arXiv:2305.04668v1 [math.AT] 8 May 2023

拓扑基本群胚。II. 基本群胚的作用范畴

ROHIT DILIP HOLKAR、MD AMIR HOSSAIN 和 DHEERAJ KULKARNI

摘要。设 X 是道路连通、局部道路连通且半局部单连通的空间。按照本系列第一篇文章中的定义，记其拓扑化基本群胚为 $\Pi_1(X)$。设 E 为 $\Pi_1(X)$-空间所成的范畴，其中动量映射均为局部同胚。我们证明，该范畴与 X 的覆盖空间范畴同构。利用这一点，我们给出 E 中基本群胚的自由作用或真作用的不同刻画。

目录

引言 1
1. 预备知识 2 1.1. 拓扑群胚 2 1.2. 群胚的作用 3 2. 基本群胚的作用范畴与自由作用 5 2.1. 覆盖空间作为 $\Pi_1(X)$-空间 5 3. 真作用 10 3.1. 作用的动力学 10 3.2. 基本群胚的适当作用 12 参考文献 13

引言

在前一篇文章 [9]，中，我们以一种自然的方式为局部道路连通且半局部单连通空间的基本群胚赋予了拓扑。我们详细讨论了底层空间的拓扑与基本群胚的拓扑之间的相互关系。在本文中，我们将注意力转向基本群胚的作用范畴。

覆盖空间带有基本群胚的自然作用，即通过对提升路径求值来定义（命题 2.3）。这已是一个标准观察，例如[2], [3],[4] 和 [13]。这种作用与构造覆盖空间之间的关系，一直是上述文献关注的核心。我们采用不同的方法，希望将这些作用作为局部紧群胚在空间上的作用来研究。

我们还希望弄清楚这些作用何时是自由且真。我们研究这一问题的动机，是希望研究与 $\Pi_1(X)$-空间相关联的 C*-对应（[11],[8],[16]）。为了构造这些 C*-对应，

，

我们需要在 $\Pi_1(X)$ 上构造 Haar 系统，并理解自由性和真性

关键词与短语。基本群胚、拓扑群胚、覆盖空间、群胚作用、真作用。学科分类。14H30, 22A22, 57S, 37C85.

$\Pi_1(X)$-空间。我们将在后续文章中研究当前系统和 Haar 系统中的 $\Pi_1(X)$-作用。

我们注意到，覆盖空间构成了基本群胚作用的一个有趣范畴。定理 2.9 将覆盖空间刻画为$\Pi_1(X)$-空间。定理 2.12 将覆盖空间范畴描述为某些 $\Pi_1(X)$-空间构成的范畴。我们在这个范畴中优雅地描述了自由作用（命题 2.11）和真作用（定理 3.6）。在研究真作用的同时，我们还描述了 $\Pi_1(X)$中的小紧集（参见命题 3.4 之后及公式 3.5 后的讨论）；这一描述对实际应用或计算可能有所帮助。

文章结构：在第 1 节中，我们讨论预备知识：拓扑群胚（§ 1.1）及其作用（§ 1.2）。本节还回顾了本系列前一篇文章中的一些必要事实。

在第 2 节中，我们证明第一个主要结果——定理 2.9 和 2.12。该结果指出，空间上的覆盖空间范畴可以与 $\Pi_1(X)$-空间范畴等同，其中动量映射是局部同胚。我们刻画了自由作用（命题 2.11）。

在最后一节中，我们首先证明作用的动力学映射（等式 (1.7)）是局部同胚（命题 3.4）；随后利用这一观察刻画基本群胚的真作用（定理 3.6）。

1. 预备知识

1.1. 拓扑群胚。在这第二篇文章中，我们继续遵循第一篇文章 [9] 中确立的约定。不过，下面快速回顾一下群胚的相关记号：对我们而言，群胚 G 是一个小范畴，其中每个箭头都可逆。我们滥用记号，将单位元集合 $G^{(0)}$ 视为 G 的子集。容易验证，对于元素 $\gamma \in G$，$\gamma^{-1}\gamma = s(\gamma)$ 和$\gamma\gamma^{-1} = r(\gamma)$ 分别是 γ 的值域和源。纤维积 $G \times_{s,\ G^{(0)},\ r} G = \{(\gamma,\ \eta) \in G \times G : s(\gamma) = r(\eta)\}$ 称为所有可复合箭头对的集合，记作 $G^{(2)}$。

群胚 G 称为拓扑群胚，如果它带有一种拓扑，使得源映射 $s\colon G \to G^{(0)}$、目标映射 $r\colon G \to G^{(0)}$、求逆映射 $\mathrm{inv}\colon G \to G$和乘法 $m\colon G^{(2)} \to G$ 都是连续的；这里，单位空间赋予子空间拓扑，而 $G^{(2)} \subseteq G \times G$ 赋予子空间拓扑。

如果拓扑是局部紧的（分别是豪斯多夫的或第二可数的），并且单位空间是豪斯多夫的，则称拓扑群胚 G 为局部紧的（或豪斯多夫的，或第二可数的）。对我们而言，局部紧空间不一定是豪斯多夫的，参见 [9]。不过，除非读者特别关注非豪斯多夫情形，否则可将局部紧理解为局部紧豪斯多夫。第二可数空间或仿紧空间均假定为豪斯多夫空间。关于局部紧群胚及其作用的基础知识，读者可参阅 Renault 的著作 [14] 和 Tu 的文章 [16] 。

给定单位元 $x,\ y \in G^{(0)}$，我们定义 G 的以下闭子空间：

$$G^x := r^{-1}(x), \quad G_y := s^{-1}(y) \quad \text{and} \quad G_y^x := G^x \cap G_y.$$

事实上，G_x^x 是一个拓扑群，称为 x 处的各向同性群。一般地，对于集合 $A,\ B \subseteq G^{(0)}$，我们定义

$$G^A := r^{-1}(A), \quad G_B := s^{-1}(B) \quad \text{and} \quad G_B^A := G^A \cap G_B.$$

观察 1.1。 假设 γ 是群胚 G中的一个箭头；记 $x = s(\gamma)$ 和 $y = r(\gamma)$。那么，x 和 G_x^y 处的各向同性群的基数相同。这是

因为该函数

$$\phi\colon G_x^x \to G_x^y, \quad \eta \mapsto \gamma\eta \quad \text{for } \eta \in G_x^x$$

is 一个双射。该函数的逆函数为 ന്ൽക്ക n by

$$\phi^{-1}\colon G_x^y \to G_x^x, \quad \eta' \mapsto \gamma^{-1}\eta' \quad \text{for } \eta' \in G_x^y.$$

