arXiv:2305.04678v2 [math.FA] 9 Jan 2024

等距变换群不变的单调算子与利普希茨映射的延拓

´GIULIA CAVAGNARI、GIUSEPPE SAVARE 和 GIACOMO ENRICO SODINI

ABSTRACT. 我们研究自反巴拿赫空间中关于一组适当的等距同构保持不变的单调算子，并证明这些算子总是存在保持相同不变性的极大延拓。类似的结果也适用于希尔伯特空间中的利普希茨映射，从而给出了 Kirszbraun-Valentine 延拓定理的一个不变版本。

随后，我们将这一结果应用于随机变量的 L^p-空间中的单调算子情形，其中这些算子在保测同构下保持不变。我们证明，这类算子总是存在极大耗散延拓，且这些延拓仍在保测同构下保持不变。我们还证明，这类算子具有分布不变性这一更强的性质，并且其预解算子、Moreau-Yosida 逼近以及相应的压缩半群也都继承了这一性质。

这些结果结合了基于自对偶拉格朗日函数的单调算子极大延拓的显式表示公式，以及对赋有无原子测度的标准 Borel 空间中保测映射的深入研究，并将其应用于通过映射序列逼近测度之间任意耦合。

CONTENTS

1 引言.1
2 单调算子与关于等距变换群不变的利普希茨映射的延拓 4
2.1 利用自对偶拉格朗日函数对单调算子进行极大延拓 5
2.2 关于线性同构群作用不变的单调算子的延拓 χ
2.3 希尔伯特空间中不变耗散算子的延拓 9
2.4 希尔伯特空间中不变利普希茨映射的延拓 .11
3 博雷尔划分与几乎最优耦合 .12
标准博雷尔空间与保测同构的技术工具 14
利用保测同构对耦合进行逼近 18
4 关于测度保持不变的 L^p-空间中的单调耗散算子与利普希茨映射

附录 A 关于 G-不变利普希茨映射的延拓定理的另一种证明 30
参考文献.31

1. INTRODUCTION

极大单调算子理论 $\boldsymbol{A}$： $\mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ 希尔伯特空间和自反 Banach 空间中的该理论为求解非线性方程提供了一个非常强大的框架（例如参见综述 [Bor10]）。我们回顾一下，一个算子 $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$（我们将其与其图等同）被称为单调，如果

$$\langle v - w, x - y \rangle \geq 0 \quad \text{for any } (x, v), (y, w) \in \boldsymbol{A},$$

而 $\boldsymbol{A}$ 若 $\boldsymbol{A}$ 的任何真扩张都不再是单调的，则称其为极大单调 e.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：47B44，37A40；次要分类：54C20，49Q22。
Key words and phrases. 利普希茨映射、耗散/单调算子、保测映射的延拓，依不变性定律，最优传输。

在　在希尔伯特空间的情形下，该理论也可应用于如下形式的微分包含

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \in -\boldsymbol{A}x(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

由极大单调算子驱动 $\boldsymbol{A}$ 并证明压缩半群的生成（例如参见 [Br´e73；Bar10]）。

（多值）算子 $\boldsymbol{A}$ 的极大性概念起着至关重要的作用，因为根据 Minty-Browder 定理，它等价于预解方程的可解性

$$J(x) + \tau \boldsymbol{A}x \ni y, \tag{1.2}$$

其中 J 是从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}^*$ [Bar10 的对偶性映射，定理 2。2]。在 Hilbert 空间框架下，方程（1.2）的解对应于与（1.1）相关联的隐式 Euler 格式的可解性，并为（1.1）解的存在性提供了一般条件。在这方面，一个重要工具是众所周知的事实：每个单调算子 $\boldsymbol{A}$ 都存在一个极大延拓 [DF64；Br´e73], 其定义域包含于该算子定义域的闭凸包中$\boldsymbol{A}$.

受对 Bochner-L^p 空间 $\mathcal{X} = L^p(\Omega\ \mathcal{B}, \mathbb{P}; \mathrm{X})$ 中算子的研究启发（这里 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是赋有无原子概率测度 $\mathbb{P}$ 的标准 Borel 空间，X 是自反且可分的巴拿赫空间），这些算子在 Ω 上的保测变换下保持不变。本文探讨一个一般性问题：如何求得在一群适当变换 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$下保持不变的单调算子的极大延拓。更确切地说，设群 G 是一群线性同构，它作用于 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$，其元素 $\mathsf{U} = (U, U')$ 保持 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 中的对偶配对和范数，即对任意 $(U, U') \in \mathsf{G}$ 以及任意 $z = (x, v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$，有

$$\langle U'v, Ux\rangle = \langle v, x\rangle, \quad |Ux| = |x|, \quad |U'v|_* = |v|_*. \tag{1.3}$$

给定一个 G-不变的单调算子 $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$，即

$$(x, v) \in \boldsymbol{A}, \quad (U, U') \in \mathsf{G} \quad \Rightarrow \quad (Ux, U'v) \in \boldsymbol{A}, \tag{1.4}$$

我们将证明（见定理 2.6），存在一个 $\hat{}\boldsymbol{A}$ 的极大延拓 $\boldsymbol{A}$，保持G-不变性；我们还将找到 $\hat{}\boldsymbol{A}$，使得其真定义域 $\mathrm{D}(\hat{}\boldsymbol{A})$ 不超过 $\mathrm{D}(\boldsymbol{A})$ 的闭凸包。

由于目前尚不清楚如何将基于 Debrunner-Flor 和 Zorn 引理的经典证明（例如见 [Br´e73, 第 2.1 定理和第 2.1 推论，第二章]）推广到这一情形，我们将采用 [BW09] 的强大显式构造。该构造基于凸泛函的核平均，以及通过定义在 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 上的适当凸拉格朗日函数对单调算子和极大单调算子的刻画；这是一套深刻的理论，始于开创性论文 [Fit88]（其中首次引入了所谓的 Fitzpatrick 函数），并在近期一系列重要成果中得到进一步发展（例如见 [MT01；BS03；Pen04b；Pen04a；Gho08；Vis17] 以及其中的参考文献）。这种直接方法的优点在于，它为 $\boldsymbol{A}$ 的延拓提供了一个显式公式，并且该公式相对于群 G 的作用表现良好。作为一个中间步骤——这一点也可能独立于 G-不变性而对其他应用具有相关性——我们还将说明（定理 2.3）如何修改 [BW09] 的构造，以便将延拓 $\hat{}\boldsymbol{A}$ 的定义域限制在 $\mathrm{D}(\boldsymbol{A})$ 的闭凸包内（另见 [定理 2.13][BW10]，其中给出了这方面的部分结果）。

作为一个推论，我们可以调整 [BW10] 的相同策略，证明一个版本的 Kirszbraun- Valentine 延拓定理（参见 [Kir34；Val43；Val45]），适用于希尔伯特空间中的 G-不变利普希茨映射（定理 2.13）：该定理指出，每个 L-利普希茨映射 $f\colon D \to \mathcal{H}$，若定义在希尔伯特空间 D 的一个子集 $\mathcal{H}$上，且其图在等距变换群 G 对 $\mathcal{H}$的作用下不变，则可以延拓为一个 L-利普希茨函数 $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，且该函数同样是 G-不变的。这里的基本思想仍可追溯至 Minty：希尔伯特空间中非扩张映射的图

通过 Cayley 变换T：$\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 定义的单调映射的图一一对应

$$T(y,w):=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-w,y+w). \tag{1.5}$$

值得注意的是，这种对应关系使[RS05] 的作者得以首次使用菲茨帕特里克函数证明基尔施布劳恩-瓦伦丁定理（见 [Kir34；Val43；Val45]）。该定理指出，每个1-利普希茨连续映射都可以延拓到整个 $\mathcal{H}$ （另见[Bau07] ，其中改进了这一方法，从而得到值域最优的延拓）。这种对应关系结合 $\boldsymbol{A}$ 在 [BW09], 中对单调算子极大延拓的显式构造， [BW10] 用来给出基尔施布劳恩-瓦伦丁定理的首个构造性证明。

我们还将在附录中提供另一种证明，该证明基于 [ALM21] 给出的这类延拓的另一条较新显式公式（另见 [ALM18]）。

这些结果本身就很有趣，而且在 $\mathcal{X}$ 是随机变量的 L^p-空间时还有有趣的应用

$$\mathcal{X}=L^p(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X}),\quad \mathcal{X}^*=L^{p^*}(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X}^*),\quad p,p^*\in(1,+\infty),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1, \tag{1.6}$$

在参数化空间 $(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P})$ 上，其中 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是一个标准 Borel 空间， $\mathbb{P}$ 是一个无原子概率测度，X 是可分自反 Banach 空间，而 G 是由保测映射生成的同构群，即 $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ 可测映射$g:\Omega\to\Omega$，它们本质单射且满足 $g_\sharp\mathbb{P}=\mathbb{P}$，其中 $g_\sharp\mathbb{P}$ 表示 $\mathbb{P}$ 在 g下的推前测度。每个保测同构 g 都诱导出 G 中的一个元素 U_g ，它在 $(X,X')\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 上的作用简单地定义为 $\mathsf{U}_g(X,X')=(X\circ g,X'\circ g)$。

在 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 中，关注保测同构下的不变性，是因为它与更强的分布不变性相关：如果对于任意 $(X,X')\in\boldsymbol{A}$，集合 $\boldsymbol{A}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 都包含所有与之具有相同 (X,X') 分布的对 $(Y,Y')\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$，即 $(Y,Y')_\sharp\mathbb{P}=(X,X')_\sharp\mathbb{P}.$，那么集合 $\boldsymbol{A}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 就是分布不变的。显然， $\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 的分布不变子集也在保测同构下不变；利用 [BG03], 的结果，我们将证明，对于闭集，反向蕴含也成立：因此，对闭集而言，这两个性质实际上等价。由于极大单调算子的图是闭的，我们得到：
$\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 中的单调算子若其图在保测同构的作用下不变，则存在一个分布不变的极大单调扩张（定理 4.5）。

这一框架在第 3 节（我们在此研究如何用各种类别的保测同构逼近输运映射和输运计划）以及第 4 节中得到了应用。

当 $p=p^*=2$ 且 X 是希尔伯特空间时（因此 $\mathcal{X}=L^2(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})$ 也是希尔伯特空间，并可与其对偶空间 $\mathcal{X}^*$ 等同），希尔伯特空间情形是一个重要的特例，我们将在 [CSS23] 中进一步利用这一点。事实证明，在 $\boldsymbol{B}$ on$L^2(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})$ 上关于保测同构不变的极大耗散算子，是概率分布的 Wasserstein 空间 $\mathcal{P}_2(\mathsf{X})$ 上极大全耗散算子的希尔伯特空间对应形式；其中， $\mathcal{P}_2(\mathsf{X})$ 表示具有有限二阶矩、并赋予所谓康托罗维奇–鲁宾斯坦–Wasserstein 距离 W_2的 Borel 概率测度空间。在第 4 节的框架 (1.6) 中得到的结果被用于 [CSS23] ，以在度量空间 $(\mathcal{P}_2(\mathsf{X})\ W_2)$ 中建立耗散演化方程的适定性理论，并为相应柯西问题的解给出拉格朗日刻画。

除了直接应用第 2 节中给出的一般不变性扩展结果外，在第 4 节中，我们还进一步分析了 $\mathcal{X}=L^2(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})$ 上的利普希茨函数和极大耗散算子的性质，它们在保测同构下保持不变。在

具体而言，我们证明，利普希茨不变映射 $\boldsymbol{L}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 对元素 $X \in \mathcal{X}$的作用总可以表示为

$$\boldsymbol{L}X(w) = l(X(w), X_\sharp \mathbb{P}) \quad \text{for a.e. } \omega \in \Omega$$

其中， $l : \mathcal{S}(\mathsf{X}) \to \mathsf{X}$ 是定义在.....上的一个（由唯一性确定的）连续映射

$$\mathcal{S}(\mathsf{X}) := \Big\{(x, \mu) \in \mathsf{X} \times \mathcal{P}_2(\mathsf{X}) \,:\, x \in \mathrm{supp}(\mu)\Big\}$$

其截面 $l(\cdot, \mu)$ 也都是利普希茨的，对每个 $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathsf{X})$ 均如此。
这些结果的一个重要应用涉及与极大耗散不变算子相关的预解算子、Moreau-Yosida 逼近以及半群 $\boldsymbol{B}$在 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}; \mathsf{X})$ 上，我们由此得到新的重要表示公式（定理 4.13）。

上述结构刻画依赖于概率测度之间耦合在映射和保测变换方面的各种逼近性质。我们在第 3 节汇总这些性质，旨在以统一的框架，并在某些情况下采用适用于第 4 节的稍广义设定，介绍文献中已有的许多重要结果（参见 [BG03; CD18; GT19; Pra07]）。

致谢。G.S. 和 G.E.S. 衷心感谢慕尼黑工业大学高等研究院提供的支持，该研究院由德国卓越计划资助。G.C. 和 G.S. 获得了 MIUR-PRIN 2017 项目“梯度流、最优传输与度量测度结构”的资助。G.C. 还感谢 INDAM-GNAMPA 项目 2022“瓦瑟斯坦空间中的演化与最优控制”（CUP E55F22000270001）提供的部分支持，以及 FSR 米兰理工大学 Prog.TDG3ATEN02 的资助。G.S. 还感谢帕维亚的 IMATI-CNR。

2. Extension of monotone operators and Lipschitz maps invariant by a group ofisometries

设 $\mathcal{X}$ 是一个自反 Banach 空间，其范数为 $|\cdot|$，并设 $\mathcal{X}^*$ 是其对偶空间，赋予对偶范数 $|\cdot|_*$。

我们用 $\mathsf{c}: \mathcal{X}^* \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 表示对偶配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，即 $\mathcal{X}^*$ 与 $\mathcal{X}$ 之间的对偶配对；用 $\mathcal{Z}$ 表示积空间 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$，其对偶空间为 $\mathcal{Z}^* := \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}$。
（多值）算子 $\boldsymbol{A}: \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}^*$（我们将其与它的图，即 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 的子集，视为同一对象）若满足以下条件，则称为单调的

$$\langle v - w, x - y \rangle \geq 0 \quad \text{for every } (x, v), (y, w) \in \boldsymbol{A}. \tag{2.1}$$

$\boldsymbol{A}$ 的真定义域 $\mathsf{D}(\boldsymbol{A}) \subset \mathcal{X}$ 仅是 $\boldsymbol{A}$. 的（图在）第一个分量上的投影。单调算子 $\boldsymbol{A}$ 若包含于 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 中的任意单调算子均与其重合，则称其为极大单调算子 $\boldsymbol{A}$.

为了解决单调算子的延拓问题 $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ （即在等距同构群作用下不变的单调算子的延拓问题），关键在于找到某种显式公式，以给出 $\boldsymbol{A}$的极大延拓。对此，通过 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$中的凸泛函的适当“接触集”来刻画单调算子和极大单调算子的理论始于 [Fit88] 的开创性论文，并在近期一系列重要成果中得到进一步发展（例如参见 [MT01; BS03; Pen04b; Pen04a; Gho08; Vis17]及其中的参考文献），而 [BW09] 提出的核平均运算则提供了极为强大的工具，我们将在下一节简要回顾这些内容。我们还将说明如何略微改进这一构造，从而得到一个显式公式，为 $\boldsymbol{A}$ 提供极大延拓，且其定义域包含于 $\mathsf{D}(\boldsymbol{A}$的闭凸包中。关于这一点，我们指出， $\boldsymbol{A}$ 存在一个定义域具有上述最优性的极大延拓，这一点可由 [Bau07], 根据 Minty 揭示的下列对应关系推得：

单调算子与牢固非扩张映射之间的对应关系。事实上， [Bau07] 利用 Fitzpatrick 函数证明了牢固非扩张映射的 Kirszbraun-Valentine 延拓定理，并实现了最优的值域定位。然而，证明的一部分仍依赖于 Zorn 引理，因此并非完全具有构造性。

2.1. 通过自对偶拉格朗日函数对单调算子的极大延拓

在介绍了 [BW09] 和 [Pen04b], 给出的集合 $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 及其示性函数 $\mathrm{I}_{\boldsymbol{A}}$后，我们考虑适当函数$\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}$： $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X} \to (-\infty, +\infty]$ 定义如下

$$\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}(v,x) := \mathsf{c}(v,x) + \mathrm{I}_{\boldsymbol{A}}(x,v) = \begin{cases} \langle v, x\rangle & \text{if } (x,v) \in \boldsymbol{A}, \\ +\infty & \text{else.} \end{cases}$$

注意，如果 $\boldsymbol{A}$ 是单调的，那么 $\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}$ 存在一个仿射下界，亦即

$$\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}(v,x) \geq \langle v_0, x\rangle + \langle v, x_0\rangle - \langle v_0, x_0\rangle \quad \text{for every } (v,x) \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{X},$$

其中，\((x_0, v_0) \in \boldsymbol{A}\) 是一个任意给定的点。
回顾一下，具有仿射下界的真函数 $g: \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$ 的凸共轭 $g^*: \mathcal{Z}^* \to (-\infty, +\infty]$ 定义为

$$g^*(v,x) := \sup_{(x_0,v_0)\in\mathcal{Z}} \{\langle v_0, x\rangle + \langle v, x_0\rangle - g(x_0,v_0)\}, \quad (v,x) \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{X},$$

对于函数 $h: \mathcal{Z}^* \to (-\infty, +\infty]$, 可作类似定义。我们可以引入 Fitzpatrick 函数 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}: \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$，以及 $\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}$: 的凸下半连续松弛 $\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}: \mathcal{Z}^* \to (-\infty, +\infty]$

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}} := \mathsf{c}^*_{\boldsymbol{A}}, \quad \mathsf{p}_{\boldsymbol{A}} := \mathsf{f}^*_{\boldsymbol{A}} = \mathsf{c}^{**}_{\boldsymbol{A}}. \tag{2.2}$$

我们常常需要调换 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 中元素各分量的顺序：我们将交换映射记为 $\mathfrak{s}: \mathcal{X} \times \mathcal{X}^* \to \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}$

$$\mathfrak{s}(x,v) := (v,x). \tag{2.3}$$

若 g 是定义在 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$（分别为 $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}$）上的任意函数，我们令 $g^\top := g \circ \mathfrak{s}$（分别令 $g^\top := = g \circ \mathfrak{s}^{-1}$）。特别地，$\mathsf{c}^\top$ 是 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{X}^*$ 之间的对偶配对。
我们在下面的陈述中汇总若干有用的性质。

定理 2.1（单调算子的表示）。

(1) 若 $f: \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$ 是满足 $f \geq \mathsf{c}^\top$ 的凸下半连续函数，则

$$\textit{the contact set } \boldsymbol{A}_f := \Big\{(x,v) \in \mathcal{Z} : f(x,v) = \langle v, x\rangle\Big\} \textit{ is monotone, } f^* \geq \mathsf{f}^\top_{\boldsymbol{A}_f}, \tag{2.4}$$

and

$$\boldsymbol{A}_f \subset \boldsymbol{T}_f := \Big\{(x,v) \in \mathcal{Z} : (v,x) \in \partial f(x,v)\Big\}, \tag{2.5}$$

其中 ∂f 表示 f的次微分。对于 g 也有类似的结论： $\mathcal{Z}^* \to (-\infty, +\infty]$ 满足 $g \geq \mathsf{c}$, 令 $\boldsymbol{A}_g := \boldsymbol{A}_{g^\top}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是单调的，则

$$\mathsf{f}^\top_{\boldsymbol{A}} \leq \mathsf{p}_{\boldsymbol{A}} \leq \mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}; \tag{2.6}$$

$$\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}} \geq \mathsf{c}; \quad \mathsf{p}_{\boldsymbol{A}} = \mathsf{c} \quad \textit{on } \boldsymbol{A}, \tag{2.7}$$

即 $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}_{\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是单调算子，且 $f: \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$ 是满足 $\mathsf{c}^\top \leq f \leq \mathsf{p}^\top_{\boldsymbol{A}}$ 的凸下半连续函数，则接触集 $\boldsymbol{A}_f$ 是 $\boldsymbol{A}$. 的单调扩张。

(4) 如果 $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 是极大单调的，则 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}} \geq \mathsf{c}^\top$。反之，如果 $\boldsymbol{A}$ 是单调的且 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}} \geq \mathsf{c}^\top$，则

$$\hat{\boldsymbol{A}} := \left\{ z \in \mathcal{Z} : \mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}(z) = \mathsf{c}^\top(z) \right\} = \left\{ z \in \mathcal{Z} : \mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}(z) = \mathsf{c}(z) \right\} \tag{2.8}$$

给出了 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大单调扩张。

(5) 若 $f : \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$ 是满足 $f \geq \mathsf{c}^\top$ 的凸下半连续函数，则 $\boldsymbol{A}_f$ 是极大单调的，当且仅当 $f^* \geq \mathsf{c}$；此时 $\boldsymbol{A}_f = \boldsymbol{A}_{(f^*)^\top}$.

