$。因此，我们仍有 $\epsilon(y)x = x\epsilon(y)$（显然应当如此），但这些关系将有助于计算。分次代数 A 是交换的，当且仅当对任意 a、 $b \in A$，都有 $ab = \phi(|a|,|b|)ba$；分次余代数 C 是余交换的，当且仅当对任意 $x \in C$，都有 $x_1 \otimes x_2 = \phi(|x_1|,|x_2|)x_2 \otimes x_1$。在这里，我们将调整 Sweedler 记号，写作 $\Delta(x) = x_1 \otimes x_2$，并始终假定和式中的各项都是齐次的。注意，给定 $\mathsf{Mon}(\mathsf{Vec}_G)$ 中的 A 和 B， $A \otimes B$ 的乘法由 $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = \phi(|b|,|c|)ac \otimes bd$ 给出；给定 $\mathsf{Comon}(\mathsf{Vec}_G)$ 中的 C 和 D，$C \otimes D$ 的余乘法由 $\Delta_{C\otimes D}(c \otimes d) = \phi(|c_2|,|d_1|)c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2$ 给出。

范畴 $\mathsf{Bimon}(\mathsf{Vec}_G)$ 和 $\mathsf{Hopf}(\mathsf{Vec}_G)$ 的对象分别称为色双代数和颜色霍普夫代数。颜色双代数是一个数据组 $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$，其中 (B, m, u) 是分次代数，(B, Δ, ϵ) 是分次余代数，并且这两种结构相容，即 Δ 和 ϵ 是分次代数映射，或者等价地， m 和 u 是分次余代数映射。因此，$B = \bigoplus_{g\in G} B_g$是一个普通代数和普通余代数，其 m, u, Δ, ϵ 保持分次，但这两种结构之间的相容性条件与 $\mathsf{Bialg}_{\Bbbk}$ 中的不同，仅在涉及编织的部分有所差异。因此我们有

$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b),\ \epsilon(1_B) = 1_{\Bbbk},\ \Delta(1_B) = 1_B \otimes 1_B \text{ and } \Delta(ab) = \phi(|a_2|,|b_1|)a_1b_1 \otimes a_2b_2$$

对每个 $a, b \in B$。颜色双代数的态射是保持分次的代数态射和余代数态射。给定颜色双代数 B，称子双幺半群 $B' \subseteq B$为颜色子双代数，它是一个分次子代数，同时也是一个分次子余代数（这两种结构之间的相容性由 B 给出）。此外，给定颜色双代数 B 和分次双理想 I（它是双边理想和双边余理想），我们知道 B/I 是一个分次代数和分次余代数，并证明这两种结构之间的相容性自动成立。事实上，给定 $\pi\colon B \to B/I$ 这个典范投影，我们有

$$\Delta_{B/I} \circ m_{B/I} \circ (\pi \otimes \pi) = \Delta_{B/I} \circ \pi \circ m_B = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_B \circ m_B$$

and

$$(m_{B/I}\otimes m_{B/I})\circ(\mathrm{Id}_{B/I}\otimes c_{B/I,B/I}\otimes \mathrm{Id}_{B/I})\circ(\Delta_{B/I}\otimes\Delta_{B/I})\circ(\pi\otimes\pi)=$$
$$(m_{B/I}\otimes m_{B/I})\circ(\mathrm{Id}_{B/I}\otimes c_{B/I,B/I}\otimes \mathrm{Id}_{B/I})\circ(\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi)\circ(\Delta_B\otimes\Delta_B)=$$
$$(m_{B/I}\otimes m_{B/I})\circ(\pi\otimes\pi\otimes\pi\otimes\pi)\circ(\mathrm{Id}_B\otimes c_{B,B}\otimes \mathrm{Id}_B)\circ(\Delta_B\otimes\Delta_B)=$$
$$(\pi\otimes\pi)\circ(m_B\otimes m_B)\circ(\mathrm{Id}_B\otimes c_{B,B}\otimes \mathrm{Id}_B)\circ(\Delta_B\otimes\Delta_B)=(\pi\otimes\pi)\circ\Delta_B\circ m_B$$

因为 c 是自然的，且 B 是颜色双代数。现在，由于 $\pi\otimes\pi$ 是满射，我们有

$$(m_{B/I}\otimes m_{B/I})\circ(\mathrm{Id}_{B/I}\otimes c_{B/I,B/I}\otimes \mathrm{Id}_{B/I})\circ(\Delta_{B/I}\otimes\Delta_{B/I})=\Delta_{B/I}\circ m_{B/I},$$

因此， B/I 是一个颜色双代数，称为商颜色双代数。

给定 $(C,\Delta,\epsilon)\in\mathbf{Comon}(\mathbf{Vec}_G)$ 和 $(A,m,u)\in\mathbf{Mon}(\mathbf{Vec}_G)$，两个态射 $f,g\colon C\to A$ in $\mathbf{Vec}_G$ 的卷积乘积由 $f*g:=m\circ(f\otimes g)\circ\Delta$ 给出。颜色霍普夫代数是带有一个态射 $S\colon B\to B$ in $\mathbf{Vec}_G$（对极）的颜色双代数，且满足 $S*\mathrm{Id}_B=u\circ\epsilon=\mathrm{Id}_B*S$；因此，它是一个保持分次的线性映射，并满足对于每个$b\in B$， $b_1S(b_2)=\epsilon(b)1_B=S(b_1)b_2$。颜色霍普夫代数的态射就是色双代数态射，因为与对极的相容性会自动成立（参见例如 [4, Propositon 1.16]）。给定一个颜色霍普夫代数 H，颜色霍普夫子代数 $H'\subseteq H$ 就是满足 $S_H(H')\subseteq H'$ 的色子双代数。此外，给定一个满足 $S_H(I)\subseteq I$ 的分次双理想 I，存在唯一的线性映射 $S_{H/I}\colon H/I\to H/I$，使得 $S_{H/I}\circ\pi=\pi\circ S_H$；该映射保持分次，因为 S_H和π 都保持分次。这显然是 H/I 的对极（它是一个颜色双代数），事实上，和通常一样

$$\begin{aligned}m_{H/I}\circ(S_{H/I}\otimes\mathrm{Id}_{H/I})\circ\Delta_{H/I}\circ\pi&=m_{H/I}\circ(S_{H/I}\otimes\mathrm{Id}_{H/I})\circ(\pi\otimes\pi)\circ\Delta_H\\&=m_{H/I}\circ(\pi\otimes\pi)\circ(S_H\otimes\mathrm{Id}_H)\circ\Delta_H\\&=\pi\circ m_H\circ(S_H\otimes\mathrm{Id}_H)\circ\Delta_H=\pi\circ u_H\circ\epsilon_H\\&=u_{H/I}\circ\epsilon_{H/I}\circ\pi\end{aligned}$$

并由 π 的满射性，我们得到 $m_{H/I}\circ(S_{H/I}\otimes\mathrm{Id}^{H/I})\circ\Delta_{H/I}=u_{H/I}\circ\epsilon_{H/I}$。另一等式的证明类似，因此 H/I 是颜色霍普夫代数，称为商着色霍普夫代数。注意，颜色霍普夫代数 H 的对极 S 在元素 $x,y\in H$ 上具有以下性质：
$S(xy)=\phi(|x|,|y|)S(y)S(x)$ $S(1_B)=1_B$，且 $\Delta(S(x))=\phi(|x_1|,|x_2|)S(x_2)\otimes S(x_1)$ $\epsilon(S(x))=\epsilon(x)$。若 H 是交换的，则 $S(xy)=S(x)S(y)$，且 $S^2=\mathrm{Id}_H$；若 H 是余交换的，则$\Delta(S(x))=S(x_1)\otimes S(x_2)$，且 $S^2=\mathrm{Id}_H$。

显然，$\mathbf{Vec}_{\Bbbk}$ 的范畴恰好是以平凡群 $G=\{1_G\}$ 为对象的 $\mathbf{Vec}_G$。因此，鉴于 $\mathbf{Hopf}_{\Bbbk,\ \mathrm{coc}}$ 是一个半阿贝尔范畴（[22, 定理 2.10]），我们现在要探究 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 是否为半阿贝尔范畴。

4. $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 的极限、余极限与原型模性

本节证明 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 是带基点的、有限完备的、余完备的，且具有原模性。显然，带平凡分次的 $\Bbbk$ 属于 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$，并且是该范畴的零对象。事实上，给定 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 中的 H， ϵ 是从 H 到 $\Bbbk$ 的唯一余代数态射，同时它也是代数态射并保持分次。类似地， u 是从 $\Bbbk$ 到 H 的唯一代数态射，同时也是余代数态射并保持分次。因此， $\Bbbk$ 是 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 中的终对象和始对象，故为零对象，而 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 是带基点的。请注意，这对 $\mathbf{Hopf}(\mathbf{Vec}_G)$ 和 $\mathbf{Bimon}(\mathbf{Vec}_G)$ 也成立；而用同样的推理， $\Bbbk$ 是 $\mathbf{Mon}(\mathbf{Vec}_G)$ 中的始对象，也是 $\mathbf{Comon}(\mathbf{Vec}_G)$ 中的终对象。

现在，我们通过构造等化子和二元积，并使用 [10, 命题 2.8.2]，来证明 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 的有限完备性。请注意，这些极限作为向量空间，与 $\mathbf{Hopf}_{\Bbbk,\mathrm{coc}}$ 中的极限形式相同，例如见 [38]（另见 [2]）。为 $\mathbf{Hopf}_{\Bbbk,\mathrm{coc}}$ 给出的构造适用于这一更一般的情形；而在验证 $\mathbf{Hopf}_{\Bbbk,\mathrm{coc}}$ 情形下看似显然的结论时，通常需要用到编织的自然性，或该范畴是对称的这一事实。

由于我们尚未在文献中见到针对 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 的这些计算，因此我们给出这些极限的显式构造，这些构造也将在下文中用到。

注记 4.1。回顾一下，给定一个颜色霍普夫代数 A 及其一个分次子空间 V，若 V 包含 1_A，且在 m_A、Δ_A 和 S_A下封闭，则 V 是 A 的颜色 Hopf 子代数。注意，若 A 是（余）交换的，显然 V 也是（余）交换的。

4.1. 等化子。 设 $f, g\colon A \to B$ in $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，我们可以考虑

$$K = \{x \in A \mid (\mathrm{Id}_A \otimes f)\Delta(x) = (\mathrm{Id}_A \otimes g)\Delta(x)\} \subseteq A.$$

注意，作为向量空间，$K = \ker((\mathrm{Id}_A \otimes f - \mathrm{Id}_A \otimes g) \circ \Delta)$ 和 $(\mathrm{Id}_A \otimes f - \mathrm{Id}_A \otimes g)\circ\Delta$ 属于 Vec_G，因为 Δ、$\mathrm{Id}_A \otimes f$ 和 $\mathrm{Id}_A \otimes g$ 属于 Vec_G。因此，根据注 3.2，K 是 A的分次子空间，即 $K = \bigoplus_{g\in G} K_g$，其中 $K_g = K \cap A_g$。根据注 4.1，如果它对 A 的运算封闭，那么它将自动属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$。显然 $1_A \in K$，并且给定x、$y \in K$，则 $xy \in K$，因为 $(\mathrm{Id}_A \otimes f) \circ \Delta$ 和 $(\mathrm{Id}_A \otimes g) \circ \Delta$ 是分次代数的态射。事实上，给定 x、$y \in K$，我们有，

$$(\mathrm{Id}_A\otimes f)\Delta(xy) = (\mathrm{Id}_A\otimes f)\Delta(x)\cdot(\mathrm{Id}_A\otimes f)\Delta(y) = (\mathrm{Id}_A\otimes g)\Delta(x)\cdot(\mathrm{Id}_A\otimes g)\Delta(y) = (\mathrm{Id}_A\otimes g)\Delta(xy),$$

记 $\cdot$ 为乘法 $m_{A\otimes B}$，因此 K 在 m_A下封闭。此外，由于 A 的余交换性，对于每个 $x \in A$（进而对于每个 $x \in K$），我们有 $x_1 \otimes x_2 = \phi(|x_1|, |x_2|)x_2 \otimes x_1$；若 $\Delta(x) \in A \otimes K$，则可得умнур

$$K \otimes A \ni c_{A,K}(\phi(|x_1|, |x_2|)x_2 \otimes x_1) = \phi(|x_1|, |x_2|)\phi(|x_2|, |x_1|)x_1 \otimes x_2 = x_1 \otimes x_2,$$

由于 ϕ 是交换因子，因此我们只需证明 $\Delta(K) \subseteq A \otimes K$。但现在我们有 $K = \ker((\mathrm{Id}_A \otimes (f - g)) \circ \Delta)$，因此

$$A \otimes K = \ker(\mathrm{Id}_A \otimes (\mathrm{Id}_A \otimes (f - g)) \circ \Delta),$$

因此，我们希望证明 $x \in K$ 蕴含 $(\mathrm{Id}_A\otimes(\mathrm{Id}_A\otimes(f-g))\Delta)\Delta(x) = 0$。这等价于证明 $(\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_A\otimes f)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta)\Delta(x) = (\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_A\otimes g)(\mathrm{Id}_A\otimes\Delta)\Delta(x)$，即 $x_1\otimes x_{2_1}\otimes f(x_{2_2}) = x_1\otimes x_{2_1}\otimes g(x_{2_2})$。但是，由余结合性可知，$x_1\otimes x_{2_1}\otimes f(x_{2_2}) = x_{1_1}\otimes x_{1_2}\otimes f(x_2)$ 且 $x_1\otimes x_{2_1}\otimes g(x_{2_2}) = x_{1_1}\otimes x_{1_2}\otimes g(x_2)$，因此我们必须证明 $(\Delta\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_A\otimes f)\Delta(x) = (\Delta\otimes\mathrm{Id}_B)(\mathrm{Id}_A\otimes g)\Delta(x)$，而这成立是因为 $x \in K$。因此，K 在 Δ_A下封闭。此外，由于 A 是余交换的，我们有 $\Delta \circ S_A = (S_A \otimes S_A) \circ \Delta$，于是，给定 $x \in K$，我们有

$$(\mathrm{Id}_A\otimes f)\Delta(S_A(x)) = (\mathrm{Id}_A\otimes f)(S_A\otimes S_A)\Delta(x) = (S_A\otimes S_B)(\mathrm{Id}_A\otimes f)\Delta(x) = (S_A\otimes S_B)(\mathrm{Id}_A\otimes g)\Delta(x),$$

这正是 $(\mathrm{Id}_A \otimes g)\Delta(S_A(x))$。因此，我们有 K 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$。现在，由于包含映射 $i\colon K \to A$ 属于 Vec_G，且它是一个代数态射和余代数态射，我们得到 (K, i) 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中偶 (f, g) 的等化子。事实上，取 $x \in K$，由 $x_1\otimes f(x_2) = x_1\otimes g(x_2)$ 可立即得到 $f(x) = g(x)$；如果 $h\colon C \to A$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 且满足 $f\circ h = g\circ h$，那么 h 的像属于 K。确实，由于 h 是一个余代数态射，我们得到

$$(\mathrm{Id}_A \otimes f) \circ \Delta_A \circ h = (\mathrm{Id}_A \otimes f) \circ (h \otimes h) \circ \Delta_C = (\mathrm{Id}_A \otimes g) \circ (h \otimes h) \circ \Delta_C = (\mathrm{Id}_A \otimes g) \circ \Delta_A \circ h.$$

我们将 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中偶对 (f, g) 的等化子记为 $(\mathrm{Eq}(f, g),\ i)$。

4.2. 二元积。 若取 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的 A, B，则可考虑 $(A \otimes B, \pi_A, \pi_B)$，其中

$$\pi_A := r_A \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \epsilon_B) \quad \text{and} \quad \pi_B := l_B \circ (\epsilon_A \otimes \mathrm{Id}_B).$$

特别地，$(A \otimes B, m, u, \Delta, \epsilon, S)$ 是一个余交换色 Hopf 代数，因为 $\mathrm{Hopf}(\mathrm{Vec}_G)$ 和 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 具有幺半结构，且 Vec_G 是对称的；我们还记得 $m = (m_A \otimes m_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes c_{B,A}\otimes\mathrm{Id}_B)$，$u = (u_A\otimes u_B)\circ r_{\Bbbk}^{-1}$，$\Delta = (\mathrm{Id}_A\otimes c_{A,B}\otimes\mathrm{Id}_B)\circ(\Delta_A\otimes\Delta_B)$，$\epsilon = r_{\Bbbk}\circ(\epsilon_A\otimes\epsilon_B)$ 和 $S = S_A\otimes S_B$。此外，π_A 和 π_B 是代数映射和余代数映射，并且保持分次，因为 r_A, l_B 和 ϵ_A, ϵ_B 具有这一性质，因此它们是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的态射。我们只需证明，对 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的每个 H，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中从 H 到 $A \otimes B$ 的态射集合，与 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中从 H 到 A 的态射集合和从 H 到 B 的态射集合的笛卡尔积之间存在一个双射。给定一个映射 $f\colon H \to A \otimes B$，我们可以考虑有序对 $(\pi_A \circ f, \pi_B \circ f)$；给定一对 (g, h)，其中 $g\colon H \to A$ 且 $h\colon H \to B$，

我们可以考虑态射 $(g\otimes h)\circ\Delta_H$；此映射是有序对 (g,h) 的对角态射，通常记作 $\langle g,h\rangle$。它属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，因为 Δ_H 是余代数态射，且其余代数是余交换的（也只有在这种情况下）。因此显然，这一构造仅适用于余交换情形。显然，给定 $g\colon H\to A$ 和 $h\colon H\to B$，我们有

$$\pi_A\circ(g\otimes h)\circ\Delta_H = r_A\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\epsilon_B)\circ(g\otimes h)\circ\Delta_H = r_A\circ(g\otimes\mathrm{Id}_{\Bbbk})\circ(\mathrm{Id}_H\otimes\epsilon_H)\circ\Delta_H = g\circ r_H\circ(\mathrm{Id}_H\otimes\epsilon_H)\circ\Delta_H = g$$