接下来我们讨论基本群胚。考虑一个空间 X。对于一个集合 $U \subseteq X$，我们用 PU 表示 U中所有路径构成的集合。对于路径 $\gamma \in PX$， $\gamma(0)$称为 γ的初始点或起点， $\gamma(1)$称为终点。对于像之前一样的 γ， γ^-表示与 γ相反的路径。路径的拼接记为 $\square$。 X 的基本群胚记为 $\Pi_1(X)$。 X在 $x \in X$ 处的基本群记为 $\pi_1(X, x)$。我们将使用这样一个事实： $\Pi_1(X)$是 PX 关于端点固定路径同伦等价关系的商。如果 X 道路连通，我们就简单地写作 $\pi_1(X)$，而不写作 $\pi_1(X, x)$。最后，由于我们将群胚中的态射方向规定为从右向左，因此我们认为路径从右侧出发、在左侧结束，这与标准约定相反。

例 1.2（基本群胚）。设 X 是一个局部道路连通且半局部单连通的空间。于是，我们在前一篇文章 [9], 中证明了， X 的基本群胚 $\Pi_1(X)$ 可以赋予一种拓扑，使其成为一个拓扑群胚。为 X 中所有路径的集合 PX 配备紧开拓扑。由紧开拓扑在 $\Pi_1(X)$ 上诱导的商拓扑使基本群胚成为拓扑 [9, 定理 2.8]。我们称这种商拓扑为 *CO'* 拓扑。

还有另一种自然的方式可以如下定义 $\Pi_1(X)$ 的拓扑。对于道路连通且相对无本质的开集 U, $V \in X$，以及一条路径 γ，其中 γ 位于 X 中，起点属于 V，终点属于 U，定义 $\Pi_1(X)$ 的以下子集。

$$N([\gamma], U, V) := \{[\delta\square\gamma\square\omega] : \delta \in PU \text{ with } \delta(0) = \gamma(1), \text{ and } \omega \in PV \text{ with } \omega(1) = \gamma(0)\}.$$

那么，上述集合构成了 $\Pi_1(X)$ 上一个拓扑的基，我们称之为 *UC* 拓扑。 [9] 中的命题 2.4 表明，对于一个局部道路连通且半局部单连通的空间 X，基本群胚上的 UC 拓扑与 CO' 拓扑相同。基本群胚不是一个 étale 群胚，而是一个局部平凡的（[9, 定义 1.4]）群胚。

在群胚 $\Pi_1(X)$ 中，值域映射和源映射（它们分别基本上是在 1 和 $0 \in [0, 1]$ 处的取值）是开映射 [9, 推论 2.7]。单位空间 $\Pi_1(X)^{(0)}$ 由常值路径组成，可以与 X [9, 推论 2.9(1)] 等同。假设 X 也是道路连通的。那么，对于单位 $x \in X$，纤维 $\Pi_1(X)_x$ 或 $\Pi_1(X)^x$ 可以与 X 的单连通覆盖空间等同（可利用始于 x 或终于 x 的路径构造） [9, 推论 2.9(2)]。此外， x 处的各向同性群 $\Pi_1(X)_x^x$ 基本上是 X 的基本群，并且是离散的 [9, 推论 2.9(3)]。

基本群胚是豪斯多夫的（或局部紧的，或第二可数的）当且仅当底层空间也具有相应性质 [9,第 3] 节。

示例 1.3（群的基本群胚）。在前面的示例 1.2 中，进一步假设 X 是一个拓扑群。令 H 为其覆盖群，其同态 $p\colon H \to X$ 是覆盖映射。于是 H 通过 p 作用于 X。 [9] 中的定理 2.21 证明，拓扑基本群胚 $\Pi_1(X)$ 与上述 H 在 X 上的作用所对应的变换群胚 $H \ltimes X$ 同构。

1.2. **群胚的作用**。

定义 1.4. 设 G 是一个局部紧豪斯多夫群胚，且设 X 是一个带有连续动量映射 $r_X\colon X \to G^{(0)}$ 的拓扑空间。我们称 X 为一个

左 G-空间（或从左侧在 X 上作用的 G）是指存在一个连续映射 $\sigma\colon G \times_{s,G^{(0)},r_X} X \to X$，满足以下条件：

(1) $\sigma(r_X(x), x) = x$ for all $x \in X$;
(2) if $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$ and $(\eta, x) \in G \times_{s,G^{(0)},r_X} X$, then $(\gamma\eta, x), (\gamma, \sigma(\eta, x)) \in G \times_{s,G^{(0)},r_X} X$ and $\sigma((\gamma\eta), x) = \sigma(\gamma, \sigma(\eta, x))$.

我们将滥用记号 $\sigma(\gamma, x)$，并简写为 $\gamma\cdot x$ 或 γx。我们常说「X 是一个左（或右） G-空间」，其中 G 是一个群胚；在此，默认 r_X （分别为左映射）是动量映射。值域（或源）映射是群胚在自身上的左（分别为右）乘法作用的动量映射。

一个群胚 G 从左侧按如下方式作用于其单位空间：对于 $\gamma \in G$ 和$x \in G$，当且仅当 $s(\gamma) = x$ 时，该作用有定义，其定义为 $\gamma x = r(\gamma)$。$G^{(0)}$ 上的恒等映射是这一作用的动量映射。类似地，可以定义 G在 $G^{(0)}$ 上的右作用。

给定 G-空间 X和 Y，等变映射 是指函数 $f\colon X \to Y$，满足 $r_Y \circ f = r_X$，且对所有可复合对 $(\gamma, x) \in G \times_{s,G^{(0)},r_X} X$，都有 $f(\gamma x) = \gamma f(x)$。

例 1.5（变换群胚）。对于群胚 G 在空间 X 上的连续（右）作用，可以构造变换群胚，记作 $X \rtimes G$。该群胚的底层空间为纤维积 $X \times_{s_X,G^{(0)},r} G$；$X \rtimes G$ 中的两个元素 (x, g) 和 (y, t) 可复合，当且仅当 $y = x\cdot g$，其复合运算定义为 $(x, g)(y, t) := (x, gt)$；(x, g) 的逆元定义为 $(x, g)^{-1} := (x\cdot g, g^{-1})$。对于左 G-空间 Y，变换群胚的定义类似，记作 $G \ltimes Y$。

接下来给出一个刻画，说明哪些空间可以由变换群胚作用。

引理 1.6 （ [6]中的引理 2.7）。设 $G \ltimes X$ 是群胚 G 在空间 X上的一个作用所对应的变换群胚。那么，$G \ltimes X$ 作用于空间 Y，且以 $\rho\colon Y \to X$为动量映射，当且仅当 ρ 是一个 G-等变空间映射。因此，G-等变映射 $\rho\colon Y \to X$与 $G \ltimes X$-空间 Y之间存在一一对应关系。

设 X 是群胚 G的一个 G-空间。在研究群胚作用时，下面这个映射

$$a\colon G \times_{s,G^{(0)},r_X} X \to X \times X, \quad a\colon (\gamma, x) \mapsto (\gamma x, x) \tag{1.7}$$

很有用。虽然这个映射没有标准名称，但在本文中，我们称它为该作用的运动学映射[1] ，或称运动学映射。 [9] 中的观察 2.10 表明，当 $\Pi_1(X)$作用于其单位空间时，若 X 是局部道路连通且半局部单连通的空间，则该作用的运动学映射是一个局部同胚。

引理与定义 1.8。 设 G 是一个作用于空间 X上的群胚。那么以下陈述等价：

(1) 作用的运动学映射是一一映射。*(2)* 对每个 $x \in X$，稳定子 $(G \ltimes X)_x^x$ 是平凡群。

如果上述条件中任意一项成立，我们称 X 上的 G-作用自由。

这是一个标准事实，上述引理的证明留给读者。

空间映射 $f\colon X \to Y$称为真映射，如果 $f^{-1}(K)$ 是紧的，只要 $K \subseteq Y$是一个紧集。

[1]欢迎提出更好的名称!