(6) 若 $f : \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$ 是满足自对偶性质的凸下半连续函数

$$f^* = f^\top, \tag{2.9}$$

则 $f \geq \mathsf{c}^\top$，且接触集 $\boldsymbol{A}_f$ 是极大单调的。

证明。我们列举一些参考文献，并简要概述证明。

（1）包含关系（2.5）由 [Fit88定理 2 得出。4] 并且特别表明 $\boldsymbol{A}_f$ 是单调的，因为 $\mathbf{T}f$ 由 [Fit88命题 2 可知是单调的。2] 显然 $f^\top \leq \mathsf{c}^{\boldsymbol{A}_f}$ 因此，对偶后即可得到反向不等式。

(2) 该 结果（2.6）是 [Pen04b，命题 4(c)] 而（2.7）是 [Pen04b，命题 4(f)].

（3）由（1）和（2）可得。

(4) 第一个蕴含由 [Pen04b 定理 5] 得出。第二个蕴含由[Pen04b 定理 6] 取 $g := f_{\boldsymbol{A}}$ 以及 [BS03 定理 31]。

(5) 该句子的第一部分见 [Pen04b，定理 6] 而等式 $\boldsymbol{A}_f = \boldsymbol{A}_{(f^*)^\top}$ 例如可见于[BS03，定理 3。1]。

<escape>(6) 这包含在[BW09，事实 5 的陈述和证明中。6]。</escape>

□

前面的结果提示了一种策略（参见下文定理 2.2），可从一个凸且下半连续的函数出发，构造给定单调算子 $\boldsymbol{A}$ 的极大延拓 $f : \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$满足

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}} \leq f \leq \mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}^\top \quad \text{in } \mathcal{Z}. \tag{2.10}$$

使用 [BW09] 中引入的核平均，可以得到一个自对偶拉格朗日函数 R_f，它满足 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}} \leq R_f \leq \mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}^\top$，因此，$R_f$ 的接触集是 $\boldsymbol{A}$.的一个极大单调扩张。我们引入一个函数

$$\psi : \mathcal{Z} \to [0, +\infty) \text{ 满足对称性和自对偶条件 } \psi = \psi^\vee = (\psi^*)^\top, \text{ 其中 } \psi^\vee(z) := \psi(-z) \tag{2.11}$$

对每个 $z \in \mathcal{Z}$. 假设（2.11）尤其意味着

$$\psi \text{ is continuous, convex, and } \psi(0) = \psi^*(0) = 0, \tag{2.12}$$

由于

$$0 \leq \psi(0) = \psi^\top(0) = \psi^*(0) = -\inf \psi \leq 0.$$

一个典型的例子是由.....给出的。

$$\psi(x, v) := \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{p^*}|v|_*^{p^*} \quad \text{where } p, p^* \in (1, +\infty) \text{ are given conjugate exponents.} \tag{2.13}$$

以下结果是 [BW09、事实 5.6、定理 5.7、注释 5 的直接推论。8]。

定理 2.2（核平均与极大单调扩张 [BW09]）。设 $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$为一个单调算子，并设 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}} := \mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}^*$、$\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}} := \mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}^{**}$ 如上所定义，且 $\psi : \mathcal{Z} \to [0, +\infty)$ 为如 (2.11) 中的自对偶函数。设 $f : \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$ 为满足 (2.10) 的下半连续凸函数。

(1) 函数 $R_f\colon \mathcal{Z}\to(-\infty,+\infty]$ 定义为

$$R_f(x,v):=\min_{(x,v)=\frac{1}{2}(x_1+x_2,v_1+v_2)}\left\{\frac{1}{2}f(x_1,v_1)+\frac{1}{2}f^*(v_2,x_2)+\frac{1}{4}\psi(x_1-x_2,v_1-v_2)\right\},\tag{2.14}$$

是自对偶的，并满足以下界(2.10)，即 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}\le R_f\le\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}^{\top}$.

(2) 算子 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 定义为 R_f的接触集

$$\tilde{\boldsymbol{A}}:=\{(x,v)\in\mathcal{Z}:R_f(x,v)=\langle v,x\rangle\},\tag{2.15}$$

是 $\boldsymbol{A}$的一个极大单调扩张。

我们想证明，对于如前一个定理中那样对 f 作适当选择，我们可以构造 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大单调扩张，其定义域包含于 $D:=\mathsf{co}(\mathsf{D}(\boldsymbol{A}))$。我们声称，这样的 f 可以定义为

$$f(x,v):=\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}(x,v)+\mathrm{I}_C(x,v),\quad (x,v)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*,\quad C:=D\times\mathcal{X}^*,\tag{2.16}$$

其中 I_C 是 $C=D\times\mathcal{X}^*$ 的示性函数，即当 $x\in D$ 时，$\mathrm{I}_C(x,v)=0$，当 $x\notin D$ 时，$\mathrm{I}_C(x,v)=+\infty$。

定理 2.3 (定义域最小的极大单调扩张)。 设 $\boldsymbol{A}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 为一个单调算子，并设 $f\colon\mathcal{Z}\to(-\infty,+\infty]$ 如 (2.16)所述。则有以下结论：

(1) f 是一个下半连续且凸的函数，使得 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}\le f\le\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}^{\top}$; (2) $\mathsf{D}(f)\subset C=D\times\mathcal{X}^*$ 且 $\mathsf{D}(f^*)\subset\mathfrak{s}(C)=\mathcal{X}^*\times D$; (3) 按照 (2.14) 定义 R_f，其接触集 $\boldsymbol{A}$ 按照 (2.15) 定义，则 $\mathsf{D}(R_f)\subset C=D\times\mathcal{X}^*$，并且 $\boldsymbol{A}$ 给出了 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大延拓，其定义域为 $\mathsf{D}(\boldsymbol{A})\subset D$。

证明。 (1) 显然， f 是凸且下半连续的，并且 $f\ge\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}$。另一方面，$f^{\top}\le\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}$由（2.6）可知，且由于 $\mathrm{I}_C=0$在 $\boldsymbol{A}$上。因此 $f^{\top}\le\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}^{**}=\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}$.

(2) 根据 f的定义，显然有 $f(x,v)=+\infty$若 $x\notin D$。下面计算共轭函数f^*：根据 f Fenchel-Rockafellar 对偶定理（例如参见 [Roc97，定理 16.4]），可得

$$f^*=(\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}+\mathrm{I}_C)^*=\mathrm{cl}(\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}^*\,\square\,\mathrm{I}_C^*)=\mathrm{cl}(\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}\,\square\,\mathrm{I}_C^*)$$

其中，cl 表示给定函数的下半连续包络（即 $\mathrm{cl}(h)$ 是不超过 h 的最大下半连续函数），而 $\square$ 表示两个函数的下确界卷积（或上图集和）：若 $k,j\colon\mathcal{Z}^*\to(-\infty,+\infty]$ 则 $k\,\square\,j$定义为

$$(k\,\square\,j)(z):=\inf_{z_1,z_2\in\mathcal{Z}^*,z_1+z_2=z}k(z_1)+j(z_2),\quad z\in\mathcal{Z}^*.$$

由于 $\mathrm{I}_C(x,v)=\mathrm{I}_D(x)$，我们可以轻松计算其对偶空间，对每个 $z=(v,x)\in\mathcal{X}^*\times\mathcal{X}$ 均成立

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_C^*(v,x)&=\sup_{(x_0,v_0)\in\mathcal{X}^*\times\mathcal{X}}\langle v,x_0\rangle+\langle v_0,x\rangle-\mathrm{I}_D(x_0)=\sup_{x_0\in D,v_0\in\mathcal{X}^*}\langle v_0,x\rangle+\langle v,x_0\rangle\\&=\mathrm{I}_0(x)+\sigma_D(v),\end{aligned}$$

其中 I_0 是单点集 $\{0\}$ 的示性函数，而 σ_D 是由 D 定义的支撑函数

$$\sigma_D(v):=\sup_{x_0\in D}\langle v,x_0\rangle,\quad v\in\mathcal{X}^*.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}(\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}\,\square\,\mathrm{I}_C^*)(v,x)&=\inf_{x_1+x_2=x,v_1+v_2=v}\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}(v_1,x_1)+\mathrm{I}_0(x_2)+\sigma_D(v_2)\\&=\inf_{v_1+v_2=v}\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}(v_1,x)+\sigma_D(v_2).\end{aligned}$$

由于 $\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}=\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}^{**}$且 $\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}(v,x)=+\infty$ if $x\notin D$，我们推得 $\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}(v,x)=+\infty$ if $x\notin D$，$\mathsf{D}(\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}\,\square\,\mathrm{I}_C^*)\subset\mathfrak{s}(C)=\mathcal{X}^*\times D$，因此 $\mathsf{D}(f^*)\subset\mathrm{cl}(\mathcal{X}^*\times D)=\mathcal{X}^*\times D$。

˜(3) 根据第一个断言和定理 2.2 以及 f 如（2.16）中所述，我们得到 $\boldsymbol{A}$ 是一个极大˜单调扩张，扩张对象为 $\boldsymbol{A}$。我们只需验证 $\mathrm{D}(\boldsymbol{A}) \subset D = \mathrm{co}(\mathrm{D}(\boldsymbol{A}))$。根据接触集的定义显然可知 $\mathrm{D}(\tilde{\boldsymbol{A}}) \subset \pi^{\mathcal{X}}(\mathrm{D}(R_f))$，因此只需验证 $\mathrm{D}(R_f) \subset C$。

设 $(x,v) \in \mathrm{D}(R_f)$，则由 (2.14) 可找到 $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ 和 $v_1, v_2 \in \mathcal{X}^*$，使得 $(x,v) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, v_1 + v_2)$ 且 $(x_1, v_1) \in \mathrm{D}(f)$、$(v_2, x_2) \in \mathrm{D}(f^*)$：特别地，由 (2) 可知 x_1, x_2 属于凸集 D，因此 $x \in D$ 也属于该集合。□

2.2. 关于在群 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 的线性同构作用下不变的单调算子的扩张

现在我们将重点关注关于由形如 $\mathsf{U} = (U, U') : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ 的有界线性同构构成的群 G 而不变的算子。对于每个 $z = (x,v) \in \mathcal{Z}$，因此我们有

$$\mathsf{U}(z) = (Ux, U'v) \tag{2.17}$$

并且我们假设所有映射 $\mathsf{U} \in \mathsf{G}$ 都满足以下性质

$$\mathsf{c}^\top(\mathsf{U}z) = \mathsf{c}^\top(z), \quad \psi(\mathsf{U}z) = \psi(z) \quad \text{for every } z \in \mathcal{Z} \tag{2.18}$$

对于一个固定的自对偶函数 $\psi : \mathcal{Z} \to [0, +\infty)$ 如（2.11）所示。注意，（2.18）中的第一个恒等式意味着

$$\langle U'v, Ux \rangle = \langle v, x \rangle \quad \text{for every } (x,v) \in \mathcal{Z} \tag{2.19}$$

因此，$U^* \circ U'$（分别地，$(U')^* \circ U$）是 $\mathcal{X}^*$（分别地，在 $\mathcal{X}$中）的恒等映射，即 $U' = (U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$ 是 U的转置逆。

给定 $\mathsf{U} = (U, U') \in \mathsf{G}$，我们按通常方式定义 $\mathsf{U}^\top := \mathfrak{s} \circ \mathsf{U} \circ \mathfrak{s}^{-1} = (U', U) : \mathcal{Z}^* \to \mathcal{Z}^*$，注意到 $\mathsf{U}^\top$ 与 U 的转置逆一致，这里的对偶性配对定义在$z^* = (v^*, x^*) \in \mathcal{Z}^*$ 与 $z = (x,v) \in \mathcal{Z}$之间，由下式给出

$$\langle z^*, z \rangle = \langle v^*, x \rangle + \langle v, x^* \rangle = \mathsf{c}(v^*, x) + \mathsf{c}^\top(x^*, v),$$

因为

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{U}^\top z^*, \mathsf{U}z \rangle &= \langle (U'v^*, Ux^*), (Ux, U'v) \rangle = \langle U'v^*, Ux \rangle + \langle U'v, Ux^* \rangle = \langle v^*, x \rangle + \langle v, x^* \rangle \\ &= \langle z^*, z \rangle. \end{aligned}$$

特别地，我们有如下公式

$$\langle \mathsf{U}^\top z^*, z \rangle = \langle z^*, \mathsf{U}^{-1} z \rangle \quad \text{for every } z \in \mathcal{Z},\ z^* \in \mathcal{Z}^*,\ \mathsf{U} \in \mathsf{G}. \tag{2.20}$$

定义 2.4. [G-不变性] 我们称集合 $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 为 G-不变的，如果对每个 $\mathsf{U} \in \mathsf{G}$ 都有 $\mathsf{U}\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}$（即，对每个 $(x,v) \in \boldsymbol{A}$ 和 $(U, U') \in \mathsf{G}$，都有 $(Ux, U'v) \in \boldsymbol{A}$）。定义在$\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$（分别定义在 $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}$）上的函数 g称为 G-不变的，如果对每个 $\mathsf{U} \in \mathsf{G}$，都有 $g \circ \mathsf{U} = g$（分别有 $g \circ \mathsf{U}^\top = g$）。函数 $h : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ 称为 G-不变的，如果其图作为 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 的子集是 G-不变的。

下面这个简单结果阐明了单调算子的 G-不变性与相应拉格朗日函数的 G-不变性之间的关系。

命题 2.5.

(1) 若 $f : \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$ 是 G-不变的，则 f^* 是 G-不变的。(2) 若 $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ 是 G-不变的单调算子，则第 2.1 节中定义的函数 $\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}$、$\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}$、$\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}$ 均为 G-不变的。(3) 若 $f : \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$ 是 G-不变的、下半连续且凸的函数，并满足 $f \geq \mathsf{c}^\top$，则按照 (2.4) 定义的接触集 $\boldsymbol{A}_f$ 是 G-不变的。(4) 若 $f : \mathcal{Z} \to (-\infty, +\infty]$ 是 G-不变的，则按照 (2.14) 定义的核平均 R_f 也为 G-不变的。

证明。(1) 对每个 U ∈G，我们显然有

$$f^*(\mathsf{U}^\top z^*) = \sup_{z\in\mathcal{Z}}\left\{\langle \mathsf{U}^\top z^*, z\rangle - f(z)\right\} = \sup_{z\in\mathcal{Z}}\left\{\langle z^*, \mathsf{U}^{-1}z\rangle - f(z)\right\} = \sup_{z\in\mathcal{Z}}\left\{\langle z^*, \mathsf{U}^{-1}z\rangle - f(\mathsf{U}^{-1}z)\right\}$$
$$= \sup_{\tilde z\in\mathcal{Z}}\{\langle z^*, \tilde z\rangle - f(\tilde z)\} = f^*(z^*)$$

此处我们应用了（2.20）、U^{-1} ∈G这一事实、G-不变性，以及 f 这一事实 $\{\tilde z = \mathsf{U}^{-1}z : \ z\in\mathcal{Z}\} = \mathcal{Z}$.

（2）显然，由于 G 不变性，$\mathsf{c}_{\boldsymbol{A}}$ 是 G 不变的 -的不变性 $\boldsymbol{A}$以及（2.18）。
由前述断言可得 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{A}}$ 和 $\mathsf{p}_{\boldsymbol{A}}$ 的不变性。
（3）若 $z = (x, v) \in \boldsymbol{A}_f$，我们知道 $f(z) = \mathsf{c}^\top(z)$。由于 f是G-不变的，（2.18）对每个.....给出 U ∈G

$$f(\mathsf{U}z) = f(z) = \mathsf{c}^\top(z) = \mathsf{c}^\top(\mathsf{U}z)$$

使得 $\mathsf{U}z \in \boldsymbol{A}_f$.
(4) 我们首先注意到函数

$$P(z_1, z_2) := \frac{1}{2}f(z_1) + \frac{1}{2}f^*(\mathfrak{s}(z_2)) + \frac{1}{4}\psi(z_1 - z_2)$$

满足

$$P(\mathsf{U}z_1, \mathsf{U}z_2) = P(z_1, z_2), \tag{2.21}$$

由于 f的不变性、f^*在断言 (1) 中的不变性，以及 ψ 在 (2.18) 中所述的不变性性质。

由于 U 是线性同构，我们还有

$$z = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{U}z = \frac{1}{2}\mathsf{U}z_1 + \frac{1}{2}\mathsf{U}z_2.$$

结合上述恒等式，我们立即得到 $R_f(\mathsf{U}z) = R_f(z)$。 □

现在我们可以得到主要结果。

定理 2.6（G-不变极大单调扩张）。设 $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 是一个 G-不变单调算子，且 $D := \mathrm{co}\,(\mathsf{D}(\boldsymbol{A}))$。那么，由 (2.16) 定义的函数 $\overline{f}$是 G-不变的；并且，若按 (2.14) 定义 R_f，按 (2.15) 定义其接触集 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 G-不变极大单调扩张，其定义域包含于 co (D($\boldsymbol{A}$))。

证明。我们首先注意到，得益于 $\boldsymbol{A}$.的不变性，$C' := \mathsf{D}(\boldsymbol{A}) \times \mathcal{X}^*$ 是 G-不变的。由于 G 中的每个元素都是线性的，co(C') 也具有 G-不变性。最后，由于 G 中的每个元素都是连续的，C :=cl(co(C')) 也具有 G-不变性。

根据命题 2.5 的断言（2），我们推得由（2.16）给出的函数 f 是 G-不变的。˜对 $\boldsymbol{A}$ 的不变性则可通过应用命题 2.5 的断言（4）和（3）得到，并回顾定理 $R_f \geq \mathsf{c}^\top$ 2.1（6）。由定理 2.3 得出结论。□

2.3. 希尔伯特空间中不变耗散算子的延拓

现在我们快速应用上一节的结果2.2 到希尔伯特空间中的耗散算子的特殊情形。鉴于其在微分方程中的应用，我们采用耗散的观点，但显然，我们的所有论述同样适用于单调算子。主要参考文献是 [Br´e73]。

我们考虑一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，其范数为 $|\cdot|$，内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，以及对偶空间 $\mathcal{H}^*$，并将其与 $\mathcal{H}$ 等同。若多值算子 $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 满足算子

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B} := \left\{(x, -v) : (x, v) \in \boldsymbol{B}\right\} \tag{2.22}$$

是单调的。更一般地，如果 $\boldsymbol{B}$ 是 λ-耗散的（$\lambda \in \mathbb{R}$），则称其为.....

$$\langle v-w, x-y\rangle \le \lambda |x-y|^2 \quad \text{for every } (x,v),\ (y,w) \in \boldsymbol{B}. \tag{2.23}$$

注 2.7（λ-变换）。记 $\boldsymbol{i}(\cdot)$ 为 $\mathcal{H}$ 上的恒等函数，容易验证，$\boldsymbol{B}$ 是 λ-耗散的，当且仅当 $\boldsymbol{B}^\lambda := \boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{i}$ 是耗散的，或者等价地，$-\boldsymbol{B}^\lambda = \lambda \boldsymbol{i} - \boldsymbol{B}$ 是单调的。注意，$\mathrm{D}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{D}(\boldsymbol{B}^\lambda) = \mathrm{D}(-\boldsymbol{B}^\lambda)$。

我们称一个 λ-耗散算子 $\boldsymbol{B}$ 是极大的，如果 $\boldsymbol{B}$ 在 λ-耗散算子类中关于包含关系是极大的；等价地，如果 $-\boldsymbol{B}^\lambda$ 是一个极大单调算子。
如果 $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 是一个 λ-耗散算子，那么 $\boldsymbol{B}$ 的任意极大 λ-耗散扩张都是满足 $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}$ 且 $\boldsymbol{C}$ 是极大 λ-耗散的集合 $\boldsymbol{C} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$。
作为定理 2.6的直接应用，我们得到关于在等距变换群 G 作用下不变的耗散算子的一个重要结果。

定理 2.8（不变 λ-耗散算子的扩张）。设 $\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的线性等距变换群，且 $\mathsf{G} := \{(U,U) : U \in \mathsf{G}_{\mathcal{H}}\}$ 是$\mathcal{H} \times \mathcal{H}$上诱导的线性等距变换群。设 $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 是一个 λ-耗散算子，且其关于 G 不变（作为 $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$的子集）。则存在 $\boldsymbol{B}$ 的一个极大 λ-耗散扩张 $\boldsymbol{B}$，满足 $\mathrm{D}(\boldsymbol{B}) \subset \mathrm{co}\,(\mathrm{D}(\boldsymbol{B}))$，且该扩张同样关于 G 不变。

证明。我们可以选择自对偶核

$$\psi(x,v) := \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|v|^2$$

并立即得到 G 满足（2.18）。该结论随即是定理 2.6 应用于 G-不变单调算子 $\boldsymbol{A} := -\boldsymbol{B}^\lambda$. □

备注 2.9. 如果 $\boldsymbol{B}$ 是一个 G-不变的 λ-耗散算子，并且在 G-不变的 λ-耗散算子集合中关于包含关系是极大的，那么 $\boldsymbol{B}$ 是极大的 λ-耗散算子。

现在我们推导有关预解算子、Yosida 正则化以及极大 λ-耗散且 G-不变算子 $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$的最小选取的若干其他性质。关于相应定义和性质的参考资料，请参见 [Br´e73], ，其中对情形 $\lambda = 0$的理论进行了详细论述。如果 $\lambda \neq 0$，则可以得到类似的结论；感兴趣的读者可参见 [CSS23，附录 A]。

