arXiv:2305.04686v1 [math.NT] 8 May 2023

双无限矩阵极端差异度与星差异的新界

Jasmin Fiedler、Michael Gnewuch 和 Christian Weiß

摘要 根据 Aistleitner 和 Weimar 的研究，存在二维（双）无限矩阵，其前 N 行和 s 列的星差异度 D_N^{*s}，将其视为 $[0,1]^s$ 中的 N 个点时，满足如下形式的不等式

$$D_N^{*s} \leq \sqrt{\alpha}\sqrt{A + B\frac{\ln(\log_2(N))}{s}}\sqrt{\frac{s}{N}}$$

其中 $\alpha = \zeta^{-1}(2) \approx 1。73$，$A = 1165$ 且 $B = 178$。这些矩阵是通过使用独立同分布序列构造的，参数 s 和 N 分别表示维数和样本量。本文从两个方面改进了他们的结果：首先，我们改变方程的形式，使常数 A 被一个依赖于维数 s 的值 A_s 所取代，从而对于 $s > 1$，有 $A_s < A$。其次，我们将结果推广到（极端）差异度的情形。本文还设有一节，展示参数 A_s 对 s 的依赖关系的数值结果。

关键词：（极端）差异、星差异度、随机矩阵、括号数

Jasmin Fiedler 自然科学研究所，鲁尔西部应用科学大学，Duisburger Str. 100，45479 Mülheim an der Ruhr，电子邮件：manuel.fiedler@hs-ruhrwest.de Michael Gnewuch 数学研究所，奥斯纳布吕克大学，Albrechtstr. 28a，49076 Osnabrück，电子邮件：michael. gnewuch@uni-osnabrueck.de Christian Weiß 自然科学研究所，鲁尔西部应用科学大学，Duisburger Str. 100，45479 Mülheim an der Ruhr，电子邮件：christian.weiss@hs-ruhrwest.de

1 引言

高维积分任务出现在各种实际应用中，其中之一便是计算金融（参见例如 [Gla03], [DHB20], [Pas94], [WN19]）。由于通常无法给出积分的解析解，因此有必要改用数值积分。此时，近似的优劣 通常主要由星差异度决定。

定义 1 对于两个点 $x, y \in [0,1]^s$，如果不等式逐分量成立，我们记作 $x \leq y$，并定义 $[0,x) := \{y \in [0,1)^s | 0 \leq y < x\}$ 和$[x,y) := \{z \in [0,1)^s | x \leq z < y\}$。设 $(x_1, \ldots, x_n)$ 是 $[0,1)^s$ 中的一个点序列。于是，我们将它们的（极）差异定义为

$$D_N^s(x_1, \ldots, x_N) = \sup_{a,b \in [0,1]^s} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{[a,b)}(x_k) - \lambda([a,b)) \right|, \tag{1}$$

其中，$\mathbb{1}_{[a,b)}$ 是区间 $[a,b)$ 的示性函数，λ 是 s 维勒贝格测度。同样，我们将星差异度定义为

$$D_N^{*s}(x_1, \ldots, x_N) = \sup_{y \in [0,1]^s} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{[0,y)}(x_k) - \lambda([0,y)) \right|. \tag{2}$$

极差异也有其他名称，例如非锚定偏差，参见 [DGW14, 引言]。

近似误差与星差异度之间的精确关系由经典的 Koksma-Hlawka不等式给出，例如参见 [Nie92，定理 2.11 和 2.12]。

定理1（Koksma-Hlawka不等式）设 f 是定义在 $[0,1]^s$ 上的函数，在*Hardy*和*Krause*意义下具有有界变差 $V(f)$。那么，对于 $[0,1)^s$ 中的任意点序列$(x_1, \ldots, x_n)$，有不等式

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_{[0,1]^s} f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq V(f) \cdot D_n^{*s}(x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