引理与定义 1.9。 设 G 作用于局部紧豪斯多夫空间 X的局部紧豪斯多夫群胚。则以下陈述等价:

(1) 作用的运动学映射是一个真映射; *(2)* 对于 X 的任意一对紧子集 T、S，集合 $\{\gamma \in G:\ \gamma T \cap S \neq \emptyset\}$ 是 G 的一个紧集。

如果上述任一条件成立，则称 G 在 X 上的作用是真的。此时，变换群胚 $G \ltimes X$ 称为真变换群胚。

上一个引理的证明也是标准的，例如参见 [17, 命题 2.17]。如果群胚 G 在单位空间上的作用是真作用，则称该群胚为真群胚。

观察 1.10。 如果群胚 G 在空间 X 上真作用，那么任意点 $x \in X$ 处的各向同性群都是紧的；因为它是作用的运动学映射下 $(x,\ x)$ 的原像。

2. 基本群胚的作用范畴与自由作用

定义 2.1。 设 X 和 Y 是空间，且 $f\colon Y \to X$ 是一个连续满射。我们称 f 具有

(1) 路径提升性质（或唯一的路径提升性质），如果对于任意路径 $\gamma\colon \mathbb{I} \to X$ 和一点 $y \in f^{-1}(\gamma(0))$，存在一条（分别地，唯一的）提升路径 $f\colon \mathbb{I} \to Y$，其起点为 y，且 $f \circ f = \gamma$。 (2) 同伦提升性质（或唯一的同伦提升性质），如果 f 具有路径提升性质（分别地，唯一的路径提升性质），并且对于给定的两条路径 γ、$\alpha\colon \mathbb{I} \to X$，满足 $\gamma(0) = \alpha(0)$ 且 $\gamma(1) = \alpha(1)$；一个关于 γ 的端点固定同伦 $\Gamma\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$，满足 α；以及一点 $y \in f^{-1}(\gamma(0))$，存在一个函数（分别地，唯一的函数）$\tilde{\Gamma}\colon \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to \tilde{Y}$，满足：$\Gamma|_{\{0\}\times\mathbb{I}}$ 是 $\tilde{\gamma}$ 的提升（分别地，唯一提升），且起点为 $y \in Y$；$\Gamma|_{\{1\}\times\mathbb{I}}$ 是 $\tilde{\alpha}$ α 的提升（分别地，唯一提升），且起点为 $y \in Y$；并且 $f \circ \Gamma = \Gamma$。

众所周知，覆盖映射具有唯一的路径提升性质和唯一的同伦提升性质。 [5] 中的第 5-6A 章命题 3 指出，具有唯一路径提升性质的局部同胚也具有唯一同伦提升性质。

注2.2（唯一的路径提升性质的函子性）。设 $Y_1 \xrightarrow{p_1} X \xleftarrow{p_2} Y_2$ 是两个具有唯一路径提升性质的映射。假设 $f\colon Y_1 \to Y_2$ 是连续映射，且 $p_1 = p_2 \circ f$。给定 X 中的一条路径 γ，取 $y_1 \in Y_1$ 使得 $p_1(y_1) = \gamma(0)$。令 $y_2 = f(y_1)$。若 $\tilde{\gamma}_{y_1}$ 是 Y_1 中从 y_1 出发的 γ 的唯一提升，则 $f \circ \tilde{\gamma}_{y_1}$ 是 Y_2 中从 y_2 出发的 γ 的唯一提升，因为 $p_1 = p_2 \circ f$。

2.1. 覆盖空间作为 $\Pi_1(X)$-空间。 设 X 是局部道路连通且半局部单连通的空间，$\mathrm{c}\colon Y \to X$ 是一个覆盖映射。对于一条路径$\gamma \in PX$ 以及 $y \in \mathrm{c}^{-1}(\gamma(0))$，我们用 $\tilde{\gamma}_y$ 表示以 y为起点的 γ 的唯一提升。由于 c 也具有唯一同伦提升性质，每一对 $([\gamma],\ y)$（其中 γ 是 X 中的一条路径，且 $y \in \mathrm{c}^{-1}(\gamma(0))$）都确定唯一元素 $[\tilde{\gamma}_y] \in \Pi_1(Y)$。利用这一观察，我们如下定义 $\Pi_1(X)$ 在 Y 上的一个（左）作用:

(i) c 是该作用的动量映射; (ii) 对于纤维积 $\Pi_1(X) \times_{s,\ X,\ \mathrm{c}} Y$ 中的每一对 $([\gamma],\ y)$，作用 $[\gamma]y := \tilde{\gamma}_y(1)$。

为清楚起见，纤维积 $\Pi_1(X)\times_{s,\ X,\ \mathrm{c}} Y = \{([\gamma],\ y) \in \Pi_1(X) \times Y : \gamma(0) = \mathrm{c}(y)\}$。

我们将基本群胚 $\Pi_1(X)$在 Y 上的这一作用称为群胚在覆盖空间上的左 作用。类似地，可以定义右作用。

请注意，对于任何具有唯一路径提升性质和同伦提升性质的映射，一般都可以定义最后一种作用。

对于覆盖映射 $\mathrm{c}\colon\ Y \to X$，点的均匀覆盖邻域具有与 Hatcher [7] 中相同的标准含义。考虑均匀覆盖的开集$U \subseteq X$；写作 $\mathrm{c}^{-1}(U) = \sqcup_\alpha \tilde{U}_\alpha$，其中每个 $\tilde{U}_\alpha$ 在 c 下都与 U 同胚。我们称˜每个 U_α 为 U 上的一个切片。由于均匀覆盖邻域构成 X 拓扑的一个基，切片也构成 Y 拓扑的一个基。

命题 2.3。设 X 是一个局部道路连通且半局部单连通的空间，并且$\mathrm{c}\colon\ Y \to X$ 是一个覆盖映射。

(1) $\Pi_1(X)$ 对 Y 的作用是连续的。*(2)* $y \in Y$的稳定子是基本群 $\pi_1(X,\mathrm{c}(y))$的子群$\mathrm{c}_*(\pi_1(Y,y)) \simeq \pi_1(Y,y)$；这里$\mathrm{c}_*$ 是c所诱导的基本群（群胚）同态。*(3)* 假设 Y 也是道路连通的。那么， $\Pi_1(X)$ 对 Y 的作用是自由的，当且仅当 Y 是单连通的。