下文中我们采用记号 $\lambda^+ := \lambda \vee 0$，并在 $\lambda^+ = 0$ 时令 $1/\lambda^+ = +\infty$。我们用 $\boldsymbol{B}x \equiv \boldsymbol{B}(x) := \{v \in \mathcal{H} : (x,v) \in \boldsymbol{B}\}$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 的截面，其中 $x \in \mathcal{H}$。
回顾可知，对于每个 $0 < \tau < 1/\lambda^+$，$\boldsymbol{B}$ 的预解算子 $\boldsymbol{J}_\tau := (\boldsymbol{i} - \tau \boldsymbol{B})^{-1}$ 是一个定义在整个 $\mathcal{H}$ 上的 $(1-\lambda\tau)^{-1}$-利普希茨映射。$\boldsymbol{B}$ 的最小选取 $\boldsymbol{B}^\circ : \mathrm{D}(\boldsymbol{B}) \to \mathcal{H}$ 也可通过以下方式刻画。

$$\boldsymbol{B}^\circ x = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{\boldsymbol{J}_\tau x - x}{\tau}.$$

$\boldsymbol{B}$ 的吉田逼近定义为 $\boldsymbol{B}_\tau := \frac{\boldsymbol{J}_\tau - \boldsymbol{i}}{\tau}$。对于每个 $0 < \tau < 1/\lambda^+$，$\boldsymbol{B}_\tau$ 都是极大$\frac{\lambda}{1-\lambda\tau}$-耗散的，且是 $\frac{\tau}{1-\lambda\tau}^{2-\lambda\tau}$-Lipschitz连续的。
此外（参见 [Br´e73，命题 2。6] 或 [CSS23，附录 A]），以下结论成立

$$\text{if } x \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B}),\ (1-\lambda\tau)|\boldsymbol{B}_\tau x| \uparrow |\boldsymbol{B}^\circ x|, \text{ as } \tau \downarrow 0, \tag{2.24}$$

$$\text{if } x \notin \mathrm{D}(\boldsymbol{B}),\ |\boldsymbol{B}_\tau x| \to +\infty, \text{ as } \tau \downarrow 0. \tag{2.25}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是一个极大 λ-耗散算子，存在一个由 $e^{\lambda t}$-Lipschitz变换 $(\boldsymbol{S}_t)_{t\ge 0}$ 组成的半群，其满足 $\boldsymbol{S}_t : \mathrm{D}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{D}(\boldsymbol{B})$，使得对每个 $x_0 \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B})$，曲线 $t \mapsto \boldsymbol{S}_t x_0$ 是

包含于D($\boldsymbol{B}$)中，并且它是微分包含式的唯一局部Lipschitz连续解

$$\begin{cases} \dot{x}_t \in \boldsymbol{B}x_t & \text{a.e. } t > 0, \\ x|_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{2.26}$$

我们还有

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\boldsymbol{S}_{t+h}x_0 - \boldsymbol{S}_t x_0}{h} = \boldsymbol{B}^\circ(\boldsymbol{S}_t x_0), \quad \text{for every } x_0 \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B}) \text{ and every } t \geq 0 \tag{2.27}$$

and

$$\boldsymbol{S}_t x = \lim_{n\to+\infty} (\boldsymbol{J}_{t/n})^n x, \quad x \in \overline{\mathrm{D}(\boldsymbol{B})},\, t \geq 0. \tag{2.28}$$

命题2.10（预解算子、Yosida 正则化、半群和最小选取的不变性）。设 $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 是一个 G-不变的极大 λ-耗散算子。那么对于每个 $0 < \tau < 1/\lambda^+$, $t \geq 0$ 算子 $\boldsymbol{J}_\tau$、$\boldsymbol{B}_\tau$、$\boldsymbol{S}_t$、$\boldsymbol{B}^\circ$ 都是 G-不变的。

证明。这些恒等式 $\boldsymbol{J}_\tau(Ux) = U(\boldsymbol{J}_\tau x)$ 和 $\boldsymbol{B}^\circ(Ux) = U(\boldsymbol{B}^\circ x)$ 来自于 G-不变性$\boldsymbol{B}$ 以及预解算子的唯一性。指数公式（参见（2.28））

$$\boldsymbol{S}_t x = \lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{J}_{t/n})^n(x)$$

从而得到 $\boldsymbol{S}_t$ 的 G-不变性。 □

2.4. 希尔伯特空间中不变利普希茨映射的延拓

我们以此结束关于 G-不变集与映射的一般讨论，并探讨如何将定义在可分希尔伯特空间子集上的 G-不变利普希茨映射延拓到整个空间 $\mathcal{H}$.

与定理 2.8一样，我们考虑一个由 $\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$ 的等距同构构成的群 $\mathcal{H}$，它诱导群$\mathsf{G} := \{(U,\ U)\colon\ U \in \mathsf{G}_{\mathcal{H}}\}$ 在 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$.

除了定义 2.4，我们还给出如下定义。

定义 2.11. [$\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$-不变性：针对 $\mathcal{H}$ 值映射] 若函数 $f\colon D \to \mathcal{H}$，其中$D \subset \mathcal{H}$，满足其图是 G-不变的，则称其为 $\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$-不变：

$$\text{for every } x \in D \text{ we have } Ux \in D \text{ and } f(Ux) = Uf(x), \text{ for every } U \in \mathsf{G}_{\mathcal{H}}. \tag{2.29}$$

Kirszbraun-Valentine 定理 [Kir34; Val45] 指出，每个利普希茨函数 $f\colon\ D \to \mathcal{H}$ 定义在子集 D 上的 $\mathcal{H}$，若其利普希茨常数为 $L \geq 0$，则存在一个 Lipschitz 延拓$F\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，且其利普希茨常数与 L相同。我们希望证明，可以找到一个这样的延拓，并使其保留 G-不变性。

我们的出发点是以下众所周知的事实，该事实可追溯至 Minty（另见 [AA99]）。我们引入等距的 Cayley 变换 T, $T^{-1}\colon\ \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathcal{H}\times\mathcal{H}$

$$T(y,w) := \frac{1}{\sqrt{2}}(y-w, y+w), \quad T^{-1}(x,v) := \frac{1}{\sqrt{2}}(x+v, -x+v) \tag{2.30}$$

引理 2.12（利普希茨图与单调图）。设 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A}$ 是 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 的两个子集，使得$\boldsymbol{A} = T(\boldsymbol{F})$。以下两个性质等价：

(1) $\boldsymbol{F}$ 是非扩张映射 f 的图，该映射定义在集合 D 上，由下式给出

$$D := \pi^1(\boldsymbol{F}) = \big\{y \in \mathcal{H} : (y,w) \in \boldsymbol{F} \textit{ for some } w \in \mathcal{H}\big\};$$

(2) $\boldsymbol{A}$ 是单调的。

此外，假设 $\boldsymbol{A}$ 是单调的，则以下结论成立

(i) $\boldsymbol{A}$ 是极大单调的，当且仅当 $D = \mathcal{H}$.(ii) $\boldsymbol{A}$是 G-不变的，当且仅当 $\boldsymbol{F}$ 是 G-不变的（或等价地，f 是 $\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$-不变的）。

(iii) 如果 $\boldsymbol{A}'$ 是 $\boldsymbol{A}$ 和 f' 的单调扩张：$D' \to \mathcal{H}$ 是与 $\boldsymbol{F}'$ 相关联的非扩张映射：$= T^{-1}(\boldsymbol{A}')$，那么 $D' := \pi^1(\boldsymbol{F}') \supset D$，且 f' 是 f. 的扩张

证明。取一对元素 $(x_i, v_i) = T(y_i, w_i) \in \boldsymbol{A}$, $i = 1, 2$；我们有 $y_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + v_i)$,$w_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_i + v_i)$，使得

$$2|y_1 - y_2|^2 = |x_1 + v_1 - (x_2 + v_2)|^2 = |x_1 - x_2|^2 + |v_1 - v_2|^2 + 2\langle x_1 - x_2, v_1 - v_2\rangle, \tag{2.31}$$

$$2|w_1 - w_2|^2 = |-x_1 + v_1 - (-x_2 + v_2)|^2 = |x_1 - x_2|^2 + |v_1 - v_2|^2 - 2\langle x_1 - x_2, v_1 - v_2\rangle, \tag{2.32}$$

然后

$$|w_1 - w_2|^2 \le |y_1 - y_2|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_1 - x_2, v_1 - v_2\rangle \ge 0. \tag{2.33}$$

这证明了第一个结论。

关于 (i)，只需回顾定义域 D 的 f 与 $h(\boldsymbol{A})$ 的像重合，其中 $h(x, v) := \frac{1}{\sqrt{2}}(x + v)$，并且我们知道 $\boldsymbol{A}$ 是极大单调的，当且仅当这样的像与 $\mathcal{H}$ (参见 [Br´e73，命题 2.2 (ii)]) 重合。

第二个性质 (ii) 是 T 的可逆性以及 G 中变换的线性性的直接结果，因此对于每个 U $=(U, U) \in$G，我们有 $T \circ$ U $=$U $\circ T$。

最后考虑断言 (iii)：显然有 $\boldsymbol{F}' = T^{-1}(\boldsymbol{A}') \supset T^{-1}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{F}$，因此 $D' = \pi^1(\boldsymbol{F}') \supset \pi^1(\boldsymbol{F}) = D$。另一方面，由于 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}$ 都是非扩张映射的图，$\boldsymbol{F}' \cap (D \times \mathcal{H}) = \boldsymbol{F} \cap (D \times \mathcal{H})$，因此 f' 在 D 上的限制与 f 一致。□

现在我们可以陈述关于 G-不变利普希茨映射延拓的结果。

定理 2.13 (G-不变利普希茨映射的延拓)。设 $f : D \to \mathcal{H}$ 是 L-ˆ利普希茨映射，并且根据 $\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$满足不变性 (2.29)。那么存在一个 L-利普希茨映射 $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$延拓 f，它也满足$\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$-不变性。

证明。经过重新缩放后，不失一般性，可以假设 $L = 1$ 从而 f 是非扩张的。令 $\boldsymbol{F} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 为 f 的图，并令 $\boldsymbol{A} := T(\boldsymbol{F})$。根据引理 2.12 我们知道，$\boldsymbol{A}$ 是一个单调的G-不变算子

现在我们可以应用定理 2.8 来找到一个极大单调扩张

设置 $\boldsymbol{F}$ 是非扩张映射 $\hat{f}$ 的图。$\boldsymbol{F} := T^{-1}(\hat{\boldsymbol{A}})$ 我们最终可以应用引理 2.12 断言 (i) 表明 $D = \mathcal{H}$，因此ˆf 在全局上有定义；断言 (ii)表明 f 是 $\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$-不变的，而断言 (iii)确保 f 是 f的扩展。□

3. Borel partitions and almost optimal couplings

本节将汇集一些关于标准 Borel 空间的博雷尔同构和划分的有用结果。这些结果不仅本身颇有趣味，而且在第4节中也将派上用场；届时我们将研究作用于 L^p-型巴拿赫空间上的一个特定等距同构群。

我们首先给出本节主要定理陈述中涉及的基本定义和记号，这些定理将在第 3.2 节中介绍。这些结果关注通过保测变换的作用，将概率测度之间的任意耦合逼近为集中于映射上的耦合。特别地，推论 3.20 讨论了用保测映射的图逼近双随机测度，并在标准 Borel 空间的一般背景下给出此结果，其中空间为 $(\Omega\ \mathcal{B})$，并赋有无原子概率测度 $\mathbb{P}$。这一结果依赖于 d 维勒贝格测度在 [BG03 定理 1 中陈述的类似性质。1]秉持与推论 3.20 相同的思路，推论 3.21 为一对.....的分布提供了一个逼近结果

定义在 $(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P})$ 上、取值于一对可分巴拿赫空间的可测随机变量。该结果的一个推论是关键引理[Car13，引理 6。4] (另见 [CD18，引理 5.23，第 379] 页），该引理指出，如果 X 和 Y 是分布相同的随机变量，那么通过一列保测变换的作用， X 可以由 Y 逼近。最后，我们报告了最优传输理论中的一项基本结果，该结果涉及蒙日表述与康托罗维奇表述之间的等价性（见 [Pra07，定理 B]）。这是命题 3.23 的内容，其中该结果以随机变量的语言表述（另见 [GT19，引理 3。13]），以便在第 4 节中轻松回顾。

为了介绍陈述和证明所有这些性质所用到的全部技术工具，在第3.1 节中，我们列举了关于标准 Borel 空间的一些众所周知的事实。

定义 3.1（标准 Borel 空间和无原子测度）。标准 Borel 空间 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是一个可测空间，它同构于（作为测度空间）一个波兰空间。等价地，存在 Ω 上的一个波兰拓扑 τ，使得由 τ 生成的博雷尔σ代数与 $\mathcal{B}$ 一致。若定义在 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 上的正有限测度 $\mathfrak{m}$ 满足：对每个 $\omega \in\Omega$ 都有 $\mathfrak{m}(\{\omega\}) = 0$ （注意 $\{\omega\} \in \mathcal{B}$，因为它在 Ω 上的任意波兰拓扑中都是紧的），则称其为无原子测度（亦称无原子或弥散）。

我们注意到，由于 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是标准 Borel 空间， $\mathfrak{m}$ 是无原子的，当且仅当对于每个满足$\mathfrak{m}(B) > 0$ 的 $B \in \mathcal{B}$，都存在 $B' \in \mathcal{B}$, $B' \subset B$，使得 $0 < \mathfrak{m}(B') < \mathfrak{m}(B)$。

定义 3.2（划分）。如果 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是一个标准 Borel 空间，且 $N \in \mathbb{N}$ 是 $\Omega_{N,k}\}_{k\in I_N} \subset \mathcal{B}$ 的子集族，其中 $I_N := \{0, \dots, N-1\}$，则称其为 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 的一个 N-划分，如果

$$\bigcup_{k\in I_N} \Omega_{N,k} = \Omega, \quad \Omega_{N,k} \cap \Omega_{N,h} = \emptyset \text{ if } h, k \in I_N,\ h \neq k.$$

如果 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是配备了无原子正有限测度 $\mathfrak{m}$ 的标准 Borel 空间，我们用 $\mathsf{S}(\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m})$ 表示 $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$-可测映射 $g : \Omega \to \Omega$ 的类，这些映射本质单射且保测，也就是说，存在一个满 $\mathfrak{m}$-测集 $\Omega_0 \in \mathcal{B}$，使得 g 在 Ω_0 上为单射，且 $g_\sharp\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$，其中 $g_\sharp\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{m}$ 通过 g 的推前测度。我们回顾一下，如果 X 和 Y 是波兰空间， $f\colon X \to Y$ 是一个博雷尔映射，且 μ 是 X 上的非负有限测度，那么 $f_\sharp\mu$ 定义为

$$\int_Y \varphi \,\mathrm{d}(f_\sharp\mu) = \int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu \tag{3.1}$$

对每个 $\varphi\colon\ Y \to \mathbb{R}$ 有界（或非负）Borel 函数。

若 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ 是 Ω 上的一个 σ-代数，我们用 $\mathsf{S}(\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m};\mathcal{A})$ 表示 $\mathsf{S}(\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m})$ 中由 $\mathcal{A}-\mathcal{A}$可测映射组成的子集。最后，$\mathsf{Sym}(I_N)$ 表示 I_N 的置换（即双射映射）$\sigma\colon I_N \to I_N$所成的集合。

我们考虑 $\mathbb{N}$上的偏序，其定义为

$$m \prec n \quad \Leftrightarrow \quad m \mid n, \tag{3.2}$$

其中 $m \mid n$ 表示 $n/m \in \mathbb{N}$。若 $m \prec n$ 且 $m \neq n$，我们记作 $m \prec\!\!\!\prec n$。

定义 3.3（分段）。设 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是一个标准 Borel 空间，配备了一个无原子的正有限测度 $\mathfrak{m}$，且 $\mathfrak{N} \subset \mathbb{N}$ 是关于 $\prec$ 无界的有向集合。若 Ω 的一族划分 $(\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}}$ 及其对应的 σ- 代数 $\mathcal{B}_N := \sigma(\mathfrak{P}_N)$ 满足以下条件，则称其为 $(\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m})$ 的 $\mathfrak{N}$-分段：

(1) 对每个 $N \in \mathfrak{N}$， $\mathfrak{P}_N = \{\Omega_{N,k}\}_{k\in I_N}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 的一个 N-划分；
(2) 对每个 $k \in I_N$ 和每个 $N \in \mathfrak{N}$， $\mathfrak{m}(\Omega_{N,k}) = \mathfrak{m}(\Omega)/N$；(3) 若 $M \mid N = KM$，则 $\bigcup_{k=0}^{K-1} \Omega_{N,mK+k} = \Omega_{M,m}$, $m \in I_M$,

(4) $\sigma(\{\mathcal{B}_N \mid N \in \mathfrak{N}\}) = \mathcal{B}$。

在这种情况下，我们称 $(\Omega\ \mathcal{B}, \mathfrak{m}, (\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 为一个 $\mathfrak{N}$-细化标准博雷尔测度空间。

注 3.4. 显然， $\mathcal{B}_M \subset \mathcal{B}_N$ 当且仅当 $M \mid N$。

例 3.5。 $\mathfrak{N}$-细化标准博雷尔测度空间的典型例子是

$$([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda^c, (\mathfrak{I}_N)_{N\in\mathfrak{N}}),$$

其中 λ^c 是限制在 $[0,1$ 上并以常数 $c>0$ 加权的一维勒贝格测度，且 $\mathfrak{I}_N = (I_{N,\ k})_{k\in I_N}$，其中 $I_{N,\ k} := [k/N, (k+1)/N)$， $k \in I_N$ 和 $N \in \mathfrak{N}$。

3.1. 标准 Borel 空间与保测同构的技术工具

我们首先给出下面这个基本结果，它可由例如 [Roy88，第 9 定理，章15] 得出。

定理 3.6（标准 Borel 空间的同构）。设 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 和 $(\Omega', \mathcal{B}',)$ 是分别配备了无原子正有限测度 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$ 的标准 Borel 空间，且$\mathfrak{m}(\Omega) = \mathfrak{m}'(\Omega')$。那么存在两个可测函数 $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ 和 $\psi : \Omega' \to \Omega$，使得

$$\psi\circ\varphi = \boldsymbol{i}_\Omega\ \mathfrak{m}\text{-}a.e.\ in\ \Omega, \quad \varphi\circ\psi = \boldsymbol{i}_{\Omega'}\ \mathfrak{m}'\text{-}a.e.\ in\ \Omega', \quad \varphi_\sharp\mathfrak{m} = \mathfrak{m}', \quad \psi_\sharp\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}. \tag{3.3}$$

推论 3.7. 设 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是一个赋有无原子正有限测度 $\mathfrak{m}$ 的标准 Borel 空间，且 $(\Omega', \mathcal{B}')$ 是一个标准 Borel 空间。那么，对于 $(\Omega', \mathcal{B}')$ 上每个满足 $\mu(\Omega') = \mathfrak{m}(\Omega)$ 的无原子正测度 μ ，都存在一个可测映射 $X : \Omega \to \Omega'$ ，使得$X_\sharp\mathfrak{m} = \mu$。

引理 3.8（ $\mathfrak{N}$-分割的存在性）。对于任意赋有无原子正有限测度 $\mathfrak{m}$ 的标准 Borel 空间 $(\Omega\ \mathcal{B})$，以及任意关于 $\prec$无界的有向集合 $\mathfrak{N} \subset \mathbb{N}$ ，存在一个 $(\Omega\ \mathcal{B}, \mathfrak{m})$ 的 $\mathfrak{N}$-分割。

证明。设 $([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^c$、$(\mathfrak{I}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 为例 3.5 中的 $\mathfrak{N}$-细化标准 Borel 空间，且 $c = \mathfrak{m}(\Omega)$。由于 $([0,1)\ \mathcal{B}([0,1)))$ 是一个赋有无原子正有限测度 λ^c 的标准 Borel 空间，满足 $\mathfrak{m}(\Omega) = \lambda^c([0,1))$，根据定理 3.6，我们可以找到可测映射 $\varphi\colon [0,1) \to \Omega$、 $\psi\colon \Omega \to [0,1)$ 以及两个子集 $\Omega_0 \in \mathcal{B}$, $U \in \mathcal{B}([0,1))$，使得 $\mathfrak{m}(\Omega_0) = \lambda^c(U) = 0$, $\varphi\circ\psi = \boldsymbol{i}_{\Omega\setminus\Omega_0}$, $\psi\circ\varphi = \boldsymbol{i}_{[0,1)\setminus U}$, $\varphi_\sharp\lambda^c = \mathfrak{m}$ 且 $\psi_\sharp\mathfrak{m} = \lambda^c$。因此，我们可以定义

$$\Omega_{N,0} = \varphi(I_{N,0}\setminus U)\cup\Omega_0, \quad \Omega_{N,k} = \varphi(I_{N,k}\setminus U), \quad k \in I_N\setminus\{0\},\ N \in \mathfrak{N}.$$

令 $\mathfrak{P}_N := \{\Omega_{N,k}\}_{k\in I_N}$ 对每个 $N \in \mathfrak{N}$ 都成立，很容易验证，$(\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{B}, \mathfrak{m})$ 的一个 $\mathfrak{N}$-分割。□

