湍流中的最优追踪策略

C. Calascibetta，[1]，* L. Biferale，[1] F. Borra，[2] A. Celani，[3] 以及 M. Cencini[4]1物理系与意大利国家核物理研究所，罗马第二大学，*Via della Ricerca Scientifica 1*，*00133* 罗马，意大利。[2]巴黎高等师范学院物理实验室，*24 Rue Lhomond*，巴黎，*75005*，法国。[3]定量生命科学，阿卜杜斯·萨拉姆国际理论物理中心，*ICTP*，的里雅斯特，*34151*，意大利。[4]复杂系统研究所，意大利国家研究委员会，*Via dei Taurini 19*，罗马，*00185*，意大利，以及意大利国家核物理研究所*"Tor Vergata"*。（日期：2023年5月9日）

当搜索者的推进能力和机动能力有限时，在湍流中追踪漂移目标是一项极其困难的任务。即使追捕者与目标之间的相对距离始终小于湍流耗散尺度，目标轨迹的混沌性质仍然构成了极大的挑战。在此，我们展示了如何成功应用最优控制理论，找到能够克服混沌弥散并使搜索者以最短时间抵达目标的导航策略。我们将最优控制的结果——该方法要求具备完美的可观测性并完全了解环境动力学——与具有反应性的启发式算法进行了对比，后者依赖于有关流场的局部瞬时信息。尽管后者的性能明显较差，但采用最优控制的追捕者能够在远超典型李雅普诺夫指数倒数的时间内追踪目标，并且具有显著更强的鲁棒性。

arXiv:2305.04677v1 [physics.flu-dyn] 8 May 2023

在复杂流体环境中寻找最优导航策略，是一个公认的难题，其应用范围从环境监测 [1–4]到微医学 [5–7]。一类得到广泛研究的导航问题，是飞机或无人机等飞行器的点对点路径规划优化，其目标是尽量降低某种运行成本，其中可能包括燃料消耗和到达时间 [8–10]。这些飞行器在复杂混沌环境中运动，但由于其速度通常大于流体速度，几乎可以完全控制自身轨迹。近年来，点对点路径规划优化也成为针对缓慢移动的微观物体（如微型游泳体或活性粒子）的一项重要研究课题；这些物体往往会被流场带走，因此需要恰当地利用流场才能抵达目的地 [11–27]。

在这里，我们考虑一种更困难的导航任务：目标并非固定不动，而是被湍流场以混沌方式裹挟着运动。追踪拉格朗日目标的难度，因追逐者速度和机动性有限而进一步增加。这个问题与许多应用相关，例如让一群海洋漂流器和漂浮器保持图样形成 [9, 28–31]；解读微型游动体在湍流环境中捕捉不会游动的猎物时所采用的策略；为在复杂生物流中导航的微型机器人，或在大气或海洋中航行的滑翔机开发自主自推进方案 [3, 32–39]。我们将考虑这样一种情形：搜索者与目标之间的距离小于柯尔莫哥洛夫长度，因此始终处于光滑混沌流中。如图 1a 所示，由于速度有限，智能体必须知道如何以巧妙的方式驾驭局部涡旋，利用强烈的涨落，有时这些涨落由涡旋结构产生（图 b–c），并利用湍流特有的长时间相关性（图 d）。最优追逐者的最终目标，是尽可能快地捕获混沌移动目标；如果无法做到，则应在追逐时限结束时尽可能靠近目标。

寻找最优控制的主要障碍在于，它取决于混沌系统演化的完整时空过程。只有在简单的线性流场或时不变流场中，才能找到解析解，而且所考虑的任务仅限于点对点导航 [17, 40–43]。本文展示如何应用最优控制理论，为湍流追踪问题找到最佳控制，并将其与启发式反应策略进行比较。特别是，由于该问题在形式上类似于追逐游戏，我们采用以下启发式方法进行比较：(i) 纯追踪 [44]，，即始终沿着目标的视线方向游动；(ii) 另外两种启发式控制，它们通过在较短的时间范围内求解简化的最优性问题，并对动力学作出若干假设而得到。我们表明，这些启发式策略虽然显然具有无需掌握大量系统信息的优势，却明显不是最优的。如何在信息和计算资源有限的情况下设计出有效的启发式策略，同时使其性能更接近最优水平，仍然是一个亟待解决的问题。

I. 结果

追踪拉格朗日目标。追踪者（下文也称为"智能体"）与目标置身于湍流速度场 $\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{x})$ 中，该流场通过直接数值积分求解纳维–斯托克斯方程得到，

* calascibetta@roma2.infn.it

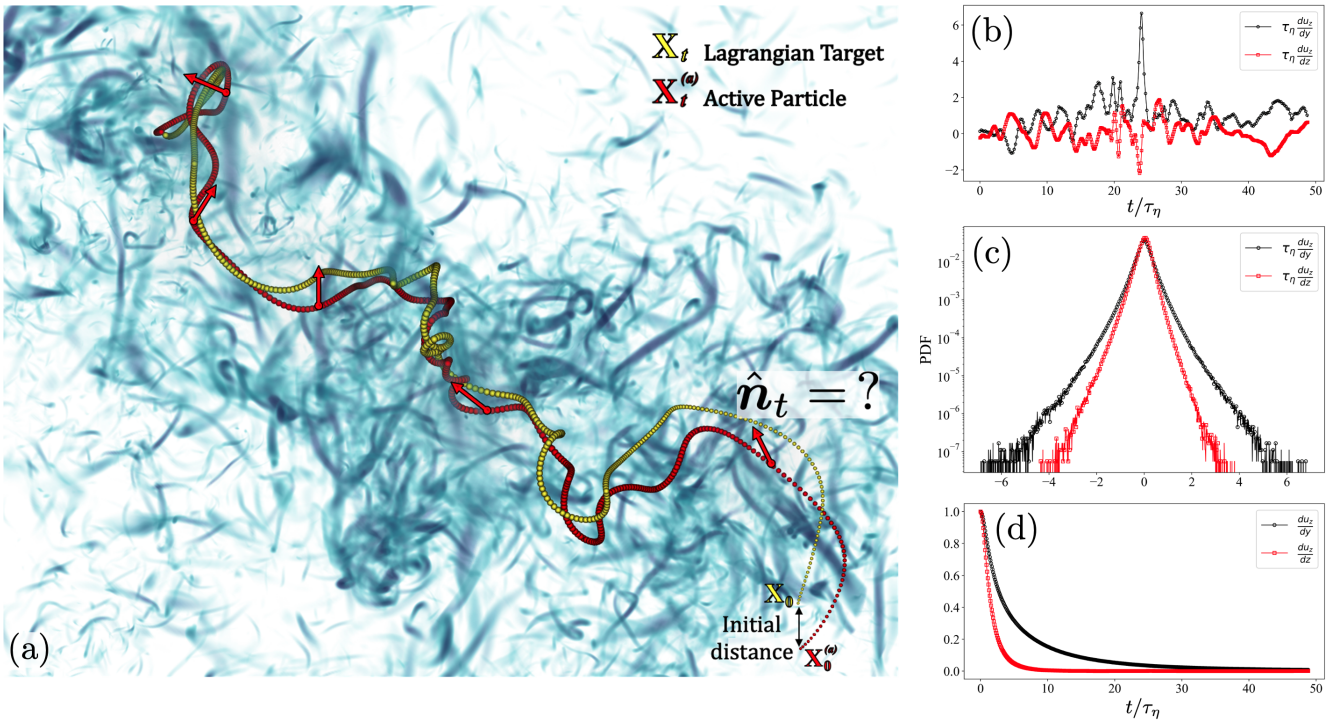


图 1. **(a)** 问题的示意图。一个机动能力有限的追踪智能体（红色）力求尽可能靠近、甚至捕获一个被湍流混沌输运的拉格朗日目标（黄色）。背景图呈现了追踪过程某一固定时刻的湍流涡量强度。**(b)** 追捕过程持续期间，典型的无量纲横向速度梯度 du_z/dy 和纵向速度梯度 du_z/dz 随时间的演变，其中归一化因子为流场的 Kolmogorov 时间尺度 $\tau_\eta = \sqrt{\nu/\epsilon}$； ν 为流体黏度， ϵ 为平均能量耗散率。**(c)** 对长度为 $\mathcal{T} \simeq 150\tau_\eta$ 的 20 万条轨迹测得的横向和纵向梯度的概率密度函数（PDF）。**(d)** 横向和纵向速度梯度的时间相关函数。