证明。 (1)：动量映射 c 是连续的。因此，我们只需证明映射

$$\sigma\colon \Pi_1(X)\times_{s,X,\mathrm{c}} Y \to Y,\quad \sigma\colon ([\gamma],y)\mapsto [\gamma]y := \tilde{\gamma_y}(1)$$

是连续的。设 $W \subseteq Y$是给定的开集。给定一点$([\gamma],y) \in \sigma^{-1}(W)$，我们构造一个基本开邻域 Q，使其包含$([\gamma],y)$，且满足 $Q \subseteq \sigma^{-1}(W)$，从而证明连续性 σ。

令 y' 表示 $\tilde{\gamma}_y(1)$。因此， $\tilde{\gamma}_y$ 始于 y，终于 $y' \in W$。在c(y′)和c(y)的某些均匀覆盖邻域上，分别选取道路连通的相对本质切片 V和 U。此外，由于切片构成 Y拓扑的一个基，我们可以选取 $V \subseteq W$。于是

$$Q := \big(N([\gamma],\mathrm{c}(V),\mathrm{c}(U))\times U\big) \cap \big(\Pi_1(X)\times_{s,X,\mathrm{c}} Y\big)$$

是 $\Pi_1(X)\times_{s,X,\mathrm{c}} Y$ 中 $([\gamma],y)$ 的一个非空基本开邻域，并且显然 $\sigma(Q) = V \subseteq W$。

(2)：这里我们基本上想要描述 X 中以 c(y) 为起点、能够提升为 y 处环路同伦类的路径同伦类。这是一个标准结果， [7,命题 1.31] , 指出，以 c(y) 为起点的这类路径同伦类恰好构成子群 $\mathrm{c}_*(\pi_1(Y,\ y)) \subseteq \pi_1(X,\ \mathrm{c}(y))$。

(3)：该作用是自由的当且仅当 Y 中每一点的稳定子都是平凡的。根据上面的 (2)，这意味着该作用是自由的当且仅当对于每个 $y \in Y$，$\mathrm{c}_*(\pi_1(Y,y))$ 都是 $\pi_1(X,\mathrm{c}(y))$ 的平凡子群。这当且仅当 Y 是万有覆盖空间时成立。.□

注记 2.4. 在命题 2.3 中，设 $\alpha\colon\ \Pi_1(X)\times_{s,X,\mathrm{c}} Y \to Y$表示 $\Pi_1(X)$ 在 Y 上的作用。对于 $x \in X$，设 α_x 为该作用在 $\pi_1(X,x) \subseteq \Pi_1(X)$ 上的限制。然后注意到，该命题中 (2) 的证明还表明， α 和 α_x 的各向同性群相同。

命题 2.3 描述了覆盖空间可视为 $\Pi_1(X)$-空间（其中覆盖映射充当作用的动量映射）。但是，并非每个 $\Pi_1(X)$-空间都能成为覆盖空间，因为我们很容易构造出一些 $\Pi_1(X)$-空间，其中

动量映射不是局部同胚，见例 2.10。不过，若额外假设作用的动量映射是 étale[2]，则可得到命题 2.3 的逆命题，这也是我们的下一个主要结果——定理 2.9。在该定理中，我们还给出了 $\Pi_1(X)$-空间的其他刻画。接下来，我们将讨论证明定理 2.9 所需的一些引理。

引理 2.5。设 X 是一个局部道路连通且半局部单连通的空间。设 $p\colon\ Y \to X$ 是一个开满射；假设 p 具有唯一同伦提升性质。那么 p 是一个覆盖映射。

证明。设 $x \in X$，并设 U 是 x 的一个道路连通且相对无关紧要的邻域。令 $\mathrm{P}U_x$ 为 U 中所有以 x 为起点的路径构成的集合。现在，对于给定的 $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$，定义集合

$$\tilde{U}_{\tilde{x}} := \{\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1) : \gamma \in \mathrm{P}U_x\}.$$

由于 p 具有唯一路径提升性质，标准论证表明，对于 ˜ ˜，x 的两个原像 $\tilde{x} \neq \tilde{y}$、$U_{\tilde{x}} \cap U_{\tilde{y}} = \emptyset$。

接下来我们证明

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} \tilde{U}_{\tilde{x}}.$$

根据 $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ 的定义，显然对于每个 $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$，都有 $\tilde{U}_{\tilde{x}} \subseteq p^{-1}(U)$。因此，$\bigsqcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} \tilde{U}_{\tilde{x}} \subseteq p^{-1}(U)$。

反过来，设 $y \in p^{-1}(U)$。令 γ 为连接 x 与 $p(y)$ 的 U 中的一条路径；令 γ^- 为沿相反方向遍历 γ 所得到的路径。令 $\tilde{\gamma}_y^-$ 为从 y 出发的 γ^- 的唯一提升。令 $\tilde{x} = \tilde{\gamma}_y^-(1)$。则 $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ 且 $y \in \tilde{U}_{\tilde{x}}$。

现在证明，对于任意 $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$，$p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}\colon \tilde{U}_{\tilde{x}} \to U$ 是一个同胚。首先注意到，受限映射 $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}$ 是满射，因为 U 是道路连通的。该映射是单射，因为 U 相对无本质，且 p 具有唯一同伦提升性质。最后，我们证明 $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}$ 是开映射。由于 p 是开映射，要证明 $p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}}$ 是开映射，只需证明 $U_{\tilde{x}}$ 是开集。这可按如下方式证明：任取一点 $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1) \in U_{\tilde{x}}$。利用 p 的连续性，选取一个包含 $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)$ 的开集 $V \subseteq Y$，使得 $p(V) \subseteq U$。事实上，V 包含于 $U_{\tilde{x}}$ 中。为此，任取 $v \in V$，并选取一条从 x 到 $p(v)$ 的路径 $\xi \in \mathrm{P}U$。根据路径提升性质的唯一性，我们有 $v = \xi_{\tilde{x}}(1) \in U_{\tilde{x}}$。□

引理 2.6. 设 $p\colon\ Y \to X$ 是一个具有路径提升性质的局部同胚。那么

(1) p 具有唯一路径提升性质；*(2)* p 具有唯一同伦提升性质。

证明. (1)：设 $\gamma\colon \mathbb{I} \to X$ 是一条路径，有两个以 $y \in p^{-1}(\gamma(0))$ 为起点的提升 $\tilde{\gamma}$ 和 η。令 $A = \{s \in \mathbb{I} : \tilde{\gamma}(t) = \eta(t)$ 对所有 $t \leq s$ 均成立。则 A 是单位区间中的非空闭集：当 $0 \in A$ 时有 $A \neq \emptyset$；而 A 的闭性由映射 $\tilde{\gamma}$ 和 η 的连续性以及 Y 的豪斯多夫性得出。