定义 3.9（相容分割）。设 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 和 $(\Omega', \mathcal{B}')$ 是标准 Borel 空间，分别赋有无原子的正有限测度 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$ ，且满足 $\mathfrak{m}(\Omega) = \mathfrak{m}'(\Omega')$；并且 $\mathfrak{P}_N = \{\Omega_{N,k}\}_{k\in I_N}$ 和 $\mathfrak{P}'_N = \{\Omega'_{N,k}\}_{k\in I_N}$ 分别是 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 和 $(\Omega', \mathcal{B}')$ 的 N-划分。若 $\mathfrak{P}_N$ 和 $\mathfrak{P}'_N$ 相容，则称它们为 $\mathfrak{m}-\mathfrak{m}'$ ，当且仅当

$$\mathfrak{m}(\Omega_{N,k}) = \mathfrak{m}'(\Omega'_{N,k}) \quad \forall k \in I_N.$$

引理 3.10（保持相容划分的同构）。设 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 和 $(\Omega', \mathcal{B}')$ 是标准博雷尔空间，分别赋有无原子的正有限测度 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$ ，且满足 $\mathfrak{m}(\Omega) = \mathfrak{m}'(\Omega')$；再设 $\mathfrak{P}_N = \{\Omega_{N,k}\}_{k\in I_N}$ 和 $\mathfrak{P}'_N = \{\Omega'_{N,\ k}\}_{k\in I_N}$ 分别是 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 和 $(\Omega', \mathcal{B}')$ 的两个 $\mathfrak{m}-\mathfrak{m}'$ 相容N-划分，其中 $N \in \mathbb{N}$ 为某个参数。那么存在两个函数$\varphi : \Omega \to \Omega'$ 和 $\psi : \Omega' \to \Omega$，使得

(1) φ 是 $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$ 可测的，且 $\sigma(\mathfrak{P}_N)$-$\sigma(\mathfrak{P}'_N)$可测；(2) ψ 是 $\mathcal{B}'$-$\mathcal{B}$ 可测的，且 $\sigma(\mathfrak{P}'_N)$-$\sigma(\mathfrak{P}_N)$可测；(3) 对每个 $k \in I_N$ ，均有

$$\varphi(\Omega_{N,k}) \subset \Omega'_{N,k}, \quad \psi(\Omega'_{N,k}) \subset \Omega_{N,k}; \tag{3.4}$$

(4) 对每个 $I \subset I_N$，均有

$$\begin{aligned}
\psi_I \circ \varphi_I &= \boldsymbol{i}_{\Omega_I} \ \mathfrak{m}_I\text{-}a.e.\ in\ \Omega_I,\\
\varphi_I \circ \psi_I &= \boldsymbol{i}_{\Omega'_I} \ \mathfrak{m}'_I\text{-}a.e.\ in\ \Omega'_I,\\
(\varphi_I)_\sharp \mathfrak{m}_I &= \mathfrak{m}'_I,\\
(\psi_I)_\sharp \mathfrak{m}'_I &= \mathfrak{m}_I,
\end{aligned}$$

其中，下标 I 表示对 $\cup_{k\in I}\Omega_{N,\,k}$ 或 $\cup_{k\in I}\Omega'_{N,\,k}$的限制。

证明。 应用定理 3.6 于标准 Borel 空间 $(\Omega^{\{k\}}, \mathcal{B}_{\{k\}})$ 和 $(\Omega'_{\{k\}}, \mathcal{B}'_{\{k\}})$，分别赋予无原子正有限测度 $\mathfrak{m}^{\{k\}}$ 和 $\mathfrak{m}'_{\{k\}}$，对每个 $k \in I_N$，可得满足 (3.3) 的可测函数 φ_k, ψ_k，对每一对 $\Omega_{N,\,k}$、$\Omega'_{N,\,k}$ 均成立。于是只需定义

$$\varphi(\omega) := \varphi_k(\omega) \quad \text{if } \omega \in \Omega_{N,k}, \quad \psi(\omega') := \psi_k(\omega') \quad \text{if } \omega' \in \Omega'_{N,k}.$$

注意，按构造，3.4) 得以满足。 □

推论 3.11（将置换提升为同构）。设 $(\Omega\ \mathcal{B}, \mathfrak{m})$ 是一个标准 Borel 空间，赋有无原子正有限测度 $\mathfrak{m}$，并设 $\mathfrak{P}_N = \{\Omega_{N,\,k}\}_{k\in I_N}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 的一个 N-划分，其中某个 $N \in \mathbb{N}$ 满足：对每个 $k \in I_N$，$\mathfrak{m}(\Omega_{N,\,k}) = \mathfrak{m}(\Omega)/N$。若 $\sigma \in \mathrm{Sym}(I_N)$，则存在一个保测同构 $g \in \mathrm{S}(\Omega\ \mathcal{B}, \mathfrak{m};\ \sigma(\mathfrak{P}_N))$，使得

$$(g_k)_\sharp \mathfrak{m}|_{\Omega_{N,k}} = \mathfrak{m}|_{\Omega_{N,\sigma(k)}} \quad \forall k \in I_N,$$

其中，g_k 是 g 在 $\Omega_{N,\,k}$上的限制。

证明。只需将引理 3.10 应用于标准 Borel 空间 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 和 $(\Omega', \mathcal{B}')$=$(\Omega\ \mathcal{B})$，它们分别赋予无原子的正有限测度 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$，并分别配备 N-划分 $\mathfrak{P}_N$ 和 $\mathfrak{P}'_N = \{\Omega_{N,\,\sigma(k)}\}_{k\in I_N}$。□

推论 3.12。设 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是赋予无原子正有限测度 $\mathfrak{m}$ 的标准 Borel 空间，并设 $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{B}$ 满足 $\mathfrak{m}(\Omega_0) = \mathfrak{m}(\Omega_1) > 0$ 且 $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$。则存在保测同构 $g \in \mathrm{S}(\Omega\ \mathcal{B}, \mathfrak{m})$，使得

$$(g_0)_\sharp \mathfrak{m}|_{\Omega_0} = \mathfrak{m}|_{\Omega_1}, \quad (g_1)_\sharp \mathfrak{m}|_{\Omega_1} = \mathfrak{m}|_{\Omega_0}, \quad g(\omega) = \omega\ in\ \Omega \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_1),$$

其中，g_i 是 g 在 Ω_k, $k = 0$上的限制，1。

证明。将推论3.11 应用于配备无原子正有限测度 $\mathfrak{m}|_{\Omega_0\cup\Omega_1}$ 和 2-博雷尔分划 $\mathfrak{P}_2 = \{\Omega_k\}_{k=0,1}$ 且将 0 映到 1 的标准 Borel 空间 $(\Omega_0 \cup \Omega_1, \mathcal{B}|_{\Omega_0\cup\Omega_1})$，可得存在一个保测同构 $\tilde{g} \in \mathrm{S}(\Omega_0 \cup \Omega_1, \mathcal{B}|_{\Omega_0\cup\Omega_1}, \mathfrak{m}|_{\Omega_0\cup\Omega_1})$，使得

$$(\tilde{g}_0)_\sharp \mathfrak{m}|_{\Omega_0} = \mathfrak{m}|_{\Omega_1}, \quad (\tilde{g}_1)_\sharp \mathfrak{m}|_{\Omega_1} = \mathfrak{m}|_{\Omega_0},$$

其中 $\tilde{g}_i$ 是 $\tilde{g}$ 在 Ω_k, $k = 0$,1 上的限制。因此，只需将 $g : \Omega \to \Omega$ 定义为

$$g(\omega) = \begin{cases} \tilde{g}(\omega) & \text{if } \omega \in \Omega_0 \cup \Omega_1, \\ \omega & \text{if } \omega \in \Omega \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_1). \end{cases}$$

□

下一个结果是 Banach 空间值映射的 Doob鞅收敛定理的一个特例，参见 [Str11，定理 6.1。12]。我们回顾一下，$(\Omega\ \mathcal{B})$ 上的一个滤过是由 $\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的子σ代数组成的序列 $\mathcal{B}$，且满足 $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$。

定理 3.13. 设 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是一个赋有无原子正有限测度 $\mathfrak{m}$ 的标准 Borel 空间，$(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 上的一个滤过，满足 $\sigma(\{\mathcal{F}_n \mid n\in\mathbb{N}\}) = \mathcal{B}$，设 X 是一个可分巴拿赫空间，且设 $p\in[1,\infty)$。那么，给定 $X\in L^p(\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m};\mathrm{X})$，X 值鞅

$$X_n := \mathbb{E}_{\mathfrak{m}}[X\mid\mathcal{F}_n],\quad n\in\mathbb{N},$$

满足

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X \tag{3.5}$$

既在 $\mathfrak{m}$-几乎处处意义下，也在 $L^p(\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m};\mathrm{X})$ 中。

一般而言，$(\mathcal{B}_N)_{N\in\mathfrak{N}}$ 与定义 3.3 中的分割相对应的σ-代数集合并不是滤过，因为它不满足按包含关系排序的条件（回顾备注 3.4）。然而，总可以从$(\mathcal{B}_N)_{N\in\mathfrak{N}}$ 中提取出一个仍满足定义 3.3中第(4)项的滤过。更确切地说，有如下结果。

引理 3.14（共尾滤过）。设 $\mathfrak{N}\subset\mathbb{N}$ 是关于 $\prec$的无界有向子集。那么存在一个全序共尾序列 $(b_n)_n\subset\mathfrak{N}$，满足

- $b_n\prec b_{n+1}$ 对每个 $n\in\mathbb{N}$,

对于每个 $N\in\mathbb{N}$，都存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $N\mid b_n$.

特别地，对于每个 $\mathfrak{N}$-细化的标准博雷尔测度空间 $(\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m},(\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$，$(\mathcal{B}_{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 上的滤过，

$$\textit{for every } N\in\mathfrak{N} \textit{ there exists } n\in\mathbb{N} \textit{ such that } \mathcal{B}_N\subset\mathcal{B}_{b_n}, \tag{3.6}$$

以及 $\sigma(\{\mathcal{B}_{b_n}\mid n\in\mathbb{N}\}) = \mathcal{B}$。

对于每个 $p\in[1,+\infty)$ 以及每个可分巴拿赫空间 X，我们因此有：

$$\bigcup_{N\in\mathfrak{N}} L^p(\Omega,\mathcal{B}_N,\mathfrak{m};\mathrm{X}) \textit{ is dense in } L^p(\Omega,\mathcal{B},\mathfrak{m};\mathrm{X}). \tag{3.7}$$

证明。由于 $\mathfrak{N}$ 无界且有向，对于每个有限子集 $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$，该量

$$\mathrm{succ}(\mathfrak{M}) := \min\{N\in\mathfrak{N}\mid M\prec N\ \forall M\in\mathfrak{M}\}$$

定义良好。设 \((a_n)_n\subset\mathbb{N}\) 为 $\mathfrak{N}$ 的一个枚举，并考虑以下通过归纳法定义的序列。

$$b_0 = a_0,\quad b_{n+1} = \mathrm{succ}(\{a_{n+1},b_n\}),\quad n\in\mathbb{N}.$$

那么 $b_n\prec b_{n+1}$ 对于每个 $n\in\mathbb{N}$，且（3.6）对（b_n）$_n$ 以及任意 $\mathfrak{N}$-细化的标准博雷尔测度空间（Ω $\mathcal{B}$，$\mathfrak{m}$，（$\mathfrak{P}_N$）$_{N\in\mathfrak{N}}$）。□

在下一个引理中，我们将证明，给定两个不同的点 ω、ω''，当 $N\in\mathfrak{N}$ 足够大时，总能找到某个划分 $\mathfrak{P}_N$ 将它们分离。

引理 3.15（分离性质）。设 \((\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m},(\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}})\) 是一个 $\mathfrak{N}$-细化的标准博雷尔测度空间。则存在 $\Omega_0\in\mathcal{B}$，使得 $\mathfrak{m}(\Omega_0) = 0$，并且对于每个 $\omega',\omega''\in\Omega\setminus\Omega_0,\omega'\neq\omega''$，都存在 $M\in\mathfrak{N}$，使得对于每个 $N\in\mathfrak{N}$, $M\mid N$，都存在 $k',k''\in I_N$, $k'\neq k''$，满足 $\omega'\in\Omega_{N,\ k'}$ 且 $\omega''\in\Omega_{N,\ k''}$。

证明。设 $(b_n)_n\subset\mathfrak{N}$ 是引理 3.14 中的全序共尾序列，并设 τ 是 Ω 上的一个波兰拓扑，使得 $\mathcal{B}$ 与由 τ 生成的博雷尔 σ 代数一致。根据 Bog06，命题 6.5，存在一个可数族 $\mathcal{F}$ 的 τ- 连续函数 $f\colon\Omega\to[0,1]$，它们能够分离 Ω 中的点，也就是说，对任意 $\omega',\omega''\in\Omega$，存在 $f\in\mathcal{F}$ 使得 $f(\omega')\neq f(\omega'')$。由于 $\mathcal{F}\subset L^2(\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m};\mathbb{R})$，由定理 3.13（取 $\mathcal{F}_n := \mathcal{B}_{b_n}$），对每个 $f\in\mathcal{F}$，存在一个 $\mathfrak{m}$-零测集 Ω_f，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}[f\mid\sigma(\mathfrak{P}_{b_n})](\omega) = f(\omega)\quad\forall\omega\in\Omega\setminus\Omega_f.$$

设 $\Omega_0 := \cup_{f\in\mathcal{F}}\Omega f$，且设 $\omega',\omega''\in\Omega\setminus\Omega_0, \omega'\neq\omega''$。我们可以找到 $f\in\mathcal{F}$，使得 $f(\omega')\neq f(\omega'')$。因此存在 $M=b_m\in\mathfrak{N}$，使得

$$\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}\left[f\mid\sigma\left(\mathfrak{P}_M\right)\right](\omega')\neq\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}\left[f\mid\sigma\left(\mathfrak{P}_M\right)\right](\omega'').$$

由于 $\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}\left[f\mid\sigma(\mathfrak{P}_M)\right]$ 在每个 $\Omega_{M,k}, k\in I_M$ 上都是常数，我们得出点 ω' 和 ω'' 属于 $\mathfrak{P}_M$ 的不同元素，因此对于任意 M 的整数倍，它们也属于 $\mathfrak{P}_N$ 的不同元素。□

命题 3.16（保持分割的同构）。设 $(\Omega\ \mathcal{B},\mathfrak{m},(\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 和 $(\Omega',\mathcal{B}',\mathfrak{m}',(\mathfrak{P}'_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 是 $\mathfrak{N}$-细化的标准博雷尔测度空间，且 $\mathfrak{m}(\Omega)=\mathfrak{m}'(\Omega')$。则存在两个可测函数 $\varphi:\Omega\to\Omega'$ 和 $\psi:\Omega'\to\Omega$，使得对于每个$N\in\mathfrak{N}$ 和每个 $I\subset I_N$，都有

$$\psi_I\circ\varphi_I=i_{\Omega_I}\ \mathfrak{m}_I\text{-几乎处处于 }\Omega_I,\qquad\varphi_I\circ\psi_I=i_{\Omega'_I}\ \mathfrak{m}'_I\text{-几乎处处于 }\Omega'_I,\ (\varphi_I)_\sharp\mathfrak{m}_I=\mathfrak{m}'_I,\ (\psi_I)_\sharp\mathfrak{m}'_I=\mathfrak{m}_I,$$

其中，下标 I 表示限制到 $\cup_{k\in I}\Omega_{N,\ k}$ 或 $\cup_{k\in I}\Omega'_{N,\ k}$。

证明。根据引理 3.14，只需在 $\mathfrak{N}=(b_n)_n$ 的情况下证明该命题，其中 $(b_n)_n\subset\mathbb{N}$ 是严格 $\prec$-递增序列，而 $(\Omega',\mathcal{B}',\mathfrak{m}',(\mathfrak{P}'_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 是 $([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^c,\ (\mathfrak{I}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 如例 3.5 中所述，并满足 $c=\mathfrak{m}(\Omega)$。根据引理 3.10，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们可以找到两个可测映射$\varphi_n:\ \Omega\to[0,1)$ 和 $\psi_n:\ [0,1)\to\Omega$，它们满足引理 3.10 对标准 Borel 空间 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 和 $([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))$ 的结论；这些空间分别赋予无原子、正且有限的测度 $\mathfrak{m}$ 和 λ^c，并配备由 $\mathfrak{P}_{b_n}$ 和 $\mathfrak{I}_{b_n}$ 给出的 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 与 $([0,1)\ \mathcal{B}([0,1)))$ 的 $\mathfrak{m}-\lambda^c$相容 b_n-划分。我们回顾例 3.5 中的结论：$\mathfrak{I}_{b_n}=(I_{b_n,k})^{k\in I_{b_n}}$，其中 $I_{b_n,\ k}=[k/b_n,(k+1)/b_n$。由于 $\sum_n b_n^{-1}<+\infty$，对于每个 $\omega\in\Omega$，序列 $(\varphi_n(\omega))_n\subset[0,1)$ 是柯西序列，因而收敛。因此，存在一个可测映射 $\varphi:\ \Omega\to[0,1)$，使得

$$\varphi(\omega)=\lim_n\varphi_n(\omega)\quad\forall\omega\in\Omega.$$

如果 $n\in\mathbb{N}$、$k\in I_{b_n}$ 和 $\xi\in\mathbb{C}_b\ (I_{b_n,k})$，则

$$\begin{aligned}\int_{I_{b_n,k}}\xi\,\mathrm{d}\varphi_\sharp\mathfrak{m}&=\int_{\Omega_{b_n,k}}\xi(\varphi(\omega))\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(\omega)=\lim_m\int_{\Omega_{b_n,k}}\xi(\varphi_m(\omega))\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(\omega)\\&=\lim_m\int_{I_{b_n,k}}\xi\,\mathrm{d}\lambda^c=\int_{I_{b_n,k}}\xi\,\mathrm{d}\lambda^c,\end{aligned}$$

因为对于 m 充分大的 $(\varphi_m)_\sharp\mathfrak{m}|_{\Omega_{b_n,\ k}}=\lambda^c|_{I_{b_n,\ k}}$ 根据引理 3.10。这表明$\varphi_\sharp\mathfrak{m}|_{\Omega_{b_n,\ k}}=\lambda^c|_{I_{b_n,\ k}}$ 对于每个 $k\in I_{b_n}$ 以及每个 $n\in\mathbb{N}$。为了得出结论，只需证明 φ是 $\mathfrak{m}$-本质单射。令 $\Omega_0\subset\Omega$ 为引理 3.15 给出的 Ω 的 $\mathfrak{m}$-零测子集，并令 $\Omega_1:=\varphi^{-1}(J)$，其中

$$J:=\{k/b_n\mid k\in I_{b_n},\ n\in\mathbb{N}\}\subset[0,1).$$

由于 $\lambda^c(J)=0$，因此 $\mathfrak{m}(\Omega_1)=0$；令 $\omega',\omega''\in\Omega\setminus(\Omega_0\cup\Omega_1)$。则存在 $M\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $n\geq M$，ω' 和 ω'' 属于 $\mathfrak{P}_{b_n}$ 中的不同元素。根据 (3.4) 和引理 3.15，我们可以找到 $k',k''\in I_{b_M}$，使得 $k\neq k'$，并且对于每个$n\geq M$，$\varphi_n(\omega')\in I_{b_M,k'}$且 $\varphi_n(\omega'')\in I_{b_M,k''}$。因此 $\varphi(\omega')\in I_{b_M,k'}$且 $\varphi(\omega')\in I_{b_M,k''}$；然而，由于

$$\overline{I_{b_M,k'}}\cap\overline{I_{b_M,k''}}\subset J,$$

必有 $\varphi(\omega')\neq\varphi(\omega'')$。□

3.2. 利用保测同构逼近耦合 **s**

若 X 是波兰空间，我们用 $\mathcal{P}(X)$ 表示 X 上的 Borel 概率测度空间，该空间赋有弱拓扑（或称窄拓扑）：若序列 $(\mu_n)_n \subset \mathcal{P}(X)$ 收敛到 $\mu \in \mathcal{P}(X)$，则

$$\lim_n \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu_n = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu$$

fo对每个 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ 连续且有界。在这种情况下，我们将 $\mu_n \to \mu$ 记为 $\mathcal{P}(X)$。
若 X、Y 是波兰空间，且 $(\mu, \nu) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$，我们定义可容许传输计划的集合。

$$\Gamma(\mu, \nu) := \left\{ \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid \pi^1_\sharp \boldsymbol{\gamma} = \mu \, , \, \pi^2_\sharp \boldsymbol{\gamma} = \nu \right\}, \tag{3.8}$$

其中 $\pi^i, i = 1, 2$ 表示在第 i 个分量上的投影，我们称 $\boldsymbol{\gamma}$ 的第 i 个边缘分布为 $\pi^i_\sharp \boldsymbol{\gamma}$。

定义 3.17（Wasserstein 空间）。设 \(X\) 是一个可分巴拿赫空间，$\mu \in \mathcal{P}(X)$，$p \geq 1$。我们定义空间

$$\mathcal{P}_p(X) := \{ \mu \in \mathcal{P}(X) \mid \int_X |x|^p \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty \}. \tag{3.9}$$

给定 $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$，我们定义 L^p-Wasserstein 距离 W_p 如下

$$W_p^p(\mu, \nu) := \inf \left\{ \int_{X \times X} |x - y|^p \, \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}(x, y) \mid \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma(\mu, \nu) \right\}. \tag{3.10}$$