并且，类似地，$\pi_B\circ(g\otimes h)\circ\Delta_H = h$。另一方面，给定 $f\colon H\to A\otimes B$，我们有

$$((\pi_A\circ f)\otimes(\pi_B\circ f))\circ\Delta_H = (\pi_A\otimes\pi_B)\circ(f\otimes f)\circ\Delta_H = (\pi_A\otimes\pi_B)\circ\Delta_{A\otimes B}\circ f$$

利用余代数的 f。现在我们证明 $(\pi_A\otimes\pi_B)\circ\Delta_{A\otimes B}=\mathrm{Id}_{A\otimes B}$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}(\pi_A\otimes\pi_B)\circ\Delta_{A\otimes B} &= (\pi_A\otimes\pi_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes c_{A,B}\otimes\mathrm{Id}_B)\circ(\Delta_A\otimes\Delta_B)\\ &= (r_A\otimes l_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\epsilon_B\otimes\epsilon_A\otimes\mathrm{Id}_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes c_{A,B}\otimes\mathrm{Id}_B)\circ(\Delta_A\otimes\Delta_B)\\ &= (r_A\otimes l_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes c_{\Bbbk,\Bbbk}\otimes\mathrm{Id}_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\epsilon_A\otimes\epsilon_B\otimes\mathrm{Id}_B)\circ(\Delta_A\otimes\Delta_B)\\ &= (r_A\otimes l_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\epsilon_A\otimes\epsilon_B\otimes\mathrm{Id}_B)\circ(\Delta_A\otimes\Delta_B) = \mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B = \mathrm{Id}_{A\otimes B}\end{aligned}$$

这里我们只用到了 c 的自然性，以及 $c_{\Bbbk,\Bbbk}=\mathrm{Id}_{\Bbbk,\Bbbk}$ 这一事实。因此，$(A\otimes B,\pi_A,\pi_B)$ 是 A 和 B 在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的二元积，我们将该对象记为 $A\times B$。

我们已经证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 是有限完备的，现在来证明其余完备性。为此，我们通过构造余等化子和任意余积，更一般地证明 $\mathrm{Hopf}(\mathrm{Vec}_G)$ 的余完备性，并证明在余交换情形下余极限相同。与极限一样，余极限的形式也与 $\mathrm{Hopf}_{\Bbbk}$ 中向量空间的余极限相同，例如 [3] 中便有相关介绍。

注记 4.2。余交换的情形中余极限相同这一事实不应令我们感到惊讶。事实上，我们回顾一下，给定一个对称幺半范畴 $\mathcal{M}$，遗忘函子 $U_a:\mathrm{Mon}(\mathcal{M})\to\mathcal{M}$ 创造极限，而遗忘函子 $U_c:\mathrm{Comon}(\mathcal{M})\to\mathcal{M}$ 创造余极限；于是 $\mathrm{Mon}(\mathcal{M})$ 在 $\mathcal{M}$ 中关于极限封闭，正如 $\mathrm{Comon}(\mathcal{M})$ 在 $\mathcal{M}$ 中关于余极限封闭一样（例如参见 [31,事实 10],[32, 事实 4]）。因此，$\mathrm{Mon}_c(\mathcal{M})$ 在 $\mathrm{Mon}(\mathcal{M})$ 中关于极限封闭，而 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 在 $\mathrm{Comon}(\mathcal{M})$ 中关于余极限封闭。此外，$\mathrm{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})=\mathrm{Comon}(\mathrm{Comon}(\mathrm{Mon}(\mathcal{M})))$，所以 $\mathrm{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathcal{M})$ 在 $\mathrm{Bimon}(\mathcal{M})$ 中关于余极限封闭。我们将看到，$\mathrm{Hopf}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的余极限与 $\mathrm{Bimon}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的余极限相同，于是显然 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 在 $\mathrm{Hopf}(\mathrm{Vec}_G)$ 中关于余极限封闭。还要注意，$\mathrm{Bimon}(\mathrm{Vec}_G)=\mathrm{Comon}(\mathrm{Mon}(\mathrm{Vec}_G))$ 在 $\mathrm{Mon}(\mathrm{Vec}_G)$ 中关于余极限封闭，因此 $\mathrm{Hopf}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的余极限将由 $\mathrm{Mon}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的余极限导出。不过，我们将在下文展示所有细节。

注记 4.3. 回顾一下，给定一个颜色霍普夫代数 H 和一个分次双理想 I，使得 $S(I)\subseteq I$，则 H/I 是一个颜色霍普夫代数。另请注意，如果 H 是（余）交换的，那么 H/I 也是（余）交换的。事实上，例如，若 H 是余交换的，由 c的自然性可知，我们有

$$c_{H/I,H/I}\circ\Delta_{H/I}\circ\pi = c_{H/I,H/I}\circ(\pi\otimes\pi)\circ\Delta_H = (\pi\otimes\pi)\circ c_{H,H}\circ\Delta_H = (\pi\otimes\pi)\circ\Delta_H = \Delta_{H/I}\circ\pi$$

然后，由于 $\pi\colon H\to H/I$ 是满射，我们得到 $c_{H/I,\ H/I}\circ\Delta_{H/I}=\Delta_{H/I}$。

4.3. 余等化子。 设 $f,g\colon A\to B$ in $\mathrm{Hopf}(\mathrm{Vec}_G)$，我们可以考虑 $I=B((f-g)(A))B$，即由 B 中的分次子空间 $(f-g)(A):=\{f(a)-g(a)\mid a\in A\}$ 生成的 B 的双边理想。根据注 3.2，该理想是分次的，因为 $I=m_B(m_B\otimes\mathrm{Id}_B)(B\otimes(f-g)(A)\otimes B)$。因此，为了证明 B/I 是颜色霍普夫代数，我们只需根据注 4.3 验证 I 是一个双边余理想，且 $S(I)\subseteq I$。给定 $a\in A$，由于 f 和 g 是余代数态射，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta(f(a)-g(a)) &= \Delta(f(a))-\Delta(g(a)) = f(a_1)\otimes f(a_2)-g(a_1)\otimes g(a_2)\\ &= f(a_1)\otimes f(a_2)-g(a_1)\otimes f(a_2)+g(a_1)\otimes f(a_2)-g(a_1)\otimes g(a_2)\\ &= (f(a_1)-g(a_1))\otimes f(a_2)+g(a_1)\otimes(f(a_2)-g(a_2)).\end{aligned}$$

因此我们有 $\Delta((f-g)(A)) \subseteq (f-g)(A) \otimes B + B \otimes (f-g)(A)$，由此，利用$\Delta$ 是代数态射且 B 是颜色双代数这一事实，我们得到的是

$$\begin{aligned}\Delta_B(B((f-g)(A))) &= \Delta_B(m_B(B \otimes (f-g)(A))) \\ &= (m_B \otimes m_B)(\mathrm{Id}_B \otimes c_{B,B} \otimes \mathrm{Id}_B)(\Delta_B \otimes \Delta_B)(B \otimes (f-g)(A)) \\ &\subseteq (m_B \otimes m_B)(\mathrm{Id}_B \otimes c_{B,B} \otimes \mathrm{Id}_B)(B \otimes B \otimes (f-g)(A) \otimes B) \\ &+ (m_B \otimes m_B)(\mathrm{Id}_B \otimes c_{B,B} \otimes \mathrm{Id}_B)(B \otimes B \otimes B \otimes (f-g)(A)) \\ &\subseteq B((f-g)(A)) \otimes B + B \otimes B((f-g)(A))\end{aligned}$$

然后 $\Delta(I) \subseteq I \otimes B + B \otimes I$。此外，由于 ϵ 是代数态射，因此 $\epsilon(I) = 0$，且 I 是双边余理想。此外，我们有

$$\begin{aligned}S_B(I) &= S_B m_B(m_B \otimes \mathrm{Id}_B)(B \otimes (f-g)(A) \otimes B) \\ &= m_B c_{B,B}(S_B \otimes S_B)(m_B \otimes \mathrm{Id}_B)(B \otimes (f-g)(A) \otimes B) \\ &= m_B c_{B,B}(m_B \otimes \mathrm{Id}_B)(c_{B,B} \otimes \mathrm{Id}_B)(S_B \otimes S_B \otimes S_B)(B \otimes (f-g)(A) \otimes B) \\ &\subseteq m_B c_{B,B}(m_B \otimes \mathrm{Id}_B)(c_{B,B} \otimes \mathrm{Id}_B)(B \otimes (f-g)(S_A(A)) \otimes B) \\ &\subseteq m_B c_{B,B}(m_B \otimes \mathrm{Id}_B)(c_{B,B} \otimes \mathrm{Id}_B)(B \otimes (f-g)(A) \otimes B) \subseteq I.\end{aligned}$$

因此， B/I 是颜色霍普夫代数，且 $\pi\colon B \to B/I$ 属于 $\mathbf{Hopf}(\mathbf{Vec}_G)$，显然满足 $\pi \circ f = \pi \circ g$。现在，给定 $h\colon B \to H$ 属于 $\mathbf{Hopf}(\mathbf{Vec}_G)$，且满足 $h \circ f = h \circ g$，我们有 $I \subseteq \ker(h)$，于是存在唯一的余代数态射 $h'\colon B/I \to H$，使得 $h' \circ \pi = h$；它也是代数态射并且保持分次，因为 π 和 h 都具有这一性质。因此，它是 $\mathbf{Hopf}(\mathbf{Vec}_G)$ 中满足 $h' \circ \pi = h$ 的唯一态射。因此，$(B/I, \pi)$ 是 $\mathbf{Hopf}(\mathbf{Vec}_G)$ 中态射对 (f,g) 的余等化子，我们将其记作 $(\mathbf{Coeq}(f,g)\ \pi)$。请注意，显然这也是 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 中 f,g 的余等化子，因为如果 B 是余交换的，那么 B/I 也是余交换的，正如注 4.3 所述。

备注 4.4。 我们知道，给定 $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ in $\mathbf{Vec}_G$ and $T^p(V) = V \otimes \cdots \otimes V$ p-次且满足$p \in \mathbb{N}$（其中 $T^0(V) = \Bbbk$），有 $T^p(V)$ 按 $T^p(V)_g = \bigoplus_{h_1 \cdots h_p = g} V_{h_1} \otimes \cdots \otimes V_{h_p}$ 分次，对每个 $g \in G$ 都成立，因此我们有

$$T(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} T^p(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \bigoplus_{g\in G} T^p(V)_g = \bigoplus_{g\in G} \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} T^p(V)_g = \bigoplus_{g\in G} T(V)_g,$$

所以 $T(V)$ 是分次向量空间。但 $T(V)$ 也是一个代数，并且它是分次的，因为 $1_\Bbbk \in \Bbbk_{1_G} = T^0(V)_{1_G} \subseteq T(V)_{1_G}$，且给定 $x \in T(V)_g$ 和 $y \in T(V)_h$，其中 $g,h \in G$，我们有 $xy \in T(V)_{gh}$。事实上，给定一个元素 $x = x_{h_1} \otimes \cdots \otimes x_{h_p} \in T^p(V)_g$，其中 $h_1 \cdots h_p = g$，以及一个元素$y = y_{k_1} \otimes \cdots \otimes y_{k_s} \in T^s(V)_h$，其中 $k_1 \cdots k_s = h$，我们有 $xy = x_{h_1} \otimes \cdots \otimes x_{h_p} \otimes y_{k_1} \otimes \cdots \otimes y_{k_s} \in T^{p+s}(V)_{gh}$，因为 $h_1 \cdots h_p \cdot k_1 \cdots k_s = gh$。还要注意，典范嵌入 $i\colon V \to T(V)$ 保持分次，因为 $i(V_g) = V_g = T^1(V)_g \subseteq T(V)_g$。

4.4. 余积。 设 $\{H_l\}_{l\in I}$ 是一族颜色霍普夫代数，我们可以取 $T(\bigoplus_{l\in I} H_l)/L$，其中 L 是由该集合的线性张成生成的 $T(\bigoplus_{l\in I} H_l)$ 中的双边理想

$$J := \{i(j_l(x_l y_l)) - i(j_l(x_l))i(j_l(y_l)), 1_{T(\bigoplus H_l)} - i(j_l(1_{H_l})) \mid x_l, y_l \in H_l,\ l \in I\},$$

其中 $j_t\colon H_t \to \bigoplus_{l\in I} H_l$ 将 v 映射到以 v 为 t分量的元素；这是唯一非平凡的分量，而 $i\colon \bigoplus_{l\in I} H_l \to T(\bigoplus_{l\in I} H_l)$是典范嵌入。现在，由于对每个$l \in I$都有$H_l = \bigoplus_{g\in G} H_{l,g}$，我们得到 $\bigoplus_{l\in I} H_l = \bigoplus_{l\in I} \bigoplus_{g\in G} H_{l,g} = \bigoplus_{g\in G} \bigoplus_{l\in I} H_{l,g}$，于是 $\bigoplus_{l\in I} H_l$ 属于 $\mathbf{Vec}_G$，因此根据注记 4.4，$T(\bigoplus_{l\in I} H_l)$是一个分次代数。但显然， L 也是分次的，因为它由齐次元素生成；事实上，对每个$l \in I$， i, j_l, m_l和$m_{T(\bigoplus H_l)}$都属于 $\mathbf{Vec}_G$。因此， $T(\bigoplus_{l\in I} H_l)/L$ 也是一个分次代数。对所有 $l \in I$，定义 $q_l := \nu \circ i \circ j_l$，其中$\nu\colon T(\bigoplus_{l\in I} H_l) \to T(\bigoplus_{l\in I} H_l)/L$ 是典范投影。根据 J 的关系，并且由于 ν 是代数映射， q_l对每个 $l \in I$ 都是代数态射；由于这三个映射都保持分次，它也保持分次。现在，给定一个分次代数 C 以及对 $l \in I$的分次代数态射$g_l\colon H_l \to C$，根据向量空间余积的泛性质，存在唯一的线性映射 $k\colon \bigoplus_{i\in I} H_i \to C$，使得对每个 $l \in I$ 都有 $k \circ j_l = g_l$；由于 j_l 和 g_l 保持分次， k 也保持分次（这是 $\mathbf{Vec}_G$中余积的泛性质）。根据张量代数的

泛性质，存在唯一的代数映射 s： $T(\bigoplus_{l\in I} H_l) \to C$，使得$s\circ i = k$；由于 i 和 k 保持分次， s 也保持分次。最后，我们有

$$s(i(j_l(x_l y_l))) = k(j_l(x_l y_l)) = g_l(x_l y_l) = g_l(x_l)g_l(y_l) = s(i(j_l(x_l)))s(i(j_l(y_l)))$$

且 $s(i(j_l(1_{H_l}))) = k(j_l(1_{H_l})) = g_l(1_{H_l}) = 1_C = s(1_{T(\oplus H_l)})$，因为 g_l和 s是代数映射，对每个 $l \in I$均成立。因此 $L \subseteq \ker(s)$，于是存在唯一的代数映射 p： $T(\bigoplus_{l\in I} H_l)/L \to C$，使得 $p\circ\nu = s$；由于 s 和 ν保持分次，它也保持分次。我们有 $p\circ q_l = g_l$，且态射 p 是 $\mathbf{Mon}(\mathbf{Vec}_G)$ 中唯一满足对每个 $l \in I$都有 $p\circ q_l = g_l$ 的态射。事实上，若存在态射 $\tilde{p}$: $T(\bigoplus_{l\in I} H_l)/L \to C$，使得对每个 $l \in I$都有 $\tilde{p}\circ q_l = g_l$，那么由 $(\tilde{p}\circ\nu\circ i)\circ j_l = g_l$可得 $(\tilde{p}\circ\nu)\circ i = k$，因此 $\tilde{p}\circ\nu = s$，进而 $p = \tilde{p}$。我们已经证明，$(T(\bigoplus_{l\in I} H_l)/L, (q_l)_{l\in I})$ 是 $\mathbf{Mon}(\mathbf{Vec}_G)$ 中族 $\{H_l\}_{l\in I}$ 的余积，并将 $T(\bigoplus_{l\in I} H_l)/L$ 记作 $\coprod_{l\in I} H_l$。

现在，由于对于每个 $l \in I$， H_l 都是一个颜色双代数，因此我们可以证明 $\coprod_{l\in I} H_l$ 是一个颜色双代数，并且它是 $\mathbf{Bimon}(\mathbf{Vec}_G)$ 中族 $\{H_l\}_{l\in I}$ 的余积。余乘法和余单位由满足以下图表可交换条件的唯一分次代数映射给出。

(4)
$$\begin{array}{ccc} H_l & \xrightarrow{\quad q_l \quad} & \coprod_{i\in I} H_i \\ {\scriptstyle \Delta_l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ H_l \otimes H_l & \xrightarrow[q_l\otimes q_l]{} & \coprod_{i\in I} H_i \otimes \coprod_{i\in I} H_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_l & \xrightarrow{\quad q_l \quad} & \coprod_{i\in I} H_i \\ & {\scriptstyle \epsilon_l}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} \\ & & \Bbbk \end{array}$$

根据 $\mathbf{Mon}(\mathbf{Vec}_G)$ 中余积的泛性质。因此，我们已经有了兼容性；如果证明 Δ 是余结合且余单位的，那么我们就能得到 Δ 和 ϵ 使 $\coprod_{i\in I} H_i$ 成为颜色双代数，并且由两个交换图表 (4) 可知，对于每个 $l \in I$， q_l 都是余代数映射，进而是颜色双代数映射。为了得到 $(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta = (\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta$，只需利用泛性质证明 $(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta\circ q_l = (\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta\circ q_l$，因为 $(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta$ 和 $(\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta$ 都是分次代数映射。同理，如果我们证明 $l\circ(\epsilon\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta\circ q_l = \mathrm{Id}\circ q_l$，就能得到 $l\circ(\epsilon\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta = \mathrm{Id}$，其中 l: $\Bbbk\otimes\coprod_{i\in I} H_i \to \coprod_{i\in I} H_i$ 是典范同构。因此，考虑到 (4) 中的两个图表以及 H_l 是 $l \in I$ 的余代数这一事实，我们得到 that