并由各向同性、均匀的外力持续驱动，其泰勒尺度雷诺数为 $Re_\lambda \simeq 130$[45, 46]（详情见“方法”）。每个回合开始时，目标 $\mathbf{X}_t$ 与智能体 $\mathbf{X}_t^{(a)}$ 相距约一个柯尔莫哥洛夫尺度，即 $|\mathbf{X}_0^{(a)} - \mathbf{X}_0| = |\boldsymbol{R}_0| = R_0 \simeq \eta$。流场会输运作为被动示踪粒子运动的目标，也会输运智能体；不过，智能体能够通过以速度 $\boldsymbol{U}_t$ 游动，相对于周围介质施加一定控制。智能体可以自由地朝任意方向 $\hat{\boldsymbol{n}}_t$ 前进，但“游动速度”的大小固定为 V_s。我们选择的速度小于柯尔莫哥洛夫速度 u_η。具体而言，以下结果对应于 $V_s \simeq 0.13 u_\eta$。

因此，这两个点状物体按照动力学规律运动。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_t = \boldsymbol{u}_t(\mathbf{X}_t) \\ \dot{\mathbf{X}}_t^{(a)} = \boldsymbol{u}_t(\mathbf{X}_t^{(a)}) + \boldsymbol{U}_t \\ \boldsymbol{U}_t = V_s \hat{\boldsymbol{n}}_t \,, \end{cases} \tag{1}$$

其中，我们认为控制方向的重新定向时间可以忽略不计。该过程最长持续时间为 $t_f \simeq 50\tau_\eta$，即远大于示踪粒子轨迹的拉格朗日李雅普诺夫指数倒数 $t_f \simeq 50\tau_\eta$。

，其中 τ_η 是 Kolmogorov 时间。在此时间范围内，智能体必须找到最优的转向方案 $\hat{\boldsymbol{n}}_t$ ，以便捕获目标。捕获事件定义为相对距离小于捕获距离 $R_c = 10^{-2} R_0$的时刻，该距离远小于初始间距。从那时起，智能体便与目标保持在一起。速度设为 $V_s \approx \lambda R_0$ ，使智能体处于可控性的极限，即控制速度小于智能体与目标之间典型的背景流速度。

只要智能体和目标仍处于流场可微的间距范围内，即 $R_t \leq O(10\eta)$，搜索者所感受到的流体速度近似为 $\boldsymbol{u}_t(\mathbf{X}_t^{(a)}) \simeq \boldsymbol{u}_t(\mathbf{X}_t) + \nabla \boldsymbol{u}_t \boldsymbol{R}_t$，其中 $\nabla \boldsymbol{u}_t$是目标位置处的流场梯度。因此，优化问题仅取决于分离向量 $\boldsymbol{R}_t$ 以及搜索智能体轨迹沿线速度梯度的完整历史。我们将采用这一近似，以便存储拉格朗日轨迹及其对应的速度梯度，从而建立一个可用于计算最优控制的数据库（见“方法”）。

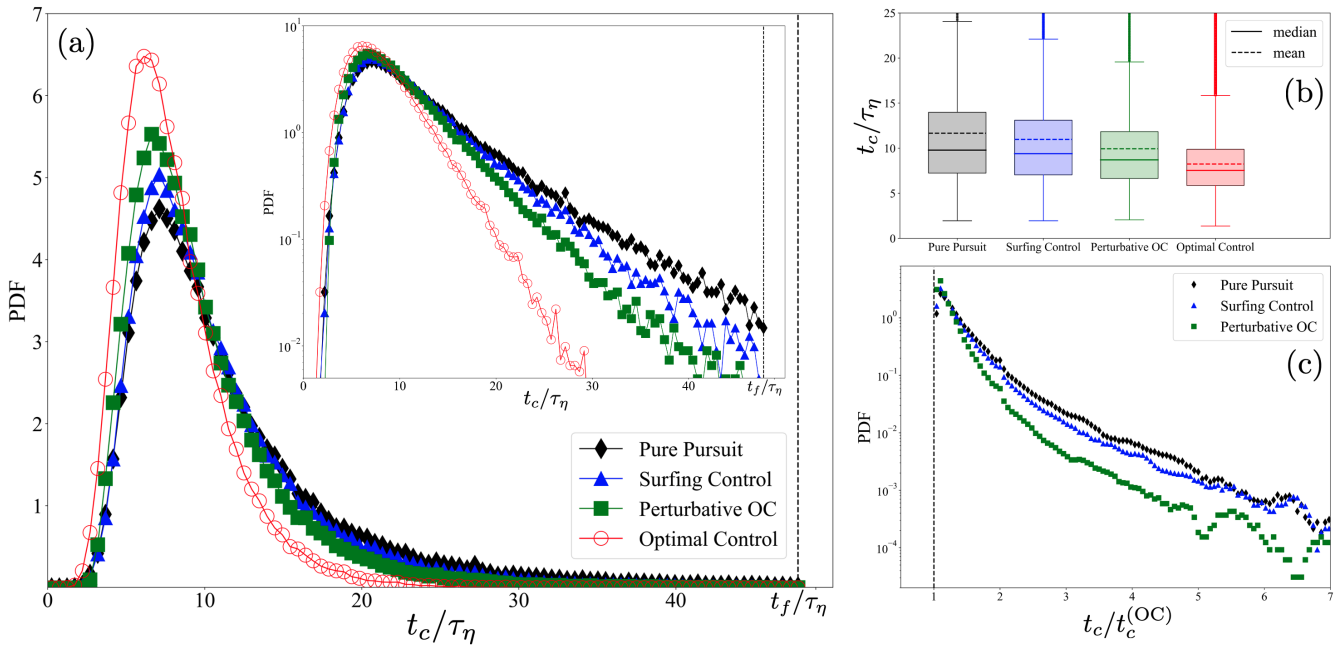


图 2. **捕获时间统计。(a)** 最优控制策略（红色空心圆）和启发式策略——纯追踪（黑色实心菱形）、冲浪控制（蓝色实心三角形）及微扰最优控制（绿色实心方块）的捕获时间概率密度函数。概率密度函数基于所有策略均实现捕获的回合进行计算。竖直虚线表示时间范围，t_f。插图展示了相同概率密度函数的对数尺度图。**(b)** 捕获时间概率密度函数的箱线图。箱体阴影区域表示第 25 至第 75 百分位数范围，实线和虚线分别表示中位数和均值。每条须线涵盖其余 25% 的数据，而捕获时间较大的离群点则单独标出。**(c)** 反应式启发策略的捕获时间概率密度函数，以相应的最优控制捕获时间进行归一化；$t_c/t_c^{(\mathrm{OC})}$限定在所有启发式策略均于 t_f 内实现捕获的回合中。