成立，且该不等式是最佳的。

经典上，低偏差点集用于数值积分。这些集合满足偏差理论中一个猜想的最优界（这一问题被称为偏差理论中的重大未解问题）。

$$D_N^{*s}(x_1, \ldots, x_N) \leq c_s \frac{\log(N)^{s-1}}{N},$$

其中，c_s 是一个仅依赖于维数 s 的常数。事实上，该猜想在维数为 1 时显然成立，并且已由 [Sch72] 证明其在维数为 2 时成立。然而，这些低差异度集合（更准确地说，是它们的星差异度上界）受到所谓的维数灾难的影响，即 the

星差异度对维数呈指数依赖。因此，当样本量相较于维数较小时，这些结果几乎没有实际用途。为此，论文 [HNWW01], 提出了一种替代方法。该文从理论上证明，最小可达星差异度对点数和维数的依赖关系明确，且满足以下条件

$$D_N^{*s}(x_1,\dots,x_N) \le C\sqrt{\frac{s}{N}}$$

但未给出 C的明确值。 $C \approx 9$的首个明确值.65由 [Ais11], 推导得出，而目前已知的最佳可能值是 $C \approx 2.4968$，由 [GPW21]给出。在 [Dic07,DGKP08] 中，针对双无限矩阵推导出了相应的界。目前已知的最佳界由 [AW13]给出。

注 *1* 在本文中， $\zeta\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ 表示实数上的黎曼ζ函数，该函数严格递减，因此其反函数 ζ^{-1} 存在。

定理 2（Aistleitner、Weimar， [AW13],定理 1）令 $\alpha > \zeta^{-1}(2) \approx 1.73$ 为任意固定值。则以严格大于 $1-(\zeta(\alpha)-1)^2 \ge 0$ 的概率，双无限矩阵 $(X_{n,\,s})_{n,\,s\in\mathbb{N}}$ 中所有 $X_{n,\,s} \in [0,1)$ 均相互独立且服从均匀分布，并且对所有 $S \in \mathbb{N}$ 以及每个 $N \ge 2$，均有以下结论。

$$D_N^{*S}(\mathcal{P}_{N,S}) \le \sqrt{\alpha}\sqrt{A + B\frac{\ln(\log_2(N))}{S}}\sqrt{\frac{S}{N}}, \tag{4}$$

其中 $A = 1165$、 $B = 178$ 和

$$\mathcal{P}_{N,S} = \left(X_{n,s}\right)_{n,s=1}^{N,S} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,S} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N,1} & X_{N,2} & \cdots & X_{N,S} \end{pmatrix}.$$

[AW13] 中的证明依赖于使用所谓的独立随机变量的最大伯恩斯坦不等式，这也将是本文的主要工具。

定理 3（Einmahl、Mason， [EM96], 引理2.2）设 $X_1, \dots, X_n$ 是相互独立的随机变量，满足 $\mathbb{E}(X_k)=0$， $|X_k| \le M < \infty$ 几乎处处成立，且对所有 $1 \le k \le n$, $\mathrm{Var}(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$。那么对每个 $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right| > t\right) \le 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 + \frac{2}{3}Mt}\right). \tag{5}$$

通过将最大伯恩斯坦不等式与近期在[GPW21], 中证明的结果相结合，我们能够改进定理 2 表述中的数值常数。

定理 4 设 $(X_{n,\,s})_{n,\,s\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,1$ 中的独立均匀分布随机变量序列。此外，取 $\alpha > 1$ 和 $\beta > 1$，使得

$(\zeta(\alpha) - 1)(\zeta(\beta) - 1) < 1$。则有

$$\mathbb{P}\left(D_N^{*s}(\mathcal{P}_{N,s}) \leq \sqrt{\alpha A_s + \beta B \frac{\ln(\log_2(N))}{s}} \sqrt{\frac{s}{N}} \text{ for all } s, N \in \mathbb{N}\right) > 1 - (\zeta(\alpha) - 1)(\zeta(\beta) - 1)$$