我们用 $\Gamma_o(\mu, \nu)$ 表示 $\Gamma(\mu, \nu)$ 中实现式 (3.10) 中下确界的可行计划的（非空、紧且凸）子集。

回顾一下，$(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 是一个完备且可分的度量空间。此外，若 $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_p(X)$ 和 $\mu \in \mathcal{P}_p(X)$，则有以下结论（参见 [AGS08，命题 7.1.5，引理 5.1。7]）

$$\mu_n \to \mu \text{ in } \mathcal{P}_p(X), \text{ as } n \to +\infty \iff \begin{cases} \mu_n \to \mu \text{ in } \mathcal{P}(X), \\ \int_X |x|^p \, \mathrm{d}\mu_n \to \int_X |x|^p \, \mathrm{d}\mu, \end{cases} \quad \text{as } n \to +\infty. \tag{3.11}$$

例如，我们可参阅 [AGS08第 7] 章，以更全面地了解 Wasserstein 距离。

以下结果是 [BG03 定理 1.1] 的一个应用。我们将使用以下记号：若 X_1 和 X_2 是集合，且 X_1: $X_1 \to X_1$, X_2: $X_2 \to X_2$，则用 $X_1 \otimes X_2$: $X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2$ 表示映射 $(x_1, x_2) \mapsto (X_1(x_1)\ X_2(x_2))$。

定理 3.18（双随机耦合的逼近）。设 $(\Omega\ \mathcal{B}, \mathbb{P}, (\mathfrak{P}_N)_{N \in \mathfrak{N}})$ 是一个 $\mathfrak{N}$-精化标准博雷尔概率空间。则对于每个 $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{P})$，都存在一个全序严格递增序列 $(N_n)_n \subset \mathfrak{N}$ 以及映射 $g_n \in S(\Omega\ \mathcal{B}, \mathbb{P}; \mathcal{B}_{N_n})$，使得对于任意可分巴拿赫空间 Z,Z′ 以及任意 $Z \in L^0(\Omega\ \mathcal{B}, \mathbb{P}; Z)$、$Z' \in L^0(\Omega\ \mathcal{B}, \mathbb{P}; Z')$，有

$$(Z \otimes Z')_\sharp (\boldsymbol{i}_\Omega, g_n)_\sharp \mathbb{P} \to (Z \otimes Z')_\sharp \boldsymbol{\gamma} \ \textit{in} \ \mathcal{P}(Z \times Z'). \tag{3.12}$$

证明。根据引理 3.14 不妨假设 $\mathfrak{N} = (b_n)_n$ 对于全序严格递增序列 $(b_n)_n$，$n \in \mathbb{N}$。我们将证明分为几个步骤。
(1) 设 $([0, 1)\ \mathcal{B}([0, 1))\ \lambda^1, (\mathfrak{I}_N)_{N \in \mathfrak{N}})$ 为例 3.5 中的 $\mathfrak{N}$-精化标准博雷尔概率空间，且满足 $c = 1$。则对于每个 $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma(\lambda^1, \lambda^1)$，都存在一个严格递增序列 $(N_n)_n \subset \mathbb{N}$以及映射 $g_n \in S([0, 1)\ \mathcal{B}([0, 1))\ \lambda^1; \sigma(\mathfrak{I}_{b_{N_n}})$，使得

$$(\boldsymbol{i}_{[0,1)}, g_n)_\sharp \lambda^1 \to \boldsymbol{\gamma} \ \textit{in} \ \mathcal{P}([0, 1) \times [0, 1)).$$

设 $\bar{\mathcal{L}}$ 是限制在 $[0, 1]$ 上的一维勒贝格测度，并设 $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma(\lambda^1,\ \lambda^1)$。令 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}([0, 1] \times [0, 1]$是 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的一个扩张，且满足 $\boldsymbol{\mu} \in \Gamma(\mathcal{L},\ \mathcal{L})$。在 [BG03，定理 11] 证明了可以找到一个严格递增序列 $(N_n)_n \subset \mathbb{N}$ 和

¯映射 $(f_n)_n \subset \mathsf{S}([0,1],\mathcal{B}([0,1])\ \mathcal{L})$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\sigma_n \in$ 对称群$(I_{2^{N_n}})$，满足

$$f_n(x) = x - x_{N_n,k} + x_{N_n,\sigma_n(k)}, \quad x \in I_{2^{N_n},k}, \quad k \in I_{2^{N_n}}, \tag{3.13}$$

其中 $x_{m,j}$ 为 $I_{2^m,j}$ 的中心，并且满足

$$(\boldsymbol{i}_{[0,1]}, f_n)_\sharp \bar{\mathcal{L}} \to \boldsymbol{\mu} \text{ in } \mathcal{P}([0,1]\times[0,1]). \tag{3.14}$$

如果我们将 f_n 对 $[0,1$ 的限制称为 g_n），$n \in \mathbb{N}$，则可得 $g_n \in \mathsf{S}([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1;\ \sigma(\mathfrak{I}_{b_{N_n}}))$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，并且

$$(\boldsymbol{i}_{[0,1)}, g_n)_\sharp \lambda^1 \to \boldsymbol{\gamma} \text{ in } \mathcal{P}([0,1)\times[0,1)).$$

这仅在 $b_n = 2^n$的情况下证明了第一步。不过，很容易验证，[BG03，定理 1。1] 的证明并不依赖于序列 b_n 的具体选择，只需满足$b_n \prec\!\!\prec b_{n+1}$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$，区间 $[k/b_n,(k+1)/b_n]$ 的长度趋于 0 的速度快于 2^{-n} 当 $n \to +\infty$。至此，第一个断言得证。

(2) 设 $([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1, (\mathfrak{I}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 是例 3.5 中的 $\mathfrak{N}$-精化标准博雷尔概率空间，其中 $c = 1$。那么，对于每个 $\gamma \in \Gamma(\lambda^1,\lambda^1)$，都存在一个严格递增序列 $(N_n)_n \subset \mathbb{N}$以及映射 $g_n \in \mathsf{S}([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1;\ \sigma(\mathfrak{I}_{b_{N_n}}))$，使得对于每个可分巴拿赫空间 Z, Z′以及每个 $Z \in L^0([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1;\mathsf{Z})$，$Z' \in L^0([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1;\mathsf{Z}')$，均有以下结论

$$(Z\otimes Z')_\sharp(\boldsymbol{i}_{[0,1)}, g_n)_\sharp\lambda^1 \to (Z\otimes Z')_\sharp\gamma \ in\ \mathcal{P}(\mathsf{Z}\times\mathsf{Z}').$$

令 $\gamma \in \Gamma(\lambda^1,\lambda^1)$，并令 $(g_n)_n$ 为由关于 γ 的断言 (1) 给出的序列。设 Z 和 Z′ 为可分巴拿赫空间，并令 $Z \in L^0([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1;\mathsf{Z})$，$Z' \in L^0([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1;\mathsf{Z}')$。注意，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个紧集 $K_\varepsilon \subset [0,1)$，使得 Z 和 Z' 在 K_ε 上的限制在 K_ε 和 $\lambda^1([0,1)\setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ 中连续。因此，令 $\gamma_n := (\boldsymbol{i}_{[0,1)}, g_n)_\sharp\lambda^1, n \in \mathbb{N}$，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\gamma_n([0,1)^2 \setminus K_\varepsilon^2) \le 2\varepsilon$。根据 [AGS08，命题 5.1.10] 以及断言 (1)，$(Z\otimes Z')\sharp(\boldsymbol{i}_{[0,1)}, g_n)_\sharp\lambda^1 \to (Z\otimes Z')\sharp\gamma$ 在 $\mathcal{P}(\mathsf{Z}\times\mathsf{Z}')$ 中。

(3) 结论 令 $\gamma \in \Gamma(\mathbb{P},\mathbb{P})$，并令 $\varphi\colon \Omega \to [0,1)$ 和 $\psi\colon [0,1) \to \Omega$ 为命题 3.16 针对 $\mathfrak{N}$-精化标准博雷尔概率空间 $(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P}, (\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 和 $([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1, (\mathfrak{I}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 给出的映射，其中后者如例 3.5 所述，且 $c = 1$。若定义$\gamma' := (\varphi\otimes\varphi)\sharp\gamma$，则有 $\gamma' \in \Gamma(\lambda^1,\lambda^1)$，因此我们可以找到一个严格递增序列 $(N_n)_n \subset \mathbb{N}$ 以及映射 $g_n' \in \mathsf{S}([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1;\ \sigma(\mathfrak{I}_{b_{N_n}}))$，如步骤 (2) 所述。定义

$$g_n := \psi\circ g_n'\circ\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

然后，只要在一个 $\mathbb{P}$零测集 上改变每个 g_n，我们就可以假设 $g_n \in$S$(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\ \mathcal{B}_{b_{N_n}})$。设 Z 和 Z′为可分巴拿赫空间，并设 $Z \in L^0(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{Z}),Z' \in L^0(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{Z}')$。如果我们定义 $Z_0 := Z\circ\psi$和 $Z_0' := Z'\circ\psi$，就得到 $Z_0 \in L^0([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1);\mathsf{Z})$，$Z_0' \in L^0([0,1)\ \mathcal{B}([0,1))\ \lambda^1);\mathsf{Z}')$。因此，由步骤 (2) 可得

$$(Z_0\otimes Z_0')_\sharp(\boldsymbol{i}_{[0,1)}, g_n')_\sharp\lambda^1 \to (Z_0\otimes Z_0')_\sharp\gamma' \text{ in } \mathcal{P}(\mathsf{Z}\times\mathsf{Z}')$$

这等价于（3.12）。 □

注3.19。 在定理 3.18的条件下，设 φ： Z $\to [0,+\infty)$， φ'： Z′ $\to [0,+\infty)$ 为博雷尔函数。令

$$\psi(z,z') = \varphi(z) + \varphi'(z'), \quad \text{for every } (z,z') \in \mathsf{Z}\times\mathsf{Z}',$$

则对每个 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}\int \psi \,\mathrm{d}(Z \otimes Z')_\sharp(\boldsymbol{i}_\Omega, g_n)_\sharp \mathbb{P} &= \int \psi(Z, Z' \circ g_n)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int \Big(\varphi(Z) + \varphi'(Z' \circ g_n)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int \varphi(Z)\,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int \varphi'(Z')\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int \varphi(Z(x_1))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}(x_1, x_2) + \int \varphi'(Z'(x_2))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}(x_1, x_2) \\ &= \int \psi(Z(x_1), Z'(x_2))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}(x_1, x_2) = \int \psi \,\mathrm{d}(Z \otimes Z')_\sharp \boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}$$

因此，若 $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}' = \mathsf{X}$ 其中 X 是可分巴拿赫空间，且 $Z,\ Z' \in L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}; \mathsf{X})$，$p \in [1, +\infty)$，则 (3.12) 中的收敛在 $\mathcal{P}_p(\mathsf{X}^2)$ 中成立。为证明这一点，只需应用 (3.11)，并在上述恒等式中取 $\psi(z, z') := |z|^p_{\mathsf{X}} + |z'|^p_{\mathsf{X}}$，$z, z' \in \mathsf{X}$。

我们由此得出两个重要的应用。

推论 3.20. 设 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}, (\mathfrak{P}_N)_{N \in \mathfrak{N}})$ 是一个 $\mathfrak{N}$-精化标准博雷尔概率空间。则对每个 $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{P})$，都存在一个全序严格递增序列 $(N_n)_n \subset \mathfrak{N}$ 以及映射 $g_n \in \mathsf{S}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}; \mathcal{B}_{N_n})$，使得对于 Ω 上每个生成 $\mathcal{B}$ 的波兰拓扑 τ，都有

$$(\boldsymbol{i}_\Omega, g_n)_\sharp \mathbb{P} \to \boldsymbol{\gamma} \ \text{ in } \mathcal{P}(\Omega \times \Omega, \tau \otimes \tau),$$

其中，$\tau \otimes \tau$ 是 $\Omega \times \Omega$ 上的乘积拓扑。

证明。 根据定理 3.18 和注释3.19，存在一个严格递增序列 $(N_n)_n \subset \mathbb{N}$ 以及映射 $g_n \in \mathsf{S}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}; \mathcal{B}_{N_n})$，选择可分希尔伯特空间 $\mathbb{R}$后，我们得到

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)_\sharp(\boldsymbol{i}_\Omega, g_n)_\sharp \mathbb{P} \to (\varphi_1 \otimes \varphi_2)_\sharp \boldsymbol{\gamma} \text{ in } \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^2)$$

对于每个 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathsf{C}_b(\Omega, \tau) \subset L^0(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}; \mathbb{R})$。由于 φ_i 的值域有界，因而相对紧，由 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ 收敛可得，

$$\int_{\Omega \times \Omega} h(\varphi_1(\omega_1), \varphi_2(\omega_2))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}_n(\omega_1, \omega_2) \to \int_{\Omega \times \Omega} h(\varphi_1(\omega_1), \varphi_2(\omega_2))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}(\omega_1, \omega_2)$$

对于每个连续函数 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 其中 $\boldsymbol{\gamma}_n = (\boldsymbol{i}_\Omega, g_n)_\sharp \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$。取 $h(x, y) := xy$，我们得到

$$\int_{\Omega \times \Omega} \varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}_n(\omega_1, \omega_2) \to \int_{\Omega \times \Omega} \varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}(\omega_1, \omega_2) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_b(\Omega, \tau). \tag{3.15}$$

设 $\mathcal{A} \subset \mathsf{C}_b(\Omega, \tau)$ 为一个含幺子代数，其在 Ω 上诱导的始拓扑与τ 一致（例如，对于诱导 τ的完备距离 d，由 d-Lipschitz连续且有界函数构成的子集）。容易验证，

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} := \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_1^i \otimes \varphi_2^i \mid (\varphi_1^i)_{i=1}^n, (\varphi_2^i)_{i=1}^n \subset \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathrm{C}_b(\Omega \times \Omega, \tau \otimes \tau)$$

是一个含幺子代数，其在 Ω 上诱导的始拓扑 $\times\, \Omega$ 与 $\tau \otimes \tau$ 相同。由（3.15），因此可得

$$\int_{\Omega \times \Omega} \varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}_n \to \int_{\Omega \times \Omega} \varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma} \quad \forall \varphi \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}.$$

结合 [SS22，引理 2，得证。3]。 □

下述推论的第二部分可视为对[Car13，引理 64]（另见 [CD18，引理 5.23，第 379]页）中已知结果的一种推广，推广到由随机变量构成的成对变量 (X, Y) 这一类情形，其中 X 和 Y取值于可能不同的可分巴拿赫空间，并且具有可能不同的 p可积性。只要属于.....的两对随机变量 (X, Y)，(X', Y') 的联合分布

对于这样一个类而言是相等的，我们能够证明存在一个由保测映射组成的序列，从而为这两个分量都给出所需的强逼近结果。

推论 3.21. 设 $(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P},(\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$ 是一个 $\mathfrak{N}$-精化标准博雷尔概率空间，Z 和 Z' 是可分巴拿赫空间，且 $Z\in L^0(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{Z})$、$Z'\in L^0(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{Z}')$。则对于任意 $\boldsymbol{\mu}\in\Gamma(Z_\sharp\mathbb{P},Z'_\sharp\mathbb{P})$，存在一个全序严格递增序列 $(N_n)_n\subset\mathfrak{N}$ 以及映射 $g_n\in\mathsf{S}(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathcal{B}_{N_n})$，使得

$$(Z,Z'\circ g_n)_\sharp\mathbb{P}\to\boldsymbol{\mu}\ in\ \mathcal{P}(\mathsf{Z}\times\mathsf{Z}'). \tag{3.16}$$

特别地，若 X 和 Y 是可分巴拿赫空间，$X,X'\in L^p(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})$，$Y,Y'\in L^q(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{Y})$，$p,q\in[1,+\infty)$，且 $(X,Y)_\sharp\mathbb{P}=(X',Y')_\sharp\mathbb{P}$，则存在一个全序严格递增序列 $(N_n)_n\subset\mathfrak{N}$ 以及映射 $g_n\in\mathsf{S}(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathcal{B}_{N_n})$，使得 $X'\circ g_n\to X$属于 $L^p(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})$，且 $Y'\circ g_n\to Y$属于 $L^q(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{Y})$，当 $n\to\infty$。

证明。令 $\mu:=Z_\sharp\mathbb{P}$ 和 $\mu':=Z'_\sharp\mathbb{P}$；我们首先注意到，存在 $\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma(\mathbb{P},\mathbb{P})$，使得 $(Z\otimes Z')\sharp\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\mu}$。事实上，我们可以对 $\mathbb{P}$ 关于 Z 和 μ 应用析取定理（例如参见 [AGS08，定理 5.3.1]，其中详述了析取定理），得到一个博雷尔测度族 $(\theta_z)_{z\in\mathsf{Z}}\subset\mathcal{P}(\Omega)$，使得对于 μ-几乎处处的 $z\in\mathsf{Z}$ 以及 $\mathbb{P}=\int\theta_z\,\mathrm{d}\mu(z)$，$\theta_z$ 集中于 $Z^{-1}(z)$；类似地，我们也可以找到 $(\theta'_{z'})_{z'\in\mathsf{Z}'}\subset\mathcal{P}(\Omega)$，使得对于 μ'-几乎处处的 $z'\in\mathsf{Z}'$ 和$\mathbb{P}=\int\theta'_{z'}\,\mathrm{d}\mu'(z')$，$\theta'_{z'}$ 集中于 $(Z')^{-1}(z')$。因此，我们可以定义 $\boldsymbol{\gamma}:=\int(\theta_z\otimes\theta'_{z'})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}(z,z')\in\mathcal{P}(\Omega\times\Omega)$，并且显然可以验证 $(Z\otimes Z')\sharp\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\mu}$，因为对于每个函数 $\varphi_1\in\mathsf{C}_b(\mathsf{Z})$，$\varphi_2\in\mathsf{C}_b(\mathsf{Z}')$，

$$\begin{aligned}\int\varphi_1(Z(\omega))\varphi_2(Z'(\omega'))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}(\omega,\omega')&=\int\left(\int\varphi_1(Z(\omega))\varphi_2(Z'(\omega'))\,\mathrm{d}\theta_z(\omega)\,\mathrm{d}\theta'_{z'}(\omega')\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}(z,z')\\&=\int\int\varphi_1(Z(\omega))\,\mathrm{d}\theta_z(\omega)\int\varphi_2(Z'(\omega'))\,\mathrm{d}\theta'_{z'}(\omega')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}(z,z')\\&=\int\Big(\varphi_1(z)\varphi_2(z')\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}(z,z').\end{aligned}$$

还要注意，只需验证对于每个形如上文所述的Z，$Z')_\sharp\mathbb{P}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 的函数，二者的积分相同，即可得出这两个测度相等（例如，参见上述推论3.20的证明）。接着我们可以应用（3.12），得到（3.16）。

我们来证明陈述的最后一部分：取 $\mathsf{Z}=\mathsf{Z}':=\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$，并由（3.16），令$Z:=(X,Y)$、$Z':=(X',Y')$ 和 $\boldsymbol{\mu}:=(\boldsymbol{i}_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}},\boldsymbol{i}_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}})\sharp(X,Y)_\sharp\mathbb{P}$，可得

$$(X,Y,X'\circ g_n,Y'\circ g_n)_\sharp\mathbb{P}\to\boldsymbol{\mu}\ \text{in}\ \mathcal{P}((\mathsf{X}\times\mathsf{Y})^2).$$

因此我们有 $(X,X'\circ g_n)_\sharp\mathbb{P}\to(\boldsymbol{i}_{\mathsf{X}},\boldsymbol{i}_{\mathsf{X}})_\sharp X_\sharp\mathbb{P}$ 属于 $\mathcal{P}(\mathsf{X}^2)$。根据注 3.19，取 $\psi((x,y),(x',y'))=|x|^p_{\mathsf{X}}+|x'|^p_{\mathsf{X}}$、$x,x\in\mathsf{X}$ $y,y'\in\mathsf{Y}$，并结合（3.11），还可得 $(X,X'\circ g_n)_\sharp\mathbb{P}\to(\boldsymbol{i}_{\mathsf{X}},\boldsymbol{i}_{\mathsf{X}})_\sharp X_\sharp\mathbb{P}$ 属于$\mathcal{P}_p(\mathsf{X}^2)$。因此（例如参见[AGS08，命题 7.1.5，引理 5.1.7]），我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int|X-X'\circ g_n|^p\,\mathrm{d}\mathbb{P}&=\lim_{n\to\infty}\int|x-x'|^p\,\mathrm{d}\big((X,X'\circ g_n)_\sharp\mathbb{P}\big)(x,x')\\&=\int|x-x'|^p\,\mathrm{d}((\boldsymbol{i}_{\mathsf{X}},\boldsymbol{i}_{\mathsf{X}})_\sharp X_\sharp\mathbb{P})(x,x')\\&=0.\end{aligned}$$

Y 和 Y' 的证明相同。 □

注 3.22. 在推论 3.21 相同的设定下，并类似于注 3.19，若 $\mathsf{Z}=\mathsf{Z}'=\mathsf{X}$是可分巴拿赫空间 X 且 $X,X'\in L^p(\Omega\ \mathcal{B},\ \mathbb{P};\ \mathsf{X})$，$p\in[1,+\infty)$，则 (3.11) 表明 (3.16) 中的收敛在 $\mathcal{P}_p(\mathsf{X}^2)$ 中成立，