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta\circ q_l =& (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ(q_l\otimes q_l)\circ\Delta_l = (q_l\otimes q_l\otimes q_l)\circ(\mathrm{Id}\otimes\Delta_l)\circ\Delta_l \\ =& (q_l\otimes q_l\otimes q_l)\circ(\Delta_l\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta_l = (\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ(q_l\otimes q_l)\circ\Delta_l \\ =& (\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta\circ q_l\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}l\circ(\epsilon\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta\circ q_l =& l\circ(\epsilon\otimes\mathrm{Id})\circ(q_l\otimes q_l)\circ\Delta_l = l\circ(\epsilon_l\otimes q_l)\circ\Delta_l \\ =& l\circ(\mathrm{Id}\otimes q_l)\circ(\epsilon_l\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta_l = q_l\circ l_{H_l}\circ(\epsilon_l\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta_l = \mathrm{Id}\circ q_l.\end{aligned}$$

类似地， $r\circ(\mathrm{Id}\otimes\epsilon)\circ\Delta = \mathrm{Id}$，其中 r： $\coprod_{i\in I} H_i\otimes\Bbbk \to \coprod_{i\in I} H_i$ 是典范同构。因此，对于每个 $l \in I$，$\coprod_{l\in I} H_l$ 是一个颜色双代数，而 q_l 是一个颜色双代数映射。现在，给定一个颜色双代数 C 以及颜色双代数映射 g_l： $H_l \to C$，根据 $\mathbf{Mon}(\mathbf{Vec}_G)$ 中余积的泛性质，存在唯一的分次代数映射p： $\coprod_{i\in I} H_i \to C$，使得对于每个 $l \in I$都有 $p\circ q_l = g_l$。我们证明 p 也是一个余代数映射，从而得到（$\coprod_{l\in I} H_l$， $(q_l)_{l\in I}$）是 $\mathbf{Bimon}(\mathbf{Vec}_G)$ 中族 $\{H_l\}_{l\in I}$ 的余积。按照上面的论证，只需证明 $(p\otimes p)\circ\Delta\circ q_l = \Delta_C\circ p\circ q_l$ 以及 $\epsilon_C\circ p\circ q_l = \epsilon\circ q_l$。因此，由于对于每个 $l \in I$， g_l 都是一个余代数映射，我们有

$$(p\otimes p)\circ\Delta\circ q_l = (p\otimes p)\circ(q_l\otimes q_l)\circ\Delta_l = (g_l\otimes g_l)\circ\Delta_l = \Delta_C\circ g_l = \Delta_C\circ p\circ q_l$$

和 $\epsilon_C\circ p\circ q_l = \epsilon_C\circ g_l = \epsilon_l = \epsilon\circ q_l$。

现在令 $H := \coprod_{i\in I} H_i$。每个 H_l 都有一个对极 S_l： $H_l \to H_l$，它是一个颜色双代数映射，从 H_l 映射到 $H^{\mathrm{op},\ _l\ \mathrm{cop}}$ 其中 $x\cdot_{\mathrm{op}} y := mc_{H_l,\ H_l}(x\otimes y) = \phi(|x|,|y|)yx$ 且 $\Delta^{\mathrm{cop}}(x) := c_{H_l,\ H_l}\Delta(x) = \phi(|x_1|,|x_2|)x_2\otimes x_1$，对每个 $x, y \in H_l$均成立。由于 q_l是一个颜色双代数映射，从 $H^{\mathrm{op},\ _l\ \mathrm{cop}}$映射到 $H^{\mathrm{op},\ \mathrm{cop}}$，

余积在 Bimon(Vec$_G$) 中的泛性质给出唯一的颜色双代数映射$S\colon H \to H^{\mathrm{op},\ \mathrm{cop}}$，使得对所有 $l \in I$，下图均交换。

$$\begin{array}{ccc} H_l & \xrightarrow{\quad q_l \quad} & H \\ {\scriptstyle S_l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\ H_l^{\mathrm{op,cop}} & \xrightarrow[\quad q_l \quad]{} & H^{\mathrm{op,cop}} \end{array}$$

如果我们证明 S 是 H 的对极，那么对每个 $l \in I$， H 都是颜色霍普夫代数，且 q_l 是颜色霍普夫代数态射。此外，给定 C 是一个颜色霍普夫代数，且对每个 $l \in I$， $g_l\colon H_l \to C$ 是颜色霍普夫代数映射，则存在唯一的颜色双代数映射 $t\colon H \to C$ （事后可知，它是唯一的颜色霍普夫代数映射），使得对每个 $l \in I$， $t \circ q_l = g_l$。因此，在这种情况下，$(H, (q_l)_{l\in I})$ 是 Hopf(Vec$_G$) 中颜色霍普夫代数族 $\{H_l\}_{l\in I}$ 的余积。由此，为了完成证明，我们证明 $m \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta = m \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = u \circ \epsilon$。由于 $S\colon H \to H^{\mathrm{op,cop}}$ 是颜色双代数映射，我们只需在 H 作为分次代数的生成元上证明这些结论。事实上，设 h、k 是 H 中满足这些关系的生成元，则可得

$$\begin{aligned} m(\mathrm{Id}_H \otimes S)\Delta(hk) &= m(\mathrm{Id}_H \otimes S)(\phi(|h_2|,|k_1|)h_1k_1 \otimes h_2k_2) = \phi(|h_2|,|k_1|)h_1k_1S(h_2k_2) \\ &= \phi(|h_2|,|k_1|)\phi(|h_2|,|k_2|)h_1k_1S(k_2)S(h_2) = \phi(|h_2|,|k|)h_1\epsilon(k)S(h_2) \\ &= h_1S(h_2)\epsilon(k) = \epsilon(h)\epsilon(k)1_H = \epsilon(hk)1_H = u\epsilon(hk) \end{aligned}$$

类似地， $m(S \otimes \mathrm{Id})\Delta(hk) = u\epsilon(hk)$，因此这些关系对 hk 成立，进而对 H中的所有元素都成立。因此，考虑到 $H := T(\bigoplus_{l\in I} H_l)/L$，我们只需证明这些关系对满足 $x \in \bigoplus_{l\in I} H_l$ 的元素 $\bar{x} = i(x) + L \in H$ 成立，而张量代数 $T(\bigoplus_{l\in I} H_l)$ 是以 $\bigoplus_{l\in I} H_l$为自由生成元的自由代数。此外，由于元素 $x \in \bigoplus_{l\in I} H_l$ 满足这样的性质：除有限多个 $l \in I$外，对每个 $l \in I$都有 $x_l = 0$，根据线性性，只需证明这些关系对每个满足 $l \in I$的 $x_l \in H_l$都成立。利用前面三个图表的交换性、 H_l 是一个颜色霍普夫代数这一事实，以及 q_l 是关于 $l \in I$的代数映射，我们得到

$$\begin{aligned} m \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta \circ q_l &= m \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ (q_l \otimes q_l) \circ \Delta_l = m \circ (q_l \otimes q_l) \circ (\mathrm{Id} \otimes S_l) \circ \Delta_l \\ &= q_l \circ m_l \circ (\mathrm{Id} \otimes S_l) \circ \Delta_l = q_l \circ u_l \circ \epsilon_l = u \circ \epsilon_l = u \circ \epsilon \circ q_l, \end{aligned}$$

因此 $m\circ(\mathrm{Id}\otimes S)\circ\Delta = u\circ\epsilon$。同理，可以证明 $m\circ(S\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta = u\circ\epsilon$。由此， S 是 H的对极，进而 $(H, (q_l)_{l\in I})$ 是 Hopf(Vec$_G$) 中族 $\{H_l\}_{l\in I}$ 的余积。显然，如果我们对每个 $l \in I$ 都将 H_l 视为余交换色 Hopf 代数，那么 $(H, (q_l)_{l\in I})$ 将是 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中的余积，因为 H 是余交换的。事实上，由于 Vec$_G$ 是对称的，c 是 Mon(Vec$_G$) 中的编织；特别地，$c_{H,\ H}$ 是分次代数态射，因此 $c_{H,\ H} \circ \Delta$也同样如此。于是，由

$$c_{H,H} \circ \Delta \circ q_l = c_{H,H} \circ (q_l \otimes q_l) \circ \Delta_l = (q_l \otimes q_l) \circ c_{H_l,H_l} \circ \Delta_l = (q_l \otimes q_l) \circ \Delta_l = \Delta \circ q_l$$

根据余积的泛性质，我们得到 $c_{H,\ H} \circ \Delta = \Delta$。

因此，我们得出 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$)（以及 Hopf(Vec$_G$)）是余完备的。请注意，尽管半阿贝尔范畴的定义只要求有限余完备性，但我们将利用该范畴具有所有小余极限这一事实，通过一种等价刻画得出它是半阿贝尔范畴。

注记 4.5。 注意，在 [33, 命题 4.1.1]中已证明，对于任意对称幺半范畴 $\mathcal{M}$，Hopf($\mathcal{M}$)、Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$) 和 Hopf$_{\mathrm{c}}$($\mathcal{M}$) 始终是可及范畴。因此，Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 是可及的；又由于我们已证明它是余完备的，便可得出它是完备且局部可呈示的。事实上，正如 [1, 推论 2.47], 所述，一个范畴是局部可呈示的，当且仅当它既可及又完备；这也当且仅当它既可及又余完备。请注意，虽然对称幺半范畴中的霍普夫幺半群范畴总是可及的，但它不一定是局部可呈示的。正如 [31, 命题 49,52,53]所述，当遗忘函子 $U_a\colon \mathrm{Mon}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ 是极端余单子函子，或者遗忘函子 $U_c\colon \mathrm{Comon}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ 是极端

余单子函子时，情况便是如此，因为在这些情形下，范畴 Hopf($\mathcal{M}$) 分别在 Bimon($\mathcal{M}$) 中对余极限和极限封闭。

4.5. **原型模性**。回顾一下，如果 $\mathcal{M}$ 是一个具有二元积的范畴，即对于 $\mathcal{M}$ 中的每一对对象 A 和 B，都存在二元积 $A \times B$，并且具有终对象 I，那么幺半范畴 ($\mathcal{M}, \times$, I) 称为笛卡尔的，而 $\mathcal{M}$ 中的内群范畴记为 Grp($\mathcal{M}$)，其对象是在 $\mathcal{M}$ 中的幺半群 (G, m, u)，并配备一个态射 i: $G \to G$ in $\mathcal{M}$（称为求逆），使得 $m \circ \langle \mathrm{Id}_G, i\rangle = u \circ t_G = m \circ \langle i, \mathrm{Id}_G\rangle$，其中 t_G 是从 G 到 I 的唯一态射，而 $\langle \mathrm{Id}_G, i\rangle, \langle i, \mathrm{Id}_G\rangle$ 是对角态射。

在 [14, 命题 3.24] 中已经证明，给定一个具有有限极限的笛卡尔幺半范畴 $\mathcal{M}$，则范畴 Grp($\mathcal{M}$) 是原型模的。注意，前面给出的同一个终对象、等化子和二元积表明，Comon$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 是有限完备的。该范畴也是笛卡尔的，因为其单位对象 $\Bbbk$ 是终对象，而张量积就是二元积，因此 Grp(Comon$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$)) 是原型模的。此外，正如例如 [33, 注 3.3], 中所述，对于每个对称幺半范畴 $\mathcal{M}$，我们都有 Hopf$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$)=Grp(Comon$_{\mathrm{coc}}$($\mathcal{M}$))，进而 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) = Grp(Comon$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$))。这确实很容易证明

$$\mathrm{Mon}(\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)) = \mathrm{Mon}(\mathrm{Comon}(\mathrm{Comon}(\mathrm{Vec}_G))) = \mathrm{Comon}(\mathrm{Comon}(\mathrm{Mon}(\mathrm{Vec}_G))) = \mathrm{Bimon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$$

因此，Comon$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中的幺半群由余交换着色双代数给出。因此，Grp(Comon$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$)) 中的一个对象是一个余交换着色双代数 $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$，并配备态射 $i\colon B \to B$ in Comon$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$)，使得 $m \circ \langle \mathrm{Id}_B, i\rangle = u \circ t_B = m \circ \langle i, \mathrm{Id}_B\rangle$。但我们之前已经看到，$t_B = \epsilon$ and $\langle \mathrm{Id}_B, i\rangle = (\mathrm{Id}_B \otimes i) \circ \Delta$, $\langle i, \mathrm{Id}_B\rangle = (i \otimes \mathrm{Id}_B) \circ \Delta$，因此我们得到

$$m \circ (\mathrm{Id}_B \otimes i) \circ \Delta = u \circ \epsilon = m \circ (i \otimes \mathrm{Id}_B) \circ \Delta,$$

因此，i 是 B 的对极。由此可知，Grp(Comon$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$)) 恰好是范畴 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$)。因此，Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 是原模的。回顾一下，这里 Vec$_G$ 是对称的这一事实保证了 Comon$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 是幺半的。

5. Regularity of $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$

最微妙之处在于正则性，这与 Hopf$_{\Bbbk,\mathrm{coc}}$ 的情形相同。按照 [22]，正则性将通过以下刻画来证明:

引理 5.1。设 $\mathcal{C}$ 是一个有限完备范畴。那么，$\mathcal{C}$ 是正则范畴，当且仅当

(1) $\mathcal{C}$ 中的任意态射都可分解为一个正则满态射后接一个单态射;

(2) 给定 $\mathcal{C}$ 中任意一个正则满态射 $f\colon A \to B$，以及 $\mathcal{C}$ 中任意一个对象 E，诱导态射Id$_E \times f\colon E \times A \to E \times B$ 是一个正则满态射;

(3) 正则满态射在沿分裂单态射作拉回时保持不变。

由于 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中 A 与 B 之间的零态射是 $u_B \circ \epsilon_A$，因此 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中 $f\colon A \to B$ 的范畴核，即态射对 $(f, u_B \circ \epsilon_A)$ 的等化子，由 (Hker(f) $j\colon$ Hker(f) $\to A$) 给出，其中

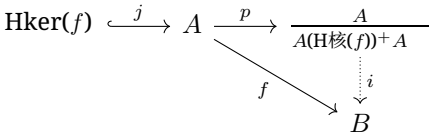
$$\mathrm{Hker}(f) = \{x \in A \mid (\mathrm{Id}_A \otimes f)\Delta(x) = (\mathrm{Id}_A \otimes u_B\epsilon_A)\Delta(x)\} = \{x \in A \mid x_1 \otimes f(x_2) = x \otimes 1_B\}$$

且 j 是典范嵌入，而 f 在 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中的范畴余核，即偶对 $(f, u_B \circ \epsilon_A)$ 的余等化子，由 $(B/I, \pi\colon B \to B/I)$ 给出，其中

$$I = Bf(A)^+B$$

且 π 是典范投影，并且对于任意余代数 C，我们记 $C^+ = \{x \in C \mid \epsilon(x) = 0\}$。首先注意，对于任意余代数态射 $f\colon C \to D$, $f(C^+) = f(C)^+$。事实上，$y \in f(C)^+$ 当且仅当对于某个 $x \in C$有 $y = f(x)$，且 $0 = \epsilon_D(y) = \epsilon_D(f(x)) = \epsilon_C(x)$ 当且仅当 $y \in f(C^+)$。现在 I

是由集合 $\{f(a)-u_B\epsilon_A(a) \mid a\in A\}=\{f(a)-\epsilon_A(a)1_B \mid a\in A\}$ 生成的 B 的双边理想。但现在我们有 $(f-u_B\circ\epsilon_A)(A)=f(A^+)=f(A)^+$，因为若 $x=f(a)-\epsilon_A(a)1_B$，则有 $x=f(a-\epsilon_A(a)1_A)$，其中 $\epsilon_A(a-\epsilon_A(a)1_A)=0$，因此 $(f-u_B\circ\epsilon_A)(A)\subseteq f(A^+)$，而另一个包含关系显然成立。现在，给定 $f\colon A\to B$，在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中，我们可以考虑其范畴核在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的范畴余核，该范畴余核作为映射由 $p\colon A\to A/A(\mathrm{Hker}(f))^+A$ 给出。由于 j 是 f 的核，我们有 $f\circ j=u_B\circ\epsilon_{\mathrm{Hker}(f)}=f\circ u_A\circ\epsilon_{\mathrm{Hker}(f)}$，因此根据余核的泛性质，存在唯一的态射 i，属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，使得 $f=i\circ p$。



若我们证明 i 是一个单态射，就能得到 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中 f 的正则满态射-单态射分解。对于 $\mathrm{Hopf}_{\Bbbk,\ \mathrm{coc}}$，Newman 定理 [30, 定理 4.1] 告诉我们，对于余交换霍普夫代数 H，H 的 Hopf 子代数集合与 H 中既是左理想又是双边余理想的集合之间存在一一对应关系：给定 H 的一个 Hopf 子代数 K 以及 H 的一个左理想、双边余理想 I，这两个映射是

$$K\mapsto HK^+ \text{ and } I\mapsto H^{\mathrm{co}\frac{H}{I}}:=\{x\in H \mid (\mathrm{Id}_H\otimes\pi)\Delta(x)=x\otimes\pi(1_H)\}$$

这也等于 $\{x\in H \mid (\mathrm{Id}_H\otimes\pi)\Delta(x)=(\mathrm{Id}_H\otimes\pi u_H\epsilon_H)\Delta(x)\}$，其中 $\pi\colon H\to H/I$ 是典范投影；并且在 [22] 中利用这一结果推导出向量空间 $\ker(f)$ 恰好是 $A(\mathrm{Hker}(f))^+A$，进而得出前述分解中的态射 i 是单射，因此是单态射。我们希望在分次情形下得到同样的结论。