现在我们的断言是 $\sup(A) := s_0 = 1$。反过来，假设 $s_0 < 1$。由于 $A \subseteq \mathbb{I}$ 是闭的，$s_0 \in A$，也就是说，$\tilde{\gamma}(s_0) = \eta(s_0) = y_0$。取 y_0 的一个邻域 U，使得 $p|_U$ 是到其像上的同胚，并且 $p(U) \subseteq X$ 是开集。注意，$\gamma = p \circ \tilde{\gamma} = p \circ \eta$。$\gamma$ 在 s_0 处的连续性给出 $\epsilon > 0$，使得 $\gamma((s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)) \subseteq p(U)$。由于 $p|_U\colon U \to p(U)$ 是同胚，$\tilde{\gamma}(s_0 + \epsilon/2) = \eta(s_0 + \epsilon/2)$，这与 $s_0 = \sup(A)$ 矛盾。

[2]我们所说的 étale 映射是指局部同胚。

(2)：利用 (1) 中最后证明的结论，以及 p 是局部同胚这一事实，可知满足第 5-6A 章命题 3 [5] 的假设；该命题立即推出所需结果。□

引理 2.7。设 Y 是一个左 $\Pi_1(X)$-空间，其中 X 局部道路连通且半局部单连通。假设动量映射 $r_Y\colon\ Y \to X$ 是局部同胚。则动量映射 r_Y 具有唯一路径提升性质和唯一同伦提升性质。

证明。给定 X 中的一条路径 γ 以及 $y \in r_Y^{-1}$ (γ(0))，定义 Y 中一条以 y为起点的路径 $\tilde{\gamma}$ 如下：

$$\tilde{\gamma}(t) = [\gamma|_{[0,t]}]y \quad \text{for } 0 \le t \le 1. \tag{2.8}$$

$\tilde{\gamma}$ 的连续性由作用的连续性可知。此外，

$$r_Y \circ \tilde{\gamma}(t) = r_Y([\gamma|_{[0,t]}]y) = r([\gamma|_{[0,t]}]) = \gamma(t)$$

其中 r 是 $\Pi_1(X)$的值域映射。因此，$\tilde{\gamma}$ 是 Y中以 y 为起点的 γ 的一个提升。这表明 r_Y 具有路径提升性质。现在由引理 2.6 可得所需结论。□

定理 2.9。设 X 是一个局部道路连通且半局部单连通的空间。假设 $p\colon\ Y \to X$ 是一个（满射）局部同胚。则以下陈述等价：

(1) Y 是一个 $\Pi_1(X)$-空间；*(2)* p 具有唯一路径提升性质；*(3)* p是一个覆盖映射；*(4)* p 具有唯一同伦提升性质。

证明。(1) $\implies$ (2) 或 (4)：由引理 2.7 得出。
(2) $\implies$ (3)：由于 p 是具有唯一路径提升性质的局部同胚，引理 2.7(2) 表明，p 具有唯一同伦提升性质。接着，引理 2.5 表明 p 是一个覆盖映射。(3) $\implies$ (1)：由命题 2.3 的第一部分得出。最后，(4) $\implies$ (2) 显然成立。

□

下面的例子描述了一个 $\Pi_1(X)$-空间，其中动量映射不是局部同胚。

例 2.10。考虑映射 $p\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to S^1$，由 $p(x,y) = \mathrm{e}^{2\pi i x}$ 给出；该映射不是局部同胚。令 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 配备 $\mathbb{R}$ 的平移作用（对两个变量均如此）；令单位圆 S^1 配备如下的 $\mathbb{R}$-作用：$t \cdot \mathrm{e}^{2\pi i x} = \mathrm{e}^{2\pi i(t+x)}$，其中$t, \xi \in \mathbb{R}$。于是 p是一个 $\mathbb{R}$-等变映射。现在，由引理 1.6 可知，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 带有 $\mathbb{R} \ltimes S^1$ 的作用，且 p为动量映射。根据例 1.3，我们将 $\Pi_1(S^1) \cong \mathbb{R} \ltimes S^1$ 视为 .....。因此，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 是一个 $\Pi_1(S^1)$- 空间，但 p 不是覆盖映射。

从这里开始，我们将研究范围限定在动量映射为局部同胚的 $\Pi_1(X)$-空间范畴中。接下来，我们的目标是刻画这类空间上的自由——继而是真——$\Pi_1(X)$-作用。下一个结果给出了这类作用自由的充要条件。

命题 2.11。设 X 是局部道路连通且半局部单连通的空间，Y 是道路连通的 $\Pi_1(X)$-空间。设动量映射r_Y：$Y \to X$ 是局部同胚。那么，$\Pi_1(X)$ 在 Y 上的作用是自由的，当且仅当Y 是单连通的。

证明。 由定理 2.9 可知， r_Y 是覆盖映射。现在，给定的作用是自由的，当且仅当任意给定点 $y \in Y$ 的稳定子是平凡的。回顾命题 2.3(2)， y 的稳定子是子群 $r_{Y*}(\pi_1(Y, y)) \subseteq \Pi_1(X)$。该子群是平凡的，当且仅当 $r_Y: Y \to X$ 是万有覆盖空间。□

定理 2.9 表明，覆盖空间理论可以用 $\Pi_1(X)$-空间的术语重新表述。为此，考虑一个道路连通、局部道路连通且半局部单连通的空间 X。令 $\mathbf{A}\pi_1(X)$ 表示$\Pi_1(X)$-空间的范畴——此范畴的对象是 $\Pi_1(X)$-空间，而 $\Pi_1(X)$-等变映射是对象之间的态射。考虑 $\mathbf{A}\pi_1(X)$ 的子范畴 $\mathbf{E}\pi_1(X)$，它由动量映射为局部同胚的道路连通 $\Pi_1(X)$-空间组成。另一方面，令 $\mathbf{COV}_X$ 表示 Spanier 在第 [15, 章 §5] 中定义的 X 的覆盖映射[3]范畴——此范畴的对象是覆盖映射，态射是保持这些覆盖映射的覆盖空间之间的连续映射。于是，定理 2.9 建立了范畴 $\mathbf{COV}_X \simeq$ 与 $\mathbf{E}\pi_1(X)$ 之间的同构：(1) 和 (2) 显然分别建立了对象之间的同构。为说明态射也具有良好的对应关系，首先取两个覆盖空间$Y_1 \xrightarrow{p_1} X \xleftarrow{p_2} Y_2$，并考虑一个态射 $f: Y_1 \to Y_2$。那么，根据注 2.2， f 是一个 $\Pi_1(X)$-等变映射。反过来，给定一个 $\Pi_1(X)$-等变映射 $g: Y_1 \to Y_2$，根据等变映射的定义， $r_{Y_2} \circ g = r_{Y_1}$。这意味着 g 是覆盖空间 $g: (Y_1, p_1) \to (Y_2, p_2)$ 的一个态射。我们将上述讨论概括为下一个定理：

定理 2.12. 设 X 是道路连通、局部道路连通且半局部单连通的空间。那么范畴 $\mathcal{E}_{\Pi_1(X)}$ 与 $\mathcal{COV}_X$ 同构。

此外，命题 2.11 将万有 覆盖空间视为 $\mathbf{E}\pi_1(X)$中的自由 $\Pi_1(X)$-空间。因此，在等变同胚意义下，存在唯一一个道路连通的自由 $\Pi_1(X)$-空间，其动量映射是局部同胚。事实上，其他 $\Pi_1(X)$-空间都是这个自由空间的商；利用这一观察，提出一个自由 $\Pi_1(X)$-空间的泛性质，使 $\Pi_1(X)$成为万有 $\Pi_1(X)$-空间，应当是个不错的练习。