作为推论，我们重新得到以下重要结果（例如参见 [GT19，引理 3。13] 关于情形 $p=2$ 以及 $\mathsf{X}=\mathbb{R}^d$下的表述），该结果也与以下两者的等价性有关：

最优传输问题的蒙日表述与康托罗维奇表述 [Amb03，定理 2.1，定理 9。3], [Pra07，定理 B]。

命题 3.23. 设 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是赋有无原子概率测度 $\mathbb{P}$ 的标准 Borel 空间，设 X 为可分巴拿赫空间，并设 $p \in [1,+\infty)$。若 $\mu,\nu \in \mathcal{P}_p(\mathsf{X})$ 且 $X \in L^p(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})$ 满足 $X_\sharp\mathbb{P}=\mu$，则对每个 $\varepsilon>0$，存在 $Y \in L^p(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})$ 满足 $Y_\sharp\mathbb{P}=\nu$且

$$|X-Y|_{L^p(\Omega\mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})} \le W_p(\mu,\nu)+\varepsilon.$$

证明. 考虑 $\mathfrak{N}$-精化标准博雷尔概率空间 $(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P},(\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}})$，其中$\mathfrak{N}=(2^k)_{k\in\mathbb{N}}$；设 $\boldsymbol{\mu}\in\Gamma_o(\mu,\nu)$，并设 $X'\in L^p(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})$ 满足 $X'_\sharp\mathbb{P}=\nu_\circ$ 由推论 3.21 和注 3.22，存在严格递增序列 $(N_n)_{n}\subset\mathfrak{N}$ 以及映射 $g_n \in \mathsf{S}(\Omega\ \mathcal{B},\mathbb{P};\mathcal{B}_{N_n})$，使得

$$(X,X'\circ g_n)_\sharp\mathbb{P}\to\boldsymbol{\mu}\ \text{in}\ \mathcal{P}_p(\mathsf{X}^2).$$

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int|X-X'\circ g_n|^p\,\mathrm{d}\mathbb{P}&=\lim_{n\to\infty}\int|x-y|^p\,\mathrm{d}\big((X,X'\circ g_n)_\sharp\mathbb{P}\big)(x,y)\\&=\int|x-y|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}(x,y)=W_p^p(\mu,\nu)\end{aligned}$$

因此，给定 $\varepsilon>0$，总能找到足够大的 $n\in\mathbb{N}$，使得 $Y:=X'\circ g_n$ 满足结论。□

4. Monotone-dissipative operators and Lipschitz maps in L^p-spaces invariant by measure-preserving transformations

设 $(\Omega\ \mathcal{B})$ 是一个标准 Borel 空间，并赋有无原子概率测度 $\mathbb{P}$ (见定义 3.1). 我们用 $\mathsf{S}(\Omega)$ 表示以下映射的类： $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$-可测映射 $g:\Omega\to\Omega$，这些映射本质单射且保测度，即存在一个满 $\mathbb{P}$-测度集合 $\Omega_0\in\mathcal{B}$，使得 g 在 Ω 上是单射$_0$ 且 $g_\sharp\mathbb{P}=\mathbb{P}$。若 $g\in\mathsf{S}(\Omega)$，则存在 $g^{-1}\in\mathsf{S}(\Omega)$（在一个$\mathbb{P}$-零测集意义下定义），使得 $g^{-1}\circ g=g\circ g^{-1}=\boldsymbol{i}_\Omega$ $\mathbb{P}$在 Ω 中几乎处处成立。

考虑两个可分巴拿赫空间 X、Y，并固定指数 $p,q\in[1,+\infty)$。我们设定

$$\mathcal{X}:=L^p(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X}),\quad \mathcal{Y}:=L^q(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{Y}). \tag{4.1}$$

注意，对于每个 $g\in\mathsf{S}(\Omega)$，拉回变换 $g^*:\ \mathcal{X}\mapsto\mathcal{X}$ 将 X 映射为 $X\circ g$，是 $\mathcal{X}$ 的线性等距映射: 特别地

$$X_n\to X\ \text{strongly in}\ \mathcal{X}\quad\Longrightarrow\quad g^*X_n\to g^*X\ \text{strongly in}\ \mathcal{X}, \tag{4.2}$$

$$X_n\to X\ \text{weakly in}\ \mathcal{X}\quad\Longrightarrow\quad g^*X_n\to g^*X\ \text{weakly in}\ \mathcal{X}. \tag{4.3}$$

本节旨在研究定义于这些特殊空间上的映射及集合/算子的性质，这些性质在保测变换下保持不变。我们还将把第 2 节的结果应用于这一特殊情形。通过拉格朗日表示研究 Wasserstein 空间中的耗散演化时所产生的影响，充分体现了这类性质的重要性（参见 [CSS23]）。

定义 4.1（不变集与映射）。如果对于每个 $g\in\mathsf{S}(\Omega)$，均满足以下条件，则称集合 $\boldsymbol{B}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 在保测同构下是不变的。

$$(X,Y)\in\boldsymbol{B}\quad\Longrightarrow\quad(g^*X,g^*Y)=(X\circ g,Y\circ g)\in\boldsymbol{B}, \tag{4.4}$$

其中，略微滥用记号，我们用同一符号 g^* 表示由 g 在 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$上诱导的拉回变换。

如果满足以下条件，则集合 $\boldsymbol{B}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 是分布不变的

$$(X,Y)\in\boldsymbol{B},\quad(X',Y')\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y},\quad(X,Y)_\sharp\mathbb{P}=(X',Y')_\sharp\mathbb{P}\quad\Longrightarrow\quad(X',Y')\in\boldsymbol{B}. \tag{4.5}$$

如果（单值）算子 $\boldsymbol{L}:\mathrm{D}(\boldsymbol{L})\subset\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 的图在 $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 中在保测同构（分别为分布不变）下保持不变，则称其在保测同构（分别为分布不变）。

容易验证，分布不变集合或算子也在保测同构下不变。显然也可以验证，如果对于每个 $g\in\mathsf{S}(\Omega)$ 和每个 $X\in\mathrm{D}(\boldsymbol{L})$ 都成立，那么算子 $\boldsymbol{L}:\mathrm{D}(\boldsymbol{L})\subset\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 在保测同构下不变

$$X\circ g\in\mathrm{D}(\boldsymbol{L}),\quad \boldsymbol{L}(X\circ g)=\boldsymbol{L}(X)\circ g. \tag{4.6}$$

类似地，如果对于每个 $X\in\mathrm{D}(\boldsymbol{L})$ $X'\in\mathcal{X}$，$\boldsymbol{L}$ 都是分布不变的，$Y'\in\mathcal{Y}$

$$(X,\boldsymbol{L}X)_\sharp\mathbb{P}=(X',Y')_\sharp\mathbb{P}\quad\Longrightarrow\quad X'\in\mathrm{D}(\boldsymbol{L}),\quad Y'=\boldsymbol{L}X'. \tag{4.7}$$

注释 4.2. 注意，当 $\mathsf{Y}=\mathsf{X}^*$ 是自反的，$p>1$，且 $q=p^*$ 是 p的共轭指数时，那么 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}^*$，并且针对 $\boldsymbol{B}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 的保测同构的不变性概念与定义 2.4 中的 G-不变性一致，其中 G 是由 $\mathsf{S}(\Omega)$ 经由 g^* 诱导的等距同构群：$\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*\to\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$，其中 $g^*(X,V)=(X\circ g,V\circ g)$ 对每个 $(X,V)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 以及每个 $g\in\mathsf{S}(\Omega)$ 都成立。

记作 $\iota:\mathcal{X}\to\mathcal{P}_p(\mathsf{X})$ 为推前算子，$\iota(X):=X_\sharp\mathbb{P}$ (参见 (3.1))。我们经常使用记号 $\iota_X=\iota(X)$。映射 ι 在 $\mathcal{P}_p(\mathsf{X})$ 的子集（参见 (3.9)）与 $\mathcal{X}$ 的分布不变子集之间建立了一一对应关系。

作为第一个结果，我们证明，对于闭集和连续算子，这两种不变性概念实际上是等价的。

命题 4.3（由保测同构保持不变的闭集是分布不变的）。如果 $\boldsymbol{B}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 由保测同构保持不变，那么它的闭包 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 也是分布不变的。特别地，$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 的闭集是分布不变的，当且仅当它由保测同构保持不变；并且如果 $\boldsymbol{L}:\mathrm{D}(\boldsymbol{L})\subset\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是由保测同构保持不变的连续算子，且 $\mathrm{D}(\boldsymbol{L})$ 是闭的，那么 $\boldsymbol{L}$ 也是分布不变的。

证明。首先注意到，如果 $\boldsymbol{B}$ 在保测同构下不变，那么 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 也具有相同性质，因为对于每个 $g\in\mathsf{S}(\Omega)$，拉回变换 g^* 在 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$中都是等距变换。现在假设 $\boldsymbol{B}$ 是闭的，并且在保测同构下不变，$(X,Y)\in\boldsymbol{B}$，$(X',Y')\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$，且 $(X,Y)_\sharp\mathbb{P}=(X',Y')_\sharp\mathbb{P}$。我们可以应用推论 3.21，找到一列保测同构 $g_n\in\mathsf{S}(\Omega)$，使得 $(X,Y)\circ g_n\to(X',Y')$ 在 $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$中成立。由于 $(X,Y)\circ g_n\in\boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 是闭的，我们也可推出 $(X',Y')\in\boldsymbol{B}$。
连续算子的情形则由连续算子的图是闭的这一事实得出。□

注记 4.4。根据命题 4.3，如果一个子集 $\boldsymbol{B}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$（分别地，一个算子 $\boldsymbol{L}:\mathrm{D}(\boldsymbol{L})\subset\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$）是闭的（分别地，连续且 $\mathrm{D}(\boldsymbol{L})$ 是闭的），我们采用简化术语 不变，表示 $\boldsymbol{B}$（分别地，$\boldsymbol{L}$）是分布不变的或在保测同构下不变的，因为这两个概念是等价的。

As 应用第 2节中的结果，我们得到以下扩张结果。

定理 4.5（在保测同构下不变的单调算子的极大延拓）。设 X 是可分自反 Banach 空间，$p\in(1,\infty)$，$\mathcal{X}:=L^p(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P};\mathsf{X})$。若 $\boldsymbol{A}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{X}^*$ 是一个在保测同构下不变的单调算子，则存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大单调扩张，它在保测同构下不变（因此也分布不变），且其定义域包含于 $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{D}(\boldsymbol{A}))$。

证明。结论由应用定理 2.6 和注记 4.2得出。还要回顾一下，若 $\boldsymbol{A}$ 是极大单调的，则它是闭的（例如参见 [Bar10，命题 2。1]），因此我们可以应用命题4.3。□

定理 4.6（利普希茨和 λ-耗散不变图的延拓）。假设 $p = 2$，且令 X 为可分希尔伯特空间。以下结论成立：

(1) 若 $\boldsymbol{L}$: D($\boldsymbol{L}$) $\subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是一个在保测同构下不变的 L-利普希茨函数，则存在一个 L-利普希茨延拓 $\boldsymbol{L}$: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$，其定义域为整个 $\mathcal{X}$，且在保测同构下不变；(2) 若 $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 是一个在保测同构下不变的 λ-耗散算子，则存在 $\boldsymbol{B}$ 的一个极大 λ-耗散延拓 $\boldsymbol{B}$，它在保测同构下不变（因此也分布不变），且其定义域包含于 co (D($\boldsymbol{B}$))。

—

证明。该结论可直接应用定理 2.13、2.8得到，其中取 $\mathcal{H} := \mathcal{X}$ 并取$\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$ 为由 S(Ω) 经由 g^* : $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 所诱导的等距同构群，其中 $g^*X = X \circ g$对每个 $X \in \mathcal{X}$ 以及每个 $g \in$S(Ω) 均成立（参见注 4.2）。注意，$\boldsymbol{B}$ 是闭的，因为它是极大耗散的；因此根据命题 4.3，它是分布不变的。□

我们以若干关于各种不变于分布变换类的有用表示结果结束本节。

给定一个集合 $D \subset \mathcal{P}_p$(X)，令

$$\mathcal{S}(\mathsf{X}, D) := \Big\{(x, \mu) \in \mathsf{X} \times D \,:\, x \in \mathrm{supp}(\mu)\Big\}, \tag{4.8}$$

并简记为 $\mathcal{S}(\mathsf{X}) = \mathcal{S}(\mathsf{X}\ \mathcal{P}_p(\mathsf{X}))$。集合 $\mathcal{S}(\mathsf{X})$ 属于 G_δ 型（见 [FSS23，公式 (4.3)]），因此 $\mathcal{S}(\mathsf{X}\ D)$ 是一个博雷尔集，若 D 是博雷尔集。

我们先给出关于单值算子表示唯一性的一个结果，即用一个映射 $\boldsymbol{L}$: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$从 $\mathcal{S}(\mathsf{X})$ 到 Y来表示。接着，我们将陈述当 $\boldsymbol{L}$ 是 Lipschitz连续且不变时，这种映射表示的存在性（及唯一性），并说明这种映射表示还具有继承而来的其他性质。最后，我们将在最终定理 λ4.13中回到（可能是多值的）极大λ-耗散算子4.13的情形。

引理 4.7。设 $\boldsymbol{L}$: D($\boldsymbol{L}$) $\to \mathcal{Y}$ 是定义在 D($\boldsymbol{L}$) $\subset \mathcal{X}$上的映射。若 $\boldsymbol{f}_i$: $\mathcal{S}(\mathsf{X}\ \iota(\mathrm{D}(\boldsymbol{L})) \to \mathsf{Y}, i = 1, 2$ 满足

- $\boldsymbol{f}_i(\cdot, \mu)$ 对每个 $\mu \in \iota(\mathrm{D}(\boldsymbol{L}))$ 都是连续的，
- 对于每个 $X \in \mathrm{D}(\boldsymbol{L})$，$\boldsymbol{L}X(w) = \boldsymbol{f}_i(X(w)\ X_\sharp\mathbb{P})$ 对几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 成立，

则 $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_2$。

证明。设 $(x, \mu) \in \mathcal{S}(\mathsf{X}\ \iota(\mathrm{D}(\boldsymbol{L}))$。由于 $\mu \in \iota(\mathrm{D}(\boldsymbol{L}))$，我们可以找到 $X \in \mathrm{D}(\boldsymbol{L})$ 的一个代表元，使得 $X_\sharp\mathbb{P} = \mu$，并且存在一个满 $\mathbb{P}$-测度集合 $\Omega_0 \subset \Omega$，使得

$$\boldsymbol{L}X(\omega) = \boldsymbol{f}_1(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) = \boldsymbol{f}_2(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) \text{ for every } \omega \in \Omega_0.$$

由于 $X(\Omega_0)$ 在 $\mathrm{supp}(\mu)$ 中稠密，我们可以找到 $(\omega_n)_n \subset \Omega_0$，使得 $X(\omega_n) \to x$。利用 $\boldsymbol{f}_i(\cdot, \mu)$ 的连续性，我们可以将上述等式写成 $\omega = \omega_n$ 的形式，然后令 $n \to +\infty$ 趋于极限，得到 $\boldsymbol{f}_1(x, \mu) = \boldsymbol{f}_2(x, \mu)$。□

在下述定理 4.8中，我们给出了从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$的不变利普希茨映射的重要结构表示。类似问题已在 [CD18的命题 5 中讨论。36]。

定理 4.8 (不变利普希茨映射的结构)。设 X、Y 是可分巴拿赫空间，并设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 如 (4.1)所示。

(1) 设 $\boldsymbol{L}$: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是一个 L-利普希茨映射，且在保测同构下不变。则存在唯一的连续映射 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}$: $\mathcal{S}(\mathsf{X}) \to \mathsf{Y}$，使得

$$\textit{for every } X \in \mathcal{X}, \quad \boldsymbol{L}X(\omega) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) \textit{ for a.e. } \omega \in \Omega. \tag{4.9}$$

此外，$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(\cdot, \mu) : \mathrm{supp}(\mu) \to \mathsf{Y}$ 是 L-利普希茨的。

(2) 设 X 为希尔伯特空间且 $p = 2$，令 $\mathrm{D}(\boldsymbol{L}) \subset \mathcal{X}$ 且令 $\boldsymbol{L} : \mathrm{D}(\boldsymbol{L}) \to \mathcal{X}$ 为一个L-利普希茨映射，在保测同构下不变。则存在唯一的连续映射 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}\colon \mathcal{S}(\mathrm{X}\ \iota(\mathrm{D}(\boldsymbol{L})) \to \mathrm{X}$，使得

$$\text{for every } X \in \mathrm{D}(\boldsymbol{L}),\quad \boldsymbol{L}X(\omega) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) \text{ for a.e. } \omega \in \Omega. \tag{4.10}$$

此外，$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(\cdot,\mu)\colon \mathrm{supp}(\mu) \to \mathrm{X}$ 是 L-利普希茨的。

证明。我们证明命题 (1)。设 $\mathfrak{N} := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$，并设 $(\mathfrak{P}_N)_{N\in\mathfrak{N}}$ 是 $(\Omega\ \mathfrak{N}$的一个-segmentation of $(\Omega\ \mathcal{B},\ \mathbb{P})$，如定义 3.3所述，其存在性由引理 3.8保证。定义

$$\mathcal{B}_n := \sigma(\mathfrak{P}_{2^n}),\quad \mathcal{X}_n := L^p(\Omega, \mathcal{B}_n, \mathbb{P}; \mathrm{X}),\quad \mathcal{Y}_n := L^q(\Omega, \mathcal{B}_n, \mathbb{P}; \mathrm{Y}),\quad n \in \mathbb{N}.$$

我们将证明分成几个步骤。

(a) 若 $X \in \mathcal{X}_m$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$ 成立，则 $\boldsymbol{L}X$（其中存在唯一的代表元）属于 $\mathcal{Y}_m$，并且

$$|\boldsymbol{L}X(\omega') - \boldsymbol{L}X(\omega'')|_{\mathrm{Y}} \le L|X(\omega') - X(\omega'')|_{\mathrm{X}} \quad \text{for every } \omega', \omega'' \in \Omega. \tag{4.11}$$

设 $\Omega' \subset \Omega$ 是 Ω 的一个满 $\mathbb{P}$-测度子集，在该子集上 (3.5) 和引理 3.15 对以下函数成立：$L^q(\Omega\ \mathcal{B},\ \mathbb{P};$ Y) 函数 $\boldsymbol{L}X$。

固定 $k \in I_m := \{0, \dots, 2^m - 1\}$，并证明（ $\boldsymbol{L}X$ 的一个代表元）在 $\Omega'_{m,\ k} := \Omega_{m,\ k} \cap \Omega'$ 上为常数，其中 $\mathfrak{P}_{2^m} := \{\Omega_{m,\ k}\}_{k\in I_m}$。

设 $\omega', \omega'' \in \Omega'_{m,k}$，且 $\omega' \ne \omega''$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $k(n;\omega')\ k(n;\omega'') \in I_n$，使得 $\omega' \in \Omega_{n,\ k(n;\omega')}$ 且 $\omega'' \in \Omega_{n,k(n;\omega'')}$。由引理 3.15 可知，当 $n \in \mathbb{N}$ 足够大时，$\Omega_{n,k(n;\omega')}$，$\Omega_{n,k(n;\omega'')} \subset \Omega_{m,k}$，且 $\Omega_{n,k(n;\omega')} \cap \Omega_{n,k(n;\omega'')} = \emptyset$。因此，由于对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\mathbb{P}(\Omega_{n,k(n;\omega')}) = \mathbb{P}(\Omega_{n,k(n;\omega'')}) = 2^{-n}$（见定义 3.3），根据推论 3.12，我们可以找到一个保测同构 $g_n \in \mathrm{S}(\Omega)$，使得

$$(g_n)_\sharp\mathbb{P}|_{\Omega_{n,k(n;\omega')}} = \mathbb{P}|_{\Omega_{n,k(n;\omega'')}}$$

且 g_n 在 Ω 外为恒等映射$_{n,\ k(n;\omega')} \cup \Omega_{n,\ k(n;\omega'')}$。由（4.6）以及 $\boldsymbol{L}$ 的 Lipschitz 连续性，我们有

$$|\boldsymbol{L}X \circ g_n - \boldsymbol{L}X|_{\mathcal{Y}} \le L\,|X \circ g_n - X|_{\mathcal{X}} = 0 \quad \text{for every integer } n \text{ sufficiently large,}$$

由于 X 在整个 $\Omega_{m\ 上k}$ 为常数。这意味着即刻</|im_end|>

$$2^{-n}\int_{\Omega_{n,k(n;\omega')}} \boldsymbol{L}X\,\mathrm{d}\mathbb{P} = 2^{-n}\int_{\Omega_{n,k(n;\omega'')}} \boldsymbol{L}X\,\mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{eventually.}$$

根据条件期望的定义，这意味着

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\boldsymbol{L}X \mid \sigma\left(\mathfrak{P}_{2^n}\right)\right](\omega') = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\boldsymbol{L}X \mid \sigma\left(\mathfrak{P}_{2^n}\right)\right](\omega'') \quad \text{eventually.}$$