启发式控制策略。作为比较，我们将考虑几种启发式控制，这些控制既不需要了解轨迹未来的演化情况（计算最优控制时需要），也不需要记忆轨迹的过去。这些策略称为反应式策略，因为它们完全基于有关流场和两者间距的瞬时信息。

1. 纯追踪（*PP*）。智能体只知道目标当前所在的方向，并朝着它游动 [44]:

$$\hat{\boldsymbol{n}}_t^{\mathrm{PP}} = -\hat{\boldsymbol{R}}_t \,.$$

2. 冲浪控制（*SC*）。智能体了解瞬时速度梯度以及目标 [48]的方向:

$$\hat{\boldsymbol{n}}_t^{\mathrm{SC}} \propto -[\exp(\tau_s \nabla \boldsymbol{u}_t)]^\intercal \hat{\boldsymbol{R}}_t \,,$$

其中，τ_s 是一个需要通过实验选择的参数。该控制策略在时间间隔 τ_s 内最大限度地推动追捕者向目标移动，假设在此期间梯度和˙目标方向 $\boldsymbol{R}_t$ 保持不变（见方法）。

3. 微扰最优控制（*PO*）。智能体拥有与（SC）中相同的信息，但其游动方向是

$$\hat{\boldsymbol{n}}_t^{\mathrm{PO}} \propto -[\exp(\tau_p \nabla \boldsymbol{u}_t)]^\intercal \exp(\tau_p \nabla \boldsymbol{u}_t) \hat{\boldsymbol{R}}_t \,.$$

如方法部分所述，我们通过微扰求解最优控制问题，获得了这一新的控制策略。该问题旨在最小化经过时间 τ_p 后与目标之间的距离，并假设梯度保持恒定（但间距随时间动态变化）。时间 τ_p 是一个需要通过经验确定的自由参数。

最优控制。如何定义跟踪智能体的表现？理想情况下，搜索者应能在尽可能短的时间内捕获移动目标，并且无论如何都要在某个时间范围之前完成。然而，由于底层湍流所引起的强烈扩散，这并非总是可行。在这种情况下，可以转而选择一个不那么宏大的目标：在分配给搜索的时间结束时，达到尽可能短的间距。这些要求可以用以下代价函数的数学表达式概括

$$J = R_{t_f}^2 + c\lambda R_c^2 \int_0^{t_f} dt\, \Theta(R_t - R_c) \,. \qquad (2)$$

代价函数的第一项 J 是智能体与目标在最终时刻的距离，第二项 Θ 则是 Heaviside 函数，表示达到捕获距离 R_c 所需的时间。如果在 $t < t_f$ 时刻之前完成捕获，第一项等于 R_c^2，且不受控制的影响，因此任务就是尽可能缩短捕获所需时间。反之，如果在 t_f 之前未能捕获，第二项始终等于 $c\lambda R_c^2 t_f$，与轨迹无关，任务便转化为尽量缩短最终间距 R_{t_f}。常数 c 用于调节这两项的权衡，取值时会给予捕获事件足够大的权重。

最优控制（OC）理论提供了计算最佳控制（即成本最低的控制）的工具，其方法是将优化问题表示为欧拉-拉格朗日方程，并沿时间正向和反向求解这些方程；这需要充分了解系统的动力学（见方法）[40, 49, 50]。如果极值条件存在稳定解，那么该解会在每个时刻给出最优方向$\hat{\boldsymbol{n}}_t^{\mathrm{OC}}$，而该方向隐含地取决于梯度的全部历史——过去、现在和未来。

捕获时间统计。我们对 2×10^5 拉格朗日目标轨迹进行了采样，智能体从距离目标 $R_0 \simeq \eta$ 处的随机位置出发。我们的最优控制算法的收敛速率接近 80%。在最优控制的路径中，有 81% 的情况下成功捕获了目标。通过进一步微调迭代过程中的超参数，算法的收敛速率或许还能提高，最高可能达到 100%。在同一组收敛的样本中，三种启发式策略的成功率相近，接近 70%。比较捕获时间的概率密度函数（PDF）t_c（见图 2a）时，可以清楚地看到最优控制策略的优势。由此可见，与 $t_c > t_m$ 相比，OC 协议显著降低了长时间搜索的概率，正如最右侧的尾部所示，$t_m \simeq 9\tau_\eta$ 的

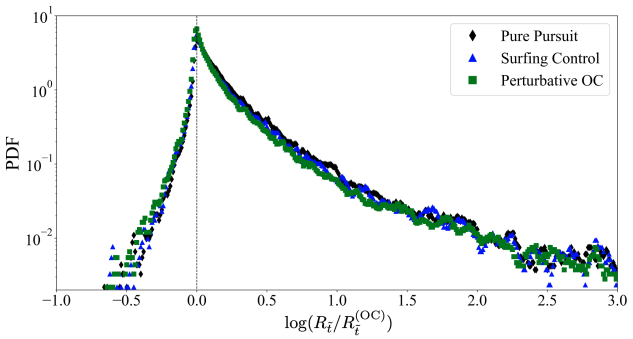


图 3. **最终距离统计**。所有反应式启发式策略在 $R_{\tilde{t}}/R_{\tilde{t}}^{(\mathrm{OC})}$ 时，即 OC 轨迹越过数值 10η 的时刻，到达距离的对数的概率密度函数（PDF）。该统计针对 OC 未能捕获目标的回合。

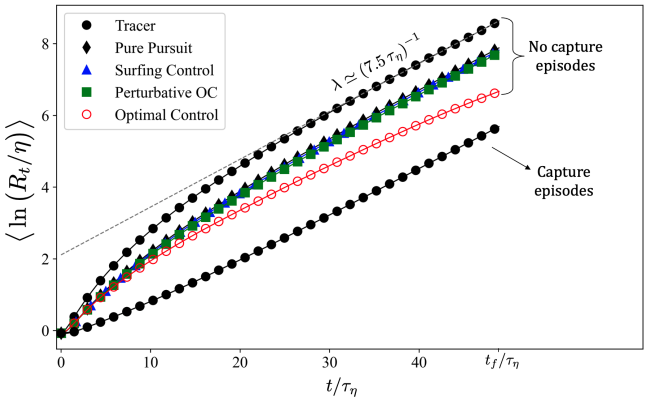


图 4. **所有策略轨迹平均误差增长的对数**。纯追踪（黑色实心菱形）、冲浪控制（蓝色实心三角形）、扰动最优控制（绿色实心方形）和 OC（红色空心圆）仅在未成功的回合（未捕获）中进行测量。无控制搜索者的增长率（带有黑色实心圆的示踪器）则针对捕获和未捕获回合均予以展示。

OC 的平均捕获时间。此外，考虑到剩余的 10% 回合中 OC 能够捕获目标而启发式方法未能捕获，我们发现 OC 也能够在长得多的时间尺度内实现捕获，甚至接近时间范围（未显示）。在图 2 中，我们展示了 OC 协议在比较平均捕获时间（面板 b）时同样具有系统性优势；与每一种启发式反应策略逐条轨迹进行比较时，对于最罕见的事件，OC 的表现也有显著提升（最高可达 $\times 6$）（面板 c）。此外，所有启发式反应策略的表现相近，这凸显了基于局部即时线索的策略所存在的内在局限性。