注 5.2. 回顾一下，给定一个分次代数 $A=\bigoplus_{g\in G}A_g$，即 $\mathrm{Mon}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的一个对象，我们可以考虑范畴 ${}_A\mathrm{Vec}_G$，其对象是分次向量空间 $V=\bigoplus_{g\in G}V_g$，它们同时也是左 A-模，并满足左 A-作用 $\mu\colon A\otimes V\to V$ 属于 Vec_G，且对每个 g、$h\in G$，都有 $\mu(A_g\otimes V_h)\subseteq V_{gh}$；其态射是保持分次的线性映射，同时也是左 A-线性的。若 A 属于 $\mathrm{Bimon}(\mathrm{Vec}_G)$，即它是一个颜色双代数，则范畴 ${}_A\mathrm{Vec}_G$ 是幺半范畴，其张量积、单位对象和约束与 Vec_G 中的相同，进而也与 $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$ 中的相同。这里，单位对象 $\Bbbk$ 带有左 A-作用，使得对 $a\in A$ 和 $k\in\Bbbk$，有 $a\cdot k=\epsilon(a)k$；给定 V 和 W 属于 ${}_A\mathrm{Vec}_G$，$V\otimes W$ 上的左 A-作用定义为 $a\cdot(v\otimes w)=\phi(|a_2|,|v|)a_1\cdot v\otimes a_2\cdot w$，其中 $a\in A$、$v\in V$ 和 $w\in W$。所谓商颜色左 A-模余代数，是指 $\mathrm{Comon}({}_A\mathrm{Vec}_G)$ 中的商对象，也就是作为左 A-模的商分次向量空间，其左 A-作用属于 Vec_G，并且还是余代数，其中 Δ 和 ϵ 属于 ${}_A\mathrm{Vec}_G$；特别地，作为余代数，它们是带有分次双边余理想的分次余代数的商。

给定 $A\in\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，我们在 Vec_G 中定义态射

$$\xi_A: A\otimes A\to A,\ a\otimes x\mapsto\phi(|a_2|,|x|)a_1xS(a_2),$$

即 $\xi_A=m_A\circ(m_A\otimes S_A)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes c_{A,\ A})\circ(\Delta_A\otimes\mathrm{Id}_A)$，其中 c 是 Vec_G的编织。类比定理 5.6，若颜色 Hopf 子代数 $K\subseteq A$ 满足 $\xi_A(A\otimes K)\subseteq K$，则称其为**正规**。现在我们来证明映射 ξ_A的一些性质。

注 5.3. 若 $f\colon A\to B$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，则 $f(A)$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$。事实上，由注 3.2 可知，$f(A)$ 是 B的分次子空间；与通常情形一样，它包含 $1_B=f(1_A)$，并且在 m_B ($m_B\circ(f\otimes f)=f\circ m_A$) 下封闭，因为 f 是代数映射；它在 Δ_B 下封闭，因为 f 是余代数映射（$\Delta_B\circ f=(f\otimes f)\circ\Delta$），并且在 S_B 下封闭（因为 $S_B\circ f=f\circ S_A$）。因此，根据注 4.1，$f(A)$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$。类似地，$\ker(f)$ 根据注 3.2 是分次的；它是 A 的双边理想（因为 f 是代数映射），是 A 的双边余理想（因为 f 是余代数映射），并且在 S_A 下封闭，因此根据注 4.3，$A/\ker(f)$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$。

引理 5.4。设 A 和 B 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$。则以下性质成立：

1) ξ_A 是一个余代数态射。

2) 给定 p： $A \to B$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，则 $\xi_B \circ (p \otimes p) = p \circ \xi_A$。因此，当 p 为满射时，如果 D 是 A 的正规颜色 *Hopf* 子代数，那么 $p(D)$ 是 B的正规颜色 *Hopf* 子代数。

3) 当且仅当 A 是交换的时， $\xi_A = l_A \circ (\epsilon_A \otimes \mathrm{Id}_A)$。因此，如果 A 是交换的，则每个 $K \subseteq A$ 颜色 *Hopf* 子代数都是正规的。

证明。 为了证明 1)，我们必须证明 $\Delta_A \circ \xi_A = (\xi_A \otimes \xi_A) \circ \Delta_{A\otimes A}$，其中 $\Delta_{A\otimes A} = (\mathrm{Id}_A \otimes c_{A,\ A} \otimes \mathrm{Id}_A) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)$，并且 $\epsilon_A \circ \xi_A = \epsilon_{A\otimes A}$，其中 $\epsilon_{A\otimes A} = r_{\Bbbk} \circ (\epsilon_A \otimes \epsilon_A)$。给定 a、 $x \in A$，由于 Δ 是分次代数态射且 A 是余交换的，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta_A\xi_A(a \otimes x) &= \Delta_A(\phi(|a_2|,|x|)a_1 x S(a_2)) = \phi(|a_2|,|x|)(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id} \otimes c_{A,A} \otimes \mathrm{Id})(\Delta_A(a_1 x) \otimes \Delta_A(S(a_2))) \\
&= \phi(|a_{2_1}||a_{2_2}|,|x_1||x_2|)(m_A \otimes m_A)(\mathrm{Id} \otimes c_{A,A} \otimes \mathrm{Id})(\phi(|a_{1_2}|,|x_1|)a_{1_1}x_1 \otimes a_{1_2}x_2 \otimes S(a_{2_1}) \otimes S(a_{2_2})) \\
&= \phi(|a_{2_1}||a_{2_2}|,|x_1||x_2|)\phi(|a_{1_2}|,|x_1|)\phi(|a_{1_2}||x_2|,|a_{2_1}|)a_{1_1}x_1 S(a_{2_1}) \otimes a_{1_2}x_2 S(a_{2_2}) \\
&= \phi(|a_{2_1}|,|x_1|)\phi(|a_{2_2}|,|x_1|)\phi(|a_{2_2}|,|x_2|)\phi(|a_{1_2}|,|x_1|)\phi(|a_{1_2}|,|a_{2_1}|)a_{1_1}x_1 S(a_{2_1}) \otimes a_{1_2}x_2 S(a_{2_2}) \\
&\overset{(*)}{=} \phi(|a_2|,|x_1|)\phi(|a_{2_2}|,|x_2|)\phi(|a_{1_2}|,|x_1|)a_{1_1}x_1 S(a_{1_2}) \otimes a_{2_1}x_2 S(a_{2_2}) \\
&= (\xi_A \otimes \xi_A)(\phi(|a_2|,|x_1|)a_1 \otimes x_1 \otimes a_2 \otimes x_2) = (\xi_A \otimes \xi_A)\Delta_{A\otimes A}(a \otimes x),
\end{aligned}$$

其中 $(*)$ 成立，这是因为 A 是余交换的，而 Δ_A 是分次余代数，即 $(\Delta_A \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A = \Delta_{A\otimes A} \circ \Delta_A = (\mathrm{Id}_A \otimes c_{A,\ A} \otimes \mathrm{Id}_A) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A$，在 $a \in A$ 上即为 $a_{1_1} \otimes a_{1_2} \otimes a_{2_1} \otimes a_{2_2} = \phi(|a_{1_2}|,|a_{2_1}|)a_{1_1} \otimes a_{2_1} \otimes a_{1_2} \otimes a_{2_2}$。此外，我们有

$$\begin{aligned}
\epsilon_A(\xi_A(a \otimes x)) &= \epsilon_A(\phi(|a_2|,|x|)a_1 x S(a_2)) = \phi(|a_2|,|x|)\epsilon_A(a_1)\epsilon_A(x)\epsilon_A(S(a_2)) \\
&= \epsilon_A(a_1)\epsilon_A(a_2)\epsilon_A(x) = \epsilon_A(a)\epsilon_A(x) = \epsilon_{A\otimes A}(a \otimes x).
\end{aligned}$$

现在，由于 p 是代数态射且也是余代数态射，我们有

$$\begin{aligned}
\xi_B(p(a) \otimes p(x)) &= \phi(|p(a_2)|,|p(x)|)p(a_1)p(x)S(p(a_2)) = \phi(|a_2|,|x|)p(a_1 x)p(S(a_2)) \\
&= p(\phi(|a_2|,|x|)a_1 x S(a_2)) = p(\xi_A(a \otimes x)).
\end{aligned}$$

假设 p 是满射，且 D 是 A 的正规颜色 Hopf 子代数。由注 5.3，我们已知 $p(D)$ 是 B 的颜色 Hopf 子代数；我们还需证明它是正规的，即对于给定的 $b \in B$ 和 $d \in D$，有 $\xi_B(b \otimes p(d)) \in p(D)$。由 p 的满射性，存在 $a \in A$ 使得 $p(a) = b$。因此，由于 D 是正规的，我们得到

$$\xi_B(b \otimes p(d)) = \xi_B(p \otimes p)(a \otimes d) = p\xi_A(a \otimes d) \in p(D),$$

因此， $p(D)$ 在 B 中是正规子代数，于是 2) 也得证。最后，若我们假设 A 是交换的，显然可得 $\xi_A(a\otimes x) = \phi(|a_2|,|x|)a_1 x S(a_2) = a_1 S(a_2)x = \epsilon(a)x$，因此对于每个颜色 Hopf 子代数， $\xi_A(A\otimes K) \subseteq K$；而若 $\phi(|a_2|,|x|)a_1 x S(a_2) = \epsilon(a)x$，则有：

$$x\epsilon(a) = \phi(|x|,|a|)\epsilon(a)x = \phi(|x|,|a_1|)\phi(|x|,|a_2|)\phi(|a_2|,|x|)a_1 x S(a_2) = \phi(|x|,|a_1|)a_1 x S(a_2),$$

因此

$$x \otimes a = x \otimes \epsilon(a_1)a_2 = x\epsilon(a_1) \otimes a_2 = \phi(|x|,|a_{1_1}|)a_{1_1}xS(a_{1_2}) \otimes a_2 = \phi(|x|,|a_1|)a_1 x S(a_{2_1}) \otimes a_{2_2}$$

然后

$$xa = \phi(|x|,|a_1|)a_1 x S(a_{2_1})a_{2_2} = \phi(|x|,|a_1|)a_1 x\epsilon(a_2) = \phi(|x|,|a_1|)\phi(|x|,|a_2|)a_1\epsilon(a_2)x = \phi(|x|,|a|)ax,$$

因此 $xa = \phi(|x|,|a|)ax$，进而 A 是交换的，并且 3) 得证。 □

引理 5.5. 设 i: $B \to A$ 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的包含映射。若 i 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中某个态射的范畴核，那么 B 是 A的正规颜色 *Hopf* 子代数。

证明。 设对于某个态射 f： $A \to C$，有 $B = \mathrm{Hker}(f)$，其中该态射属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$。我们已经知道 B 是 A的颜色 Hopf 子代数，现在需要证明它是正规的，也就是说，给定

$x \in \mathrm{Hker}(f)$ 和 $a \in A$，则 $\xi_A(a \otimes x) \in \mathrm{Hker}(f)$，即 $(\mathrm{Id} \otimes f)\Delta_A\xi_A(a \otimes x) = \xi_A(a \otimes x) \otimes 1_C$。然而现在 $f(x) = \epsilon(x)1_C$，其中 $x \in \mathrm{Hker}(f)$，并且由于 f是分次代数态射，我们得到

$$f\xi_A(a \otimes x) = \phi(|a_2|,|x|)f(a_1)f(x)f(S(a_2)) = \phi(|a_2|,|x|)f(a_1)\epsilon(x)f(S(a_2)) = f(a_1)f(S(a_2))\epsilon(x)$$
$$= f(a_1S(a_2))\epsilon(x) = f(\epsilon(a)1_A)\epsilon(x) = \epsilon(a)\epsilon(x)1_C = u_C\epsilon_{A\otimes A}(a \otimes x)$$

然后，利用引理 5.4 的 1），我们得到

$$(\mathrm{Id} \otimes f)\Delta_A\xi_A(a \otimes x) = (\mathrm{Id} \otimes f)(\xi_A \otimes \xi_A)\Delta_{A\otimes A}(a \otimes x) = (\xi_A \otimes u_C)(\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \epsilon_{A\otimes A})\Delta_{A\otimes A}(a \otimes x)$$
$$= (\xi_A \otimes u_C)(a \otimes x \otimes 1_{\Bbbk}) = \xi_A(a \otimes x) \otimes 1_C,$$

因此 Hker(f) 是正规子群。 □

A. Masuoka 在 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$ 的情形下，证明了一个适用于余交换超 Hopf 代数范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2})$ 的 Newman 定理推广。结果如下：

定理 5.6。（参见 [27, 定理 3.10 (3)]）设 H 是一个余交换的超 *Hopf* 代数。那么，$K \subseteq H$ 的超 *Hopf* 子代数与 Q 的商超左 H-模余代数之间，在 $K \mapsto H/HK^+$, $Q \mapsto {}^{\mathrm{co}Q}H$（$= H^{\mathrm{co}Q}$）下存在一一对应。此对应限制为以下对象之间的一一对应：满足如下意义下正规条件的超 *Hopf* 子代数 K $(-1)^{|h_2||x|}h_1xS(h_2) \in K$ 对每个 $h \in H$ 和 $x \in K$ 均成立，以及商超 *Hopf* 代数。

我们将这些双射称为类比于 [22], 中 Newman 定理所给出的双射，即。

$$\phi_H : K \mapsto H/HK^+ \text{ and } \psi_H : Q \mapsto {}^{\mathrm{co}Q}H(= H^{\mathrm{co}Q}),$$

其中，$H^{\mathrm{co}Q}$ 的定义与前文相同。注意，定理 5.6 中的最后一个陈述是对 [22, 推论 2.3] 中 (1) 与 (2) 等价关系的推广。在这里，我们立即得到 [22, 推论 2.3] 关于余交换超 Hopf 代数的一个完整推广。

推论 5.7. 对于余交换超 *Hopf* 代数 A 的超 *Hopf* 子代数 $B \subseteq A$，以下条件等价：

(1) B 是一个正规超 *Hopf* 子代数；

(2) A/AB^+ 是一个商超 *Hopf* 代数；

(3) 包含关系 *usion* 态射 $B \to A$ 是$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2})$中某个态射的范畴核。

证明。由定理 5.6，我们已经知道 (1) 和 (2) 等价。

(2) $\Longrightarrow$ (3)。由于 A/AB^+ 是一个商超 Hopf 代数，典范投影 $\pi : A \to A/AB^+$ 是余交换超 Hopf 代数之间的态射，因此显然 $A^{\mathrm{co}\frac{A}{AB^+}}$ 恰好是 Hker(π)，因为 $x \otimes \pi(1_A) = x \otimes 1_{A/AB^+}$，其中 $x \in A$。但现在，利用定理 5.6，我们得到

$$\mathrm{Hker}(\pi) = A^{\mathrm{co}\frac{A}{AB^+}} = \psi_A(A/AB^+) = \psi_A(\phi_A(B)) = B.$$

因此，(B, j) 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2})$ 中 π 的核，其中 $j : B \to A$ 是典范嵌入。由引理 5.5，我们已经知道 (3) $\Longrightarrow$ (1)，于是证明完成。□

我们将为 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 推广定理 5.6 和推论 5.7，并将其用于研究 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 的正则性和半阿贝尔条件。

5.1. 从颜色霍普夫代数到超霍普夫代数。 为了应用定理 5.6，我们希望获得一个从范畴 Vec_G 到范畴 $\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$的带编织的强幺半函子。在本小节中，$G$ 和 L 表示任意阿贝尔群。

注记 5.8。正如 [19, 例 2.52], 中所述，给定 $f : G \to L$ 一个群同态，任意 G-分次向量空间都自然地成为 L- 分次向量空间（通过分次的推前），并且我们有一个自然的严格幺半函子 (F, ϕ^0, ϕ^2)：$\mathrm{Vec}_G \to \mathrm{Vec}_L$（也记作 f_*）。函子 F：$\mathrm{Vec}_G \to \mathrm{Vec}_L$定义如下：给定 $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ 和 f 属于 Vec_G，使得

$$F(\bigoplus\nolimits_{g\in G} V_g) = \bigoplus\nolimits_{f(g)\in L} V_{f(g)} \text{ where } V_{f(g)} = \bigoplus\nolimits_{g'\in f^{-1}f(g)} V_{g'} \text{ and } F(f) = f,$$

因此， $V_{f(g)}$是所有 $V_{g'}$的直和，其中 $f(g')$在 L中是相同的元素 $f(g$，然后$F(V)$仍然是 V向量空间，但带有一个关于 L的分次，其中 $V_l = \{0\}$当 $l \notin \mathrm{Im}(f)$。注意， $F(\Bbbk) = \Bbbk$与 $\Bbbk_{1_L} = \Bbbk$，且 $\Bbbk_l = 0$当 $l \neq 1_L$，因此可以定义 $\phi^0 := \mathrm{Id}_\Bbbk$，并且给定 V、 W属于 Vec_G，我们有

$$F(V \otimes W) = F(\bigoplus_{g\in G} (V \otimes W)_g) = \bigoplus_{f(g)\in L} (V \otimes W)_{f(g)} = \bigoplus_{f(g)\in L} V_{f(g)} \otimes \bigoplus_{f(g)\in L} W_{f(g)}$$

也就是 $F(V) \otimes F(W)$，因此 $F(V \otimes W)$和 $F(V) \otimes F(W)$是相同的 L分次向量空间，进而可以为每个 V、$W \in \mathrm{Vec}_G$定义 $\phi^2_{V,W} := \mathrm{Id}$。显然，这个注记对于群$G$以及非阿贝尔的 L也成立；在这种情况下，Vec_G 和 Vec_L 不具有带编织结构。

在 [7, 注释 1.2] 中，介绍了当 G 和 L 是有限阿贝尔群时，如何构造一个从 Vec_G 到 Vec_L 的带编织的强幺半函子。不难看出，即使在 G 和 L 不一定是有限群的情况下，这一方法同样适用。下面我们回顾其具体构造过程。显然，如果我们对 Vec_G中的每个 V和 W 都定义$\phi^2_{V,W} :=\mathrm{Id}$，一般而言，我们无法得到一个从 Vec_G 到 Vec_L 的带编织结构的幺半函子，因为 Vec_G 的编织与 Vec_L 的编织不同。因此，我们定义$\phi^0 :=\mathrm{Id}_\Bbbk$，但对态射$\phi^2_{V,W}$进行修改，使其在 Vec_L 中成为同构，从而得到一个强幺半函子。我们回顾一下，在 Vec_L中， $F(V \otimes W) = F(V) \otimes F(W)$。给定一个映射 $\gamma\colon G \times G \to \Bbbk - \{0\}$，对于 Vec_G中的任意 V和 W，可以定义 Vec_G中的同构：$f_{V,W}\colon V \otimes W \to V \otimes W$, $v \otimes w \mapsto \gamma(g,h)$ $v \otimes w$，其中 $v \in V_g$和 $w \in W_h$，而 $g,h \in G$定义在分次的各个分量上，并通过线性性延拓。我们定义 $\phi^2_{V,W} := F(f_{V,W}) = f_{V,W}$，对于 Vec_G中的任意 V和 W，它们都是 Vec_L 中的同构。为了得到一个幺半函子，我们需要 γ 是 G上的一个 2-余循环，即它满足以下条件：

$$\gamma(gh,k)\gamma(g,h) = \gamma(g,hk)\gamma(h,k) \quad \text{for every} \quad g,h,k \in G. \tag{5}$$

