arXiv:2305.04679v1 [math.FA] 8 May 2023

凸非局部泛函的 Γ-极限的积分表示及其失效

Andrea Braides 和 Gianni Dal Maso，意
大利的里雅斯特 Bonomea 路 265 号，SISSA

摘要

我们证明了定义在 $H_0^1(\Omega)$ 上的非局部二次型极限的积分表示结果，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 的有界开子集；这推广了狄利克雷型理论中由 Beurling-Deny 公式给出的 $C_c^\infty(\Omega)$ 上的表示。我们给出一个反例，表明若考虑 W^{1} 中的类似泛函，$_0{}^{p}(\Omega)$，且 $p \neq 2$ 和 $1 < p \leqslant d$，则相应的表示未必成立。

MSC 分类号： 49J45, 31C25, 46E35, 31B15.
关键词： Γ-收敛、狄利克雷型、非局部泛函、积分表示 -
示。

1 引言

本文继续研究定义在 Sobole夫空间上的泛函，其中除依赖于梯度的常规局部部分外，还包含以二重积分形式出现的非局部部分。一般而言，这一问题可以表述为刻画如下形式的泛函之极限：

$$F_k(u) = \int_{\Omega\times\Omega} f_k(u(x) - u(y))d\mu_k(x, y) + \int_\Omega g_k(x, \nabla u(x))\, dx,$$

定义在某个 Sobole夫空间 $W^{1}{}_{,0}{}^{p}(\Omega)$ 中，其中 $p > 1$。可以研究此类泛函的不同稳定性：在 [2] 中，我们给出了测度 μ_k 上的一种收敛概念，该概念保证 Ω ×Ω 上的积分以及 Ω 上的积分分别具有稳定性；而在 [3] 中，我们探讨了使这类泛函序列的极限仍具有此形式的条件，但极限的被积函数由局部项与非局部项之间的相互作用决定。狄利克雷型理论 [6] 给出了此类泛函的稳定性，其唯一条件是 f_k 和 g_k 为二次型，而对测度 μ_k 的条件则十分宽松（见 [9]）。

SISSA 预印本 06/2023/MATE

本文分析了这些二次泛函的 Γ-极限的性质，并表明，颇令人意外的是，只要对二次型稍作变动，这种稳定性就不再成立；具体而言，当所有被积函数都是 p 次幂且满足 $p \neq 2$ 时。此前已知的稳定性失效例子出现在非凸泛函 F 的松弛结果中，此时局部项被舍弃（或者等价地说，若 $f_k = f$ 不凸且 $g_k \equiv 0$）。在这种情况下，二重积分在弱 L^p 拓扑下的下半连续包络无法表示为相同的形式[1, 7, 8]。我们的反例表明，即使对于 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 中的凸且等强制泛函序列，也会出现类似问题。

本文首先给出一个与狄利克雷型理论相关的结果。考虑定义在 $H^1_0(\Omega)$ 上的如下二次型

$$\int_{\Omega\times\Omega} |u(x)-u(y)|^2 a_k(x,y)\,dxdy + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx, \tag{1.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有界开集，a_k 是 $L^1(\Omega\times\Omega)$ 中一致有界且不集中于边界的正函数。我们证明，在 $H^1_0(\Omega)$的弱拓扑下，相应的 Γ-极限可在函数 $u \in C^\infty_c(\Omega)$ 上写成如下形式

$$\int_{\Omega\times\Omega} |u(x)-u(y)|^2 d\mu(x,y) + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx,$$

其中 μ是一个正的有界拉东测度（见定理 2.2 和 2.4，以及命题 2.7）。证明该测度有界是主要工作；这一点似乎不能直接从 Beurling-Deny 公式[6,定理 4.5.2]得到的表示推出。

我们将证明，若 $p \neq 2$ （以及 $1 < p \leqslant d$），则这一点不成立。更确切地说，可以如下构造一个反例。给定 $x_0 \in\Omega$ 和一个收敛到 0 的正数序列 ε_k，令

$$a_k(x,y) = \begin{cases} |B_{\varepsilon_k}(x_0)|^{-1} & \text{if } y \in B_{\varepsilon_k}(x_0) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，$B_r(x)$ 表示中心为 x 、半径为 r的球。在这种情况下，泛函

$$F_k(u) = \int_{\Omega\times\Omega} |u(x)-u(y)|^p a_k(x,y)\,dxdy + \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx, \tag{1.2}$$

定义在 $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ 上的泛函，在 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 的弱拓扑下有一个 Γ-极限，该极限可直接在该空间上表示为

$$F(u) = \int_\Omega |u(x)-m_p(u)|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx, \tag{1.3}$$

其中 $m_p(u)$ 是 $t \mapsto \int_\Omega |u(x)-t|^p\,dx$ 的唯一极小化子。在这一结果的证明中，不等式 $p \leqslant d$ 至关重要，它意味着单点的 p-容量为零；这也解释了为什么 Γ-极限与 x_0 无关。

如果 $p \neq 2$ 我们将证明，不存在连续函数 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，也不存在 Ω ×Ω 上的非负有界拉东测度 μ，使得

$$\int_\Omega |u(x)-m_p(u)|^p\,dx = \int_{\Omega\times\Omega} f(u(x),u(y))d\mu(x,y) \tag{1.4}$$

对所有 $u \in C_c^\infty(\Omega)$ （见推论 3.10）。

请注意，上述 F 的表示方式与在 $p=2$ 时将其表示为二重积分并不矛盾。事实上，在这种情况下

$$m_2(u) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)\,dy,$$

使得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)-m_2(u)|^2\,dx &= \int_\Omega |u(x)|^2\,dx - \frac{1}{|\Omega|}\Big(\int_\Omega u(y)\,dy\Big)^2 \\ &= \frac{1}{2|\Omega|}\int_{\Omega\times\Omega}|u(x)-u(y)|^2\,dxdy, \end{aligned}\tag{1.5}$$

且 μ 只是 Ω × Ω 上勒贝格测度的一个倍数。

同样的观察结果在松弛理论中给出了一个无法进行积分表示的例子。考虑定义在 $C_c^1($Ω) 上的泛函即可得到这一例子。

$$F_{x_0}(u) = \int_\Omega |u(x)-u(x_0)|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx,$$

其中，x_0 是 Ω 中给定的一点。于是，$W^{1,p}_0(\Omega)$ 关于弱拓扑的下半连续包络仍由 (1.3) 中相同的 F 给出，因此无法表示为积分形式。注意，$F_{x_0}(u)$ 中的第一项可解释为 Ω × Ω 上关于限制在 Ω × $\{x_0\}$上的 d维豪斯多夫测度的积分；该测度是上述测度 $\mu_k = a_k\,dxdy$ 的弱极限。

本文的安排如下。第 2 节专门讨论二次情形。我们首先应用 Beurling-Deny 公式，得到泛函 F_k （见 (1.1)）在 $C_c^\infty(\Omega)$ 上的 Γ-极限F的一种表示，其中涉及两个测度 μ 和 ν，它们分别定义在 Ω × Ω 和 Ω 上（定理 2.2）。随后，我们分析这两个测度的一些性质，这些性质源于 F满足的估计，并证明这两个测度均为容量型且有限（定理 2.4 和定理 2.5）。利用 Γ-极限所满足的一些额外的下半连续性和截断性质，我们进而将积分表示扩展到整个 $H_0^1(\Omega)$（推论 2.8）。第 3 节专门讨论上文所述的反例。我们证明

泛函 (1.2) 的 Γ-极限由 (1.3) 给出。随后，我们将 (1.4) 推广到特征函数 $u = 1_A$，并证明在这种情况下，该等式的右侧和左侧仅取决于 A的测度。仔细考察这种依赖关系的形式可知，当 $p \neq 2$时，两侧必不相同，从而得出该反例（推论 3.10）。

2 $p = 2$的情形

全文中，Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 的连通有界开子集，且 $d \geqslant 1$，尽管当 $d = 1$ 时，某些极限论证会变得平凡。令 $a_k \in L^1(\Omega \times \Omega)$ 为非负函数，使得

$$\|a_k\|_{L^1(\Omega\times\Omega)} \leqslant M \text{ for all } k \tag{2.1}$$

对于某个 $M > 0$，并考虑泛函

$$F_k(u) := \int_{\Omega\times\Omega} |u(x) - u(y)|^2 a_k(x, y)\, dxdy + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx \tag{2.2}$$