令 $n \to +\infty$ 趋于极限，由 (3.5) 得到 $\boldsymbol{L}X(\omega') = \boldsymbol{L}X(\omega'')$。这证明 $\boldsymbol{L}X$ 在 $\Omega_{m,k}$ 上 $\mathbb{P}$-几乎处处为常数；由于 $k \in I_m$ 任意，我们可以找到一个属于 $\mathcal{Y}_m$ 的 $\boldsymbol{L}X$ 代表元。若 $\omega', \omega'' \in \Omega$ 且 $\omega' \in \Omega_{m,i}$, $\omega'' \in \Omega_{m,j}$, $i, j \in I_m$，我们选择作为 $g \in \mathrm{S}(\Omega)$ 的是由置换 $\sigma \in \mathrm{Sym}(I_m)$ 诱导的保测同构，该置换交换 i 和 j（见推论 3.11），于是由 $\boldsymbol{L}$ 的 Lipschitz 连续性可得 that

$$\frac{1}{2^{(m-1)/2}}|\boldsymbol{L}X(\omega') - \boldsymbol{L}X(\omega'')|_{\mathrm{Y}} \le L\frac{1}{2^{(m-1)/2}}|X(\omega') - X(\omega'')|_{\mathrm{X}}$$

由此得到（4.11）。

(b) 对每个 $X \in \mathcal{X}$，都存在唯一的 L-利普希茨映射 $\boldsymbol{f}_X : \mathrm{supp}(X_\sharp\mathbb{P}) \to \mathrm{Y}$，使得对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 ω，$\boldsymbol{L}X(\omega) = \boldsymbol{f}_X(X(\omega))$。

令 $X \in \mathcal{X}$；令 $X_n := \mathbb{E}[X|\mathcal{B}_n] \in \mathcal{X}_n$，由定理 3.13 可得 $X_n \to X$ (因此也有$\boldsymbol{L}X_n \to \boldsymbol{L}X$)。考虑 $\boldsymbol{L}X$ 和 X 的两个代表元，以及一个全测度集 $\Omega_0 \subset \Omega$ 和

一个子序列 $(X_{n_k})_k$ 使得 $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$ 且 $\boldsymbol{L}X_{n_k}(\omega) \to \boldsymbol{L}X(\omega)$ 对每个 $\omega \in \Omega_0$。由 (4.11) 可得

$$|\boldsymbol{L}X_n(\omega') - \boldsymbol{L}X_n(\omega)|_{\mathsf{Y}} \le L|X_n(\omega') - X_n(\omega)|_{\mathsf{X}} \text{ for every } \omega, \omega' \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}.$$

步骤 对每一对 $(\omega, \omega') \in \Omega_0^2$，，在上述不等式中取极限，我们得到，

$$|\boldsymbol{L}X(\omega') - \boldsymbol{L}X(\omega)|_{\mathsf{Y}} \le L|X(\omega') - X(\omega)|_{\mathsf{X}} \text{ for every } \omega, \omega' \in \Omega_0.$$

这就得到了一个（唯一的） L-利普希茨函数 $\boldsymbol{f}_X : X(\Omega_0) \to \mathsf{Y}$，使得 $\boldsymbol{L}X(\omega) = \boldsymbol{f}_X(X(\omega))$ 对每个 $\omega \in \Omega_0$ 都成立。注意，$X(\Omega_0) \supset \mathrm{supp}(X_\sharp \mathbb{P})$。

(c) 若 X、$X' \in \mathcal{X}$ 且 $\mu = X_\sharp \mathbb{P} = X'_\sharp \mathbb{P}$，则 $\boldsymbol{f}_X = \boldsymbol{f}_{X'}$ 在 $\mathrm{supp}(\mu)$ 上成立。特别地，只要 $\mu = X_\sharp \mathbb{P}$，我们就可以定义 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(\cdot, \mu) := \boldsymbol{f}_X(\cdot)$。

根据假设，我们有

$$(X, \boldsymbol{L}X)_\sharp \mathbb{P} = (X', \boldsymbol{L}X')_\sharp \mathbb{P}. \tag{4.12}$$

根据前述断言，公共测度 $\boldsymbol{\mu} := (X, \boldsymbol{L}X)_\sharp \mathbb{P}$ 相对于其第一边缘 μ 的析取（例如参见 [AGS08, 命题 5.3.1]，其中详述了析取定理）由 $\delta_{\boldsymbol{f}_X(\cdot)}$ 给出；它应当与 $\delta_{\boldsymbol{f}'_X(\cdot)}$ μ-几乎处处在 X 上相等。由于 $\boldsymbol{f}_X$ 和 $\boldsymbol{f}_{X'}$ 都是 Lipschitz连续的，且在 μ-几乎处处相等，因此它们在 $\mathrm{supp}(\mu)$ 上相等。

(d) 映射 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}$ 在 $\mathcal{S}(\mathsf{X})$ 上连续。

考虑一个序列 $(x_n, \mu_n)_n$，它在 $\mathcal{S}(\mathsf{X})$ 中收敛到 $(x, \mu) \in \mathcal{S}(\mathsf{X})$，并证明存在一个递增子序列 $k \mapsto n(k)$，使得当 $k \to \infty$ 时，$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x_{n(k)}, \mu_{n(k)}) \to \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x, \mu)$。

根据命题 3.23，我们可以找到一个极限映射 $X \in \mathcal{X}$ 以及一个收敛到 X 的序列 $X_n \in \mathcal{X}$，使得 $(X_n)_\sharp \mathbb{P} = \mu_n$，$X_\sharp \mathbb{P} = \mu$。由于 $\boldsymbol{L}X_n \to \boldsymbol{L}X$，我们进而可以抽取一个子序列 $k \mapsto n(k)$，并找到一个满测集 $\Omega_0 \subset \Omega$，使得对于每个 $\omega \in \Omega_0$，，当 $k \to \infty$ 时，$X_{n(k)}(\omega) \to X(\omega)$ 且 $Y_{n(k)}(\omega) \to Y(\omega)$，其中 $Y_n := \boldsymbol{L}X_n$，$Y := \boldsymbol{L}X$。

固定 $\varepsilon > 0$；由于 $x \in \mathrm{supp}(\mu)$，且 $X(\Omega_0) \cap \mathrm{supp}(\mu)$ 在 $\mathrm{supp}(\mu)$ 中稠密，因此我们可以找到 $\omega \in \Omega_0$，使得 $|X(\omega) - x|_{\mathsf{X}} \le \varepsilon$。于是得到

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x_{n(k)}, \mu_{n(k)}) - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x, \mu)|_{\mathsf{Y}} &\le |\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x_{n(k)}, \mu_{n(k)}) - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(X_{n(k)}(\omega), \mu_{n(k)})|_{\mathsf{Y}} \\
&\quad + |\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(X_{n(k)}(\omega), \mu_{n(k)}) - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(X(\omega), \mu)|_{\mathsf{Y}} \\
&\quad + |\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(X(\omega), \mu) - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x, \mu)|_{\mathsf{Y}} \\
&\le L|x_{n(k)} - X_{n(k)}(\omega)|_{\mathsf{X}} + |Y_{n(k)}(\omega) - Y(\omega)|_{\mathsf{Y}} + L|X(\omega) - x|_{\mathsf{X}}.
\end{aligned}$$

对 $k \to \infty$ 取上极限，得到

$$\limsup_{k \to \infty} |\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x_{n(k)}, \mu_{n(k)}) - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x, \mu)|_{\mathsf{Y}} \le 2L\varepsilon$$

并且，由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得到收敛性。

我们证明结论 (2)：根据定理 4.6，只需证明当映射 $\boldsymbol{L}$ 定义在整个 $\mathcal{X}$ 上时，该结论成立。于是我们可以将前述断言应用于 $\mathsf{Y} = \mathsf{X}$ 和 $p = q = 2$。 □

在特殊情形下，当 $p = q = 2$ 且 $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$ 是希尔伯特空间时，λ-耗散性（2.23）也从 $\boldsymbol{L}$ 传递到其代表映射 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}$。

命题 4.9 (λ-耗散表示)。假设 $p = 2$，X 是一个可分希尔伯特空间，并且 $\boldsymbol{L} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是一个不变的利普希茨 λ-耗散算子。那么，对于每个 $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathsf{X})$，定理 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(\cdot, \mu)$ 中的映射 4.8 是（逐点） λ-耗散的，即

$$\langle \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x, \mu) - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x', \mu), x - x' \rangle_{\mathsf{X}} \le \lambda |x - x'|^2 \quad \textit{for every } x, x' \in \mathrm{supp}(\mu). \tag{4.13}$$

注记 4.10。 回顾注记 2.7， $\boldsymbol{L}\colon\ \mathcal{X}\to\mathcal{X}$ 是一个不变的利普希茨 λ-耗散算子，当且仅当其 λ-变换 $\boldsymbol{L}^{\lambda}:=\boldsymbol{L}-\lambda\boldsymbol{i}_{\mathcal{X}}$ 是一个不变的利普希茨耗散算子。此外，通过对两者 4.8 应用定理 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L}^{\lambda}$，我们可以确定

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}^{\lambda}}(x,\mu)\equiv\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}(x,\mu)-\lambda x,\quad \text{for every } (x,\mu)\in\mathcal{S}(\mathsf{X}),$$

从而二者 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}$和 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}^{\lambda}}$都满足（4.10），其中 $\boldsymbol{L}$和 $\boldsymbol{L}^{\lambda}$分别为。

证明。 根据注记 4.10，证明 λ-耗散性（4.13）对 $\boldsymbol{L}$ 成立，等价于证明 4.13）中对 $\boldsymbol{L}^{\lambda}$成立的 0-耗散性结论。
我们沿用定理 4.8 应用于 $\boldsymbol{L}^{\lambda}$ 时证明中的记号。当 $\mu=X_{\sharp}\mathbb{P}$，且 $X\in\mathcal{X}_m$ 对某个 $m\in\mathbb{N}$成立时，论证与定理 4.8 证明中的断言（a）相同：不妨设 $\boldsymbol{L}^{\lambda}X$ 在每个 $\Omega_{m,k}$上为常数。若 ω', $\omega''\in\Omega$ 且 $\omega'\in\Omega_{m,i}$, $\omega''\in\Omega_{m,j}$, $i,j\in I_m$，并且 $g\in\mathsf{S}(\Omega)$ 是由置换诱导的保测同构，该置换如推论 3.11 所述交换 i和 j，则可得

$$\frac{1}{2^{m-1}}\langle\boldsymbol{L}^{\lambda}X(\omega')-\boldsymbol{L}^{\lambda}X(\omega''),X(\omega')-X(\omega'')\rangle_{\mathsf{X}}\le 0.$$

最终，我们可以像定理4.8证明中的断言 (b) 一样，通过逼近进行论证，并利用 $\boldsymbol{L}^{\lambda}X$ 关于 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}^{\lambda}}$ 的表示，得到

$$\langle\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}^{\lambda}}(x,\mu)-\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}^{\lambda}}(x',\mu),x-x'\rangle_{\mathsf{X}}\le 0\quad\text{for every } x,x'\in\operatorname{supp}(\mu).\tag{4.14}$$

□

命题 4.11（Lipschitz 表示的稳定性）。若 $\boldsymbol{L}_n,\boldsymbol{L}\colon\ \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是 L-Lipschitz 不变映射，且 $D\subset\mathcal{X}$ 是不变闭集，使得

$$\boldsymbol{L}_nX\to\boldsymbol{L}X\quad \textit{for every } X\in D,\tag{4.15}$$

那么令 $\tilde{D}:=\{X_{\sharp}\mathbb{P}\colon\ X\in D\}$，我们在 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}_n}\to\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}$中逐点有 $\mathcal{S}(\mathsf{X}\ \tilde{D})$，其中 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}$与定理 4.8中的相同。

˜证明。固定 $\mu\in D$，并令 $\boldsymbol{f}_n:=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}_n}(\cdot,\mu):\operatorname{supp}(\mu)\ \to\mathsf{Y}$。注意到 $\boldsymbol{f}_n$是L-利普希茨映射，并且在 $L^q(\mathsf{X}\ \mu;\mathsf{Y})$ 中构成柯西序列：记其极限为 $\boldsymbol{f}$。对于每个$x\in\operatorname{supp}(\mu)$ 和 $\rho>0$，我们可以令

$$\boldsymbol{f}_{n,\rho}(x):=\frac{1}{\mu(B(x,\rho))}\int_{B(x,\rho)}\boldsymbol{f}_n(u)\,\mathrm{d}\mu(u),\quad \boldsymbol{f}_{\rho}(x):=\frac{1}{\mu(B(x,\rho))}\int_{B(x,\rho)}\tilde{\boldsymbol{f}}(u)\,\mathrm{d}\mu(u).\tag{4.16}$$

对于每个 $x\in\operatorname{supp}(\mu)$ 和每个 $\rho>0$，我们有 $\boldsymbol{f}_{n,\rho}(x)\ \to\boldsymbol{f}_{\rho}(x)$。另一方面

$$|\boldsymbol{f}_{n,\rho}(x)-\boldsymbol{f}_n(x)|_{\mathsf{Y}}\le L\rho,$$

因此，利用三角不等式作简单论证可知，对每个 $x\in\operatorname{supp}(\mu)$，序列 $(\boldsymbol{f}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ 在 Y 中是柯西序列，其逐点极限 $\boldsymbol{g}(\cdot,\mu)$ 是 L-利普希茨的，并且对每个 $X\in D$ 都如 (4.10) 那样表示$\boldsymbol{L}$ 。仿照定理 4.8 证明中的断言 (d) 进行论证，并利用˜ $\boldsymbol{L}$的连续性，我们最终可以推出 $\boldsymbol{g}$ 在 $\mathcal{S}($X $D)$ 中连续。$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{L}}$ 这一事实来自引理 4.7。□

当 th 这些映射 $\boldsymbol{L}_n$ 并非一致利普希茨的，但我们仍然可以得到一个极限表示。 .

引理 4.12. 设 $D\subset\mathcal{X}$ 和 $\boldsymbol{L}_n,\boldsymbol{L}\colon\ D\to\mathcal{Y}$ 是映射，满足 $\boldsymbol{L}_n$ 为分布不变， $\boldsymbol{L}_n$在 D 上逐点收敛到 $\boldsymbol{L}$，当 $n\to\infty$，并且存在博雷尔函数 $\boldsymbol{f}_n\colon\ \mathcal{S}(\mathsf{X}\ \iota(D))\ \to\mathsf{Y}$，使得

$$\textit{for every } n\in\mathbb{N} \textit{ and every } X\in D,\quad \boldsymbol{L}_nX(\omega)=\boldsymbol{f}_n(X(\omega),X_{\sharp}\mathbb{P}) \textit{ for a.e. } \omega\in\Omega.$$

那么 $\boldsymbol{L}$ 是分布不变的，并且对每个 $\mu \in \iota(D)$，都存在一个映射 $\boldsymbol{f}[\mu] \in L^q(\mathrm{X}\ \mu; \mathrm{Y})$，使得对每个 $X \in D$，都存在一个递增子序列 $k \mapsto n_k$，使得

$$\lim_k \boldsymbol{f}_{n_k}(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) = \boldsymbol{f}[X_\sharp\mathbb{P}](X(\omega)) = \boldsymbol{L}X(\omega) \text{ for a.e. } \omega \in \Omega.$$

证明。首先注意到，$\boldsymbol{L}$ 是分布不变的，因为它是分布不变映射的逐点极限。固定 $\mu \in \iota(D)$。若 $X \in D$ 满足 $X_\sharp\mathbb{P} = \mu$，则可找到一个递增子序列$k \mapsto n_k$，使得 $\boldsymbol{L}_{n_k}X \to \boldsymbol{L}X$ $\mathbb{P}$在 Ω 上几乎处处成立，并定义

$$\boldsymbol{f}_X(x) := \begin{cases} \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{f}_{n_k}(x,\mu) & \text{if } x \in E, \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

其中，$E \subset \mathrm{X}$ 是 X 中使 $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{f}_{n_k}(x,\mu)$ 存在的点所构成的博雷尔集。现在我们证明 $\boldsymbol{f}_X$ 是 $\boldsymbol{L}$的代表元，即

$$\boldsymbol{L}X(\omega) = \boldsymbol{f}_X(X(\omega)) \text{ for a.e. } \omega \in \Omega.$$

我们知道

$$\text{for every } k \in \mathbb{N} \quad \boldsymbol{L}_{n_k}X(\omega) = \boldsymbol{f}_{n_k}(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) \text{ for a.e. } \omega \in \Omega,$$

因此，选取 X、$\boldsymbol{L}X$、$\boldsymbol{L}_{n_k}X$的代表元后，可以找到一个满 $\mathbb{P}$测度集 $\Omega_0 \subset \Omega$，使得

$$\boldsymbol{L}X(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{L}_{n_k}X(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{f}_{n_k}(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) \quad \text{for every } \omega \in \Omega_0.$$

因此，对于每个 $\omega \in \Omega_0$，$X(\omega) \in E$ 进而 $\boldsymbol{L}X(\omega) = f_X(X(\omega))$。若现在 $X' \in D$ 满足 $X'_\sharp\mathbb{P} = \mu$，按照定理 4.8 证明中断言 (c) 的方法推理，容易看出 $\boldsymbol{f}_X = \boldsymbol{f}_{X'}\mu$几乎处处成立。□

最终，我们将前面的结果应用于（可能是多值的）极大 λ-耗散算子 $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$（其中 $p = q = 2$ 且 $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$），这些算子在保测同构下不变。我们证明，这种不变性也为相应的预解算子、吉田逼近、最小选取和半群所继承，而它们也具有映射表示性质。

我们将 $\iota\big(D(\boldsymbol{B})\big) := \Big\{X_\sharp\mathbb{P} : X \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B})\Big\}$ 记为 $\boldsymbol{B}$ 的定义域在 $\mathcal{P}_2(\mathrm{X})$ 中的像。

定理 4.13（预解算子、吉田逼近与半群的结构）。设 X 为可分希尔伯特空间，并令 $p = 2$。设 $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 为一个最大 λ-耗散算子，且在保测同构下不变。那么，对于每个 $0 < \tau < 1/\lambda^+$，$t \geq 0$，算子 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}_\tau, \boldsymbol{J}_\tau, \boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{B}^\circ$均为分布不变。此外，存在（唯一确定的）连续映射 $\boldsymbol{j}_\tau\colon \mathcal{S}(\mathrm{X}) \to \mathrm{X}$、$\boldsymbol{b}_\tau\colon \mathcal{S}(\mathrm{X}) \to \mathrm{X}$，以及 $\boldsymbol{s}_t\colon \mathcal{S}(\mathrm{X}\ \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big) \to \mathrm{X}$，使得

(1) 对每个 $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathrm{X})$，映射 $\boldsymbol{j}_\tau(\cdot,\mu) : \mathrm{supp}(\mu) \to \mathrm{X}$ 是 $(1-\lambda\tau)^{-1}$-Lipschitz连续的，其中 $0 < \tau < 1/\lambda^+$；(2) 对每个 $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathrm{X})$，映射 $\boldsymbol{b}_\tau(\cdot,\mu) : \mathrm{supp}(\mu) \to \mathrm{X}$ 是 $\tau\frac{2-\lambda\tau}{1-\lambda\tau(\cdot)}$-Lipschitz连续的，其中$0 < \tau < 1/\lambda^+$；(3) 对每个 $\mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)$，映射 $\boldsymbol{s}_t(\cdot,\mu)\overline{: \mathrm{supp}}(\mu) \to \mathrm{X}$ 是 $e^{\lambda t}$-Lipschitz连续的，并且

$$\text{for every } X \in \mathcal{X},\ \boldsymbol{J}_\tau X(\omega) = \boldsymbol{j}_\tau(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) \text{ for } \mathbb{P}\text{-a.e. } \omega \in \Omega, \tag{4.17}$$

$$\text{for every } X \in \mathcal{X},\ \boldsymbol{B}_\tau X(\omega) = \boldsymbol{b}_\tau(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) \text{ for } \mathbb{P}\text{-a.e. } \omega \in \Omega, \tag{4.18}$$

$$\text{for every } X \in \overline{\mathrm{D}(\boldsymbol{B})},\ \boldsymbol{S}_t X(\omega) = \boldsymbol{s}_t(X(\omega), X_\sharp\mathbb{P}) \text{ for } \mathbb{P}\text{-a.e. } \omega \in \Omega, \tag{4.19}$$

以及不变性和半群性质

$$\mu \in \overline{\iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{s}_t(\cdot,\mu)_\sharp\mu \in \overline{\iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)}; \qquad \mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{s}_t(\cdot,\mu)_\sharp\mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big),$$
$$\boldsymbol{s}_{t+h}(x,\mu) = \boldsymbol{s}_h(\boldsymbol{s}_t(x,\mu),\boldsymbol{s}_t(\cdot,\mu)_\sharp\mu) \quad \textit{for every } (x,\mu) \in \mathcal{S}(\mathsf{X},\overline{\iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)}), \quad t,h \geq 0. \tag{4.20}$$