注意，其他 $\Pi_1(X)$-空间都是万有覆盖空间的商。因此，万有覆盖空间似乎是$\mathbf{E}\pi_1(X)$的始对象，这与定义 1.6]中真 G-作用的分类空间不同；后者在适当意义下是终对象。

利用识别 $\mathcal{E}_{\Pi_1(X)}$ 来重新表述关于覆盖空间的标准结果，可能是一项有趣的练习。 $\simeq$ $\mathbf{COV}_X$ 可能是一个有趣的练习。下面给出两个例子：

命题 2.13 （Munkres 中引理 80.2 [12] 和定理 2.12 的推论）。设 Y 和 Z 为 Π_1（X）-空间，且 $\omega:\ Y \to Z$ 是一个空间映射。以下两个陈述等价：

（*1*） ω 是一个 Π_1（X）-等变映射。（*2*） $\omega \circ r_Z = r_Y$。

*More*此外，若上述任一条件成立，则以下结论 成立：

(3) ω 是一个覆盖映射。*(4)* Y 是一个带有 ω 作为动量映射的(Z)-空间（并且该作用由在1处对提升的路径同伦进行求值来定义）。

命题 2.14 (Munkres 中的定理 80.1 [12]，表述中使用了定理 2.12)。 设Y 是一个 $\Pi_1(X)$-空间，且 $y_0 \in Y$。设 $H \subseteq \Pi_1(X)$ 是 y_0处的稳定子。那么， Y 的 $\Pi_1(X)$-等变同胚群同构于 $N(H)/H$，其中$N(H)$ 是 $\pi_1(X, p(y_0))$中的 H 的正规化子。

[3]我们假设相应的覆盖空间是道路连通的。

上一个命题用到了命题 2.3(2)，即各向同性群 $H = r_{Y*}(\pi_1(Y,\ y_0)) \subseteq \pi_1(X,\ r_Y(y_0))$。

3. 真正作用

3.1. 作用的动力学。 设 $A \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} B$ 为映射。对于 $P \subseteq A$ 和 $Q \subseteq B$，我们将纤维积 $A \times_{f,X,g} B$ 的子集 $(P \times Q) \cap (A \times_{f,X,g} B)$ 记为 $P \times_{f,X,q} Q$。集合 $P \times_{f,X,q} Q$ 可以是空集。

在讨论 $\Pi_1(X)$ 的真作用之前，我们先讨论 $\Pi_1(X)$-作用的动力学中的一个技术性质，即引理 3.1(3) 和命题 3.4。固定一个道路连通覆盖空间 $p\colon Y \to X$，等价地说，这是一个道路连通的 $\Pi_1(X)$-空间，其中动量映射是局部同胚。由等式 (1.7) 可知，作用的动力学映射为

$$a\colon \Pi_1(X) \times_{s,X,p} Y \to Y \times Y, \quad a([\gamma], y) = (\widetilde{\gamma_y}(1), y)$$

其中 $([\gamma], y) \in \Pi_1(X) \times_{s,X,p} Y$，且 $\widetilde{\gamma_y}$ 是 γ 在 Y 中以 y 为起点的唯一提升。换句话说，$a([\gamma], y) = (\widetilde{\gamma_y}(1)\ \widetilde{\gamma_y}(0))$。

由于 $\Pi_1(X)$ 对 Y 的作用是连续的，a 是连续的。由于 Y 道路连通，a 是满射。引理 1.8 和命题 2.11 表明，动力学 a 是一一映射当且仅当 Y 是 X 的单连通覆盖空间。接下来，我们将证明 a 是一个覆盖映射，并将在命题 3.4 中描述 a 的切片。这个技术性观察将有助于描述 $\Pi_1(X)$ 的真作用。

考虑 $\Pi_1(X) \times_{s,X,p} Y$ 的以下开子集族 L：L 中的一个元素具有如下形式：$N([\gamma], p(U)\ p(V)) \times_{s,X,p} V$ 其中

- $[\gamma] \in \Pi_1(X)$;
- $U, V \subseteq Y$ 是 p 的道路连通且相对本质的切片，使得 $\gamma(1) \in p(U)$ 且 $\gamma(0) \in p(V)$。

由于 p 的道路连通且相对本质切片构成 Y 的一个基，因此 L 是 $\Pi_1(X) \times_{s,X,p} Y$ 的一个基。此外，如果 U 和 V 非空，那么 $N([\gamma], p(U)\ p(V)) \times_{s,X,p} V$ 也非空。

引理 3.1。 设 $U, V \subseteq Y$ 是非空、道路连通且相对无本质性的开切片。

(1) 动力学映射 'a' 将基本开集 $N([\gamma], p(U)\ p(V)) \times_{s,X,p} V$ 双射地映射到 $Y \times Y$ 的基本开集 $U \times V$。*(2)* a 是一个开映射。*(3)* a 是一个局部同胚。特别地，将 a 限制在基本开集 $N([\gamma], p(U)\ p(V)) \times_{s,X,p} V$ 上，得到一个到基本开集 $U \times V$ 的同胚。

证明。(1) 写作 $B := N([\gamma],\ p(U)\ p(V)) \times_{s,\ X,\ p} V$。由于 U 和 V 是道路连通且相对本质的切片，$a|_B\colon B \to U \times V$ 是连续双射。(2)：最后的论证表明，a 将 $\Pi_1(X) \times_{s,\ X,\ p} Y$ 中的一个基本开集映射到 $Y \times Y$ 中的一个基本开集。因此，a 是开映射。(3)：由上面的(1)和(2)可得。 □

固定两个道路连通的相对本质切片 $U,\ V \subseteq Y$。接下来我们想描述 $a^{-1}(U \times V)$。为此，固定点 $y \in U$ 和 $z \in V$。将变换群胚 $\Pi_1(X) \ltimes Y$ 记作 A。考虑 A_z^y 中将 A 里的单位元 z 映到 y 的箭头集合；这里采用 A 对 $A^{(0)} \approx Y$ 的显然作用。准确地说，

$$A_z^y := \{([\gamma], y) \in A : \widetilde{\gamma_z}(1) = y\}.$$

换句话说， A_z^y 由 $\Pi_1(X)$ 中的箭头组成，这些箭头在基本群胚的作用下将 $z \in Y$ 映到 y 。因此，我们也可以写作

$$A_z^y = \{[\gamma] \in \Pi_1(X) : \widetilde{\gamma_z}(1) = y\}; \tag{3.2}$$

这个识别比之前的识别使用起来更加方便。

引理 3.3。令 $[\gamma_1], [\gamma_2] \in A_z^y$；定义 $B_i = N([\gamma_i], p(U), p(V)) \times_{s,X,p} V$ 对 $i = 1, 2$。则

$$B_1 \cap B_2 = \begin{cases} \emptyset & \text{if } [\gamma_1] \neq [\gamma_2], \\ B_1 & \text{if } [\gamma_1] = [\gamma_2]. \end{cases}$$