定义于 $u \in H_0^1(\Omega)$。由于它们在 $H_0^1(\Omega)$ 的弱拓扑下等强制，我们可以使用 [4, 命题 8.10] 中给出的弱拓扑下 Γ- 极限的序列刻画。

注意，每个 F_k 都满足以下截断性质： $F_k(\Psi(u)) \leqslant F_k(u)$ 对于每个 1-利普希茨函数 Ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$满足 $\Psi(0) = 0$，以及每个 $u \in H_0^1(\Omega)$。此外，(2.1) 蕴含

$$F_k(u) \leqslant M\,(\mathrm{osc}_\Omega u)^2 + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx, \tag{2.3}$$

其中 $\mathrm{osc}_\Omega u := \text{ess sup}_\Omega u - \text{ess inf}_\Omega u$ 表示 u 在 Ω 上的振荡。

命题 2.1。 假设 F_k Γ在 $H_0^1(\Omega)$ 的弱拓扑下收敛到一个泛函 F。那么 F 满足以下性质：

(a) F, $D(F) := \{u \in H_0^1(\Omega) : F(u) < +\infty\}$的定义域是一个包含$H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$的线性空间；

(b) F是一个二次型；也就是说，存在一个双线性型 $B: D(F) \times D(F) \to \mathbb{R}$，使得对每个 $u \in D(F)$，都有 $F(u) = B(u, u)$；

(c) 赋予范数 $\|\cdot\|_F$（定义如下）的空间 $D(F)$

$$\|u\|_F = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + F(u)\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

是一个希尔伯特空间；

(d) 对每个 1-利普希茨函数 Ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足 $\Psi(0) = 0$，且对每个 $u \in H_0^1(\Omega)$，我们有 $F(\Psi(u)) \leqslant F(u)$；

(e) </style}空间 Ω) 关于范数 $\|\cdot\|_F$在 $D(F)$ 中稠密。

证明。 (a) 若 $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，则由 (2.3) 得

$$F(u) \leqslant \liminf_{k\to+\infty} F_k(u) \leqslant \left(2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2 M + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}; \tag{2.5}$$

(b) 由 Γ-收敛的一般性质推出（见 [4, 定理 11.10]）；(c) 由 F 的下半连续性通过标准论证得出；(d) 可利用 F_k 的截断性质以及 Γ-极限的定义得到。

对于（e），我们首先证明，$H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 包含在 $C_c^\infty(\Omega)$ 关于范数 $\|\cdot\|_F$的闭包中。事实上，对于每个 $u \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，都存在 $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛到 u，且满足 $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$。由此以及（2.5），我们推得 $\|u_k\|_F$ 等度有界，这意味着 $u_k \rightharpoonup u$ 在希尔伯特空间 $D(F)$中弱收敛，从而得到所需的包含关系。还需证明 $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 在 $D(F)$中稠密。为此，若 $u \in D(F)$，我们可以考虑 $u_m = \Psi_m(u)$，其中 $\Psi_m(t) = (m \wedge t) \vee (-m)$ 是一个截断算子。于是 $u_m \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，$u_m \to u$ 在 $H_0^1(\Omega)$中，且由（d）可得 $F(u_m) \leqslant F(u)$。这再次意味着 $\|u_m\|_F$ 等度有界，因此 u_m 弱收敛到 u（在 $D(F)$中），证明完毕。

□

定理 2.2。 假设 F_k Γ在 $H_0^1(\Omega)$ 的弱拓扑下收敛到一个泛函F。那么分别存在两个正的拉东测度 μ 和 ν，定义在 Ω × Ω 和 Ω上，使得

(a) 对于 $u \in C_c^\infty(\Omega)$

$$F(u) = \int_{\Omega\times\Omega} |u(x)-u(y)|^2 d\mu(x,y) + \int_\Omega |u(x)|^2 d\nu(x) + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx; \tag{2.6}$$

(b) μ 是对称的；即，对于Ω中包含的任意一对博雷尔集 A 和 B，
$\mu(A\times B) = \mu(B\times A)$；
(c) 设定 $\Delta := \{(x,x) : \ x \in \mathbb{R}^d\}$，我们有

$$\mu((\Omega\times\Omega)\cap\Delta) = 0. \tag{2.7}$$

证明。由前一个命题可知，其中定义的双线性型 B 是一个 狄利克雷型 （见 [6]），且 $C_c^\infty(\Omega)$ 是 B 的一个 核 。因此，根据 Beurling-Deny 定理（[6, 定理 2.2.2]），我们有如下分解

$$F(u) = F^n(u) + F^\ell(u) + F^c(u) \text{ for every } u \in C_c^\infty(\Omega),$$

其中，F^ℓ是局部项，F^n是非局部项，F^c是仅依赖于导数的局部项。更准确地说，存在一个由拉东测度构成的对称矩阵μ_{ij}，以及两个正拉东测度 μ 和 ν，使得

$$F^n(u) = \int_{\Omega\times\Omega} |u(x)-u(y)|^2 d\mu(x,y), \quad F^\ell(u) = \int_\Omega |u(x)|^2 d\nu(x), \tag{2.8}$$

$$F^c(u) = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} d\mu_{ij}(x) \tag{2.9}$$

对于每个 $u \in C_c^\infty(\Omega)$。注意，假设 μ 具有对称性且满足 (2.7) 并不失一般性，因为 $|u(x)-u(y)|^2 = 0$ 在 Δ上。

现在我们证明，在我们的情形下 $F^c(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx$。注意，

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \leqslant F(u) \leqslant M\,(\mathrm{osc}_\Omega u)^2 + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \tag{2.10}$$

对于每个 $u \in C_c^\infty(\Omega)$，第一个不等式利用了第一个积分的下半连续性，第二个不等式则利用了 (2.3)。

给定 $\omega \in C_c^\infty(\Omega)$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^d$，定义 φ 和 ψ 为

$$\varphi(x) = \omega(x)\cos(x\cdot\xi) \quad \text{and} \quad \psi(x) = \omega(x)\sin(x\cdot\xi).$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
&F^c(\varphi) + F^c(\psi) = F^c(\omega) + \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \omega^2(x)\xi_i\xi_j d\mu_{ij}(x),\\
&\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla\psi(x)|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla\omega(x)|^2\,dx + \int_\Omega \omega^2(x)|\xi|^2 dx,
\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \omega^2(x)\xi_i\xi_j d\mu_{ij}(x) - \int_\Omega \omega^2(x)|\xi|^2 dx\Big|\\
\leqslant\ &\Big|F(\varphi) - \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,dx\Big| + \Big|F(\psi) - \int_\Omega |\nabla\psi(x)|^2\,dx\Big| + \Big|F(\omega) - \int_\Omega |\nabla\omega(x)|^2\,dx\Big|\\
&+F^\ell(\varphi) + F^\ell(\psi) + F^\ell(\omega) + F^n(\varphi) + F^n(\psi) + F^n(\omega)
\end{aligned}$$

利用 (2.10)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \omega^2(x)\xi_i\xi_j d\mu_{ij}(x) - \int_\Omega \omega^2(x)|\xi|^2 dx\Big|\\
&\leqslant 12M\|\omega\|^2_{L^\infty(\Omega)} + 3F^\ell(\omega) + F^n(\varphi) + F^n(\psi) + F^n(\omega).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

设 $K = \operatorname{supp}\omega$。我们注意到

$$\begin{aligned} F^n(\varphi) &= \int_{K\times K} |\omega(x)\cos(x\cdot\xi) - \omega(y)\cos(y\cdot\xi)|^2 d\mu(x,y) \\ &\quad + \int_{K\times(\Omega\setminus K)} |\omega(x)\cos(x\cdot\xi)|^2 d\mu(x,y) + \int_{(\Omega\setminus K)\times K} |\omega(y)\cos(y\cdot\xi)|^2 d\mu(x,y) \\ &\leqslant 4\|\omega\|^2_{L^\infty(\Omega)}\mu(K\times K) + \int_{K\times(\Omega\setminus K)} |\omega(x)|^2 d\mu(x,y) + \int_{(\Omega\setminus K)\times K} |\omega(y)|^2 d\mu(x,y) \\ &\leqslant 4\|\omega\|^2_{L^\infty(\Omega)}\mu(K\times K) + \int_{\Omega\times\Omega} |\omega(x)-\omega(y)|^2 d\mu(x,y) \\ &\leqslant 4\|\omega\|^2_{L^\infty(\Omega)}\big(\mu(K\times K) + M\big) + \int_\Omega |\nabla\omega(x)|^2\,dx, \end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们再次使用 (2.10)。利用对 $F^n(\psi)$ 的类似估计，由 (2.10) 和 (2.11) 可得