最后，对于每个 $\mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)$，都存在一个映射 $\boldsymbol{b}^\circ(\cdot,\mu) \in L^2(\mathsf{X};\mu;\mathsf{X})$，使得对于每个$X \in \mathcal{X}$

$$\textit{if } X_\sharp\mathbb{P} = \mu \textit{ then } X \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B}),\ \boldsymbol{B}^\circ X(\omega) = \boldsymbol{b}^\circ(X(\omega),\mu) \textit{ for } \mathbb{P}\textit{-a.e. } \omega \in \Omega. \tag{4.21}$$

对于每个 $\mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)$，映射 $\boldsymbol{b}^\circ(\cdot,\mu)$ 在一个具有全 μ 测度的集合 $\mathsf{X}_0 \subset \mathsf{X}$ 上是 λ-耗散的，并且满足

$$\lim_{h\downarrow 0}\int \left|\frac{1}{h}(\boldsymbol{s}_{t+h}(x,\mu) - \boldsymbol{s}_t(x,\mu)) - \boldsymbol{b}^\circ(\boldsymbol{s}_t(x,\mu),\boldsymbol{s}_t(\cdot,\mu)_\sharp\mu)\right|^2 \mathrm{d}\mu(x) = 0 \quad t \geq 0. \tag{4.22}$$

注记 4.14。根据定理 4.13，一个极大 λ-耗散算子 $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{X}\times\mathcal{X}$，$\lambda \in \mathbb{R}$，是分布不变的，当且仅当它在保测同构下不变。根据（4.21），$D(\boldsymbol{B})$ 也是分布不变的，即如果 $X \in D(\boldsymbol{B})$ 且 $Y \in \mathcal{X}$ 满足 $Y_\sharp\mathbb{P} = X_\sharp\mathbb{P}$，那么 $Y \in D(\boldsymbol{B})$。

证明。首先注意到，由于 $\boldsymbol{B}$ 是极大 λ-耗散的，故它是闭的，因此根据命题 4.3，它是分布不变的。回顾一下，$\boldsymbol{J}_\tau$ 处处有定义，对每个 $0 < \tau < 1/\lambda^+$ 都是 $(1-\lambda\tau)^{-1}$-Lipschitz连续的（见第2.3节），并且根据命题2.10，在保测同构下不变。固定 $0 < \tau < 1/\lambda^+$ 后，我们便可应用命题 4.3 和定理4.8(1)，从而得到 $\boldsymbol{J}_\tau$ 是分布不变的，并且满足定理 4.13 中的性质(1)和(4.17)。类似地，$\boldsymbol{S}_t$ 定义在闭集 $\overline{\mathrm{D}(\boldsymbol{B})}$ 上，它是 $e^{\lambda t}$-Lipschitz连续的（参见第2.3节），并且根据命题2.10，在保测同构下不变。因此，我们可以应用命题 4.3 和定理4.8(1)，从而得到它是分布不变的，并且满足定理 4.13 的性质(3)和 (4.19)。(4.20) 的内容直接由 $\boldsymbol{S}_t$ 的半群与不变性（参见第2.3节）得出，同时还用到了 $\iota(\mathrm{D}(\boldsymbol{B})) = \overline{\iota(\mathrm{D}(\boldsymbol{B}))}$。

现在证明（4.21）。如果 $X \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B})$，则有 $\boldsymbol{B}_\tau X \to \boldsymbol{B}^\circ X$ as $\tau \downarrow 0$，此外，$\boldsymbol{B}_\tau$ 是分布不变的、处处有定义，并且对于每个 $0 < \tau < 1/\lambda^+$，$\boldsymbol{B}_\tau$ 是 $\lambda/(1-\lambda\tau)$-耗散的且$\tau\frac{2-\lambda\tau}{1-\lambda\tau}$( )-Lipschitz连续（参见第2.3节）。因此，可以应用定理4.8(2)，得到 $\boldsymbol{B}^\circ$是分布不变的，并且对于每个 $\mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)$，存在一个映射 $\boldsymbol{b}^\circ[\mu] \equiv \boldsymbol{b}^\circ(\cdot,\mu) \in L^2(\mathsf{X};\mu;\mathsf{X})$，使得对于每个 $X \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B})$

$$\boldsymbol{B}^\circ X(\omega) = \boldsymbol{b}^\circ[\mu](X(\omega)) \text{ for } \mathbb{P}\text{-a.e. } \omega \in \Omega, \tag{4.23}$$
$$\text{there exists } \tau_k \downarrow 0 \text{ s.t. } \boldsymbol{b}_{\tau_k}(X(\omega),\mu) \to \boldsymbol{b}^\circ[\mu](X(\omega)) \text{ for } \mathbb{P}\text{-a.e. } \omega \in \Omega, \tag{4.24}$$

其中 $\boldsymbol{b}_\tau$ 是表示 $\boldsymbol{B}_\tau$ 的（唯一）连续映射，该映射来自定理 4.8(1)，$0 < \tau < 1/\lambda^+$。为了完成（4.21）的证明，我们必须验证：如果 $\mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)$ 且$X \in \mathcal{X}$ 满足 $X_\sharp\mathbb{P} = \mu$，那么 $X \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B})$。由于 $\mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)$，存在 $Y \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B})$，使得 $Y_\sharp\mathbb{P} = X_\sharp\mathbb{P} = \mu$。根据（4.18），我们有

$$|\boldsymbol{B}_\tau Y|_{\mathcal{X}}^2 = \int |b_\tau(Y(\omega),\mu)|^2 \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int |b_\tau(x,\mu)|^2 \mathrm{d}\mu(x) = \int |b_\tau(X(\omega),\mu)|^2 \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = |\boldsymbol{B}_\tau X|_{\mathcal{X}}^2.$$

因此，由于 $Y \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B})$，根据（2.24）可得

$$(1-\lambda\tau)|\boldsymbol{B}_\tau X|_{\mathcal{X}} = (1-\lambda\tau)|\boldsymbol{B}_\tau Y|_{\mathcal{X}} \uparrow |\boldsymbol{B}^\circ Y|_{\mathcal{X}} < +\infty, \quad \text{as } \tau \downarrow 0.$$

回顾 (2.25)，可得 $X \in \mathrm{D}(\boldsymbol{B})$。最后，利用 (4.22)，由 (2.27) 并结合 (4.19) 和 (4.21) 即可得到所需结果。只需证明，对于每个 $\mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)$，映射 $\boldsymbol{b}^\circ[\mu]$ 是 λ-耗散的，且该性质在一个满μ-测度集合上成立。为此，注意到可以对 4.8(1) 定理应用于 $\boldsymbol{B}_\tau$，$0 < \tau < 1/\lambda^+$，因此对每个 $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathsf{X})$ 均有

$$\langle \boldsymbol{b}_\tau(y) - \boldsymbol{b}_\tau(y'), y - y'\rangle \leq \frac{\lambda}{1-\lambda\tau}|y-y'|^2 \quad \text{for every } y,y' \in \mathrm{supp}(\mu). \tag{4.25}$$

设 $\mu \in \iota\big(D(\boldsymbol{B})\big)$，并考虑 $X \in \mathsf{D}(\boldsymbol{B})$ 的一个代表元，使得 $X_\sharp \mathbb{P} = \mu$；令 τ_k 为 (4.24) 中的序列，并令 Ω_0 为一个满 $\mathbb{P}$-测度集合，在该集合上 (4.24) 中的收敛成立。若取 $y, y' \in X(\Omega_0) \cap \mathrm{supp}(\mu)$，则可找到 $\omega, \omega' \in \Omega_0$，使得 $X(\omega) = y$ 且 $X(\omega') = y'$，于是令 $k \to +\infty$ 在 (4.25) 中趋于极限（其中 (4.25) 针对 $\tau = \tau_k$ 书写），便得到

$$\langle \boldsymbol{b}^\circ[\mu](y) - \boldsymbol{b}^\circ[\mu](y'), y - y' \rangle \le \lambda |y - y'|^2 \quad \text{for every } y, y' \in X(\Omega_0) \cap \mathrm{supp}(\mu).$$

于是，只需注意到 $X(\Omega_0) \cap \mathrm{supp}(\mu)$ 包含一个满 μ-测度的博雷尔集 X_0，即可得出结论：事实上，由于 $X(\Omega_0)$ 是苏斯林集，我们可以找到两个博雷尔集 E_0、E_1，使得 $E_0 \subset X(\Omega_0) \subset E_1$ 且 $\mu(E_1 \setminus E_0) = 0$。由于 $\mu(E_1) = X_\sharp \mathbb{P}(E_1) \ge \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$，因此我们可以取 $\mathsf{X}_0 := E_0 \cap \mathrm{supp}(\mu)$。□

Appendix A. An alternative proof of the extension theorem for G-invariant Lipschitz maps

我们为定理 2.13 中所述的不变利普希茨映射延拓结果给出另一种证明。这里我们采用 [ALM21] 提供的一种近期提出的、优美且显式的利普希茨延拓构造（另见 [ALM18]），并证明该构造保留不变性。我们考虑一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，其范数为 $|\cdot|$，内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 如第 2.4 节所述。

回顾一下，若 $g : \mathsf{W} \to \mathbb{R}$ 是定义在希尔伯特空间 W 上的函数，则其凸包络定义为

$$\mathrm{co}(g)(w) := \inf \Big\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i g(w_i) : \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1,\ w_i \in \mathsf{W},\ \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i = w,\ N \in \mathbb{N} \Big\}. \tag{A.1}$$

如果 g 在局部有上界，那么 $\mathrm{co}(g)$ 也在局部有上界，因此是局部利普希茨的。

定理 A.1 ([ALM21])。设 $f : D \to \mathcal{H}$ 是定义在 L上的 $D \subset \mathcal{H}$-利普希茨映射。对每个 x，$y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} g(x,y) &:= \inf_{x' \in D} \Big\{ \langle f(x'), y \rangle + \frac{L}{2} |(x - x', y)|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \Big\} + \frac{L}{2} |(x,y)|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}, \\ \tilde{g} &:= \mathrm{co}(g), \end{aligned} \tag{A.2}$$

则 $\tilde{g}$ 是 $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 上的 $\mathsf{C}^{1,1}$ 类凸函数，其关于第二个变量在 $\mathcal{H}$上的偏微分

$$F(x) := \nabla_y \tilde{g}(x, 0), \quad x \in \mathcal{H}, \tag{A.3}$$

是 L-利普希茨延拓，延拓自 f。

我们陈述关于 $\mathsf{G}_\mathcal{H}$-不变利普希茨映射延拓的第一个结果。

定理 A.2. 在定理 A.1的相同假设下，我们还假设 f 满足 $\mathsf{G}_\mathcal{H}$-不变性，即满足 (2.29)。那么 F 也 $\mathsf{G}_\mathcal{H}$-不变。特别地，任意 $\mathsf{G}_\mathcal{H}$-不变L-利普希茨函数 $f : D \to \mathcal{H}$ 若定义在 D 的子集 $\mathcal{H}$ 上，则存在一个 $\mathsf{G}_\mathcal{H}$-不变的 L-Lipschitz 延拓 $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

证明。我们将证明分成若干个断言。
命题 1：映射 g是 $\mathsf{G}_\mathcal{H}$-不变的，即对于每个 $(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}andU \in \mathsf{G}_\mathcal{H}$.，都有 $g(Ux, Uy) = g(x,y)$

每个元素 $x' \in D$都可以写成 $x' = Ux''$，其中 $x'' = U^{-1}x' \in D$，使得对于每个$U \in \mathsf{G}_{\mathcal{H}}$和$(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} g(Ux, Uy) &= \inf_{x' \in D} \left\{ \langle f(x'), Uy \rangle + \frac{L}{2} |(Ux - x', Uy)|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \right\} + \frac{L}{2} |(Ux, Uy)|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \\ &= \inf_{x'' \in D} \left\{ \langle f(Ux''), Uy \rangle + \frac{L}{2} |(U(x - x''), Uy)|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \right\} + \frac{L}{2} |(Ux, Uy)|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \\ &= \inf_{x'' \in D} \left\{ \langle f(x''), y \rangle + \frac{L}{2} |(x - x'', y)|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \right\} + \frac{L}{2} |(x, y)|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \\ &= g(x, y) \end{aligned}$$

其中我们使用了（2.29）以及 U的等距性质，得到 $\langle f（Ux''） \ Uy \rangle = \langle Uf（x''） \ Uy \rangle = \langle f（x''） \ y \rangle$。

断言 2：映射 $\tilde{g} := \mathrm{co}(g)$ 也是 $\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$-不变的。
只需注意，对于每个 $U \in \mathsf{G}_{\mathcal{H}}$、 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha_i \geq 0$，若满足 $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$，则集合$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N \in (\mathcal{H} \times \mathcal{H})^N$满足 $\sum_{i=1}^N \alpha_i (x_i, y_i) = (x, y)$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^N \alpha_i (Ux_i, Uy_i) = (Ux, Uy)$。利用 (A.1) 以及 g 的不变性，我们由此得到，对于每个$x, y \in \mathcal{H}$，都有 $\tilde{g}(Ux, Uy) = \tilde{g}(x, y)$。

命题 3：映射 $F := \nabla_y \tilde{g}(\cdot, 0)$ 是 $\mathsf{G}_{\mathcal{H}}$-不變的。
Sinc由于我们知道 $\tilde{g}$ 是弗雷歇可微的，因此我们观察到，当且仅当 $z = F(x)$ 时，...

$$\tilde{g}(x, y) = \tilde{g}(x, 0) + \langle z, y \rangle + o(|y|) \quad \text{as } y \to 0.$$

由于其具有 $\tilde{g}$ 不变性，对于每个 $U \in \mathsf{G}_{\mathcal{H}}$ 和 $x \in \mathcal{H}$，上述公式立即给出

$$\begin{aligned} \tilde{g}(Ux, y) &= \tilde{g}(Ux, UU^{-1}y) = \tilde{g}(x, U^{-1}y) \\ &= \tilde{g}(x, 0) + \langle z, U^{-1}y \rangle + o(|U^{-1}y|) \\ &= \tilde{g}(Ux, 0) + \langle Uz, y \rangle + o(|y|) \quad \text{as } y \to 0, \end{aligned}$$

使得 $F(Ux) = Uz = UF(x)$。 □

References

[AA99] G. Alberti 和 L.Ambrosio. “R^n 中单调函数的几何方法”。载于：Math. Z. 230.2 (1999)，第 259–316 页。[AGS08] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e.《度量空间及概率测度空间中的梯度流》。数学讲义。苏黎世联邦理工学院。Birkh¨auser Basel，2008。[ALM 18] D. Azagra、E. Le Gruyer 和 C. Mudarra. “希尔伯特空间和超自反空间中 $C^{1,\ 1}$ 以及 $C^{1,\ \omega}_{\mathrm{conv}}$ 1-喷流延拓的显式公式”。载于：J. Funct. Anal. 274.10 (2018)，第 3003–3032 页。[ALM21] D. Azagra、E. Le Gruyer 和 C. Mudarra. “通过显式公式证明基尔施布劳恩定理”。载于：Canad. Math. Bull. 64.1 (2021)，第 142–153 页。[Amb03] L. Ambrosio. “最优传输问题讲义”。载于：《演化界面的数学方面》（丰沙尔，2000）。第 1812 卷。数学讲义。施普林格，柏林，2003，第 1–52 页。[Bar10] V. Barbu.《巴拿赫空间中的单调型非线性微分方程》。数学专著丛书。施普林格，纽约，2010，第 x+272 页。[Bau07] H. H. Bauschke. “Fenchel 对偶性、Fitzpatrick 函数与牢固非扩张映射的延拓”。载于：《美国数学学会会刊》135.1 (2007)，第 135–139 页。[BG03] Y. Brenier 和 W. Gangbo. “通过微分同胚逼近映射”。载于：Calc. Var. Partial Differential Equations 16.2 (2003)，第 147–164 页。[Bog06] V. Bogachev.《测度论》。第 II 卷。施普林格，柏林海德堡，2006。

[Bor10] J. M. Borwein. “极大单调性五十年”。载于：优化快报 4.4 (2010)，第 473–490 页。[Br´e73] H. Br´ezis.《希尔伯特空间中极大单调算子与压缩半群》。北荷兰数学研究丛书，第 5 号。数学札记（50）。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—伦敦；美国爱思唯尔出版公司，纽约，1973，第 vi+183 页。[BS03] R. S. Burachik 和 B. F. Svaiter. “极大单调性、共轭与对偶积”。载于：《美国数学学会会刊》131.8 (2003)，第 2379–2383 页。[BW09] H. H. Bauschke 和 X. Wang. “两个凸函数的核平均及其在单调算子的延拓与表示中的应用”。载于：美国数学会汇刊 361.11 (2009)，第 5947–5965 页。[BW10] H. H. Bauschke 和 X. Wang. “牢固非扩张映射与基尔施布劳恩-瓦伦丁延拓：一种基于单调算子理论的构造性方法”。载于：《非线性分析与优化 I》。非线性分析。第 513 卷。当代数学。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010，第 55–64 页。[Car13] P. Cardaliaguet. “平均场博弈札记”。根据 P.-L. Lions 在法兰西公学院的讲座整理，附札记链接。2013。[CD18] R. Carmona 和 F. Delarue.《平均场博弈的概率理论及其应用》。I。第 83 卷。概率论与随机建模。平均场正向后向随机微分方程、控制与博弈。施普林格，Cham，2018，第 xxv+713 页。[CSS23] G. Cavagnari、G. Savar´e 和 G. E. Sodini. “Wasserstein 空间中全耗散演化的拉格朗日方法”。载于：arXiv:2305.05211 (2023)。[DF64] H. Debrunner 和 P. Flor. “单调集的一个延拓定理”。载于：数学档案 15 (1964)，第 445–447 页。[Fit88] S. Fitzpatrick. “用凸函数表示单调算子”。载于：《泛函分析与优化研讨会/小型会议》（堪培拉，1988）。第 20 卷。澳大利亚国立大学数学分析中心论文集。澳大利亚国立大学，堪培拉，1988，第 59–65 页。[FSS23] M. Fornasier、G. Savar´e 和 G. E. Sodini. “度量 Sobolev 空间中利普希茨函数子代数的稠密性及其在 Wasserstein Sobolev 空间中的应用”。载于：J. Funct. Anal. 285.11 (2023)，论文编号 110153，共 76 页。[Gho08] N. Ghoussoub. “单调向量场的变分理论”。载于：不动点理论与应用杂志 4.1 (2008)，第 107–135 页。[GT19] W. Gangbo 和 A. Tudorascu. “Wasserstein 空间中的可微性及哈密顿-雅可比方程的适定性”。载于：纯粹与应用数学杂志 (9) 125 (2019)，第 119–174 页。.[Kir34] M. D. Kirszbraun. “关于收缩变换和利普希茨变换”。载于：数学基础 22 (1934)，第 77–108 页。[MT01] J.-E. Martinez-Legaz 和 M. Th´era. “极大单调算子的凸表示”。载于：第 2 卷。第 2 期。Ky Fan 教授专刊。2001，第 243–247 页。[Pen04a] J.-P. Penot. “通过闭凸函数表示极大单调算子及其对微积分法则的影响”。载于：巴黎科学院数学报告 338.11 (2004)，第 853–858 页。[Pen04b] J.-P. Penot. “凸分析对单调性研究的重要性”。载于：非线性分析 58.7-8 (2004)，第 855–871 页。[Pra07] A. Pratelli. “最优质量输运中蒙日下确界与康托罗维奇最小值相等的问题”。载于：亨利·庞加莱研究所年刊（B）概率与统计 43（2007 年 2 月），第 1–13 页。

[Roc97] R. T. Rockafellar. 凸分析. 普林斯顿数学经典. 1970 年原版重印，普林斯顿平装本. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1997 年，第 xviii+451.[Roy88] H. L. Royden. 实分析. 第三版. 麦克米伦出版公司，纽约，1988 年，第 xx+444.[RS05] S. Reich 和 S. Simons. “Fenchel 对偶性、Fitzpatrick 函数与 Kirszbraun-Valentine 延拓定理”. 载于：《美国数学学会会刊》133.9 (2005)，第 2657–2660 页.[SS22] G. Savar´e 和 G. E. Sodini. “完全正则空间中最优传输问题对偶性的简单松弛方法”. 载于：《凸分析杂志》29.1 (2022)，第 1–12 页.[Str11] D. W. Stroock. 概率论. 第二版. 分析视角. 剑桥大学出版社，剑桥，2011 年，第 xxii+527.[Val43] F. A. Valentine. “保持 Lipschitz 条件的向量函数延拓”. 载于：《美国数学学会通报》49 (1943)，第 100–108 页.[Val45] F. A. Valentine. “保持 Lipschitz 条件的向量函数延拓”. 载于：《美国数学杂志》67 (1945)，第 83–93 页.[Vis17] A. Visintin. “单调算子的变分表示”. 载于：《离散与连续动力系统：S辑》10.4 (2017)，第 909–918 页。

Giulia Cavagnari: Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Piazza Leonardo Da Vinci 32, 20133 Milano (Italy)*Email address*: giulia.cavagnari@polimi.itGiuseppe Savaré: Bocconi University, Department of Decision Sciences and BIDSA, Via Roentgen1, 20136 Milano (Italy)*Email address*: giuseppe.savare@unibocconi.it
Giacomo Enrico Sodini: Institut für Mathematik - Fakultät für Mathematik - Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien (Austria)*Email address*: giacomo.sodini@univie.ac.at