最终和中间距离统计。当无法在允许的时间范围内捕获目标时，就最终与目标的距离而言，OC 解仍然是最优的，这是由公式 (2) 右端的第一项所决定的；在中间时刻，OC 解也几乎是最优的。图 3 展示了后者，其中给出了每种启发式策略在相应的 OC 轨迹达到间距 $R_{\tilde{t}}^{(\mathrm{OC})} = 10\eta$时的归一化间距概率密度函数 $R_t/R_t^{(\mathrm{OC})}$。除了一小部分事件外，OC 解始终更接近目标，这一点从左右尾部之间的显著不对称性可以看出。

有限时间李雅普诺夫指数与可控性。为了理解成功捕获的条件，考察目标轨迹上间距的典型增长随时间的演变，并根据 OC 协议成功/失败捕获的能力进行分类（图 4 中的黑色实心圆），会很有帮助。渐近地，对所有协议而言，增长率都相同，且由拉格朗日李雅普诺夫指数 λ（虚线）给出。在短时间内，$t \lesssim 10\tau_\eta$，我们看到这两组表现

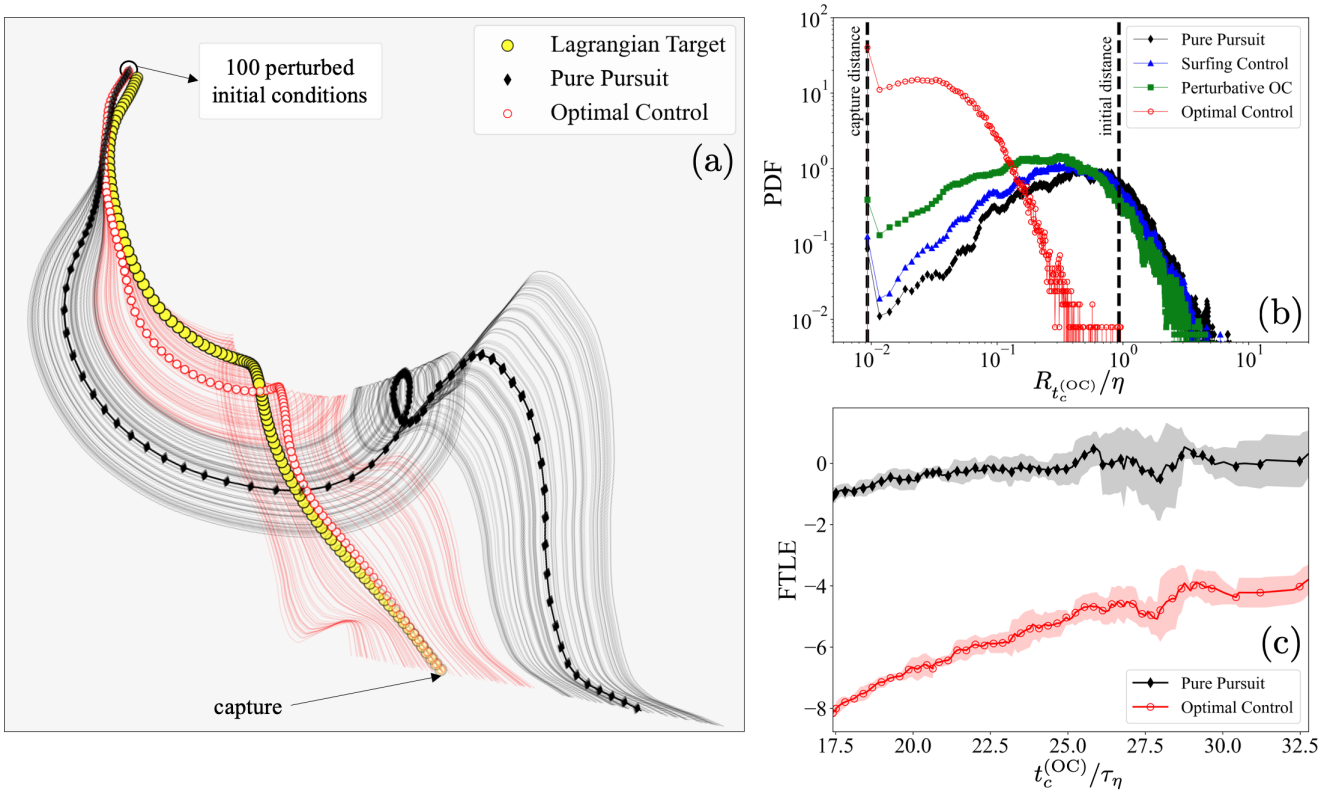


图 5. **初始条件受扰时的鲁棒性。(a)** 通过改变追捕者的初始条件得到的 100 条轨迹示例。目标参考轨迹（黄色大圆圈）、未受扰的 OC 轨迹（红色空心圆圈）、纯追踪策略（黑色实心菱形）。线条表示受扰轨迹，初始误差为 $\delta R_0 \simeq \eta/10$，颜色与未受扰的参考轨迹相同。**(b)** 从受扰初始条件出发时，各控制策略在捕获时间 $t_c^{(OC)}$达到的距离的概率密度函数。概率密度函数对应于 OC 捕获时间大于平均捕获时间的回合，即 $t_c^{(OC)} \gg t_m^{(OC)}$，且启发式策略在时间范围内完成捕获的回合， t_f。初始位置误差设为 $\delta R_0 = \eta/100$。从左到右的两条竖直虚线分别表示捕获距离和初始距离。**(c)** 对于 (b) 中相同的回合，OC 和纯追踪者受扰策略的有限时间李雅普诺夫指数随未受扰捕获时间 $t_c^{(OC)}$的变化。黑色实心菱形和红色空心圆圈表示所有受扰轨迹的均值，阴影区域表示其标准差。

截然不同。具体而言，未成功的回合表现为增长率高于平均值（即 $> \lambda$），而成功的回合则接近平均值，在极早期甚至略低于平均值。在同一图中，我们还展示了在未成功的回合中，启发式协议和 OC 协议下目标与（受控）智能体之间距离的增长。可以看出，OC 协议（红色空心圆）始终优于反应式策略，这表明它并非只是在最终时限临近时才采取“恰当”的动作。

鲁棒性。 为了测试不同协议的鲁棒性，我们采用略有不同的初始条件，重复进行了一部分成功的捕获回合。对于最优控制策略，我们保持未受扰动的转向协议历史不变；而对于启发式协议，我们允许根据受扰动轨迹沿途的局部环境调整反应式控制（见图 5a，其中展示了一个比较最优控制策略与 PP 策略的典型数值实验的三维渲染）。图 5b 展示了在未受扰 OC 参考回合的捕获时刻，受扰 OC 智能体以及采用三种启发式策略的智能体所达到的最终距离的概率密度函数（PDF）。结果针对一组难度最高的回合给出，在这些回合中，未受扰情况下的捕获时间远大于平均值，即 $t_c^{(OC)} \gg 9\tau_\eta$，但所有未受扰的启发式轨迹仍能在时间范围内完成捕获。与反应式策略相比，OC 在鲁棒性方面表现出明显优势，这体现在受扰轨迹成功捕获目标的比例，以及未能成功捕获的回合中与目标的最终距离这两个方面。具体而言，归一化捕获距离 $R/\eta = 10^{-2}$ 处最为显著的峰值，以及 OC 回合相较于三种反应式协议（红色圆圈）所形成的明显更短的右侧尾部，都充分体现了这一点。这一结果尤其引人注目，因为采用启发式策略的智能体虽然从受扰位置出发，却始终遵循瞬时的“正确”控制。其性能