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \omega^2(x)\xi_i\xi_j d\mu_{ij}(x) - \int_\Omega \omega^2(x)|\xi|^2 dx\Big| \\ &\qquad \leqslant \|\omega\|^2_{L^\infty(\Omega)}(8\mu(K\times K) + 20M) + 5\int_\Omega |\nabla\omega(x)|^2\,dx. \end{aligned}$$

将此估计中的 ξ 替换为 $\lambda\xi$，即可得到

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \omega^2(x)\xi_i\xi_j d\mu_{ij}(x) - \int_\Omega \omega^2(x)|\xi|^2 dx\Big| \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\Big(\|\omega\|^2_{L^\infty(\Omega)}(8\mu(K\times K) + 20M) + 5\int_\Omega |\nabla\omega(x)|^2\,dx\Big). \end{aligned}$$

令 $\lambda\to+\infty$，于是我们有

$$\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \omega^2(x)\xi_i\xi_j d\mu_{ij}(x) = \int_\Omega \omega^2(x)|\xi|^2\,dx.$$

通过极化，我们有

$$\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \omega^2(x)\xi_i\eta_j d\mu_{ij}(x) = \int_\Omega \omega^2(x)\xi\cdot\eta\,dx \qquad \text{for all } \xi,\eta\in\mathbb{R}^d.$$

取 $\xi,\ \eta\in\{e_1,\ \ldots\ldots,\ e_d\}$ 并利用 ω 的任意性，我们得到，对于 $i\neq j$ 和 $\mu_{ii} = \mathcal{L}^d$，有 $\mu_{ij} = 0$，因此 $F^c(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx$。利用这一点，我们还可以得到。

$$F^n(u) + F^\ell(u) \leqslant M\,(\operatorname{osc}_\Omega(u))^2 \tag{2.12}$$

对于所有 $u\in C_c^\infty(\Omega)$。 □

下面的例子表明，非平凡测度 ν 确实可能出现在极限中。

例 2.3. 设 $d = 2$ 和 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$，其中 $a_k(x, y) = \alpha_k(x) + \alpha_k(y)$，满足

$$\alpha_k(x) = \begin{cases} k & \text{if } x \in R_k := (0,1) \times (0, \frac{1}{k}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

则 (2.1) 在 $M = 2$ 下成立。现在我们证明相应的 F_k 收敛到由下式给出的泛函

$$F(u) = 2 \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

这对应于 $\mu = 0$ 和 $\nu = 2\mathcal{L}^d$。

为了证明下极限不等式，我们固定一个序列 u_k，它在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛到 u。我们有

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\times\Omega} |u_k(x) - u_k(y)|^2 a_k(x,y) \, dxdy \\ &= 2k \int_{R_k} |u_k(x)|^2 \, dx - 4k \int_{R_k} u_k(x) \, dx \int_\Omega u_k(y) \, dy + 2 \int_\Omega |u_k(y)|^2 \, dy. \end{aligned} \tag{2.13}$$

此外，在 R_k 中使用一个庞加莱不等式论证，我们得到

$$k \int_{R_k} |u_k(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{1}{k} \int_{R_k} |\nabla u_k(x)|^2 \, dx. \tag{2.14}$$

这给出

$$\lim_{k\to+\infty} k \int_{R_k} |u_k(x)|^2 \, dx = 0 \tag{2.15}$$

由于 the (2.14) 中的右端收敛到 0。由 H¨older 不等式，我们还得到

$$\lim_{k\to+\infty} k \int_{R_k} |u_k(x)| \, dx = 0.$$

这些极限表明，根据 (2.13),

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega\times\Omega} |u_k(x) - u_k(y)|^2 a_k(x,y) \, dxdy = 2 \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx.$$

由梯度项的下半连续性可知，这表明 $\liminf_{k\to+\infty} F_k(u_k) \geqslant F(u)$。另一方面，由 (2.13) 和 $u_k = u$ 可知 $\lim_{k\to+\infty} F_k(u) = F(u)$，从而完成了 F_k 到 F 的 Γ-收敛性证明。

现在我们分析定理 2.2 中给出的测度 μ 和 ν 的性质，以便将表示结果扩展到整个 $H_0^1(\Omega)$。

定理 2.4. 设 $F\colon C_c^\infty(\Omega) \to [0,+\infty)$ 满足：存在两个正的拉东测度 μ 和 ν，分别定义在 $\Omega\times\Omega$ 和Ω上，并满足定理2.2的(a)、(b)和(c) 。此外，假设存在 $M>0$ 使得

$$F(u) \leqslant M\left(\operatorname{osc}_\Omega u\right)^2 + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \tag{2.16}$$

对所有 $u \in C_c^\infty(\Omega)$均成立。那么

(a) 测度 μ 和 ν 唯一确定；(b) $\mu(\Omega\times\Omega) < +\infty$ 且 $\nu(\Omega) < +\infty$。

证明。 我们首先证明 ν 是有限测度。由 (2.16) 和 (2.6)，首先得到

$$\int_\Omega |u(x)|^2 d\nu(x) \leqslant M\left(\operatorname{osc}_\Omega u\right)^2 \text{ for all } u \in C_c^\infty(\Omega).$$

用一列非负函数 $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$ 递增地逼近常数 1，可得 $\nu(\Omega) \leqslant M$。

现在我们完成论断 (b) 的证明，证明测度 μ 是有限的。首先注意，由 (2.16) 和 (2.6) 还可得到

$$\int_{\Omega\times\Omega} |u(x)-u(y)|^2 d\mu(x,y) \leqslant M\left(\operatorname{osc}_\Omega u\right)^2 \text{ for all } u \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.17}$$

由于证明相当复杂，我们先考虑 $d=1$ 的情形，希望这有助于阐明所用的论证。给定 $\eta>0$，我们令

$$\Delta_\eta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : |x-y| \leqslant \eta\}, \tag{2.18}$$

并用一族依赖于两个参数 α 和 β 的“棋盘格型”集合，对 $(\Omega\times\Omega)\backslash\Delta_\eta$ 进行“平均意义下”的覆盖，从而证明该覆盖具有一些独立于 η 的平均性质。

给定 α，$\beta \in \mathbb{R}$，且满足 $\beta>0$，我们定义

$$A_{\alpha,\beta} = \bigcup_{h \text{ even}} [\alpha+h\beta, \alpha+(h+1)\beta), \tag{2.19}$$

and

$$E_{\alpha,\beta} = \bigcup_{h+k \text{ odd}} ([\alpha+h\beta, \alpha+(h+1)\beta) \times [\alpha+k\beta, \alpha+(k+1)\beta)). \tag{2.20}$$

注意，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $E_{\alpha+k\beta,\beta} = E_{\alpha,\beta}$

$$E_{\alpha,\beta} = (\alpha,\alpha) + E_{0,\beta}; \tag{2.21}$$

此外，我们有

$$(\Omega \times \Omega) \cap E_{\alpha,\beta} = ((\Omega \cap A_{\alpha,\beta}) \times (\Omega \backslash A_{\alpha,\beta})) \cup ((\Omega \backslash A_{\alpha,\beta}) \times (\Omega \cap A_{\alpha,\beta})). \tag{2.22}$$

我们断言

$$\mu((\Omega \times \Omega) \cap E_{\alpha,\beta}) \leqslant M, \tag{2.23}$$

其中 M 在 (2.16) 中定义。为证明该断言，我们取一个序列 $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$ ，使得 $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ 且 $u_k(x) \to 1_{A_{\alpha,\ \beta}}(x)$ 对所有 $x \in \Omega$ 均成立。于是有

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{(\Omega \cap A_{\alpha,\beta}) \times (\Omega \backslash A_{\alpha,\beta})} |u_k(x) - u_k(y)|^2 d\mu(x,y) = \mu((\Omega \cap A_{\alpha,\beta}) \times (\Omega \backslash A_{\alpha,\beta})). \tag{2.24}$$

若后一测度有限，则利用控制收敛定理可得此极限；否则，可通过应用 Fatou 引理得到。由 (2.17)、(2.24) 以及 $\mu((\Omega \backslash A_{\alpha,\ \beta}) \times (\Omega \cap A_{\alpha,\ \beta}))$ 的相应极限，结合 (2.22)，即可得到该断言。