对于每个 $g \in G$，我们立即有 $\gamma(g,1_G) = \gamma(1_G,g) = \gamma(1_G,1_G)$，并称 γ 为归一化的，如果 $\gamma(1_G,1_G) = 1_\Bbbk$。还需注意，群 {L} 上的双特征标 ϕ 自动构成群 G 上的归一化 2-余循环，因为

$$\phi(gh,k)\phi(g,h) = \phi(g,k)\phi(h,k)\phi(g,h) = \phi(g,hk)\phi(h,k) \quad \text{for every} \quad g,h,k \in G$$

且对于每个 $g \in G$，都有 $\phi(g,1_G) = \phi(1_G,g) = 1_\Bbbk$。我们有如下结果：

引理 *5.9*。（参见 [7, 注 *1*.2]）给定 $f\colon G \to L$ 一个阿贝尔群之间的态射， $F\colon \mathrm{Vec}_G \to \mathrm{Vec}_L$ 如注 *5.8* 中所述， $\phi^0 := \mathrm{Id}_\Bbbk$，以及上述的 $\phi^2_{V,W}$，对 Vec_G 中的每个 V 和 W 均成立。那么 (F,ϕ^0,ϕ^2) 是一个强幺半函子，当且仅当 γ 是 G 上的归一化 *2*-余循环。此外，如果 ϕ 和 θ 分别是 G 和 L 上的双特征标（它们分别给出了 Vec_G 和 Vec_L 上的编织结构），那么 (F,ϕ^0,ϕ^2) 是带编织结构的，当且仅当

$$\phi(g,h) = \theta(f(g),f(h))\frac{\gamma(g,h)}{\gamma(h,g)} \quad \textit{for every} \quad g,h \in G. \tag{6}$$

注记 5.10。考虑映射 $\bar{u}\colon G \to \Bbbk - \{0\}$，由 $g \mapsto \phi(g,g)$ 给出。注意，由于 ϕ 是交换因子，我们得到

$$\bar{u}(gg') = \phi(gg',gg') = \phi(g,g)\phi(g,g')\phi(g',g)\phi(g',g') = \phi(g,g)\phi(g',g') = \bar{u}(g)\bar{u}(g')$$

于是 $\bar{u}$ 是群同态。但我们还有，由于 ϕ 是交换因子，$\phi(g,g)\phi(g,g) = 1_\Bbbk$，也就是说，对于每个 $g \in G$， $\phi(g,g)^2 = 1_\Bbbk$，因此 $\phi(g,g) \in \{\pm 1_\Bbbk\}$。于是 $\bar{u}(G) \subseteq \{\pm 1_\Bbbk\}$，进而我们得到：由于 ϕ 是交换因子， $\bar{u}\colon G \to \{\pm 1_\Bbbk\}$ 是群同态。若考虑子群

$$H := \ker(\bar{u}) = \{g \in G \mid \bar{u}(g) = 1_\Bbbk\} = \{g \in G \mid \phi(g,g) = 1_\Bbbk\}$$

可能性有两种： $H = G$ 或 $\{\pm 1_\Bbbk\} \cong G/H$，然后是 $|G/H| = 2$。在第二种情况下，如果 G 是有限的（因此 H也有限），那么 $|G| = 2\cdot|H|$。在有限情形下，如果 G的基数为奇数，我们总有 $G = H$；而当 G 非平凡时，如果 $H = \{1_G\}$，则有 $G = \mathbb{Z}_2$。因此，如果G 的基数大于 2， H 就不可能是平凡的，所以对于每个$h \neq 1_G$，都不会出现 $\phi(h,h) = -1_\Bbbk$ 的情况。例如，在 [6, 第 3 节2], 中，可以找到有限阿贝尔群上非退化斜对称双特征的完整分类。

在 [7, 第 1 节5] 中，介绍了当 G 是有限阿贝尔群时，如何从 Vec_G 到 $\mathsf{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$构造带编织的强幺半函子；当 G 是有限生成阿贝尔群时，这一方法同样适用。为确保完备性，我们在此给出证明。考虑 $\mathbb{Z}_2 := \{0,1\}$，根据注5.10，我们已有一个群同态 $\bar{u}: G \to \mathbb{Z}_2$，其中若 $g \in G$ 满足 $\phi(g,g) = 1_{\Bbbk}$，则 $\bar{u}(g) = 0$；若 $\phi(g,g) = -1_{\Bbbk}$，则$\bar{u}(g) = 1$。我们需要在 G 上取一个归一化 2-余循环 γ，使得对于 ϕ 和 η，式 (6) 成立，其中 $\eta: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \{\pm 1_{\Bbbk}\} \subseteq \Bbbk - \{0\}$，$(x,y) \mapsto (-1)^{x\cdot y}$是 $\mathbb{Z}_2$上的交换因子。

命题5.11。 如果 G 是有限生成阿贝尔群，那么我们有一个带编织的强幺半函子 $(F,\ \phi^0,\ \phi^2)$: $\mathsf{Vec}_G \to \mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$。

证明。定义 $\kappa: G \times G \to \{\pm 1_{\Bbbk}\}$，使得 $\kappa(g,h) = 1_{\Bbbk}$当且仅当 $\phi(g,g) = 1_{\Bbbk}$，或者 $\phi(h,h) = 1_{\Bbbk}$且$\kappa(g,h) = -1_{\Bbbk}$当且仅当 $\phi(g,g) = \phi(h,h) = -1_{\Bbbk}$，对任意 $g,h \in G$ 均成立。根据 κ 的定义，它显然是一个交换因子，因此 $\phi\kappa: G \times G \to \Bbbk - \{0\}$，$(g,h) \mapsto \phi(g,h)\kappa(g,h)$ 是 G 上的一个交换因子。ˆ 注意，对任意 $g \in G$，$\phi\kappa(g,g) = 1_{\Bbbk}$。若考虑 $G^{\wedge} := \mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(G, \Bbbk - \{0\})$，即 G 的特征标群，并定义群态射 $\chi: G \to G^{\wedge}$, $g \mapsto \chi_g$，令 $\chi_g(h) = \phi\kappa(g,h)$，其中$g,h \in G$，则 $\phi\kappa$ 在群 $G' := G/\ker(\chi)^{-}$ 上诱导一个非退化双特征标 ϕ'，使得对任意 $\bar{g} \in G'$，$\phi'(\bar{g},\bar{g}) = 1_{\Bbbk}$。事实上，对任意$\bar{g},g' \in G'$，我们可以定义 $\phi'(\bar{g},g') = \phi\kappa(g,g')$。这是良定义的，因为对于 $g,g' \in G$ 和 $h,h' \in \ker(\chi)$，我们有。

$$\phi\kappa(h,g') = \phi\kappa(h,h') = 1_{\Bbbk} \ \text{ and } \ 1_{\Bbbk} = \phi\kappa(g,h')\phi\kappa(h',g) = \phi\kappa(g,h')$$

于是 $\phi\kappa(gh,g'h') = \phi\kappa(g,g')$。显然，$\phi'$是一个交换因子，且对每个$\bar{g} \in G'$，$\phi'(\bar{g},\bar{g}) = 1_{\Bbbk}$。由于 G 是一个有限生成阿贝尔群，G'也具有同样的性质。因此，根据 [36, 引理2]，，由于 ϕ' 是 G' 上的一个交换因子，且对每个 $\bar{g} \in G'$，$\phi'(\bar{g},\bar{g}) = 1_{\Bbbk}$，所以存在一个双特征标 $\gamma': G' \times G' \to \Bbbk - \{0\}$，定义在 G' 上（因此，特别地，它是 G' 上的一个归一化 2-余循环），使得

$$\phi'(\bar{g},\bar{h}) = \frac{\gamma'(\bar{g},\bar{h})}{\gamma'(\bar{h},\bar{g})} \ \text{ for every } \ \bar{g},\bar{h} \in G'.$$

若将 $p: G \to G'$ 称为典范投影，则有 $\phi' \circ (p \times p) = \phi\kappa$，并且我们可以考虑由 $\gamma := \gamma' \circ (p \times p)$ 给出的 G 上的双特征标（因此也是归一化 2-余循环）。显然

$$\phi\kappa(g,h) = \phi'(\bar{g},\bar{h}) = \frac{\gamma'(\bar{g},\bar{h})}{\gamma'(\bar{h},\bar{g})} = \frac{\gamma(g,h)}{\gamma(h,g)} \ \text{ for every } g,h \in G.$$

但是现在，给定之前关于 $\mathbb{Z}_2$ 的双特征标 η，我们有 $\kappa = \eta \circ (\bar{u} \times \bar{u})$，即对任意 $g,h \in G$，$\kappa(g,h) = \eta(\bar{u}(g)\ \bar{u}(h))$。因此我们得到

$$\frac{\gamma(g,h)}{\gamma(h,g)} = \phi\kappa(g,h) = \phi(g,h)\kappa(g,h) = \phi(g,h)\eta(\bar{u}(g),\bar{u}(h)) \ \text{ for every } \ g,h \in G$$

进而得到

$$\phi(g,h) = \eta(\bar{u}(g),\bar{u}(h))\frac{\gamma(g,h)}{\gamma(h,g)} \ \text{ for every } \ g,h \in G.$$

因此，由 Lemma 5.9，我们有一个带编织的强幺半函子 $(F,\phi^2,\phi^0): \mathsf{Vec}_G \to \mathsf{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$。□

因此，从现在起，我们假设阿贝尔群 G 是有限生成的。我们知道，带编织的强幺半函子保持霍普夫幺半群（见 [4, 命题 3.46, 3.50]），因此，通过 (F,ϕ^0,ϕ^2)，每个颜色霍普夫代数都成为超 Hopf 代数，而每个颜色霍普夫代数态射都成为超霍普夫代数态射（我们已经知道它自动属于 $\mathsf{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$，因此相对于新的乘积和新的余积，它也将是代数态射和余代数态射）。给定一个颜色霍普夫代数 $(H := \bigoplus_{g\in G} H_g, m, u, \Delta, \epsilon, S)$，其超 Hopf 代数将由下式给出

$$(F(H)\ F(m)\circ(\phi^2_{H,H})^{-1}, F(u)\circ(\phi^0)^{-1}, \phi^2_{H,H}\circ F(\Delta)\ \phi^0\circ F(\epsilon)\ F(S)) = (H_0\oplus H_1, m\circ(\phi^2_{H,H})^{-1}, u, \phi^2_{H,H}\circ\Delta, \epsilon, S),$$

因为 $F(f) = f$对于 f在 Vec_G中且 ϕ^0是单位元，其中 $H_0 = \bigoplus_{g\in G_0} H_g$和 $H_1 = \bigoplus_{g\in G_1} H_g$通过设定 $G_0 := \{g \in G \mid \phi(g,g) = 1_{\Bbbk}\}$ 以及 $G_1 := \{g \in G \mid \phi(g,g) = -1_{\Bbbk}\}$。

引理 5.12。 给定一个忠实编织强幺半函子 $F: \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$，则 A 是 $\mathcal{M}$ 中的（余）交换（余）幺半群，当且仅当 $F(A)$ 是 $\mathcal{M}'$中的（余）交换（余）幺半群。

证明。 由于 F 是带编织结构的，我们有

$$m_{F(A)} \circ c'_{F(A),F(A)} = F(m_A) \circ (\phi^2_{A,A})^{-1} \circ c'_{F(A),F(A)} = F(m_A \circ c_{A,A}) \circ (\phi^2_{A,A})^{-1}$$

因此 taanna 若 A 是 $\mathcal{M}$ 中的一个交换幺半群，则 $F(A)$ 是 $\mathcal{M}'$ 中的一个交换幺半群，并且

$$c'_{F(A),F(A)} \circ \Delta_{F(A)} = c'_{F(A),F(A)} \circ \phi^2_{A,A} \circ F(\Delta_A) = \phi^2_{A,A} \circ F(c_{A,A} \circ \Delta_A)$$

因此，如果 A 是 $\mathcal{M}$ 中的余交换余幺半群，那么 $F(A)$ 就是 $\mathcal{M}'$ 中的余交换余幺半群。如果 $F(A)$ 是 $\mathcal{M}'$ 中的（余）交换（余）幺半群，那么根据前面的两次计算，利用 F 是忠实函子这一性质，我们可以得到 A 是 $\mathcal{M}$ 中的（余）交换（余）幺半群。□

推论 5.13。 给定 A *in* $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，当且仅当 $F(A)$ *in* $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2})$是（余）交换的。

在下文中，我们常常会提及限制到余交换色霍普夫代数范畴上的函子 F，仍将其称为 F。

备注 5.14。 为避免混淆，这里我们将 Vec_G^{ϕ} 记作由上方编织所对应的双特征标。正如 [7, 第 1 节 5], 所述，归一化 2-余循环γ： $G \times G \to \Bbbk - \{0\}$ 诱导出从 $\mathrm{Vec}_G^{\phi\kappa}$ 到 Vec_G^{t}的编织幺半范畴等价，其中 t： $G \times G \to \Bbbk - \{0\}$ 是平凡双特征标，使得对任意 g、 $h \in G$，都有 $t(g,h) = 1_{\Bbbk}$。事实上，若考虑群同态 Id_G 和 γ，我们有

$$\phi\kappa(g,h) = t(g,h)\frac{\gamma(g,h)}{\gamma(h,g)} \quad \text{for every } g,h \in G$$

于是根据引理 5.9，可得一个从 $\mathrm{Vec}_G^{\phi\kappa}$ →到 Vec_G^{t} 的带编织的强幺半函子。但现在显然，我们可以考虑归一化 2-余循环 γ^{-1}： $G \times G \to \Bbbk - \{0\}$，$(g,h) \to \gamma(g,h)^{-1}$，于是

$$t(g,h) = \phi\kappa(g,h)\frac{\gamma(h,g)}{\gamma(g,h)} = \phi\kappa(g,h)\frac{\gamma^{-1}(g,h)}{\gamma^{-1}(h,g)} \quad \text{for every } \ g,h \in G$$

因此，根据引理 5.9，我们得到一个带编织的强幺半函子 $\mathrm{Vec}_G^{t} \to \mathrm{Vec}_G^{\phi\kappa}$。这两个函子给出了 $\mathrm{Vec}_G^{\phi\kappa}$ 与 Vec_G^{t}之间的（对称）编织幺半范畴等价。现在有两种可能。若对每个 $g \in G$，都有 $\phi(g, g) = 1_{\Bbbk}$，那么显然对每个 $g,h \in G$，都有 $\kappa(g,h) = 1_{\Bbbk}$，进而有 $\phi\kappa = \phi$，因此 Vec_G^{ϕ} 与 Vec_G^{t} 之间存在对称幺半范畴等价。事实上，注意此时 $G_0 = G$，于是给定 Vec_G^{ϕ}中的 V，我们有 $V = V_0$ 和 $V_1 = 0$，且 $\eta(0,0) = 1_{\Bbbk}$。$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G^{t})$ 的对象，即 G-分次余交换霍普夫代数范畴的对象，是作为向量空间按G 分次的普通余交换Hopf代数，其 $m, u, \Delta, \epsilon, S$保持分次（因而是 G-分次代数与余代数）；态射则是保持分次的代数与余代数映射。特别地，我们可以从一个余交换色 Hopf 代数得到一个普通余交换Hopf代数，反之亦然。否则，若对某个 $g \in G$ 有 $\phi(g, g) = -1_{\Bbbk}$，则可以回到前面所述的带编织的强幺半函子 $(F, \phi^0, \phi^2) : \mathrm{Vec}_G^{\phi} \to \mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}^{\eta}$；给定 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G^{\phi})$ 中的 H 和 f，我们得到 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G^{\eta})$ 中的 $F(H)$ 和 $F(f)$。$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G^{\eta})$ 是 G-分次余交换超 Hopf 代数范畴，其对象是 G-分次代数与余代数（因为 $\phi^2_{H,H}$ 也属于 Vec_G），进而，考虑新的分次，它们也是 $\mathbb{Z}_2$-分次代数与余代数；相对于该分次，考虑超向量空间的编织，它们是余交换超 Hopf 代数，而态射是保持 G-分次（进而也保持 $\mathbb{Z}_2$上的分次）的代数与余代数映射。

因此，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的每个 H 都可以看作余交换超 Hopf 代数。如果对于每个 $g \in G$ 都有 $\phi(g, g) = 1_{\Bbbk}$，我们就有这是一个有效的普通余交换Hopf代数，并且 Newman 定理成立；例如，根据注5.10，当我们有一个奇数基数的有限群 G 时，这总是成立。如果对于某个 $g \in G$ 有 $\phi(g, g) = -1_{\Bbbk}$，我们可以使用关于余交换超 Hopf 代数的更一般的定理 5.6，其中需要 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$，这使我们能够处理更一般的情形。

5.2. **颜色霍普夫代数的广义 Newman 定理**。现在，在 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$ 且 G 为有限生成阿贝尔群的情形下，我们可以利用函子$F\colon \mathrm{Vec}_G \to \mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$，将定理 5.6 和推论 5.7 推广到余交换色霍普夫代数的情形。

引理 5.15. 遗忘函子 $K : \mathrm{Vec}_G \to \mathrm{Vec}_\Bbbk$ 在子对象以及同一对象的商上是单射。因此，将 K 限制到$\mathrm{Mon}(\mathrm{Vec}_G)$、$\mathrm{Comon}(\mathrm{Vec}_G)$、$\mathrm{Bimon}(\mathrm{Vec}_G)$ 和$\mathrm{Hopf}(\mathrm{Vec}_G)$这些范畴时，结论同样成立。