如果我们像对 OC 智能体那样，沿着未扰动轨迹使用学习得到的未扰动策略，那么这三种启发式策略的表现甚至会更差。OC 协议似乎具有相当强的鲁棒性，使目标轨迹成为受控动力学的一个吸引集。图 5c 进一步对此进行了定量分析，其中我们展示了 OC 和 PP 策略的有限时间李雅普诺夫指数（FTLE），该指数是根据未扰动的捕获时间计算得到的，表示为 $\gamma_{t_c^{(\mathrm{OC})}} = 1/t_c^{(\mathrm{OC})} \ln(R_{t_c^{(\mathrm{OC})}}/R_0)$，其中 $R_{t_c^{(\mathrm{OC})}}$表示受扰动智能体与目标之间的距离 [51–53]。FTLE 是 $t_c^{(\mathrm{OC})}$ 的增函数，这证实了较长的捕获时间与更加混沌的目标轨迹相关。此外，无论 $t_c^{(\mathrm{OC})}$ 如何，OC 的 FLTE 始终小于 PP 的 FLTE，这证实了 OC 能够找到“更加稳定”的轨迹。此处展示的研究结果说明了初始条件中量级为 R_c 的扰动所产生的影响（即 $\delta R_0 = R_c = \eta/100$）。无论如何，考虑其他扰动，并对其加以限制以确保该对智能体之间的速度场保持光滑，也会得到定性上相似的结果。

II. 讨论与展望

我们展示了如何高效运用最优控制理论，控制湍流中拉格朗日粒子对的动力学。通过实现一种用于求解庞特里亚金极小值原理 [40, 49, 50], 所导出的欧拉–拉格朗日方程的迭代算法，我们展示了如何以尽可能短的时间捕获移动目标，或者至少将混沌弥散的影响降至最低。

我们聚焦于三维湍流中两个拉格朗日物体的相对动力学，并考察它们的间距始终小于流场耗散尺度的情形。移动目标和智能体都随湍流流场运动，但后者具备有限的推进能力。由于混沌导致间距以指数速率增大，在湍流中追踪粒子极具挑战性，因此迭代算法能否收敛至最优解事先并不明确。事实上，最优轨迹上的每一点都取决于控制的完整历史（过去、现在和未来），因此，某一时刻速度场的强烈波动可能影响整条轨迹，从而妨碍最优解的确定。尽管存在这些困难，我们仍实现了迭代算法的高收敛速率，为将最优控制理论应用于湍流系统铺平了道路；迄今为止，该理论的应用大多局限于简单且可解析求解的问题。

要收敛到最优解，需要具备完美的可观测性，并全面了解系统动力学。人们或许会思考，难以获得但具有前瞻性的最优解，与易于实施的反应式协议之间如何权衡，例如，仅依据环境的局部瞬时信息制定的启发式控制。在此背景下，我们通过微扰方法开发了一种新的反应式控制策略，以求解最优控制问题。该策略被我们称为微扰最优控制，旨在短视的环境评估这一约束下实现尽可能出色的性能。由于假设梯度持续存在，因此可以对其进行解析处理。原则上，可以采用这一微扰方法进行更高阶展开，从而得到其他新的启发式策略。我们发现，以牺牲可观测性来换取计算便利性，必然会导致性能大幅下降：似乎有必要采用比反应式控制更复杂的控制策略。为了弥合最优解与启发式策略之间的差距，可以通过引入短期记忆并辅以某种解析近似，或利用数据驱动方法，来改进后者。

值得注意的是，最优控制策略被证明对智能体初始条件中的扰动具有很强的鲁棒性，这凸显了漂移目标轨迹如何成为受控动力学的吸引子。未来的研究方向之一是，借助随机最优控制理论中的工具 [54, 55]，探究最优控制策略和启发式策略如何受到轨迹过程中测量误差的影响（例如拉格朗日粒子对的位置和局部速度梯度的测量误差），而非仅受到影响初始化的误差的影响。

作为对当前研究结果的一种可能拓展，考虑到微型游动体在小尺度下的控制等应用，将粒子间的流体动力学相互作用纳入动力学，并考虑控制变量具有不可忽略的重新定向时间，或许会很有意义。

最后，一个尚待解决的重要问题是如何将对移动目标的搜索推广到其他值得关注的情形，例如间距大于柯尔莫哥洛夫尺度、且速度差不再平滑的情况。尽管原则上可以采用启发式、反应式和局部方法，但在缺少最优控制解这一基准的情况下，很难评估这些方法的有效性。事实上，如何在湍流惯性区间应用最优控制理论仍是一个开放问题，因为迭代求解欧拉-拉格朗日方程需要在每次迭代时模拟一个新的三维欧拉场，或者存储整个场的演化过程。这两种方法在计算上似乎都难以实现，因此亟需开发新的数值技术，以准确求解大规模拉格朗日优化问题。

III. 方法

用于拉格朗日示踪粒子的 Navier-Stokes 模拟目标轨迹遵循示踪粒子的动力学

$$\dot{\mathbf{X}}_t = \boldsymbol{u}_t(\mathbf{X}_t)\,, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是纳维–斯托克斯方程 [45,46] 的一个解

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \mathbf{F} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

对于黏度为 ν 的不可压缩流体。通过均匀各向同性强迫**F**驱动流场，使其达到非平衡统计稳态；该强迫由二阶 Ornstein-Uhlenbeck 过程 [56] 生成。直接数值模拟（DNS）采用标准伪谱求解器，并使用三分之二规则进行完全去混叠。模拟详情见 [57, 58]。本研究所用 DNS 的参数列于表 I。研究中使用的拉格朗日轨迹数据库每隔 $15dt \simeq \tau_\eta/10$ 保存一次。

N	L	dt	ν
1024	2π	1.5×10^{-4}	8×10^{-4}
ϵ	τ_η	η	Re_λ
1.4 ± 0.1	0.023 ± 0.003	0.0042 ± 0.0001	$\simeq 130$

表 I. DNS 参数：N 每个维度的分辨率；L 三维周期盒子的物理尺寸；dtDNS 积分的时间步长；ν 运动黏度；$\epsilon = \nu\langle\partial_i u_j \partial_i u_j\rangle$；$\tau_\eta = \sqrt{\nu/\epsilon}$；$\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$；$Re_\lambda = u_{rms}\lambda/\nu$，其中 $\lambda = \sqrt{5E_{tot}/\Omega}$ 是根据系统平均能量与涡量平方之比测得的“泰勒尺度”。

最优控制方程

假设智能体与目标之间的距离始终处于速度场的平滑尺度范围内，即 $R_t \lesssim 10\eta$，我们可以将方程 (1) 线性化，得到

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{R}}_t = \nabla\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{R}_t \ + \boldsymbol{U}_t, \\ \boldsymbol{U}_t = V_s\hat{\boldsymbol{n}}_t\,. \end{cases} \tag{5}$$