接下来的论证是：给定 $\eta > 0$，确定 $\varepsilon > 0$ ，使得令 $D_\varepsilon = \{(\alpha,\ \beta) : 0 \leqslant \alpha < \beta,\ \ \varepsilon \leqslant \beta < 2\varepsilon\}$ 后，有

$$\int_{D_\varepsilon} 1_{E_{\alpha,\beta}}(x,y) d\alpha d\beta \geqslant \Big(\frac{1}{2} - \eta\Big) |D_\varepsilon| \tag{2.25}$$

对每个 $(x,\ y) \in (\Omega \times \Omega) \backslash \Delta_\eta$ 均成立，其中 Δ_η us 在 (2.18) 中定义。证明 (2.25) 后，我们得到

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{2} - \eta\Big) |D_\varepsilon| \mu((\Omega \times \Omega) \backslash \Delta_\eta) &\leqslant \int_{\Omega \times \Omega} \int_{D_\varepsilon} 1_{E_{\alpha,\beta}}(x,y) d\alpha d\beta d\mu(x,y) \\ &= \int_{D_\varepsilon} \int_{\Omega \times \Omega} 1_{E_{\alpha,\beta}}(x,y) d\mu(x,y) d\alpha d\beta \\ &\leqslant |D_\varepsilon| \mu(E_{\alpha,\beta}) \leqslant |D_\varepsilon| M \end{aligned}$$

由 (2.23) 得。两边除以 $|D_\varepsilon|$ ，可得

$$\Big(\frac{1}{2} - \eta\Big) \mu((\Omega \times \Omega) \backslash \Delta_\eta) \leqslant M.$$

考虑到 (2.7)，我们得到

$$\mu(\Omega \times \Omega) \leqslant 2M \tag{2.26}$$

由 η 的任意性，得出 μ 有界的结论。

接下来只需证明式 (2.25)。根据 Fubini 定理，我们有

$$\int_{D_\varepsilon} 1_{E_{\alpha,\beta}}(x,y) d\alpha d\beta = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \mathcal{L}^1(\{\alpha \in [0,\beta) : (x,y) \in E_{\alpha,\beta}\}) d\beta.$$

我们现在断言， $\mathcal{L}^1(\{\alpha \in [0,\ \beta)\colon (x,\ y) \in E_{\alpha,\ \beta}\})$ 取决于 $z := y - x$，并且，令

$$\gamma_z(\beta) := \mathcal{L}^1(\{\alpha \in [0,\beta) : (x,y) \in E_{\alpha,\beta}\}),$$

我们有

$$\gamma_z(\beta) = |z - 2m_\beta(z)\beta|,$$

其中， $m_\beta(z) \in \mathbb{Z}$ 是满足下式的唯一整数

$$(2m_\beta(z) - 1)\beta \leqslant z < (2m_\beta(z) + 1)\beta.$$

首先注意到，由于$E_{\alpha,\beta}$的周期性，集合 $\{\alpha \in \mathbb{R}\colon (x,y) \in E_{\alpha,\beta}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的周期子集，周期为 β。此外，利用（2.21），我们有

$$\{\alpha \in \mathbb{R} : (x,y) \in E_{\alpha,\beta}\} = \{\alpha \in \mathbb{R} : (0,z) \in E_{\alpha,\beta}\} + \alpha_\beta(x),$$

其中 $\alpha_\beta(x) := x - \beta\lfloor \frac{x}{\beta} \rfloor$， $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示整数部分；因此，

$$\mathcal{L}^1(\{\alpha \in [0,\beta) : (x,y) \in E_{\alpha,\beta}\}) = \mathcal{L}^1(\{\alpha \in [0,\beta) : (0,z) \in E_{\alpha,\beta}\})$$

由该集合的周期性可知，这证明 γ_z 确实仅取决于 z。

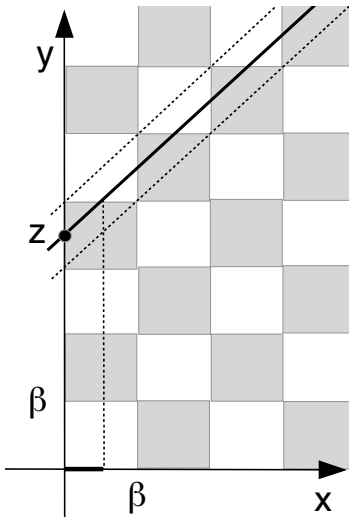

图1： γ_z的几何解释；灰色区域表示$E_{0,\beta}$。

现在注意到，利用 $E_{0,\ \beta}$ 的周期性，我们可以写成

$$\gamma_z(\beta) = \mathcal{L}^1(\{\alpha \in [0,\beta) : (0,z) \in (\alpha,\alpha) + E_{0,\beta}\}) = \mathcal{L}^1(\{\alpha \in [0,\beta) : (0,z) + (\alpha,\alpha) \in E_{0,\beta}\}),$$

因此，当 $|z| = m\beta$ 为偶数时， $\gamma_z(\beta) = 0$ ；当 $|z| = \beta m$ 为奇数时， $\gamma_z(\beta) = \beta$ 。否则，函数 γ_z 是由这些条件在 $\beta\mathbb{Z}$ 上确定的分段仿射插值。图 1 以图示方式呈现了值 $\gamma_z(\beta)$: 直线$\{(0,\ z) + (\alpha,\ \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ 与 $E_{0,\ \beta} \cap ([0,\ \beta) \times \mathbb{R})$ 的交集在 x 坐标轴上的投影长度。在图中，我们描绘了一般 z 的情形，以及当 $z \in \mathbb{Z}$ 时 z 为偶数或奇数的两种可能情况（虚线）。

用 γ_z 表示时，(2.25) 等价于

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \gamma_z(\beta) d\beta \geqslant \Big(\frac{1}{2} - \eta\Big)|D_\varepsilon|. \tag{2.27}$$

注意，$|D_\varepsilon| = \frac{3}{2}\varepsilon^2$,- 但在大多数计算中，我们并不需要这个显式值。

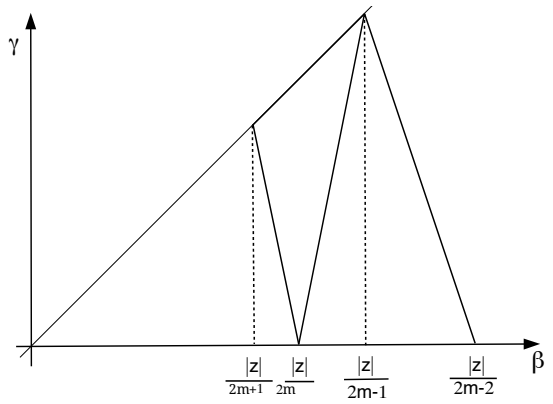

图 2: γ_z 的图像的一部分。

为证明 (2.27)，注意到

$$\int_{\frac{|z|}{2m}}^{\frac{|z|}{2m-2}} \gamma_z(\beta) d\beta \geqslant \int_{\frac{|z|}{2m+1}}^{\frac{|z|}{2m-1}} (\beta - \gamma_z(\beta)) d\beta \tag{2.28}$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $m \geqslant 2$ （这只是对图 2 中两个三角形面积的比较）。我们定义 $h = h(|z|, \varepsilon)$ 和 $k = k(|z|, \varepsilon)$ ，令

$$h = \max\Big\{m \in \mathbb{N} : \varepsilon \leqslant \frac{|z|}{2m}\Big\}, \qquad k = \min\Big\{m \in \mathbb{N} : \frac{|z|}{2m} < 2\varepsilon\Big\},$$

并注意到 $k \leqslant h$。由（2.28），对满足 $k < m \leqslant h$ 的整数 m 求和

我们可推得

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\gamma_z(\beta)d\beta &\geqslant \int_{\frac{|z|}{2h}}^{\frac{|z|}{2k}}\gamma_z(\beta)d\beta\\ &\geqslant \int_{\frac{|z|}{2h+1}}^{\frac{|z|}{2k+1}}(\beta-\gamma_z(\beta))d\beta \geqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}(\beta-\gamma_z(\beta))d\beta-|z|\frac{2\varepsilon}{k^2},\end{aligned}$$

从而

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\gamma_z(\beta)d\beta \geqslant \frac{1}{2}|D_\varepsilon|-|z|\frac{\varepsilon}{k^2}=|D_\varepsilon|\Big(\frac{1}{2}-\frac{2|z|}{3k^2\varepsilon}\Big). \tag{2.29}$$