证明。假设 $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$，并令 $[\eta]$ 属于交集。则 $[\eta] = [\delta_2 \square \gamma_2 \square \delta_1] = [\epsilon_2 \square \gamma_1 \square \epsilon_1]$ 对于路径 δ_2，ϵ_2 位于 $p(U)$ 中且始于 $p(y)$，以及路径 δ_1，ϵ_1 位于 $p(V)$ 中且终于 $p(z)$。因此，

$$[\gamma_2] = [\delta_2^- \square \epsilon_2] \square [\gamma_1] \square [\epsilon_1 \square \delta_1^-]$$

其中 δ_i^- 是 δ_i 的逆路径，对 $i = 1, 2$。现在，由于 $p(U)$ 相对不重要，位于 y 处的闭路 $\delta_2^- \square \epsilon_2$ 是零伦的。$\epsilon_1 \square \delta_1^-$ 也是如此。因此，最后一个等式推出 $[\gamma_1] = [\gamma_2]$。于是 $[\gamma_1] \neq [\gamma_2]$ 给出 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$。另一种情形显然。□

作为上一个引理的推论，利用方程 (3.2)，我们可以看出

$$a^{-1}(U \times V) = \bigsqcup_{[\gamma] \in A_z^y} (N([\gamma], p(U), p(V)) \times_{s,X,p} V).$$

此外，引理 3.1 表明，将作用的动力学映射限制到上述每个 $N([\gamma], p(U), p(V)) \times_{s,X,p} V$ 上，是到 $U \times V$ 的一个同胚。因此，我们证明了以下结果：

命题 3.4. 设 X 是道路连通、局部道路连通且半局部单连通的空间。设 Y 是一个具有 *étale* 动量映射 r_Y 的道路连通 $\Pi_1(X)$-空间。那么映射

$$a \colon \Pi_1(X) \times_{s,X,r_Y} Y \to Y \times Y$$

作用的动力学映射是一个覆盖映射。事实上，对于道路连通的相对本质切片 U、$V \subseteq Y$，

$$a^{-1}(U \times V) = \bigsqcup_{[\gamma] \in A_z^y} (N([\gamma], p(U), p(V)) \times_{s,X,p} V)$$

其中每个 $N([\gamma], p(U), p(V)) \times_{s,X,p} V$ 都是在 a 作用下覆盖于 $U \times V$ 的切片。

读者可以比较命题 3.4 和 [9, 观察 2.10]；对于后者，应考虑 $\Pi_1(X)$ 在 X 上的作用。最后一个命题推广了 [13,命题 2.37]。

利用命题 3.4，我们可以如下描述变换群胚 A 中的小紧集。假设 Y 是局部紧的，并考虑与上一个命题中相同的开集 U 和 V。设 $U', V' \subseteq Y$ 是道路连通的相对本质切片，其闭包是紧的，并且 $\overline{U'} \subseteq U$ 和 $V' \subseteq V$。那么对于 $[\gamma] \in A_z^y$，闭包 $N([\gamma], p(U'), p(V')) \times_{s,X,p} V'$ 同胚于紧子集 $\overline{U' \times V'} = \overline{U'} \times \overline{V'} \subseteq U \times V$。于是该命题表明，

$$a^{-1}(\overline{U' \times V'}) = \bigsqcup_{[\gamma] \in A_z^y} \left(\overline{N([\gamma], p(U'), p(V')) \times_{s,X,p} V'} \right). \tag{3.5}$$

作为结束语，我们注意到，由道路连通的相对本质平凡开集 U' 组成的集合 L'（其中 U' 的闭包是紧的，且该闭包包含于一个道路连通的相对本质平凡切片中）在 Y 为局部紧、豪斯多夫、道路连通、局部道路连通且半局部单连通时，构成 Y 上拓扑的一个基。此外，L' 是 L 的一个细化。

3.2. **基本群胚的真作用**。 本节研究局部紧群胚 $\Pi_1(X)$的真作用。我们证明定理 3.6，该定理利用一点处的各向同性群刻画真作用。事实上，我们关注范畴 E_X中的 $\Pi_1(X)$- 空间。

设给定一个道路连通、局部道路连通且半局部单连通的空间 X。令 p: $Y \to X$ 为一个道路连通覆盖空间。若 X 是局部紧且豪斯多夫的，则变换群胚 $A := \Pi_1(X) \ltimes Y$ 是局部紧豪斯多夫空间。理由如下： [9, 第 3] 节表明˜，单连通覆盖空间 X 是豪斯多夫且局部紧的。在˜这种情况下， X 上的甲板变换作用是真作用，参见 [10, 第 21 章，§覆盖流形]。因此， Y（它是 X 对甲板变换子群取商所得的空间）也局部紧且豪斯多夫。接下来，若 X 是局部紧且豪斯多夫的，则 X(X) 也局部紧且豪斯多夫。因此，变换群胚$\Pi_1(X) \ltimes Y$ 是局部紧且豪斯多夫的。

定理 3.6. 设 X 是一个局部紧、豪斯多夫、道路连通、局部道路连通且半局部单连通的空间。假设 Y 是一个道路连通的$\Pi_1(X)$-空间，其动量映射 p: $Y \to X$ 是满射局部同胚。则以下条件等价：

(1) $\Pi_1(X)$ 对 Y 的作用是真作用。*(2)* Y 的基本群是有限群。*(3)* $p_*(\pi_1(Y))$ 是 $\pi_1(X)$的有限子群。*(4)* 基本群 $\pi_1(X)$ 对 Y 的限制作用是真作用。

证明。 (2) $\Leftrightarrows$ (3)：定理 2.9 表明， Y 是 X 的一个覆盖空间，且 p是覆盖映射。因此，由于群同态 p_*: $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ 是单射，(2) 与 (3) 显然等价。

(1) $\Longrightarrow$ (2)：观察 1.10 指出，对于真作用，各向同性群是紧集。命题 2.3(2) 指出，在当前情形下，各向同性群是基本群 $\pi_1(Y)$，而它紧当且仅当 它是有限群。

(3) $\Longrightarrow$ (1)：这是证明中最长的部分，将在最后完成。此证明中，前三项等价。

(1) $\Longrightarrow$ (4)：对于任意 $x \in X$,$\pi_1(X, x)$， $\subseteq \Pi_1(X)$ 是一个闭子群。因此，如果 $\Pi_1(X)$ 的作用是真作用，那么将该作用限制到 $\pi_1(X, x)$ 后，所得作用也是真作用。

(4) $\Longrightarrow$ (2)：注记 2.4 将限制作用 $\pi_1(X)$ 的各向同性群与 $\pi_1(Y) \simeq p_*(\pi_1(Y))$ 联系起来。因此，限制作用为真意味着各向同性群是有限的。