这里，粒子间距 $\boldsymbol{R}_t$ 表示具有给定初始条件 $\boldsymbol{R}_0$ 的状态变量，而 $\boldsymbol{U}_t$ 是控制变量。如正文所述，我们旨在求解以下优化问题：寻找最优控制，使智能体能够以最短时间 $t_c \le t_f$到达捕获距离R_c，其中 t_f 是固定的时间范围；如果未能实现捕获，则要求控制使最终距离目标的距离 R_{t_f}最小。上述双重目标可以通过要求控制使以下性能指标最小化来形式化地实现。

$$J = R_{t_f}^2 + c\lambda R_c^2 \int_0^{t_f} dt\, f(R_t)\,, \tag{6}$$

其中，λ 是未控制的李雅普诺夫指数，f 是一个适当的光滑函数（见下文），当 $R_t > R_c$ 时等于 1，当 $R_t \le R_c$时等于 0。(6)式中的第一项要求在时间 t_f时距离最小，而第二项则满足在最短时间内达到捕获距离的要求。无量纲参数 c衡量这两个目标的重要性。请注意，如果无法实现捕获，性能指标中的第二项始终为常数 $c\lambda R_c^2 t_f$，问题仍然是使最终距离最小。反之，如果实现了捕获，第一项固定为R_c^2。因此，为了平衡这两项并以有利于捕获的方式进行选择，我们必须选取 $c > 1/(\lambda t_c)$；例如，利用 $t_c \sim 1 - 10\tau_\eta$ 可以估计 $c \ge 10 - 100$。此处所示结果对应于 $c = 100$；而 c 的更高取值会得到相同的结果，$c \sim O(1)$甚至更小的取值则无法找到优化策略。给定无约束性能指标(6)，施加动力学(5)以及控制变量中的非线性约束 $|\hat{\boldsymbol{n}}_t|^2 = 1\,\forall t$后，我们得到以下约束优化问题

$$\tilde{J} = R_{t_f}^2 + \int_0^{t_f} dt\, \Big[c\lambda R_c^2\, f(R_t) + \\ + \boldsymbol{\phi}_t\cdot(\nabla\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{R}_t + V_s\hat{\boldsymbol{n}}_t - \dot{\boldsymbol{R}}) + \mu_t(1 - |\hat{\boldsymbol{n}}_t|^2)\Big]\,, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}_t$，μ_t 是拉格朗日乘子，其作用是作为协态 [40]。通过分部积分，并要求在控制 $\hat{\boldsymbol{n}}_t$和状态 $\boldsymbol{R}_t$ 变化时，J 满足驻定性，优化问题便转化为求解以下“欧拉-拉格朗日”方程 [40]:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{R}}\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} = 0\,, \tag{9}$$

$H = c\lambda R_c^2\, f(R_t) + \boldsymbol{\phi}_t\cdot(\nabla\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{R}_t + V_s\hat{\boldsymbol{n}}_t) + \mu_t(1-\hat{\boldsymbol{n}}_t^2)$ 是约束优化问题的哈密顿函数。$\boldsymbol{\phi}$ 的方程具有终端条件 $\boldsymbol{\phi}_{t_f} = 2\boldsymbol{R}_{t_f}$；而状态变量的动力学 (5)（如下文所述，达到捕获距离时实际上会修改该动力学，使其停止）具有初始条件 $\boldsymbol{R}_0$。请注意，方程 (9) 规定控制为

$$\hat{\boldsymbol{n}}_t = \frac{V_s\boldsymbol{\phi}_t}{2\mu_t} = -\frac{\boldsymbol{\phi}_t}{|\boldsymbol{\phi}_t|}\,, \tag{10}$$

其中 μ_t 起到归一化因子的作用，负号则用于施加 $\frac{\partial^2 H}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}^2} > 0$，因为我们进行的是最小化。

在实践中，为了找到使 J最小化的最优控制解$\tilde{}$，我们使用前向-后向扫描法（前向-后向扫描法） [49]。首先，它需要为 $0 \le t \le t_f$的控制变量$\hat{\boldsymbol{n}}_t$ 提供一个初始猜测。随后，由于需要通过向后（针对拉格朗日乘子）和向前（针对状态变量）积分进行迭代搜索，以确定最优控制，因此该问题的计算量会很大。算法可用以下伪代码概括。

算法： 前向-后向扫掠法

参数：学习率 γ，收敛阈值 δ

1：控制变量的初始猜测值 $\hat{\boldsymbol{n}}_t\,\forall t\in[0,t_f]$

2：正向积分 $\boldsymbol{R}_t$ 在 $t\in[0$ 中的过程：$t_f]$ (方程 (5))

3：反向对 $\boldsymbol{\phi}_t$ 在 $t\in[t_f:0]$ 中的积分（方程（8））

4：更新控制 $\hat{\boldsymbol{n}}_t\leftarrow(1-\gamma)\hat{\boldsymbol{n}}_t+\gamma\,\frac{\boldsymbol{\phi}_t}{|\boldsymbol{\phi}_t|}$ (方程（10））

5：检查收敛性 **如果** $\sum_{i=1}^{t_f/dt}|\Delta w_{i\,dt}|\le\delta\sum_{i=0}^{t_f/dt}|w_{i\,dt}|$ 对于所有 $\boldsymbol{w}\in\{\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{R},\hat{\boldsymbol{n}}\}$ end **否则** 跳转至 2

其中 $\Delta w_{\ t}$ 是变量新旧估计值之间的差异。

在实际实施中，我们使用 $\gamma=5\times10^{-4}$,$\delta=10^{-4}$，并将表现指标最小的启发式策略（即最佳启发式策略）作为控制变量的初始猜测值。使用 PP 进行初始化可以得到定量上相似的结果。如果在算法经过 20K 次迭代后仍未实现收敛，我们会重新执行前向-后向扫描法（FBSM），对参数 $\gamma\leftarrow\gamma/10$，$\delta\leftarrow\delta/10$ 进行重新缩放，并将最大迭代次数增加至 200K。该设置确保了所研究的全部回合中有 80% 实现收敛。在其余 20% 的回合中，前向-后向扫描法（FBSM）算法未能收敛，因此无法达到全局最优解。然而，始终可以将前向-后向扫描法（FBSM）算法迭代过程中使表现指标达到最小值的策略，视为最优控制的近似解。事实上，由于算法的初始化采用了最佳启发式策略，因此该近似解始终是反应行为的一个上界。通过进一步优化超参数，有望提高算法的收敛率，甚至可能达到 100%。此外，对于式（6）中的函数 f，我们使用了

$$f=\tfrac{1}{2}\tanh\left(\alpha\tfrac{R_t-R_c}{R_c}\right)\tag{11}$$

它是 Heaviside 函数的平滑版本，其刚度由 α 控制（此处取值为 10）。此外，为了施加捕获条件，即智能体与目标相距 $R\le R_c$ 时便会黏附其上，我们修改了方程 (5)，使得 $\boldsymbol{R}\to0$当 $R\le R_c$，并将动力学重新定义如下：

$$f\,\dot{\boldsymbol{R}}\to\dot{\boldsymbol{R}},\tag{12}$$

这意味着，(8) 中拉格朗日乘子的反向演化变为

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=-\left[c\lambda R_c^2+\left(\nabla\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{R}_t+V_s\hat{\boldsymbol{n}}_t\right)\cdot\boldsymbol{\phi}_t\right]\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{R}}-f\nabla\boldsymbol{u}_t^{\intercal}\boldsymbol{\phi}_t\,.\tag{13}$$

通过相应地增大或减小初始条件并改变速度幅值，例如考虑（$10R_0\ \to\ R_0$，$10V_s\ \to\ V_s$）或（$R_0/10\to R_0$，$V_s/10\to V_s$），算法的收敛速率仍接近 80%。

启发式策略

与最优控制方程不同，我们研究的启发式控制策略是反应式的，这意味着应用这些策略只需要系统的瞬时信息。例如，纯追踪（PP）策略在导航过程中不会利用任何关于流场的信息，而是不断调整控制方向，使其与移动目标对齐，即 $\hat{\boldsymbol{n}}_t^{\rm PP}=-\hat{\boldsymbol{R}}_t$。相比之下，另外两种策略——冲浪控制（SC）和微扰最优控制（PO）——则同时考虑目标的方向和瞬时速度梯度。尽管这两种策略都基于一个需要通过数值方法优化的自由参数，分别为 τ_s 和 τ_p，但它们的推导依据不同的假设。