注意到 $\frac{1}{k}<\frac{4\varepsilon}{|z|}$，从而 $\frac{2|z|}{3k^2\varepsilon}\leqslant\frac{32\varepsilon}{3|z|}$。通过选取 $\varepsilon<\frac{3}{32}\eta^2$，我们便有 $\frac{2|z|}{3k^2\varepsilon}\leqslant\eta$对所有满足 $|z|\geqslant\eta$的z 成立，并且估计式 (2.27) 成立。

若 $d>1$，对所有 $i\in\{1,\dots,d\}$ 以及 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，其中 $\beta>0$，我们考虑集合

$$E^i_{\alpha,\beta}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d:(x_i,y_i)\in E_{\alpha,\beta}\},$$

其中 $E_{\alpha,\beta}$ 由 (2.20) 定义。相应地，我们定义

$$A^i_{\alpha,\beta}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d:(x_i,y_i)\in A_{\alpha,\beta}\},$$

其中 $A_{\alpha,\beta}$ 由 (2.19) 定义。与 (2.22) 中一样，我们得到

$$(\Omega\times\Omega)\cap E^i_{\alpha,\beta}=((\Omega\cap A^i_{\alpha,\beta})\times(\Omega\backslash A^i_{\alpha,\beta}))\cup((\Omega\backslash A^i_{\alpha,\beta})\times(\Omega\cap A^i_{\alpha,\beta})).$$

重复情形 $d=1$ 证明中的步骤，我们便得到与 (2.25) 中一样的

$$\int_{D_\varepsilon}1_{E^i_{\alpha,\beta}}(x,y)d\alpha d\beta\geqslant\Big(\frac{1}{2}-\eta\Big)|D_\varepsilon|\quad\text{for all } i\in\{1,\dots,d\},$$

从而得到 $\mu((\Omega\times\Omega)\backslash\Delta^i)\leqslant 2M$，其中 $\Delta^i=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\colon x_i=y_i\}$。由于 $\Delta=\bigcap_{i=1}^d\Delta^i$，且 $\mu((\Omega\times\Omega)\cap\Delta)=0$，我们推得

$$\mu(\Omega\times\Omega)\leqslant 2dM,$$

由此完成了 (b) 的证明。

为了证明 (a)，我们首先注意到，对于 Ω 的任意两个互不相交的开子集 A 和 B，由 (2.6) 以及 μ 的对称性可得

$$\begin{aligned}2\mu(A\times(\Omega\backslash A))+\nu(A)&=\lim_{k\to+\infty}\Big(F(u_k)-\int_\Omega|\nabla u_k(x)|^2\,dx\Big),\\ 2\mu(B\times(\Omega\backslash B))+\nu(B)&=\lim_{k\to+\infty}\Big(F(v_k)-\int_\Omega|\nabla v_k(x)|^2\,dx\Big),\\ 2\mu((A\cup B)\times(\Omega\backslash(A\cup B)))+\nu(A\cup B)&\\ =\lim_{k\to+\infty}\Big(F(u_k+v_k)-\int_\Omega|\nabla u_k(x)+\nabla v_k(x)|^2\,dx\Big),&\end{aligned}$$

其中 u_k, v_k 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 中的序列，满足 $0 \leqslant u_k \leqslant 1_A$ 和 $0 \leqslant v_k \leqslant 1_B$，且$u_k(x) \to 1_A(x)$ 和 $v_k(x) \to 1_B(x)$ 对所有 $x \in \Omega$ 均成立。将上述前两个方程相加并减去第三个方程，我们得到

$$\begin{aligned}\mu(A\times B) &= \frac{1}{2}\Big(\mu(A\times(\Omega\backslash A))+\mu(B\times(\Omega\backslash B))-\mu((A\cup B)\times(\Omega\backslash(A\cup B)))\Big)\\ &= \Phi_F(A,B),\end{aligned}$$

其中

$$\Phi_F(A,B) := \frac{1}{4}\lim_{k\to+\infty}\big(F(u_k)+F(v_k)-F(u_k+v_k)\big).$$

这表 明，若 μ_1 和 μ_2 是对称有界博雷尔测度，且满足 (2.6)，则 n

$$\mu_1(A\times B)=\mu_2(A\times B) \tag{2.30}$$

对于 Ω 中任意两个不相交的开子集 A 和 B，这一性质可先推广到 Ω 中不相交的紧子集，再推广到 Ω 中不相交的博雷尔子集。

为了将这一等式推广到 Ω 的任意博雷尔子集，我们固定 $\eta>0$ 并写作 e

$$A=\bigcup_{i=1}^{m_\eta}A_i, \qquad B=\bigcup_{j=1}^{n_\eta}B_j,$$

其中 A_i 和 B_j 分别是 A 和 B的博雷尔分割，且对所有 i, j，都有 $\mathrm{diam}(A_i) <_{-}^{\eta}$ 和 $\mathrm{diam}(B_j) < \frac{\eta}{2}$。令 $\mathcal{D}_\eta = \{(i,\ j): \ A_i\cap B_j \neq \varnothing\}$，并注意到 $A\times B=\bigcup_{(i,\ j)}(A_i\times B_j)$ 且 $\bigcup_{(i,\ j)\in\mathcal{D}_\eta}(A_i\times B_j)\subset\Delta_\eta$，由 (2.30) 可得

$$\begin{aligned}|\mu_1(A\times B)-\mu_2(A\times B)| &= \Big|\mu_1\Big(\bigcup_{(i,j)\in\mathcal{D}_\eta}(A_i\times B_j)\Big)-\mu_2\Big(\bigcup_{(i,j)\in\mathcal{D}_\eta}(A_i\times B_j)\Big)\Big|\\ &\leqslant \mu_1((\Omega\times\Omega)\cap\Delta_\eta)+\mu_2((\Omega\times\Omega)\cap\Delta_\eta).\end{aligned}$$

因此，如果 μ_1 和 μ_2 也满足 (2.7)，那么令 $\eta\to 0$，我们得到 $\mu_1(A\times B)$ =$\mu_2(A\times B)$ 对所有博雷尔集对都成立，进而有 $\mu_1=\mu_2$。最后，由 (2.6) 可知，对于每个 $u\in H_0^1(\Omega)$，积分 $\int_\Omega |u(x)|^2 d\nu(x)$ 由 F 唯一确定，这就给出了此类 ν 的唯一性，并完成了 (a) 的证明。□

在下述定理中，我们使用经典容量概念，而 $\tilde{u}(x)$ 表示函数 $u\in H_0^1(\Omega)$的精确代表；该代表在零容量集之外定义（见 [5, 第 4.7 节和第 4.8] 节）。利用狄利克雷型 F 的内禀容量及相应的精确代表，也可以证明类似结果（见 [6, 定理 4.5.2]）。

定理 2.5。 设 F： $H_0^1(\Omega) \to [0,$ 且 $+\infty)$ μ 和 ν 是分别定义在 $\Omega \times\Omega$ 和 Ω 上的两个有界正拉东测度，并满足定理 2.2 的 (a)、(b) 和 (c) 。此外，假设 F 在 $H_0^1(\Omega)$ 的弱拓扑下下半连续，且存在 $M > 0$ ，使得 (2.16) 对所有 $u \in C_c^\infty(\Omega)$均成立。那么

(a) 如果 $B \subset \Omega$ 是一个容量为零的博雷尔集，则 $\mu(B \times\Omega) = \nu(B) = 0$; (b) 对于每个 $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$F(u) = \int_{\Omega\times\Omega} |\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)|^2 d\mu(x,y) + \int_\Omega |\widetilde{u}(x)|^2 d\nu(x) + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx; \tag{2.31}$$

(c) 如果此外，对于所有 $u \in H_0^1(\Omega)$ 和 $m \in \mathbb{N}$，都有 $F(\Psi_m(u)) \leqslant F(u)$，其中 $\Psi_m(t) = (m \wedge t) \vee (-m)$，那么对于每个 $u \in H_0^1(\Omega)$，(2.31) 成立。

证明。 注意到，由于 $u \mapsto \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx$的强连续性，

$$u \mapsto \int_{\Omega\times\Omega} |u(x) - u(y)|^2 d\mu(x,y) + \int_\Omega |u(x)|^2 d\nu(x) \ \text{ is lower semicontinuous} \tag{2.32}$$

在 $C_c^\infty(\Omega)$ 上，关于 $H_0^1(\Omega)$的强拓扑。

设 K 是 Ω 的一个容量为零的紧子集。现在我们证明

$$\mu(K \times (\Omega\backslash K)) = 0 \quad \text{and} \quad \nu(K) = 0. \tag{2.33}$$