证明。给定 A in Vec_G 以及 B, C 为 A的分次子空间，则 $B_g = B \cap A_g$ 且 $C_g = C \cap A_g$ 对每个 $g \in G$都成立。因此，若 $K(B) = K(C)$，即 B 和 C 是同一个向量空间，那么它们必定是 Vec_G中的同一个对象。此外，若考虑 A in $\mathrm{Mon}(\mathrm{Vec}_G)$、$\mathrm{Comon}(\mathrm{Vec}_G)$、$\mathrm{Bimon}(\mathrm{Vec}_G)$ 或 $\mathrm{Hopf}(\mathrm{Vec}_G)$，且 B, C 是这些范畴中 A 的子对象，则在这些范畴中， B 和 C 是同一个对象，当且仅当它们在 Vec_G 中是同一个对象，因为它们的运算是对 A 的运算加以限制得到的；因此，当 $K(B) = K(C)$时，结论成立。此外，给定 A/B和 A/C in Vec_G ，使得 $K(A/B) = K(A/C)$，即 A/B 和 A/C 是同一个向量空间，则 $B = 0_{A/B} = 0_{A/C} = C$。因此，对于每个 $g \in G$ ，$(A/B)_g = (A_g + B)/B = (A_g + C)/C = (A/C)_g$，于是 A/B 和 A/C 是 Vec_G中的同一个对象。当 A/B 和 A/C 属于 $\mathrm{Mon}(\mathrm{Vec}_G)$、$\mathrm{Comon}(\mathrm{Vec}_G)$、$\mathrm{Bimon}(\mathrm{Vec}_G)$ 或 $\mathrm{Hopf}(\mathrm{Vec}_G)$ 时，结论同样成立，因为在这些范畴中， A/B和 A/C 是同一个对象，当且仅当它们在 Vec_G中是同一个对象；这是因为它们的运算是通过典范投影由 A 的运算诱导而来。□

引理 5.16. 函子 $F : \mathrm{Vec}_G \to \mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$ 保留并反映子幺半群和子余幺半群，进而保留并反映子双幺半群和 *Hopf* 子幺半群。

证明。 我们考虑 Hopf 子幺半群的情形，因为它包含了其他所有情形。我们已经知道，若 C 是 A的颜色 Hopf 子代数，即包含映射 $i : C \to A$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，那么 $F(i) : F(C) \to F(A)$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2})$，也就是说， $F(C)$ 是 $F(A)$ 的超 Hopf 子代数。因此，我们证明反方向。假设 A 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，且 $C \subseteq A$ 是一个分次子空间，使得 $F(C)$ 是 $F(A)$ 的超 Hopf 子代数。但现在我们只需注意到

$$m_{F(A)}(F(C) \otimes F(C)) = F(m_A)(\phi^2_{A,A})^{-1}(F(C) \otimes F(C)) = F(m_A)(F(C \otimes C)) = F(m_A(C \otimes C)),$$
$$\Delta_{F(A)}(F(C)) = \phi^2_{A,A} F(\Delta_A)(F(C)) = \phi^2_{A,A} F(\Delta_A(C))$$

并且 $u_{F(A)}(\Bbbk) = F(u_A(\Bbbk))$， $S_{F(A)}(F(C)) = F(S_A(C))$，因此，由于 $F(C)$ 是 $F(A)$ 的超 Hopf 子代数（即 $F(C)$ 在 $F(A)$ 的运算下封闭），那么 C就是 A 的颜色 Hopf 子代数（即 C 在 A的运算下封闭），因为 F 不会改变向量空间的结构。□

注 5.17. 注意，给定 $\pi : A \to A/I$ in Vec_G，则 $F(\pi) : F(A) \to F(A/I)$ 属于 $\mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$，且仍然是满射；于是由注 3.2 $F(A/I)$， $F(A)$ 经由该满射诱导出唯一的分次，即 $F(A/I)_i = F(\pi)(F(A)_i) = (F(A)_i + I)/I = (F(A)_i + F(I))/F(I)$，其中 $i = 0, 1$，而这恰好是 $\mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$ 中 $F(A)$ 对其超子空间 $F(I)$ 取商所得的分次。因此， $F(\pi) : F(A) \to F(A/I)$ 是 $\mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2}$ 中的投影 $F(A) \to F(A)/F(I)$。另请注意，若 $\pi : A \to A/I$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，则 $F(\pi)$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2})$，且 $F(A/I)$ 具有由 $F(A)$ 诱导的 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2})$ 中的唯一结构。

命题 5.18。 函子 $F : \mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G) \to \mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2})$ 保持等化子并反映等化子。

证明。取 $f, g : A \to B$ in $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 和 $j : \mathrm{Eq}(f, g) \to A$，其中后者是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中一对态射 (f, g) 的等化子。于是，我们可以考虑 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2})$ 中的 $F(j) : F(\mathrm{Eq}(f, g)) \to F(A)$，并证明 $F(\mathrm{Eq}(f, g)) = \mathrm{Eq}(F(f)\ F(g))$。我们知道，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}^{\mathbb{Z}_2})$ 中的 $\mathrm{Eq}(F(f)\ F(g))$ 由满足 $(\mathrm{Id}_{F(A)} \otimes F(f))\Delta_{F(A)}(x) = (\mathrm{Id}_{F(A)} \otimes F(g))\Delta_{F(A)}(x)$ 的那些 $x \in F(A)$ 给出。但现在我们有

$$(\text{恒等映射}_{F(A)} \otimes F(f)) \circ \Delta_{F(A)} = (F(\text{恒等映射}_A) \otimes F(f)) \circ \phi^2_{A,\ A} \circ F(\Delta_A) = \phi^2_{A,\ B} \circ F(\text{恒等映射}_A \otimes f) \circ F(\Delta_A) = \phi^2_{A,\ B} \circ F((\text{恒等映射}_A \otimes f) \circ \Delta_A)$$

类似地 $(\mathrm{Id}_{F(A)} \otimes F(g)) \circ \Delta_{F(A)} = \phi^2_{A,B} \circ F((\mathrm{Id}_A \otimes g) \circ \Delta_A)$。于是，等价地，$\mathrm{Eq}(F(f)\ F(g))$ 由满足 $F((\mathrm{Id}_A \otimes f)\Delta_A)(x) = F((\mathrm{Id}_A \otimes g)\Delta_A)(x)$ 的元素 $x \in F(A)$ 构成，也就是说，

满足 $(\mathrm{Id}_A \otimes f)\Delta_A(x) = (\mathrm{Id}_A \otimes g)\Delta_A(x)$ 的元素恰好是 $F(\mathrm{Eq}(f,g))$ 中的元素。因此，$(F(\mathrm{Eq}(f,g)) \ F(j))$ 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2})$ 中态射对 $(F(f) \ F(g))$ 的等化子，所以 F 保持等化子。F 反映等化子的事实可由 F 保持等化子且 F 反映同构得出（参见 [10, 命题 2.9.7]）。□

显然， 通过考虑 $F\colon \mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G) \to \mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2})$，前一个结果显然成立。

引理 5.19. 给定一个分次代数 H 和一个颜色左 H-模 A，则 $F(A)$ 是一个超左$F(H)$-模。

证明. 给定作用 $\mu\colon H \otimes A \to A$ in Vec_G，我们定义 $\mu' := F(\mu)\circ(\phi^2_{H,A})^{-1}\colon F(H)\otimes F(A) \to F(A)$ in $\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$。因此我们可以计算

$$\begin{aligned}
\mu' \circ (m_{F(H)} \otimes \mathrm{Id}_{F(A)}) &= F(\mu) \circ (\phi^2_{H,A})^{-1} \circ (F(m_H) \otimes F(\mathrm{Id}_A)) \circ ((\phi^2_{H,H})^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{F(A)}) \\
&= F(\mu) \circ F(m_H \otimes \mathrm{Id}_A) \circ (\phi^2_{H\otimes H,A})^{-1} \circ ((\phi^2_{H,H})^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{F(A)}) \\
&= F(\mu \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \mu)) \circ ((\phi^2_{H,H} \otimes \mathrm{Id}_{F(A)}) \circ \phi^2_{H\otimes H,A})^{-1} \\
&= F(\mu) \circ F(\mathrm{Id}_H \otimes \mu) \circ (\phi^2_{H,H\otimes A})^{-1} \circ (\mathrm{Id}_{F(H)} \otimes \phi^2_{H,A})^{-1} \\
&= F(\mu) \circ (\phi^2_{H,A})^{-1} \circ (\mathrm{Id}_{F(H)} \otimes F(\mu)) \circ (\mathrm{Id}_{F(H)} \otimes (\phi^2_{H,A})^{-1}) \\
&= \mu' \circ (\mathrm{Id}_{F(H)} \otimes \mu')
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mu' \circ (u_{F(H)} \otimes \mathrm{Id}_{F(A)}) &= F(\mu) \circ (\phi^2_{H,A})^{-1} \circ (F(u_H) \otimes F(\mathrm{Id}_A)) = F(\mu) \circ F(u_H \otimes \mathrm{Id}_A) \circ (\phi^2_{\Bbbk,A})^{-1} \\
&= F(l_A) \circ (\phi^2_{\Bbbk,A})^{-1} = l_{F(A)}.
\end{aligned}$$

□

定理 5.20. 设 H 是一个余交换的颜色霍普夫代数。那么， H 的颜色霍普夫子代数$K \subseteq H$ 与商颜色左 H-模余代数 Q 在$K \mapsto H/HK^+$, $Q \mapsto H^{\mathrm{co}Q}$下构成一一对应。

证明。 首先，我们证明这两个映射是良定义的。因此，给定一个颜色 Hopf 子代数$K \subseteq H$，我们知道 HK^+ 是 H 的分次左理想，同时也是 H 的双边余理想，因为$HK^+ = \mathrm{Im}(m\circ(\mathrm{Id}_H\otimes i) - l\circ(\mathrm{Id}_H\otimes\epsilon))$，其中 $i\colon K \to H$是包含映射（见 [37, 命题 1.4.8]）。此外，回顾备注 5.2 中给出的 $_H\mathrm{Vec}_G$ 的幺半结构，不难看出Δ_{H/HK^+} 和ϵ_{H/HK^+} 是左 H-模的态射。事实上，给定 $\pi\colon H \to H/HK^+$属于 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，对于任意 a、$b \in H$，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta_{H/HK^+}(h \cdot (a + HK^+)) &= \Delta_{H/HK^+}(ha + HK^+) = (\pi \otimes \pi)\Delta_H(ha) \\
&= \phi(|h_2|, |a_1|)(h_1a_1 + HK^+) \otimes (h_2a_2 + HK^+) \\
&= h \cdot \Delta_{H/HK^+}(a + HK^+)
\end{aligned}$$

and

$\epsilon_{H/HK^+}(h\cdot(a+HK^+)) = \epsilon_{H/HK^+}(ha+HK^+) = \epsilon_H(ha) = \epsilon_H(h)\epsilon_H(a) = h\cdot\epsilon_{H/HK^+}(a+HK^+)$, 因此 H/HK^+ 是 H的商颜色左 H-模余代数。此外，设 Q 是 H的商颜色左 H-模余代数；我们证明

$$H^{\mathrm{co}Q} = \{h \in H \mid (\mathrm{Id}_H \otimes \pi)\Delta(h) = h \otimes \pi(1_H)\} = \{h \in H \mid (\mathrm{Id}_H \otimes \pi)\Delta(h) = (\mathrm{Id}_H \otimes \pi u\epsilon)\Delta(h)\}$$

是 H 的一个颜色 Hopf 子代数。它属于 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，因为它是 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中一对 $(\pi, \pi\circ u_H\circ\epsilon_H)$ 的等化子对象。此外，根据命题 5.18，我们知道 $F(H^{\mathrm{co}Q})$ 是 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2})$ 中一对 $(F(\pi) \ F(\pi\circ u_H\circ\epsilon_H)) = (F(\pi) \ F(\pi)\circ u_{F(H)} \circ\epsilon_{F(H)})$ 的等化子，即 $F(H^{\mathrm{co}Q}) = F(H)^{\mathrm{co}F(Q)}$。但现在 $F(H)$ 是一个超 Hopf 代数，而根据引理 5.19， $F(Q)$ 是 $F(H)$ 的一个商超余代数，也是一个商超左 $F(H)$-模。此外， $\Delta_{F(Q)}$和 $\epsilon_{F(Q)}$ 是左 $F(H)$-模的态射。事实上，回顾六边形关系，

$$\phi^2_{H\otimes Q,H\otimes Q}\circ F(\mathrm{Id}_H\otimes c_{H,Q}\otimes\mathrm{Id}_Q)\circ(\phi^2_{H\otimes H,Q\otimes Q})^{-1} = ((\phi^2_{H,Q})^{-1}\otimes(\phi^2_{H,Q})^{-1})\circ(\mathrm{Id}_{F(H)}\otimes c'_{F(H),F(Q)}\otimes\mathrm{Id}_{F(Q)})\circ(\phi^2_{H,H}\otimes\phi^2_{Q,Q})$$

这成立是因为 F 是一个带编织的强幺半函子，我们得到的是

$$(\mu'\otimes\mu')\circ(\mathrm{Id}_{F(H)}\otimes c'_{F(H),F(Q)}\otimes\mathrm{Id}_{F(Q)})\circ(\Delta_{F(H)}\otimes\mathrm{Id}_{F(Q)}\otimes\mathrm{Id}_{F(Q)})\circ(\mathrm{Id}_{F(H)}\otimes\Delta_{F(Q)})=$$
$$(F(\mu)\otimes F(\mu))\circ((\phi^2_{H,Q})^{-1}\otimes(\phi^2_{H,Q})^{-1})\circ(\mathrm{Id}_{F(H)}\otimes c'_{F(H),F(Q)}\otimes\mathrm{Id}_{F(Q)})\circ(\phi^2_{H,H}\otimes\phi^2_{Q,Q})\circ(F(\Delta_H)\otimes F(\Delta_Q))=$$
$$(F(\mu)\otimes F(\mu))\circ\phi^2_{H\otimes Q,H\otimes Q}\circ F(\mathrm{Id}_H\otimes c_{H,Q}\otimes\mathrm{Id}_Q)\circ(\phi^2_{H\otimes H,Q\otimes Q})^{-1}\circ(F(\Delta_H)\otimes F(\Delta_Q))=$$
$$\phi^2_{Q,Q}\circ F(\mu\otimes\mu)\circ F(\mathrm{Id}_H\otimes c_{H,Q}\otimes\mathrm{Id}_Q)\circ F(\Delta_H\otimes\Delta_Q)\circ(\phi^2_{H,Q})^{-1}=$$
$$\phi^2_{Q,Q}\circ F(\Delta_Q\circ\mu)\circ(\phi^2_{H,Q})^{-1}=\Delta_{F(Q)}\circ\mu'$$

and

$$\epsilon_{F(Q)}\circ\mu'=F(\epsilon_Q)\circ F(\mu)\circ(\phi^2_{H,Q})^{-1}=F(r_{\Bbbk})\circ F(\epsilon_H\otimes\epsilon_Q)\circ(\phi^2_{H,Q})^{-1}=r_{\Bbbk}\circ(\epsilon_{F(H)}\otimes\epsilon_{F(Q)}).$$

因此， $F(Q)$ 是 $F(H)$ 的商超左 $F(H)$-模余代数，接着根据定理 5.6，我们有 $F(H)^{\mathrm{co}F(Q)}=F(H^{\mathrm{co}Q})$ 是 $F(H)$ 的超 Hopf 子代数；因此，根据引理 5.16， $H^{\mathrm{co}Q}$ 是 H 的颜色 Hopf 子代数。因此，这两个映射都是良定义的，现在我们要证明它们互为逆映射。于是我们计算

$$K\mapsto H/HK^+\mapsto H^{\mathrm{co}\frac{H}{HK^+}}$$

and

$$F(H^{\mathrm{co}\frac{H}{HK^+}})=F(H)^{\mathrm{co}F(\frac{H}{HK^+})}=F(H)^{\mathrm{co}\frac{F(H)}{F(H)F(K)^+}}=\psi_{F(H)}(\phi_{F(H)}(F(K)))=F(K)$$

由于根据引理 5.16， $F(K)$ 是 $F(H)$ 的超 Hopf 子代数。因此，由于 K 和 $H^{\mathrm{co}\frac{H}{HK^+}}$ 是 H 的颜色 Hopf 子代数，并且根据前一个等式，它们是同一个向量空间，因为 F 不会改变向量空间的结构，所以根据引理 5.15，它们必定是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的同一个对象。此外，我们计算

$$Q\mapsto H^{\mathrm{co}Q}\mapsto H/H(H^{\mathrm{co}Q})^+$$

and

$$F(\frac{H}{H(H^{\mathrm{co}Q})^+})=\frac{F(H)}{F(H)F(H^{\mathrm{co}Q})^+}=\frac{F(H)}{F(H)(F(H)^{\mathrm{co}F(Q)})^+}=\phi_{F(H)}(\psi_{F(H)}(F(Q)))=F(Q)$$

因为 $F(Q)$ 是 $F(H)$ 的商超左 $F(H)$-模余代数。我们知道， Q 和 $H/H(H^{\mathrm{co}Q})^+$ 是 H 的商着色左 H-模余代数，因此，由于根据前面的等式，它们是同一个向量空间，所以根据引理 5.15，它们必定是 H 的同一个商着色左 H-模余代数。□

我们将映射 $\phi_H\colon K\mapsto H/HK^+$ 和 $\psi_H\colon Q\mapsto H^{\mathrm{co}Q}$ 称为定理 5.6 中的两个映射。正如下面的结果所示，该双射限制为正规颜色 Hopf 子代数与商着色霍普夫代数之间的一一对应。因此，我们将定理 5.6 和推论 5.7 推广到余交换色霍普夫代数的情形。

推论 5.21。 对于余交换色霍普夫代数 A 的颜色 *Hopf* 子代数 $B\subseteq A$ ，以下条件等价:

(1) B 是正规颜色 *Hopf* 子代数，即对于每个 $a\in A$ 和 $b\in B$， $\phi(|a_2|,|b|)a_1bS(a_2)\in B$;

(2) A/AB^+ 是一个商着色霍普夫代数;

(3) 包含关系 *usion*态射 $B\to A$ 是$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$中的某个态射的范畴核。

证明。 (1) $\Longrightarrow$ (2)。设 B 是 A 的正规颜色 Hopf 子代数，并考虑商颜色左 A-模余代数 A/AB^+。为证明它是商颜色霍普夫代数，我们必须证明 AB^+ 是 A 的右理想，并且在 A的对极作用下封闭。首先