最后，我们只证明尚未论证的断言 (3) $\Longrightarrow$ (1)，从而完成证明。该断言分三步证明：

(1) 首先，考虑 $K \subseteq Y \times Y$ 是单点集的情形。(2) 然后，考虑 K 是方程 (3.5) 中所述的小紧集的情形。(3) 最后，考虑一般的紧集 K。

在开始之前，令 A 表示变换群胚 $\Pi_1(X) \ltimes Y$。并注意，对于 $\Pi_1(X)$ 的作用，$z \in Y$ 处的各向同性群是稳定子子群 $A_z^z \subseteq A$，假设该子群是有限的。回顾方程 (3.2)；并将 $A_z^z = \{[\gamma_1], \ldots, [\gamma_n]\}$ 枚举为某个 $n \in \mathbb{N}$。

那么，在第一种情况下，当 $K = \{(y,\ z)\}$ 时， $a^{-1}(\{(y,\ z)\}) = A_z^y$。观察 1.1 表明， A_z^y 与 A_z^z 之间存在双射，因此它是紧的。

现在考虑方程 (3.5) 后面讨论的 X 的拓扑的基 L'。这个基由相对紧开集 U' 组成，其闭包包含在 p 上的道路连通相对本质平凡切片中： $Y \to X$。那么，形如 $U\prime \times V\prime$ 的集合，其中 $U', V\prime \in \mathrm{L}'$，构成了相对紧的基

集，适用于 $Y \times Y$ 的拓扑。对于 $U', V' \in \mathrm{L}'$，方程 (3.5) 蕴含

$$a^{-1}(\overline{U' \times V'}) = \bigsqcup_{i=1}^{n} \left(\overline{N([\gamma_i], p(U'), p(V')) \times_{s,X,p} V'} \right)$$

其中每个 $\overline{N([\gamma_i],\ p(U')\ p(V')) \times_{s,\ X,\ p} V'}$都是 $\overline{U' \times V'}$的同胚副本（见命题 3.4）。因此， $a^{-1}(\overline{U' \times V'})$ 是有限个紧集之并，因而为紧集。

最后，令 $K \subseteq Y \times Y$ 为任意紧集。用有限个相对紧集 $U_1 \times V_1$，……， $U_m \times V_m$ 覆盖 K，其中 U_j， $V_j \in \mathrm{L}'$。于是

$$a^{-1}(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} a^{-1}(\overline{U_j \times V_j})$$

其中每个 $a^{-1}(\overline{U_j \times V_j})$ 根据上一个论证都是紧的。因此 $a^{-1}(K) \subseteq A$ 是紧的。□

下面是定理 3.6(2) 的一些直接推论。

推论 3.7。令 X 为一个道路连通、局部道路连通、半局部单连通、豪斯多夫且局部紧的空间。则下列结论成立：

(1) $\Pi_1(X)$ 在单连通覆盖空间上的作用是真作用。*(2)* $\Pi_1(X)$在 X 上的作用是真作用，当且仅当 X 的基本群有限。*(3)* 对于 $\pi_1(X)$的每个有限子群 G，相应的覆盖空间 $X_G \to X$是真覆盖空间。此外，这些是作用范畴$\mathcal{E}_{\Pi_1(X)}$中仅有的真 $\Pi_1(X)$-空间。

致谢：我们感谢 Prahlad Vaidyanathan、Angshuman Bhattacharya 和让·勒诺与我们进行了富有帮助的讨论。我们感谢 Suliman Albandik 的耐心以及有益的讨论。本研究得到第一作者的 SERB SRG/2020/001823 项目资助，以及第二作者的 CSIR 09/1020(0159)/2019-EMR-I 项目资助；我们谨向资助机构致谢。

参考文献

[1] 保罗·鲍姆、阿兰·孔涅和奈杰尔·希格森，真作用的分类空间与 K群 C^*-代数的理论， C^*-代数：1943–1993（1993年，德克萨斯州圣安东尼奥），1994年，第240–291页。MR1292018[2] R. Brown 和 G. Danesh-Naruie，作为拓扑群胚的基本群胚，《爱丁堡数学学会学报》（ 2 **19** 1974 75 237 244 0413096 ）（/），–。MR R. Brown、G. [3] Danesh-Naruie 和 J. P. L. Hardy，拓扑群胚。*II.* 覆盖态射与 G **74** 1976 143 156 0442937 -空间，《数学新进展》（），–。[4] MR Ronald Brown，拓扑学与群胚，BookSurge, LLC，南卡罗来纳州查尔斯顿，2006年。1t《现代拓扑学基础》 [麦格劳-希尔，纽约，1968年；MR0227979], 附1张CD-ROM（Windows、Macintosh和UNIX）。 2243730 MR[5] Manfredo P. do Carmo，曲线与曲面的微分几何，普伦蒂斯-霍尔公司，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯，1976年。由葡萄牙语译出。MR0394451[6] Heath Emerson 和 Ralf Meyer，等变 *Kasparov* 理论中的对偶性，《纽约数学杂志》 **16** 2010 245 313 2740579 （），–。MR Allen Hatcher，代数拓扑学，剑桥大学出版社，剑桥，[7] 2002年。MR1867354[8] Rohit Dilip Holkar，群胚 C^*-代数的拓扑构造 C^*-对应，《算子理论杂志》**77:1**（2017），第23–24期，217–241页。[9] Rohit Dilip Holkar 和 Md Amir Hossain，拓扑基本群胚。*I.*（2023）。预印本 arXiv:2302.01583v1。[10] John M. Lee，光滑流形导论，第二版，《数学研究生教材》，第 218, 2013 2954043 卷，施普林格，纽约，。MR Paul S. Muhly 和 [11] Mark Tomforde，拓扑拟群胚，《国际数学杂志》**16** 7，693 2005 755 2158956 2006 46099（），第–期。MR（i: ）

[12] 詹姆斯·R·芒克雷斯，《拓扑学：初级教程》，普伦蒂斯-霍尔公司，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯，1975年。MR0464128（57 #4063）[13] 布鲁斯·L·莱因哈特，叶状结构的微分几何，《数学及其边界领域成果》 [《数学及相关领域成果》], 第99卷，施普林格出版社，柏林，1983年。基本可积性问题。MR705126[14] 让·勒诺，群胚方法与 C^*-代数，《数学讲义》，第793卷，施普林格，柏林，1980年。MR584266（82h:46075）[15] 埃德温·H·斯潘尼尔，代数拓扑学，麦格劳-希尔图书公司，纽约—多伦多（安大略省）—伦敦，1966年。MR0210112[16] 让-路易·屠，非豪斯多夫群胚、真作用与 K-理论，《数学文献》**9** （2004年），565–597页（电子版）。MR2117427（2005h:22004）[17] 达娜·P·威廉姆斯，群胚 C^*-代数工具箱，《数学调查与专著》，第241卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2019年。MR3969970电子邮箱： rohit.d.holkar@gamil.com电子邮箱： mdamir18@iiserb.ac.in 电子邮箱： dheeraj@iiserb.ac.in

印度科学教育与研究学院博帕尔分校数学系，博帕尔绕行公路，Bhauri，博帕尔 462 066，中央邦，印度。