给定 $\eta > 0$ ，设 U 是一个开集，使得 $K \subset U \subset\Omega$，并且

$$\mu((U\backslash K) \times \Omega) \leqslant \eta \quad \text{and} \quad \nu(U\backslash K) \leqslant \eta, \tag{2.34}$$

并设 $w \in C_c^\infty(\Omega)$ 满足：在整个 Ω 上 $0 \leqslant w \leqslant 1$ ，在 K 的一个邻域内 $w = 1$ ，且在 $\Omega\backslash U$ 上 $w \leqslant \frac{1}{4}$ 。由于 K 的容量为零，存在一个序列 $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$，使其在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛于 w ，并且在整个 Ω 上 $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ ，在 K 上 $u_k = 0$ ，以及在 $\Omega\backslash U$ 上 $u_k = w$ 。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\Omega} |u_k(x) - u_k(y)|^2 d\mu(x,y) + \int_\Omega |u_k(x)|^2 d\nu(x) \\
\leqslant\ & 2\int_{K\times(\Omega\backslash U)} |w(y)|^2 d\mu(x,y) + \int_{(\Omega\backslash U)\times(\Omega\backslash U)} |w(x) - w(y)|^2 d\mu(x,y) \\
& + \mu((U\backslash K) \times (U\backslash K)) + 2\mu((U\backslash K) \times (\Omega\backslash U)) + \int_{\Omega\backslash U} |w(x)|^2 d\nu(x) + \nu(U\backslash K) \\
\leqslant\ & \frac{1}{8}\mu(K \times (\Omega\backslash U)) + \int_{(\Omega\backslash U)\times(\Omega\backslash U)} |w(x) - w(y)|^2 d\mu(x,y) \\
& + \int_{\Omega\backslash U} |w(x)|^2 d\nu(x) + 3\eta,
\end{aligned}$$

而当

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\times\Omega}|w(x)-w(y)|^2d\mu(x,y)+\int_{\Omega}|w(x)|^2d\nu(x)\\ \geqslant\ & 2\int_{K\times(\Omega\backslash U)}|1-w(y)|^2d\mu(x,y)+\int_{(\Omega\backslash U)\times(\Omega\backslash U)}|w(x)-w(y)|^2d\mu(x,y)\\ &+\nu(K)+\int_{\Omega\backslash U}|w(x)|^2d\nu(x).\end{aligned}$$

因此，注意到 $1-w(y)\geqslant\frac{3}{4}$ if $y\in\Omega\backslash U$，由 u_k 收敛到 u 以及 (2.32)，可得

$$\frac{9}{8}\mu(K\times(\Omega\backslash U))+\nu(K)\leqslant\frac{1}{8}\mu(K\times(\Omega\backslash U))+3\eta.$$

考虑到根据 (2.34) 以及 μ 的对称性，我们得到 $\mu(K\times(U\backslash K))\leqslant\eta$

$$\mu(K\times(\Omega\backslash K))+\nu(K)\leqslant 4\eta,$$

由 η的任意性，(2.33) 得证。

现在我们断言

$$\mu(K\times K)=0, \tag{2.35}$$

给定 $\eta>0$，我们可以找到有限个紧集 K_i，使得 $K=\bigcup_i K_i$ 且 $\operatorname{diam}K_i\leqslant\frac{\eta}{2}$。由于

$$K\times K\subset\bigcup_{i,j}(K_i\times K_j)=\bigcup_{(i,j)\in\mathcal{D}}(K_i\times K_j)\cup\bigcup_{(i,j)\notin\mathcal{D}}(K_i\times K_j),$$

其中 $\mathcal{D}=\{(i,j):K_i\cap K_j\neq\varnothing\}$，我们有

$$\mu(K\times K)\leqslant\mu\Big(\bigcup_{(i,j)\in\mathcal{D}}(K_i\times K_j)\Big)+\sum_{(i,j)\notin\mathcal{D}}\mu(K_i\times K_j).$$

由于 $K_j\subset\Omega\backslash K_i$ 若 $(i,j)\notin\mathcal{D}$，根据 (2.33)，应用于 K_i 时，最后一个求和中的各项均为零。另一方面$\bigcup_{(i,j)\in\mathcal{D}}(K_i\times K_j)\subset\Delta_\eta$，其中 Δ_η 在 (2.18) 中定义，因此 $\mu(K\times K)\leqslant\mu((\Omega\times\Omega)\cap\Delta_\eta)$。由于 $\mu((\Omega\times\Omega)\cap\Delta)=0$ 且 μ 有限，令 $\eta\to 0$ 即得 (2.35)。

最后，由 (2.33) 和 (2.35) 可知，对于任意具有零容量的 K 紧集，$\mu(K\times\Omega)=\nu(K)=0$。随后，通过用包含于 B 中的紧集逼近 B，即可得到断言 (a)。

为了证明断言 (b)，按照命题 2.1(e) 的证明，对于所有$u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，我们有一个序列 $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$，其在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛于 u，并且$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 和 u_k 关于由 (2.4) 中定义的范数所诱导的 Hilbert 结构弱收敛于 u。由 Mazur 定理可得到一个新序列 $v_k \in C_c^\infty(\Omega)$，其在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛于 u，并且$\|v_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 和 v_k 在 $H_0^1(\Omega)$ 中以及关于由 (2.4) 中定义的范数所诱导的 Hilbert 结构下均强收敛于 u。特别地，$F(v_k) \to F(u)$，并且在取子序列后，$v_k \to \widetilde{u}$ 几乎处处成立（就容量的意义而言）。结合一致有界性，这意味着

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega\times\Omega} |v_k(x) - v_k(y)|^2 d\mu(x,y) = \int_{\Omega\times\Omega} |\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)|^2 d\mu(x,y)$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega} |v_k(x)|^2 d\nu(x) = \int_{\Omega} |\widetilde{u}(x)|^2 d\nu(x),$$

且断言 (b) 得证。

为了证明 (c)，令 $G\colon\ H_0^1(\Omega) \to [0,+\infty]$ 由 (2.31) 右侧定义，并令 $u \in H_0^1(\Omega)$。令 $u_m = \Phi_m(u)$，并注意到由单调收敛定理可得 $\lim\limits_{m\to+\infty} G(u_m) = G(u)$。由于 $F(u_m) = G(u_m)$，要完成证明，只需注意到 $\lim\limits_{m\to+\infty} F(u_m) = F(u)$，这由关于截断的假设以及 F 的下半连续性得出。

□

注 2.6. 请注意，如果去掉 (c) 中的附加假设，等式 (2.31) 未必在整个 $H_0^1(\Omega)$ 上成立。例如，若 G 由 (2.31) 右端定义，而 F 定义为除单个 $u_0 \in H_0^1(\Omega)\backslash L^\infty(\Omega)$ 之外均与 G 相等，并在该处令 $F(u_0) = 0$，则 F 是下半连续的，F 和 G 在 $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 上相等，但该等式在整个 $H_0^1(\Omega)$ 上并不成立。

命题 2.7. 除定理 2.2 的假设外，假设 a_k 满足以下条件：对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个紧集 $K_\varepsilon \subset\Omega$，使得

$$\int_{(\Omega\times\Omega)\backslash(K_\varepsilon\times K_\varepsilon)} a_k(x,y)\,dxdy \leqslant \varepsilon \text{ for every } k \in \mathbb{N}. \tag{2.36}$$

那么，定理 2.2 中的测度 ν 是零测度。

证明。令 $u \in C_c^\infty(\Omega)$ 满足 $0 \leqslant u \leqslant 1$，且在 K_ε 上 $u = 1$。然后，以 u 作为测试函数代入 Γ-极限，得到

$$\begin{aligned} F(u) &\leqslant \liminf_{k\to+\infty} \int_{(\Omega\times\Omega)\backslash(K_\varepsilon\times K_\varepsilon)} |u(x) - u(y)|^2\,dxdy + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \\ &\leqslant \varepsilon + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx. \end{aligned}$$

$u) = F^n(u) + F^\ell(u) + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx$ 由此可得，对于所有这样的 u，都有 $F^\ell(u) \leqslant \varepsilon$ 由于 $F($.