我们证明它是一个右理想。对于任意的 a、$a' \in A$ 和 $b \in B^+$，由于 $(S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S$，且 A 是余交换的，我们得到。

$$\begin{aligned}(ab)a' &= ab\epsilon(a'_1)a'_2 = \phi(|b|,|a'_1|)a\epsilon(a'_1)ba'_2 = \phi(|b|,|a'_1|)aa'_{1_1}S(a'_{1_2})bS(S(a'_2)) \\ &= \phi(|b|,|a'_1|)\phi(|b|,|S(a'_{2_1})|)aa'_1S(a'_{2_1})bS(S(a'_{2_2})) = \phi(|b|,|a'_1|)\phi(|b|,|S(a'_2)_1|)aa'_1S(a'_2)_1bS(S(a'_2)_2) \\ &= \phi(|b|,|a'|)\phi(|S(a'_2)_2|,|b|)aa'_1S(a'_2)_1bS(S(a'_2)_2) = \phi(|b|,|a'|)aa'_1\xi_A(S(a'_2)\otimes b) \in AB^+.\end{aligned}$$

为证明 AB^+ 在对极下稳定，注意到 $S(ab) = \phi(|a|,|b|)S(b)S(a)$。由 $\epsilon(S(b)) = \epsilon(b) = 0$ 以及 $b \in B^+$ 可得 $S(b) \in B^+ \subseteq AB^+$，因此 $\phi(|a|,|b|)S(b)S(a) \in AB^+$，因为我们刚刚证明了 AB^+ 是一个右理想。

(2) $\Longrightarrow$ (3)。由于 A/AB^+ 是一个商着色霍普夫代数，且 $\pi: A \to A/AB^+$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，因此 $A^{\mathrm{co}\frac{A}{AB^+}} = \{a \in A \mid a_1 \otimes \pi(a_2) = a \otimes 1_{A/AB^+}\} = \mathrm{Hker}(\pi)$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$。但现在，根据定理 5.20，$A^{\mathrm{co}\frac{A}{AB^+}} = \psi_A(\phi_A(B)) = B$，于是 $B = \mathrm{Hker}(\pi)$。因此，(B, j) 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中 π 的核，其中 $j: B \to A$ 是典范嵌入。根据引理 5.5，我们已知 (3) $\Longrightarrow$(1) 成立，证毕。

□

现在我们可以证明引理 5.1 的 (1) 和 (2)。设 $f: A \to B$ 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的一个态射，并考虑在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中得到的分解 $f = i \circ p$，其中取 $p: A \to A/A(\mathrm{Hker}(f))^+A$ 作为 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中 f 的核的余核。根据注 5.3，$A/\ker(f)$ 是一个商着色霍普夫代数。因此，由于 $\pi: A \to A/\ker(f)$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，我们有 $A^{\mathrm{co}\frac{A}{\ker(f)}} = \mathrm{Hker}(\pi)$，且它们属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$。此外，存在唯一的映射 $\bar{f}: A/\ker(f) \to B$，$a + \ker(f) \mapsto f(a)$，它属于 Vec_G，进而属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，使得 $f \circ \pi = f$，且 f 是单射。因此，$\mathrm{Hker}(\pi) = \mathrm{Hker}(f)$，且它们属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，于是我们得到

$$A/\ker(f) = \phi_A(\psi_A(A/\ker(f))) = \phi_A(A^{\mathrm{co}\frac{A}{\ker(f)}}) = \phi_A(\mathrm{Hker}(f)) = A/A(\mathrm{Hker}(f))^+.$$

于是 $\ker(f) = A(\mathrm{Hker}(f))^+$，因此 $\ker(f) = A(\mathrm{Hker}(f))^+A$也成立，故 $p = \pi$和 $i = \bar{f}$是单射，进而是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的单态射。显然，$\mathrm{Hker}(f)^+ \subseteq \ker(f)$，因为对于 $x \in \mathrm{Hker}(f)$，我们有 $f(x) = \epsilon(x)1_B$。因此，我们在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中得到了一个分解$f = i \circ p$，其中 i 是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的单态射，而 p是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的正则满态射，故引理 5.1 的 (1) 得证。

引理 5.22. 在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中，正则满态射恰好是满射态射，而单态射恰好是单射态射。

证明。在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中，正则满态射是满射，因为在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中，每个余等化子都是一个投影；若 f in $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 是满射，根据其分解 $f = i \circ p$ in $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，我们得到 i 是满射，进而它在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中是一个同构，因此 f 是一个余核，也就是正则满态射。此外，在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中，单射映射显然是单态射，反过来也成立。事实上，给定 $f: A \to B$ a monomorphism in $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ and j: $\mathrm{Hker}(f) \to A$the categorical kernel of f, 由 $f \circ j = f \circ u_A \circ \epsilon_A \circ j$ 可得 $j = u_A \circ \epsilon_A \circ j$，即若 $a \in \mathrm{Hker}(f)$，则 $a = \epsilon_A(a)1_A$，因此 $a \in \Bbbk 1_A$。显然，每个 $x \in \Bbbk 1_A$ 都属于 $\mathrm{Hker}(f)$，于是 $\mathrm{Hker}(f) = \Bbbk 1_A$，所以 $\mathrm{Hker}(f)^+ = 0$，进而，由于 $\ker(f) = A(\mathrm{Hker}(f))^+A$，我们有 $\ker(f) = 0$，因此 f 是单射的。□

现在，引理 5.1 的条件 (2) 很容易满足。在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中，二元积就是张量积，因此 $E \times A = E \otimes A$ 和 $E \times B = E \otimes B$，而诱导态射 $\mathrm{Id}_E \times f$ 就是映射 $\mathrm{Id}_E \otimes f$。事实上

$$l_B \circ (\epsilon_E \otimes \mathrm{Id}_B) \circ (\mathrm{Id}_E \otimes f) = l_B \circ (\mathrm{Id}_{\Bbbk} \otimes f) \circ (\epsilon_E \otimes \mathrm{Id}_A) = f \circ l_A \circ (\epsilon_E \otimes \mathrm{Id}_A)$$

以及 $r_E \circ (\mathrm{Id}_E \otimes \epsilon_B) \circ (\mathrm{Id}_E \otimes f) = \mathrm{Id}_E \circ r_E \circ (\mathrm{Id}_E \otimes \epsilon_A)$。因此，给定一个正则满态射 $f: A \to B$in $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，该态射是满射，于是 $\mathrm{Id}_E \otimes f$ 是满射，故根据引理 5.22，它是一个正则满态射。现在，为了得到 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 的正则性，我们通过证明拉回下满射映射沿单射的稳定性，来证明引理 5.1 的(3)。

如果我们有一个态射 $p:\ A \to B$ in $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，并且将 $C \subseteq B$ 视为 B的一个颜色 Hopf 子代数，那么按照 [24] 中的定义，由下式定义的 A 的子空间 $p^{-1}(C)$

$$p^{-1}(C) = \{x \in A |\ (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta(x) \in C \otimes A\}$$

是 A 的颜色 Hopf 子代数。事实上，注意到

$$p^{-1}(C) = ((p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta)^{-1}(C\otimes A) = ((p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta)^{-1}(\bigoplus\nolimits_{g\in G}(C\otimes A)_g) = \bigoplus\nolimits_{g\in G}((p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta)^{-1}((C\otimes A)_g)$$

由于这些映射保持分次。因此，$p^{-1}(C) = \bigoplus_{g\in G} P_g$ 是一个分次向量空间，其中

$$P_g = \{x \in A_g \mid (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta(x) \in (C \otimes A)_g\} = ((p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta)^{-1}((C \otimes A)_g).$$

根据注 4.1，我们只需证明 $p^{-1}(C)$ 在 Δ_A、m_A 和 S_A 下封闭，且包含 1_A。显然，它包含 1_A；又因为 $(p \otimes \mathrm{Id}_A)\circ\Delta$ 属于 $\mathrm{Mon}(\mathrm{Vec}_G)$，所以它在 m_A 下封闭。事实上，

$$(p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta(xy) = m_{C\otimes A}((p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta \otimes (p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta)(x \otimes y) \in C \otimes A$$

其中 $x, y \in p^{-1}(C)$。也很容易看出它在对极下封闭，因为在余交换的情形下，我们有 $\Delta(S(x)) = (S \otimes S)\Delta(x)$，因此结合 $x \in p^{-1}(C)$，可得

$$(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta(S_A(x)) = (p\otimes \mathrm{Id}_A)(S_A\otimes S_A)\Delta(x) = (S_B\otimes S_A)(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta(x) \in S_B(C)\otimes S_A(A) \subseteq C\otimes A.$$

最后，我们需要证明 $\Delta(p^{-1}(C)) \subseteq p^{-1}(C) \otimes p^{-1}(C)$；由于 A 是余交换的，我们只需证明 $\Delta(p^{-1}(C)) \subseteq p^{-1}(C) \otimes A$。但现在，给定 $x \in p^{-1}(C)$，我们有

$$(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta(x_1)\otimes x_2 = p(x_1)\otimes x_{2_1}\otimes x_{2_2} = (\mathrm{Id}_B\otimes\Delta)(p\otimes \mathrm{Id}_A)\Delta(x) \in (\mathrm{Id}_B\otimes\Delta)(C\otimes A) \subseteq C\otimes A\otimes A$$

进而 $\Delta(x) \in p^{-1}(C) \otimes A$，因此 $p^{-1}(C)$ 在 Δ_A 下是封闭的，故它是 A的颜色 Hopf 子代数。现在我们给出一些结果，将 [22] 中针对 $\mathrm{Hopf}_{\Bbbk,\ \mathrm{coc}}$情形的结果加以推广。下面的引理 5.23 和引理 5.24 分别对应于 [22, 引理 2.5] 和 [22,引理 2.6]，它们的证明相同。为确保完备性，并说明相应的推广不存在问题，我们在此给出证明。

Lem引理 5.23。 给定态射 $p:\ A \to B$，其中 $A \to B$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，我们有以下结论：

1) 对所有颜色 ***Hopf*** 子代数 $C \subseteq B$, $p(p^{-1}(C)) \subseteq C$。

2) 对所有颜色 ***Hopf*** 子代数 $D \subseteq A$, $D \subseteq p^{-1}(p(D))$。

3) 对于所有颜色 ***Hopf*** 子代数 $C \subseteq B$，当且仅当存在某个 $D \subseteq A$ 颜色 ***Hopf*** 子代数时，$C = p(p^{-1}(C))$ $C = p(D)$。

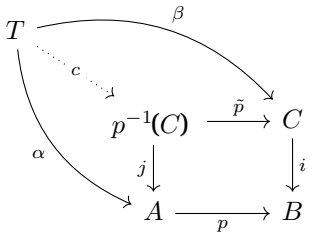
证明。如果 $x \in p^{-1}(C)$，即 $p(x_1) \otimes x_2 \in C \otimes A$，那么 $p(x) \in C$，故 1) 得证。回顾一下，如果D 是 A 的颜色 Hopf 子代数，那么根据注 5.3，$p(D)$ 是 B 的颜色 Hopf 子代数。如果$d \in D$，我们有 $(p \otimes \mathrm{Id}_A)\Delta(d) \in p(D) \otimes D \subseteq p(D) \otimes A$，于是 2) 也得证。最后，如果$C = p(p^{-1}(C))$，显然可以取 $D = p^{-1}(C)$；而如果 $C = p(D)$，其中D 是 A 的某个颜色 Hopf 子代数，那么由 2) 并应用 p 可得 $D \subseteq p^{-1}(p(D)) = p^{-1}(C)$，进而得到 $C = p(D) \subseteq p(p^{-1}(C))$；又由于由 1) 可知 $p(p^{-1}(C)) \subseteq C$，因此有 $C = p(p^{-1}(C))$，从而 3) 得证。□

引理 5.24. 给定 $p\colon\ A \to B$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，以及一个包含映射 $i:\ C \to B$ 属于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$，则该图表

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(C) & \xrightarrow{\tilde{p}} & C \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ A & \xrightarrow[p]{} & B \end{array}$$

是一个拉回 在$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$中，其中 j 是包含映射，$\tilde{p}$ 是 p 在 $p^{-1}(C)$上的限制。

证明。由引理 5.23 的 1) 可知，该图表是交换的。为验证泛性质，考虑两个态射 $\alpha\colon T\to A$ 和 $\beta\colon T\to C$，它们属于 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$，且满足 $p\circ\alpha=i\circ\beta$；下面证明 $\alpha(T)\subseteq p^{-1}(C)$。于是，将 $c\colon T\to p^{-1}(C)$ 视为以 α 为值域 $p^{-1}(C)$ 的态射，我们有 $j\circ c=\alpha$ 和 $i\circ\tilde{p}\circ c=p\circ j\circ c=p\circ\alpha=i\circ\beta$，因此 $\tilde{p}\circ c=\beta$，因为 i 是单射；显然，这个 c 是唯一的，因为必有 $j\circ c=\alpha$。



因此我们 证明 $\alpha(T)\subseteq p^{-1}(C)$。给定 $t\in T$，由于 α 是余代数态射，我们有

$$(p\otimes\mathrm{Id}_A)\Delta_A(\alpha(t))=(p\otimes\mathrm{Id}_A)(\alpha\otimes\alpha)\Delta_T(t)=(i\otimes\mathrm{Id}_A)(\beta\otimes\alpha)\Delta_T(t)\in C\otimes A,$$

那么该图表是一个拉回。 □

命题 5.25。考虑一个满射态射 $p\colon\ A\to B$ 在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中，以及一个包含映射$i\colon\ C\to B$ 在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$中。那么引理 *5.24* 的拉回中的态射 $\tilde{p}$也是满射。

证明。若我们计算 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 中映射对 (p,i) 的拉回，则得到引理 5.24 中的 $(p^{-1}(C)\ j,\tilde{p})$，我们希望证明当 p 是满射时，$\tilde{p}$ 也是满射。由于 $\tilde{p}$ 仅由 p 的限制给出，因此 $\tilde{p}$ 是满射当且仅当 $C=p(p^{-1}(C))$，这等价于证明：根据引理 5.23 的 3)，对于某个颜色 Hopf 子代数 D，有 $C=p(D)$，其中 C 是 B 的一个颜色 Hopf 子代数。我们知道，典范投影 $\pi\colon B\to B/BC^+$ 是一个商颜色左 B-模余代数。又由于 p 是一个颜色霍普夫代数态射，因此 $\pi\circ p$ 是一个颜色左 A-模余代数态射，从而 $A/\ker(\pi\circ p)$ 是一个商颜色左 A-模余代数。令 $D:=A^{\mathrm{co}\ {}^{A}\ker(\pi\circ p)}=\psi_A(A/\ker(\pi\circ p))$，根据定理 5.20，它是 A 的一个颜色霍普夫子代数。于是我们得到

$$A/AD^+=\phi_A(D)=\phi_A(\psi_A(A/\ker(\pi\circ p)))=A/\ker(\pi\circ p)$$

由定理 5.20 得，因此 $AD^+=\ker(\pi\circ p)$。于是，由于 p 是代数的满射态射，我们得到

$$Bp(D)^+=p(A)p(D^+)=p(AD^+)=p(\ker(\pi\circ p))=\ker(\pi)=BC^+$$

进而

$$\phi_B(C)=B/BC^+=B/Bp(D)^+=\phi_B(p(D))$$

因此，通过应用 ψ_B 并再次使用定理 5.20，我们得到 $C=p(D)$。 □

我们已证明，在 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 中，沿包含映射的拉回具有满射态射（即由引理 5.22 可知的正则满态射）的稳定性。现在，$\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 中的每个单射态射 $f\colon C\to B$ 都可分解为 $i\circ\phi$，其中 ϕ 是 C 与 $f(C)$ 之间的同构，而 i 是将 $f(C)$ 包含到 B 中的包含映射。现在，若考虑沿 f 对 p 作拉回，由于根据引理 5.24，右侧内部方块也是拉回，因此根据 [10, 命题 2.5.9]，左侧方块也是拉回。

$$\begin{array}{ccccc} A\times_B C & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & p^{-1}(f(C)) & \xrightarrow{j} & A \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ C & \xrightarrow[\phi]{} & f(C) & \xrightarrow[i]{} & B \end{array}$$

于是，由于 ϕ 是同构，$\tilde{\phi}$ 也是同构，并且由 $\tilde{p}\circ\tilde{\phi}=\phi\circ\alpha$ 可得 $\alpha=\phi^{-1}\circ\tilde{p}\circ\tilde{\phi}$。但现在，由于根据命题 5.25，$\tilde{p}$ 是满射，因此 α 也是满射。由此，正则满态射在 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathbf{Vec}_G)$ 中沿单射态射（即根据引理 5.22，单态射）进行拉回时保持正则性，引理 5.1 的 (3) 得证。我们得到了以下结果：

命题 5.26。 如果 G 是有限生成阿贝尔群且 $char\Bbbk \neq 2$ ，那么范畴$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$是正则的。

6. $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}$(V 的半阿贝尔条件 ec_G)

设 G 为有限生成阿贝尔群，且 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$。在 [25, 3.7] 中，给出了半阿贝尔范畴的一种等价刻画。要求 $\mathcal{C}$ 满足以下性质:

1) $\mathcal{C}$ 具有二元积和余积，以及一个零对象;

2) $\mathcal{C}$ 具有（分裂）单态射的拉回;

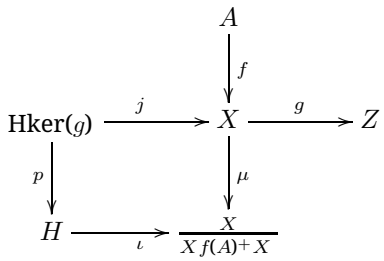
3) $\mathcal{C}$ 具有核的余核，并且每个核为零的态射都是单态射 ;

4) 分裂短五引理在 $\mathcal{C}$ 中成立;

5) 余核在拉回下保持稳定;

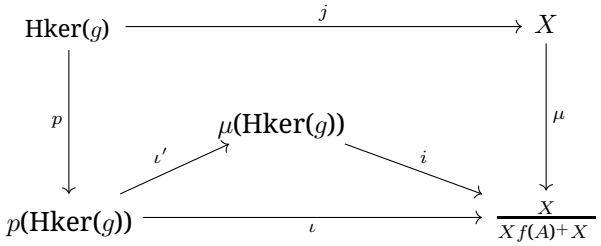
6) 核经余核得到的像是核。

对于 3) 的第二部分，我们注意到，由于态射 $f : A \to B$ 在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的范畴核由包含映射 $i : \mathrm{Hker}(f) \to A$ 给出，若这是零态射 $u_A \circ \epsilon_{\mathrm{Hker}(f)}$，那么给定 $x \in \mathrm{Hker}(f)$，有 $x = \epsilon(x)1_A$，并且同样有 $\mathrm{Hker}(f) = \Bbbk 1_A$，进而有 $\mathrm{Hker}(f)^+ = 0$。因此，既然我们知道向量空间 $\ker(f) = A(\mathrm{Hker}(f))^+A$，那么根据引理 5.22， f 是单射，或等价地说，是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的单态射。既然我们已经证明 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 是带基点的、有限完备的（根据注 4.5，它也是完备的）、余完备的、原模的且正则的，性质 1)-5) 即得（请回忆，对于一个带基点且有限完备的范畴 $\mathcal{C}$，性质 4) 等价于 $\mathcal{C}$ 的原型模性）。因此，只剩下证明核经余核得到的像是核。具体而言，我们要证明: 给定 $j : \mathrm{Hker}(g) \to X$，它是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中态射 $g : X \to Z$ 的核；以及 $\mu : X \to X/Xf(A)^+X$，它是 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中态射 $f : A \to X$ 的余核；存在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的态射 $p : \mathrm{Hker}(g) \to H$，以及 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中的核 $\iota : H \to X/Xf(A)^+X$，使得下图交换。



现在，如果我们考虑态射 $\mu \circ j$，我们知道它在 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中具有正则满态射-单态射分解，因为该范畴是正则的，即存在正则满态射 p 和单态射 ι，它们位于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 中，使得 $\mu \circ j = \iota \circ p$。但是，现在一般而言并非每个单态射都是核，因此我们不能自动得到 ι 是一个核。根据引理 5.22，我们知道 p 是满射，而 ι 是单射，于是有 $\iota = i \circ \iota'$，其中 i 是一个包含映射， ι' 是 $p(\mathrm{Hker}(g))$ 之间的同构，而且

$\iota(p(\mathrm{Hker}(g))) = \mu(j(\mathrm{Hker}(g))) = \mu(\mathrm{Hker}(g))$.