冲浪控制策略

该控制方法受参考文献 [48], 启发，其中假设在一段时间 τ_s内，对活性粒子所处流场进行线性近似是合理的。换言之，必须假设流场局部（相对于智能体而言）梯度的持续时间为 τ_s。该控制方法被提出作为一种有效策略，使粒子朝着给定方向（例如垂直方向）漂移，该方向在时间上保持固定；本质上，它通过要求在时间区间 τ_s 内最大化所选方向上的位移来实现。在这里，我们通过假设指向目标的方向 $\boldsymbol{R}_t$在同一时间区间 τ_s内保持不变，将该方法调整为适用于我们的情形。随后，最大化搜索者沿目标方向的位移，即 $\max_{\hat{\boldsymbol{n}}_t}\left[-(\mathbf{X}_{t+\tau_s}^{(a)}-\mathbf{X}_t^{(a)})\cdot\hat{\boldsymbol{R}}_t\right]$，并考虑对环境进行连续测量，我们得到以下策略：

$$\hat{\boldsymbol{n}}_t^{\rm SC}=-\frac{[\exp(\tau_s\nabla\boldsymbol{u}_t)]^{\intercal}\hat{\boldsymbol{R}}_t}{|[\exp(\tau_s\nabla\boldsymbol{u}_t)]^{\intercal}\hat{\boldsymbol{R}}_t|}\,.\tag{14}$$

推导的详细内容请参见参考文献 [48]，此处不再重复。

微扰最优控制策略

我们提出的新颖 PO策略适用于推导最优控制方程时所考虑的相同情形，即假设智能体与目标之间的速度场可线性化（5）；但与冲浪策略类似，我们假设局部梯度持续性维持一段时间 τ_p。在这些假设下，很容易证明

$$\boldsymbol{R}_{\tau_p}=\exp(\tau_p\nabla\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{R}_0+V_s\int_0^{\tau_p}dt\left[\exp[(\tau_p-t)\nabla\boldsymbol{u}_0]\,\hat{\boldsymbol{n}}_t^{\rm PO}\right].\tag{15}$$

接着，我们通过设定$\boldsymbol{R}_{\tau_p}\cdot\boldsymbol{R}_{\tau_p}^{V_s=0}$为最小值来推导 PO 策略（注意，这种微扰方法可视为最优控制方程的 V_s 阶解，即 0^{th} 阶解），也就是直接最小化这对目标之间的间距。最后，像之前一样，假设进行连续测量，我们得到以下控制：

$$\hat{\boldsymbol{n}}_t^{\mathrm{PO}} = -\frac{[\exp(\tau_p \nabla \boldsymbol{u}_t)]^{\intercal} \exp(\tau_p \nabla \boldsymbol{u}_t)\hat{\boldsymbol{R}}_t}{|[\exp(\tau_p \nabla \boldsymbol{u}_t)]^{\intercal} \exp(\tau_p \nabla \boldsymbol{u}_t)\hat{\boldsymbol{R}}_t|}. \qquad (16)$$

注意，当自由参数 τ_s 和 τ_p 设为零时，SC 和 PO 策略会还原为 PP。显然，最优自由参数取决于底层梯度的时间变化 $\nabla \boldsymbol{u}_t$，以及目标的方向 $\boldsymbol{R}_t$。这些参数值是通过经验确定的；我们搜索了能使 2×10^5 个不同拉格朗日目标的捕获频率达到最大的参数值，其中 τ_s 和 τ_p 在范围 $[0, 4\tau_\eta]$ 内变化。具体而言，我们发现最优参数为 $\tau_s \simeq 0.6\tau_\eta$ 和 $\tau_p \simeq 1.3\tau_\eta$。

IV. 数据和代码可用性

本研究所使用的拉格朗日目标轨迹（包括每个粒子沿途的位置、速度、加速度和流体梯度）可在 Smart-TURB门户 http://smart-turb.roma2.infn.it 的 TURB-Lagr资料库 [57]中下载。TURB-Lagr 是一个新的三维湍流拉格朗日轨迹开放数据库，通过对采用均匀各向同性强迫的纳维–斯托克斯方程进行直接数值模拟（DNS）获得。门户中还提供了有关如何下载和读取该数据库的详细说明。支持本研究发现的分析可根据合理请求向通讯作者索取。

用于研究湍流中最优追踪策略的代码（使用 C 语言编写）可从 GitHub 免费下载，链接如下：
https://github.com/calascibetta-chiara/Optimal-tracking-strategies-in-a-turbulent-flow

通信 及材料索取事宜请联系 Chiara Calascibetta。

V. 致谢

本研究获得欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划资助（资助协议编号：882340）。

VI. 作者贡献

所有作者共同构思了这项研究。C.C. 完成了所有数值模拟和数据分析。所有作者均参与了结果的解读和论文的撰写。

VII. 竞争性利益

作者声明不存在任何竞争利益。

[1] Trincavelli, M.等利用移动机器人进行环境监测。载于*2008*年*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议，2210–2215页（IEEE，2008年）。[2] Zhang, W., Inanc, T., Ober-Blobaum, S. & Marsden, J. E. 基于B样条模型的时变二维海洋流场中滑翔机的最优轨迹生成。载于*2008*年*IEEE*机器人与自动化国际会议，1083–1088页（IEEE，2008年）。[3] Bellemare, M. G. 等利用强化学习实现平流层气球的自主导航。《自然》**588**，77–82页（2020年）。[4] Chai, F. 等利用自主平台监测海洋生物地球化学。《自然·地球与环境评论》**1**，315–326页（2020年）。[5] Wang, J. & Gao, W. 纳米/微米尺度马达：生物医学机遇与挑战。《*ACS*纳米》**6**，5745–5751页（2012年）。[6] Li, J., Esteban-Fernández de Ávila, B., Gao, W., Zhang, L. & Wang, J. 用于生物医学的微纳机器人：递送、手术、传感与解毒。《科学·机器人》**2**，eaam6431（2017年）。[7] Wang, B., Kostarelos, K., Nelson, B. J. & Zhang, L. 微纳机器人技术趋势：材料开发、驱动、定位与系统集成用于生物医学应用。先进材料**33**, 2002047 (2021). [8] Szczerba, R. J., Galkowski, P., Glicktein, I. S. & Ter- nullo, N. 实时路径规划的鲁棒算法。*IEEE*航空航天与电子系统汇刊 **36**, 869–878 (2000). [9] Song, Z., Lipinski, D. & Mohseni, K. 强背景流场中的多车辆协作与近乎燃油最优的群体引导。海洋工程**141**, 388–404 (2017). [10] Guerrero, J. & Bestaoui, Y. 有风环境下用于结构检查的无人机路径规划。智能机器人系统杂志**69**, 297–311 (2013). [11] Nasiri, M., Löwen, H. & Liebchen, B. 最优活性粒子导航与机器学习相结合。《欧洲物理快报》**142**, 17001 (2023). [12] Lolla, T., Lermusiaux, P. F. J., Ueckermann, M. P. & Haley, P. J. 利用水平集方程进行动态流场中的时间最优路径规划：理论与方案。海洋动力学 **64**, 1373–1397 (2014). [13] Rhoads, B., Mezić, I. & Poje, A. C. 时变洋流中动力不足车辆的最短时间航向控制。海洋工程 **66**, 12–31 (2013). [14] Biferale, L., Bonaccorso, F., Buzzicotti, M., Clark Di Leoni, P. & Gustavsson, K. 泽尔梅洛问题：利用