现在固定 Ω 中的一个紧集 K，并对每个 $\varepsilon > 0$ 取 $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$，使得 $0 \leqslant u_\varepsilon \leqslant 1$，且 $u_\varepsilon = 1$ 在 $K \cup K_\varepsilon$上成立。根据上述估计，我们有

$$\nu(K) \leqslant \int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^2 d\nu(x) = F^\ell(u_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可得，对 Ω 中所有 K 紧集都有 $\nu(K) = 0$，这就证明了该断言。

□

下面的推论结合定理 2.4 和 2.5 以及命题 2.7，改进了定理 2.2 的结论。

推论 2.8。 设 F_k 由(2.2)给出，其中 a_k 满足(2.1)。假设 F_k Γ-关于$H_0^1(\Omega)$中的弱拓扑收敛到 F。那么存在两个正的有限拉东测度 μ 和 ν，分别定义在Ω ×Ω 和Ω上，使得

(a) μ 是对称的，且 $\mu((\Omega \times\Omega)\backslash\Delta) = 0$; (b) $\mu(B \times\Omega) = \nu(B) = 0$
对所有零容量博雷尔集 $B \subset \Omega$均成立; (c) 对每个 $u \in H_0^1(\Omega)$

$$F(u) = \int_{\Omega\times\Omega} |\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)|^2 d\mu(x,y) + \int_\Omega |\widetilde{u}(x)|^2 d\nu(x) + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx; \tag{2.37}$$

此外，若 a_k 满足性质 (2.36)，则 $\nu = 0$。

证明。 该推论可由定理 2.2、2.4 和 2.5 直接得出；注意到，由于命题 2.1(d)，定理 2.5(c) 的假设得以满足。最后一个结论由命题 2.7 得出。

□

注 2.9 （推广到一般二重积分）。 若考虑由下式定义的泛函，推论 2.8 的结论仍然成立:

$$F_k(u) = \int_{\Omega\times\Omega} |\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)|^2 d\mu_k(x,y) + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \tag{2.38}$$

对每个 $u \in H_0^1(\Omega)$，将条件 (2.1) 替换为

$$\mu_k(\Omega \times \Omega) \leqslant M \text{ for every } k \in \mathbb{N}, \tag{2.39}$$

并将（2.36）代入得到

$$\mu_k((\Omega \times \Omega)\backslash(K_\varepsilon \times K_\varepsilon)) \leqslant \varepsilon \text{ for every } k \in \mathbb{N}. \tag{2.40}$$

3 反例

我们固定 $p \in (1, +\infty)$。为简化记号，我们假设 $0 \in \Omega$，并令 B_r 为中心位于 0、半径为 r的球。我们固定一个收敛至 0 的正数序列 ε_k，并通过如下方式定义泛函 F_k：$W^{1,p}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$。

$$F_k(u) = \frac{1}{|B_{\varepsilon_k}|} \int_\Omega \int_{B_{\varepsilon_k}} |u(x) - u(y)|^p \, dy \, dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx \tag{3.1}$$

对于每个 $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$。

定义 3.1。对于所有 $u \in L^p(\Omega)$，我们将 $m_p(u)$ 定义为以下函数的唯一极小点

$$t \mapsto \int_\Omega |u(x) - t|^p \, dx.$$

引理 3.2。映射 m_p：$L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ 是连续的。

证明。设 $u_k \to u$ 属于 $L^p(\Omega)$。则序列 $m_p(u_k)$ 是有界的，因为

$$|m_p(u_k)| \leqslant \|u_k - m_p(u_k)\|_{L^p(\Omega)} + \|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leqslant 2\|u_k\|_{L^p(\Omega)}.$$

不妨在取子序列后假设 $m_p(u_k) \to t_0$。固定 $t \in \mathbb{R}$后，我们可以对不等式取极限

$$\int_\Omega |u_k(x) - m_p(u_k)|^p \, dx \leqslant \int_\Omega |u_k(x) - t|^p \, dx,$$

并得到

$$\int_\Omega |u(x) - t_0|^p \, dx \leqslant \int_\Omega |u(x) - t|^p \, dx,$$

由此得证。 □

定理 3.3。若 $p \in (1, d]$，则相对于弱 $W^{1,p}_0$-收敛，F_k 的 Γ-极限为泛函 F，其定义为

$$F(u) = \int_\Omega |u(x) - m_p(u)|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx \tag{3.2}$$

对每个 $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$。

证明。设 $u_k \rightharpoonup u$ 在 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 中弱收敛。则 $u_k \to u$ 在 $L^p(\Omega)$ 中也强收敛。因此，利用 Jensen 不等式、$m_p(u_k)$ 的极小性，并应用引理 3.2，我们得到

$$\begin{aligned}
&\liminf_{k \to +\infty} \frac{1}{|B_{\varepsilon_k}|} \int_\Omega \int_{B_{\varepsilon_k}} |u_k(x) - u_k(y)|^p \, dy \, dx \\
&\quad \geqslant \liminf_{k \to +\infty} \int_\Omega \left| u_k(x) - \frac{1}{|B_{\varepsilon_k}|} \int_{B_{\varepsilon_k}} u_k(y) \, dy \right|^p dx \\
&\quad \geqslant \liminf_{k \to +\infty} \int_\Omega |u_k(x) - m_p(u_k)|^p dx \geqslant \int_\Omega |u(x) - m_p(u)|^p dx.
\end{aligned}$$

由于 the 项 $\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx$ 是下半连续的，这就证明了下极限不等式。

为了证明上界，我们首先在 $u=0$ 位于 0 的某个邻域内时构造一个恢复序列。在这种情况下，令 v_k 为相对于 Ω 的 B_{ε_k} 的 p-容量型势；也就是说，它是.....的极小化元。

$$\min\Big\{\int_\Omega |\nabla v(x)|^p\,dx : v\in W_0^{1,p}(\Omega), v=1 \text{ on } B_{\varepsilon_k}\Big\}.$$

由于 $p\leqslant d$ 已知 $v_k\to 0$ 在 $W^{1,\,p}_{0}(\Omega)$ 中（例如参见 [5, 第 4.7]节）。因此我们令 $u_k=u+m_p(u)v_k$，并得到

$$\limsup_{k\to+\infty} F_k(u_k)=\limsup_{k\to+\infty}\Big(\int_\Omega |u_k(x)-m_p(u)|^p\,dx+\int_\Omega |\nabla u_k(x)|^p\,dx\Big)=F(u)$$

由于 F 在 W^1中连续，$W^{1,\,p}_{0}(\Omega)$，且在 0 的某个邻域内为 0 的 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数集合在 W^1中稠密，$W^{1,\,p}_{0}(\Omega)$，因此结论成立。 □

注记 3.4 （Γ-极限，取于 $W^{1,\,p}(\Omega)$。如果 Ω 是具有 Lipschitz边界 的有界开集，那么对于 $u\in W^{1,\,p}(\Omega)$ Γ，由 (3.1) 定义的泛函关于 $L^p(\Omega)$收敛收敛到由 (3.2) 定义的泛函，其中 $u\in W^{1,\,p}(\Omega)$。事实上，在证明中，我们只利用边界条件推出这些泛函的等强制性，而 Ω 的正则性也能保证这一性质 $\partial\Omega$。

现在我们要证明， F 不能表示为以下形式

$$F(u)=\int_{\Omega\times\Omega} f(u(x),u(y))d\mu(x,y)+\int_\Omega g(u(x))d\nu(x)+\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx$$

对于 $u\in C_c^\infty(\Omega)$，其中 $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 和 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，而 μ 和 ν分别是定义在 Ω ×Ω 和 Ω 上的两个正有界拉东测度。为此，我们分别考察关于 μ 和 ν 的两个积分，以及第三个积分。

命题 3.5。设 $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 和 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 μ 和 ν是定义在 Ω ×Ω 和 Ω上的两个正有界拉东测度。假设

$$\int_\Omega |u(x)-m_p(u)|^p\,dx=\int_{\Omega\times\Omega} f(u(x),u(y))d\mu(x,y)+\int_\Omega g(u(x))d\nu(x) \tag{3.3}$$

对于 $u\in C_c^\infty(\Omega)$ 成立，则对所有 A ***open of*** Ω，同一等式也对 $u=1_A$ 成立；也就是说，

$$\int_\Omega |1_A(x)-m_p(1_A)|^p\,dx=\int_{\Omega\times\Omega} f(1_A(x),1_A(y))d\mu(x,y)+\int_\Omega g(1_A(x))d\nu(x). \tag{3.4}$$