由推论 5.21 可知，Hker(g) 是 X 的正规颜色 Hopf 子代数，因此根据引理 5.4 的 2)，μ(Hker(g)) 是 $X/Xf(A)^+X$ 的正规颜色 Hopf 子代数，因为 μ 是满射。因此，包含映射 i 又是一个核，这由推论 5.21 可知；又因为 ι' 是同构，所以 ι 也是 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中的一个核。至此，证明完成。最后，我们得到了以下结果：

定理 6.1. 范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 是半阿贝尔范畴，条件是 G 为有限生成阿贝尔群且 $char\Bbbk \neq 2$。

6.1. 一些推论。设 G 为有限生成阿贝尔群且 char$\Bbbk \neq 2$。我们可以进一步证明关于 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 的其他结论；我们知道该范畴是半阿贝尔范畴。回顾 [11, 命题 5.1.2]，每个半阿贝尔范畴都是 Mal'cev 范畴，因此 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 是一个带有余等化子和零对象的正则 Mal'cev 范畴。由此，根据 [20, 推论 4.2]，我们知道 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中阿贝尔对象构成的范畴是阿贝尔范畴，我们将其记作 Ab(Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$))。因此，我们希望确定范畴 Ab(Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$))；为此，我们使用 [9, 定理 6.9]（另见 [13, 命题 9]）给出的刻画：在半阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$中，对象 C 是阿贝尔对象，当且仅当其对角态射 $\langle \mathrm{Id}_C, \mathrm{Id}_C\rangle : C \to C\times C$是正规单态射，即它是范畴 $\mathcal{C}$中某个态射的核。但是，在 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中，我们有 $C \times C = C \otimes C$和 $\langle \mathrm{Id}_C, \mathrm{Id}_C\rangle = (\mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta_C = \Delta_C$。因此，Ab(Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$)) 由那些余交换色 Hopf 代数组成，其余乘法是 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中的一个核。

定理 6.2。 $\mathrm{Ab}(\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G))$ 是交换且余交换的颜色霍普夫代数范畴。特别地，该范畴是阿贝尔的。

证明。给定 C in Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$)，我们知道 Δ 是单射，因此，若记 $\Delta = i \circ \Delta'$with $\Delta' : C \to$ Im(Δ) 为一个同构，且 i : Im(Δ) $\to C \otimes C$ 为包含映射，则有： Δ 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中的核，当且仅当 i 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中的核。此外，根据推论 5.21，i 是 Hopf$_{\mathrm{coc}}$(Vec$_G$) 中的核，当且仅当 Im(Δ) 是 $C \otimes C$ 的正规颜色 Hopf 子代数。若 C 是交换色 Hopf 代数，则 $C \otimes C$ 也是交换色 Hopf 代数，因此，根据注 5.3，作为 $C \otimes C$ 的颜色 Hopf 子代数的 Im(Δ) 由引理 5.4 的 3) 可知是正规的。另一方面，假设 Im(Δ) 是 $C \otimes C$的正规颜色 Hopf 子代数，即有 $\xi_{C\otimes C}(C \otimes C \otimes \mathrm{Im}(\Delta)) \subseteq \mathrm{Im}(\Delta)$ 成立。对于任意 a、b、$c \in C$，我们有

$$\begin{aligned}
\xi_{C\otimes C}(c \otimes 1_C \otimes a \otimes b) &= m_{C\otimes C}(m_{C\otimes C} \otimes S_C \otimes S_C)(\mathrm{Id} \otimes c_{C\otimes C, C\otimes C})(\Delta_{C\otimes C} \otimes \mathrm{Id})(c \otimes 1_C \otimes a \otimes b)\\
&= m_{C\otimes C}(m_{C\otimes C} \otimes S_C \otimes S_C)(\mathrm{Id} \otimes c_{C\otimes C, C\otimes C})(\phi(|c_2|, 1_G)c_1 \otimes 1_C \otimes c_2 \otimes 1_C \otimes a \otimes b)\\
&= m_{C\otimes C}(m_{C\otimes C} \otimes S_C \otimes S_C)(\phi(|c_2 \otimes 1_C|, |a \otimes b|)c_1 \otimes 1_C \otimes a \otimes b \otimes c_2 \otimes 1_C)\\
&= m_{C\otimes C}(\phi(|c_2|, |a|)\phi(|c_2|, |b|)\phi(1_G, |a|)c_1 a \otimes b \otimes S_C(c_2) \otimes S_C(1_C))\\
&= \phi(|c_2|, |a|)\phi(|c_2|, |b|)\phi(|b|, |c_2|)c_1 a S_C(c_2) \otimes b = \phi(|c_2|, |a|)c_1 a S_C(c_2) \otimes b\\
&= (\xi_C \otimes \mathrm{Id}_C)(c \otimes a \otimes b).
\end{aligned}$$

因此，对于每个 a、$c \in C$，我们有

$$\mathrm{Im}(\Delta) \ni \xi_{C\otimes C}(c \otimes 1_C \otimes \Delta(a)) = (\xi_C \otimes \mathrm{Id}_C)(\mathrm{Id}_C \otimes \Delta)(c \otimes a)$$

然后存在 $x \in C$，使得

$$\Delta(x) = (\xi_C \otimes \mathrm{Id}_C)(\mathrm{Id}_C \otimes \Delta)(c \otimes a).$$

因此我们得到

$$x = l_C(\epsilon_C \otimes \mathrm{Id}_C)\Delta(x) = l_C(\epsilon_C \otimes \mathrm{Id}_C)(\xi_C \otimes \mathrm{Id}_C)(\mathrm{Id}_C \otimes \Delta)(c \otimes a)$$
$$= l_C(\epsilon_{C\otimes C} \otimes \mathrm{Id}_C)(\mathrm{Id}_C \otimes \Delta)(c \otimes a) = l_C(\epsilon_C \otimes \mathrm{Id}_C)(c \otimes a)$$

但我们还有

$x = r_C(\mathrm{Id}_C \otimes \epsilon_C)\Delta(x) = r_C(\mathrm{Id}_C \otimes \epsilon_C)(\xi_C \otimes \mathrm{Id}_C)(\mathrm{Id}_C \otimes \Delta)(c \otimes a) = \xi_C(c \otimes a_1)\epsilon_C(a_2) = \xi_C(c \otimes a)$,

然后

$$\xi_C(c \otimes a) = l_C(\epsilon_C \otimes \mathrm{Id}_C)(c \otimes a) \text{ for every } a, c \in C.$$

因此，根据引理 5.4 的 3)， C 是一个交换色霍普夫代数。 □

半阿贝尔范畴这一概念的提出，旨在涵盖群的典型代数性质；但人们注意到，群的许多重要方面并未被这一更一般的背景所涵盖，于是便产生了对这一概念的强化。我们回顾一下：具有有限极限的范畴 $\mathcal{C}$ 称为代数相干，如果对于每个态射 $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$ ，基变换函子 $f^*: \mathrm{Pt}_Y(\mathcal{C}) \to \mathrm{Pt}_X(\mathcal{C})$都是相干的，即保持有限极限和联合强满态对（见 [18, 定义 3.1]）。在 [18, 定理 6.18 和 6.24]中证明了，代数相干的半阿贝尔范畴满足条件 (SH) 和 (NH)，并且是周阿贝尔且强原模的，因此它们显著强于一般的半阿贝尔范畴。因此，值得探究范畴 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 是否代数相干，其中 G 仍为有限生成阿贝尔群，且 $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$。我们从 [15] 回顾，有限完备范畴 $\mathcal{C}$ 称为局部代数笛卡尔闭，若对于每个 $f: X \to Y$in $\mathcal{C}$，基变换函子 $f^*: \mathrm{Pt}_Y(\mathcal{C}) \to \mathrm{Pt}_X(\mathcal{C})$都是左伴随；并且根据 [18, 定理 4.5]，若 $\mathcal{C}$ 是局部代数笛卡尔闭的，则它是代数相干的。我们以如下结果作结：

命题 6.3. 余交换颜色霍普夫代数范畴是作用可表示的，且局部代数笛卡尔闭。

证明. 由 [34, 命题 3.2] （另见 [8]）可知，范畴 $\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 是笛卡尔闭的，因为 Vec_G 是对称幺半闭范畴（例如参见 [17]）。因此，由于 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G) = \mathrm{Grp}(\mathrm{Comon}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G))$，根据 [23,命题 5.3]，$\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 是局部代数笛卡尔闭的。此外，正如 [12, 定理 4.4] 所示，只要一个笛卡尔闭范畴是半阿贝尔的，其中的内群范畴便总是作用可表示的；因此 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 也是作用可表示的。□

致谢。本研究始于作者在 A. Ardizzoni 指导下完成的硕士论文。在该论文中，我们通过扩展 [22] 中针对 $\mathrm{Hopf}_{\Bbbk,\mathrm{coc}}$ 得出的结果，证明了 $\mathrm{Hopf}_{\mathrm{coc}}(\mathrm{Vec}_G)$ 的完备性、余完备性和原型模性。谨此感谢 A. Ardizzoni 仔细阅读本文，并在本研究开展过程中提出许多有意义的意见。也感谢 A. S. Cigoli 提供的一些有益建议。

参考文献

[1] J. Adámek、J. Rosický，局部可呈示与可及范畴。伦敦数学会讲义系列， 189 1994 12 。

[2] 剑桥大学出版社，剑桥，。A. L. Agore，余代数、双代数与霍普夫代数的极限。《美国数学会会刊》139 3，855 2011 863 7 ( )，第 – 期。

[3] 39 2011 4, 1476 1481 9 A. L. Agore，霍普夫代数的

[4] 范畴构造。《代数通讯》( )，第 – 期。M. Aguiar、S. Mahajan，幺半函子、物种与霍普夫代数。序言由 Kenneth Brown、Stephen Chase 和 André Joyal 撰写。CRM 专著丛书，29。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010。2, 3, 7, 18

[5] 220 1999 1, 188 224 6 H. Albuquerque、S.

[6] 367 2015 6, 4207 4233 Majid，八元数的拟代数结构。《代数杂志》( )，第 – 期。E. Aljadeff、O. David，关于正则 G-分次。《美国数学会汇刊》( )，第 – 期。

[7] 13 N. Andruskiewitsch、I. Angiono、D. Bagio，带基点的颜色霍普夫代数实例。《代数及其应用杂志》(2014)，第2期，1350098，共28页。2, 5, 6, 17, 18, 19

[8] 32, 600 610 1974 28 M. Barr，交换环上的余代数，《代数杂志》– ( )。

[9] F. Borceux，半阿贝尔范畴综述。载于《伽罗瓦理论、霍普夫代数与半阿贝尔范畴》，Fields Institute 通讯丛书第43卷，第27–60页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004。27

[10] F. Borceux, 《范畴代数手册》。第1卷：基础范畴论。《数学及其应用百科全书》，
50 1994 4, 7, 21, 25 。剑桥大学出版社，剑桥，。F. Borceux、D.
[11]
Bourn, 《Mal’cev、原模、同调与半阿贝尔范畴》。《数学及其应用》，566。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，2004。
4, 27[12] F. Borceux、G. Janelidze、G.M. Kelly，内部对象作用，《卡罗尔大学数学评论》46 (2) (2005) 235–255。28[13] D. Bourn，
原模范畴中的正规子对象与阿贝尔对象，《代数杂志》228 (2000) 143–164。27[14] D. Bourn、M. Gran，正则、原模与阿贝尔范畴。
《范畴基础》，165–211，《数学及其应用百科全书》，97, 2004 13
[15]
剑桥大学出版社，剑桥，。D. Bourn、J.R.A. Gray，代数指数化的若干方面。《比利时数学会 Simon Stevin 通报》19 (2012)，第5期，
823–846。28[16] T. Brzezinski、R. Wisbauer，《余环与余模》。伦敦数学会讲义系列，309。剑桥大学出版社，剑桥，2003。4[17]
S. Caenepeel、T. Guédénon，关于相对霍普夫模的上同调。《代数通讯》33 11，4011 2005 4034 28 ( )，第 – 期。[18] A.S. Cigoli、
J.R.A. Gray、T. Van der Linden，代数相容范畴，《理论与应用范畴》30 (54) (2015 1864 1905 28) –。P. Etingof、S. Gelaki、
[19]
D. Nikshych、Dmitri、V. Ostrik，《张量范畴》。《数学调查与专著》，205。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。16[20]
M. Gran，Maltsev范畴中的中心扩张与内部群胚，《纯粹与应用代数杂志》155 (2001) 139–166。27[21] M. Gran、G. Kadjo、J.
Vercruysse，余交换霍普夫代数范畴中的扭理论。《应用范畴结构》 24 2016 3, 269 282 2 ( )，第 - 期。
[22]
M. Gran、F. Sterck、J. Vercruysse，Takeuchi 定理的一个半阿贝尔扩展。《纯粹与应用代数杂志》
223 2019 10, 4171 4190 1, 2, 7, 13, 14, 16, 24, 28 ( )，第 – 期。J.R.A. Gray，一般范畴中的代数指数化，《应用范畴结构》
[23]
20 2012 543 567 28 ( )，–。Y.
[24]
9 1979
Hiroshi，关于余交换霍普夫代数的群论性质。《广岛数学杂志》( )，第1期，179 200 24–。[25] G. Janelidze、L. Márki、W. Tholen，
半阿贝尔范畴。《1999年范畴论》（科英布拉）。《纯粹与应用代数杂志》 168 2002 2 3, 367 386 1, 2, 26 ( )，第 - –
[26]
期。S. Mac Lane，《工作数学家的范畴论》。第二版。《数学研究生教材》，5。Springer-Verlag，纽约，1998。4[27] A.
Masuoka，超仿射群与超形式群中的基本对应。《纯粹与应用代数杂志》 202 2005 1 3, 284 312 2, 16 ( )，第 - – 期。
[28]
C. Năstăsescu、F. van Oystaeyen，《分次环理论》。《北荷兰数学图书馆》，28。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-纽
约， 1982 5 。C. Năstăsescu、B. Torrecillas，分次余代数。《筑波数学杂志》
[29]
17 1993 2, 461 479 5 ( )，第 – 期。K. Newman，
[30]
余交换霍普夫代数中双理想与子霍普夫代数之间的对应。《代数杂志》 36 1975 1, 1 15 2, 14 ( )，第 – 期。H-E.
[31]
Porst，霍普夫代数的形式理论第一部分：幺半范畴中的霍普夫幺半群。《数学问题》 38 2015 5, 631 682 2, 9, 12 ( )，第 – 期。
[32]
H-E. Porst，关于霍普夫代数范畴的子范畴。《阿拉伯科学与工程杂志》
36 2011 6, 1023 1029 9 ( )，第 – 期。
[33] 212 2008 11, 2547 2554 12,
H-E. Porst，霍普夫代数的泛构造。《纯粹与应用代数杂志》( )，第 – 期。13
[34] 31 2008 2, 127 139 28 H-E. Porst，
[35]
49
关于幺半群、余幺半群与双幺半群范畴。《数学问题》( )，第 – 期。D. E. Radford，《霍普夫代数》。《结与万物丛书》，。World
Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，哈肯萨克，新泽西州，2012。4
[36] 20, 712 720 1979 18 M. Scheunert，《广义李代数》。《数学物理
[37]
杂志》– ( )。M. E. Sweedler，《霍普夫代数》。《数学讲义系列》。W. A. Benjamin, Inc.，纽约
1969 4, 21 。C. Vespa、
[38]
M. Wambst，关于余交换霍普夫代数范畴的若干性质。《西北欧数学杂志》4 (2018)，21–37。7

都灵大学数学系“G. Peano”，卡洛·阿尔贝托路 10 号，I-10123 都灵，意大利电子邮件地址：
andrea.sciandra@unito.it