强化学习在二维湍流中的最优点对点导航。《混沌：非线性科学跨学科期刊》29, 103138 (2019). [15] Buzzicotti, M., Biferale, L., Bonaccorso, F., Clark di Leoni, P. & Gustavsson, K. 利用强化学习在时变湍流中的点对点导航最优控制。载于《AIxIA 2020 – 人工智能进展》，223–234（施普林格国际出版，沙姆，2021）。[16] Alageshan, J. K., Verma, A. K., Bec, J. & Pandit, R. 湍流中微型游泳体路径规划的机器学习策略。《物理评论E》101, 043110 (2020). [17] Daddi-Moussa-Ider, A., Löwen, H. & Liebchen, B. 流体动力学可决定微型游泳体导航的最优路线。《通讯·物理》4, 15 (2021). [18] Gunnarson, P., Mandralis, I., Novati, G., Koumoutsakos, P. & Dabiri, J. O. 学习在涡旋流场中实现高效导航。《自然通讯》12, 7143 (2021). [19] Verma, S., Novati, G. & Koumoutsakos, P. 通过深度强化学习利用涡旋实现高效集体游动。《美国国家科学院院刊》115, 5849–5854 (2018). [20] Goh, S., Winkler, R. G. & Gompper, G. 自导向活性粒子的噪声追逐与图样形成。New J. Phys. 24, 093039 (2022). [21] Zhu, G., Fang, W.-Z. & Zhu, L. 通过最优控制与强化学习优化低雷诺数捕食。《流体力学杂志》944, A3 (2022). [22] Yang, Y. & Bevan, M. A. 自推进胶体的最优导航。《ACS纳米》12, 10712–10724 (2018). [23] Yang, Y., Bevan, M. A. & Li, B. 通过深度强化学习实现胶体机器人在未知环境中的高效导航。《智能系统进展》2, 1900106 (2020). [24] Piro, L., Mahault, B. & Golestanian, R. 复杂且含噪环境中微型游泳体的最优导航。New J. Phys. 24, 093037 (2022). [25] Piro, L., Golestanian, R. & Mahault, B. 活性粒子在崎岖景观中的导航策略效率。《物理学前沿》10, 1125 (2022). [26] Calascibetta, C., Biferale, L., Borra, F., Celani, A. & Cencini, M. 利用多目标强化学习驾驭拉格朗日混沌。《欧洲物理学杂志E》46, 9 2023( ). [27] Xu, A., Wu, H.-L. & Xi, H.-D. 在热湍流环境中以最低能量消耗实现长距离迁移。《物理评论·流体》8, 023502 (2023). [28] Peterson, C. & Paley, D. 在估计得到的时变流场中实现多车辆协同。《制导、控制与动力学杂志》34, 177–191 (2011). [29] Song, Z. & Mohseni, K. 弯曲射流中的各向异性活性拉格朗日粒子群控制。载于《2015年第54届IEEE决策与控制会议（CDC）》，240–245（IEEE，2015）。[30] Mallory, K., Hsieh, M., Forgoston, E. & Schwartz, I. 环流中的移动传感集群分布式分配。《非线性过程地球物理学》20, 657–668 (2013). [31] Wynn, R. B. et al. 自主水下航行器（AUV）：其过去、现在与未来对海洋地球科学发展的贡献。《海洋地质学》352, 451 468 2014– ( ). [32] Witt, J. & Dunbabin, M. 顺流而行：沿海环境中的自主水下航行器路径规划。载于《2008年澳大拉西亚机器人与自动化会议论文集》

tomation，ACRA 2008（2008）。[33] Smith, R., Das, J., Hine, G., Anderson, W. & Sukhatme, G. 根据环境测量预测波浪滑翔器的速度。OCEANS'11 - MTS/IEEE Kona，论文集（2011）。[34] Lumpkin, R. & Pazos, M. 使用表层流速计划漂流浮标测量表层洋流：仪器、数据及近期的一些成果，39–67（剑桥大学出版社，2007）。[35] Bechinger, C. 等。复杂拥挤环境中的活性粒子。《现代物理评论》88，045006（2016）。[36] Kurzthaler, C. 等。利用单粒子跟踪和差分动态显微术探测催化Janus粒子的时空动力学。《物理评论快报》121，078001（2018）。[37] Popescu, M. N., Tasinkevych, M. & Dietrich, S. 利用催化活性载体拉动和推动货物。《欧洲物理快报》95，28004（2011）。[38] Baraban, L. 等。催化Janus微型马达运输货物。《软物质》8，48–52（2012）。[39] Panda, M., Das, B., Subudhi, B. & Pati, B. B. 自主水下航行器路径规划算法的全面综述。Int. J. Autom. Comput. 17, 321–352（2020）。[40] Bryson, A. E.《应用最优控制：优化、估计与控制》（第1版）（Routledge，1975）。[41] Ben-Asher, J. Z.《航空航天应用最优控制理论》（美国航空航天学会，2010）。[42] Liebchen, B. & Löwen, H. 活性粒子的最优导航策略。《欧洲物理快报》127，34003（2019）。[43] Hays, G. 等。在横向流中长距离迁徙期间的路径优化与Zermelo导航问题求解。《生态学快报》17，137–143（2013）。[44] Nahin, P. J.《追逐与逃逸：追捕与躲避的数学》（普林斯顿大学出版社，2012）。[45] Frisch, U.《湍流：AN Kolmogorov的遗产》（剑桥大学出版社，1995）。[46] Pope, S. B.《湍流》（剑桥大学出版社，2000）。[47] Cencini, M., Cecconi, F. & Vulpiani, A.《混沌：从简单模型到复杂系统》。统计力学进展丛书（世界科学出版社，2010）。[48] Monthiller, R., Loisy, A., Koehl, M. A., Favier, B. & Eloy, C. 驾驭湍流：一种浮游生物导航策略。《物理评论快报》129，064502（2022）。[49] Lenhart, S. & Workman, J. T.《最优控制在生物模型中的应用》。Chapman & Hall/CRC数学与计算生物学丛书（泰勒-弗朗西斯出版集团，2007）。[50] Trélat, E. 最优控制及其在航空航天中的应用：一些成果与挑战。《优化理论与应用杂志》154，713–758（2012）。[51] Brunton, S. L. & Rowley, C. W. 非定常流中有限时间李雅普诺夫指数场的快速计算。《混沌：非线性科学跨学科期刊》20，017503（2010）。[52] Krishna, K., Song, Z. & Brunton, S. L. 非定常流中的有限时域节能轨迹。《英国皇家学会会刊A辑》478，20210255（2022）。[53] Krishna, K., Brunton, S. L. & Song, Z. 模型预测控制与强化学习的有限时间李雅普诺夫指数分析。arXiv预印本 arXiv:2304.03326（2023）。

[54] Fleming, W. H. & Rishel, R. W. 确定性与随机最优控制，第1卷（Springer Science & Business Media，2012）。[55] Crespo, L. G. & Sun, J.-Q. 基于贝尔曼原理的随机最优控制。*Automatica* **39**，2109–2114（2003）。[56] Sawford, B. L. 湍流弥散拉格朗日随机模型中的雷诺数效应。*Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* **3**，1577–1586（1991）。[57] Biferale, L., Bonaccorso, F., Buzzicotti, M. & Calasci- betta. TURB-Lagr：一个三维拉格朗日轨迹数据库-

均匀各向同性湍流中的轨迹。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.08662*（2023）。[58] Buzzicotti, M., Bhatnagar, A., Biferale, L., Lanotte, A. S. & Ray, S. S. 傅里叶模态约化下纳维–斯托克斯湍流的拉格朗日统计：分形与均匀抽稀。*New J. Phys.* **18**，113047（2016）。