证明。 首先注意，在 (3.3) 中取 $u = 0$ ，可得

$$0 = f(0,0)\,\mu(\Omega \times \Omega) + g(0)\,\nu(\Omega).$$

因此，不妨假设

$$f(0,0) = g(0) = 0, \tag{3.5}$$

只需将 $f(s,t)$ 替换为 $f(s,t) - f(0,0)$ ，并将 $g(s)$ 替换为 $g(s) - g(0)$。

现在设 A 为 Ω 中相对紧的开集，并设 u_k 是 $C_c^\infty(\Omega)$中的一个序列，逐点收敛于 1_A ，且满足 $0 \leqslant u_k(x) \leqslant 1_A(x)$。由 u_k在 $L^p(\Omega)$ 中收敛到 1_A ，以及引理 3.2，可知 (3.3) 左端的项收敛到 (3.4) 中对应的项。对于 (3.3) 的右端，只需应用控制收敛定理。

□

注释 3.6 （特征函数的 $m_p(u)$ 计算）。 对于任意可测集A ，常数 $m_p(1_A)$ 可通过最小化以下表达式得到

$$\int_\Omega |1_A(x) - t|^p\,dx = |A||1-t|^p + (|\Omega| - |A|)|t|^p.$$

最小的 $t \in [0,1]$ 由 $(|\Omega| - |A|)t^{p-1} = |A|(1-t)^{p-1}$确定；也就是说，我们有

$$\frac{1-t}{t} = \Big(\frac{|\Omega| - |A|}{|A|}\Big)^{1/(p-1)} \quad \text{and} \quad m_p(1_A) = \frac{|A|^{1/(p-1)}}{(|\Omega| - |A|)^{1/(p-1)} + |A|^{1/(p-1)}}.$$

注释 3.7. 由前面的注释可知,

$$\int_\Omega |1_A(x) - m_p(1_A)|^p\,dx = \Phi_p(|A|), \tag{3.6}$$

其中

$$\Phi_p(s) := \frac{s(|\Omega| - s)^{p/(p-1)} + (|\Omega| - s)s^{p/(p-1)}}{((|\Omega| - s)^{1/(p-1)} + s^{1/(p-1)})^p} = \frac{s(|\Omega| - s)}{((|\Omega| - s)^{1/(p-1)} + s^{1/(p-1)})^{p-1}}. \tag{3.7}$$

以下命题联系了式 (3.7) 中定义的函数 Φ_p 和测度 μ。

命题 3.8。 在命题 3.5 的假设下，对于 Ω 中所有满足 $A \cap B = \varnothing$ 的 A, B 开集，我们有

$$\Phi_p(|A|) + \Phi_p(|B|) - \Phi_p(|A| + |B|) = C_f(\mu(A \times B) + \mu(B \times A)), \tag{3.8}$$

其中 $C_f = f(1,0) + f(0,1) - f(1,1)$。

证明。 由 (3.4) 和 (3.6) 可得

$$\Phi_p(|A|) = f(1,1)\mu(A\times A) + f(1,0)\mu(A\times(\Omega\backslash A)) \\ +f(0,1)\mu((\Omega\backslash A)\times A) + g(1)\nu(A), \tag{3.9}$$

以及关于 $\Phi_p(|B|)$和 $\Phi_p(|A|+|B|) = \Phi_p(|A\cup B|)$的类似公式，由此可得结论。

□

命题 3.9。 如果存在 Ω 上的有界拉东测度 $\mu\,\Omega\,\times\Omega$ 使得成立，那么 $p = 2$。 (3.8)

证明。 取 Ω 的 A_1、 A_2和 B 互不相交的开子集，并令 $s_1 = |A_1|$、 $s_2 = |A_2|$和$t = |B|$。由（3.8）可得

$$\Phi_p(s_1+s_2)+\Phi_p(t)-\Phi_p(s_1+s_2+t) = C_f(\mu((A_1\cup A_2)\times B)+\mu(B\times(A_1\cup A_2)))$$

$$= C_f(\mu(A_1\times B)+\mu(B\times A_1)+\mu(A_2\times B)+\mu(B\times A_2))$$

$$= \Phi_p(s_1)+\Phi_p(t)-\Phi_p(s_1+t)+\Phi_p(s_2)+\Phi_p(t)-\Phi_p(s_2+t),$$

或者等价地，对于每个固定的 $t\in(0,\ |\Omega|)$ 函数

$$g(s) = \Phi_p(s)+\Phi_p(t)-\Phi_p(s+t)$$

在 $(0,\ |\Omega|-t)$上是可加的，这意味着存在一个常数 c_t使得 $g(s) = c_t s$。特别地，考虑到 Φ_p的可微性，我们有

$$\Phi_p''(s)-\Phi_p''(s+t) = g''(s) = 0 \text{ for all } s,t\in(0,|\Omega|) \text{ such that } s+t<|\Omega|.$$

这意味着 Φ_p'' 是常数，因此它等于一个二次多项式 P。

现在方便写作 $\Phi_p(s) = s(|\Omega|-s)(h_p(s))^{1-p}$，其中

$$h_p(s) = s^{1/(p-1)}+(|\Omega|-s)^{1/(p-1)}.$$

由于 $h_p(s)\neq 0$，我们有 $P(s) = 0$ 当且仅当 $s = 0$ 或 $s = |\Omega|$，因此 $P(s) = \kappa s(|\Omega|-s)$ 对某个常数 κ 成立。这意味着对每个 $s\in(0,\ |\Omega|)$ 都有 $h_p(s) = \kappa$，而根据连续性，对$s = 0$ 和 $s = |\Omega|$ 也成立。特别地，这给出

$$|\Omega|^{1/(p-1)} = h_p(0) = h_p\Big(\frac{|\Omega|}{2}\Big) = 2\Big(\frac{|\Omega|}{2}\Big)^{1/(p-1)},$$

这仅在 $p = 2$ 时成立。 □

结合前面的结果，我们现在可以证明，当 $1<p\leqslant d$ 和 $p\neq 2$ 时， F 不能表示为积分形式。

推论 3.10. 设 $1 < p \leqslant d$，并设 F 是序列 F_k 在弱 $W^{1,p}_0$ - 收敛意义下的 Γ-极限，其中该序列由 (3.1) 定义。假设存在两个实值连续函数 f 和 g，分别定义在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}$ 上，以及两个正的有界拉东测度，分别定义在 $\Omega \times \Omega$ 和 Ω 上，使得

$$F(u) = \int_{\Omega\times\Omega} f(u(x), u(y))d\mu(x, y) + \int_{\Omega} g(u(x))d\nu(x) + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, dx \tag{3.10}$$

对于每个 $u \in C_c^\infty(\Omega)$。于是 $p = 2$ 在此情形下，我们有 $\mu = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{2d}$ 和 $\nu = 0$，而 $f(s, t) = |s - t|^2$ 对于每个 s、$t \in \mathbb{R}$。

证明。 根据定理 3.3，泛函 F 由（3.2）给出。由（3.10）可知，命题 3.5 的假设得到满足，因此根据命题 3.8，我们可以应用命题 3.9，从而得到 $p = 2$。 f、 μ和 ν 的显式形式由（1.5）和（3.2）推出。

□

ACKNOWLEDGEMENTS. 本文基于国家研究项目（PRIN 2017BTM7SN）“具有奇异性和界面的平稳与演化问题的变分方法”资助的研究工作，该项目由意大利大学与研究部资助。作者是意大利国家高等数学研究所（INdAM）下属意大利数学分析、概率及其应用国家小组（GNAMPA）的成员。

参考文献

[1] A. Braides. 二重积分松弛的积分表示的一个简化反例。arXiv 文章 https://arxiv.org/abs/2212.11200[2] A. Braides 和 G. Dal Maso. 关于基础测度收敛的某些非局部泛函的连续性。《纯粹与应用数学杂志》170 (2023), 136–149 。[3] A. Braides 和 G. Dal Maso. 一类含有相互作用的局部项与非局部项的积分泛函的紧性。《变分法与偏微分方程》，即将出版。[4] G. Dal Maso.《 Γ-收敛导论. Birkh¨auser, 巴塞尔, 1994.[5] L.C. Evans 和 R.F. Gariepy.《测度论与函数的精细性质》. CRC出版社, 博卡拉顿, 1992.[6] M. Fukushima.《狄利克雷型与马尔可夫过程》。 North-Holland, 阿姆斯特丹, 1980.[7] C. Kreisbeck 和 E. Zappale.《松弛过程中二重积分特征的丧失》。《SIAM 数学分析杂志》53 (2021), 351–385.

[8] C. Mora-Corral 和 A. Tellini。带有双阱势的标量非局部变分问题的松弛。《变分学与偏微分方程》59（2020），67。[9]U. Mosco。复合介质与渐近狄利克雷型。《函数分析杂志》123（1994），368–421。