其中， $B = 178$和 $A_2 \leq 942$取决于 A_s，而 s 会随着 s 的增加而减小。

请注意，对于维数 $s = 1$，该结果在实际应用中的意义并不大，因为在这种情况下，低差异序列（例如参见 [Nie92] 中的定义）比随机序列能产生更好的结果，因此无论如何都会优先选用低差异序列。与定理 2 相比，常数 A_s 被选为依赖于维数 s，使得对于 $s > 1$，我们有 $A_s < A$。因此，在所有具有实际意义的情形下，与 [Ais13]相比，我们的结果都有所改进。关于常数 A_s 的详细数值结果将在第 3 节中讨论。

此外，更重要的是，这里所采用的方法还涵盖了（极端）差异的情形。众所周知，

$$D_N^s(x_1, \ldots, x_N) \leq 2^s D_N^{*s}(x_1, \ldots, x_N),$$

例如参见 [Mat99, 1.4 Observation], ，但这种近似在确定随维数良好变化的差异界时并无用处。因此，在定理 5 的证明中，我们将采用一种不同的方法。

定理 5 设 $\left(X_{n,s}\right)_{n,s\in\mathbb{N}}$ 是 $[0, 1)$ 中一列独立、均匀分布的随机变量。此外，取 $\alpha > 1$ 和 $\beta > 1$，满足$(\zeta(\alpha) - 1)(\zeta(\beta) - 1) < 1$。那么我们有

$$\mathbb{P}\left(D_N^{s}(\mathcal{P}_{N,s}) \leq \sqrt{\alpha A_s + \beta B \frac{\ln(\log_2(N))}{s}} \sqrt{\frac{s}{N}} \text{ for all } s, N \in \mathbb{N}\right) > 1 - (\zeta(\alpha) - 1)(\zeta(\beta) - 1)$$

其中， $B = 178$和 $A_s \leq 2548$ 取决于 s，并且随着 s 的增加而减小。

本文的组织结构如下：在第 2 节中，我们将应用定理 3，以推导双无限矩阵的差异和星差异度的界。随后，在第 3 节中，我们将计算差异界中隐含常数的数值。

致谢

作者谨此感谢在林茨举办的 2022 年 MCQMC 研讨会的组织者，第一作者曾在会上介绍本文初步版本的相关报告。此外，我们还要感谢 Bence Borda 提出的问题，

该问题促使我们将结果从星差异度推广到（极端）差异。此外，我们也要感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

2 结果的证明

本节将应用定理3中的最大伯恩斯坦不等式，为元素属于 $[0,1)$ 且其元素由均匀分布的独立随机变量生成的双无限矩阵的差异度推导界。为此，我们将 [AW13 定理 1] 的结构调整为适用于我们的情形。首先，我们引入一些符号，以便连贯地阐述主题。对于 $k \geq -1$，令

$$b_k = \begin{cases} 3 & \text{if } k = -1, 0 \\ 2^{-k+3}(1 - 2^{-k}) & \text{if } k > 0 \end{cases}.$$

对于随机变量序列 $\left(X_{n,\ s}\right)_{n,\ s\in\mathbb{N}}$，我们定义

$$X_s^{(N)} = (X_{N,1}, \ldots, X_{N,s})$$

and

$$\mathcal{P}_{N,s} = \begin{pmatrix} X_s^{(1)} \\ X_s^{(2)} \\ \vdots \\ X_s^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,s} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N,1} & X_{N,2} & \cdots & X_{N,s} \end{pmatrix}.$$

证明还需要另一项技术工具：接下来我们将介绍 δ-覆盖和 δ-括号覆盖。

定义 2 设 $\delta > 0$ 且 $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{P}([0,1]^s)$。$\mathrm{A}$ 的 δ-覆盖是一个集合 $\Gamma \subseteq \mathrm{A}$，使得对每个 $A \in \mathrm{A}$，都存在 $U,\ V \in \Gamma \cup \{\emptyset\}$ 满足 $U \subseteq A \subseteq V$ 且

$$\lambda(V \setminus U) \leq \delta.$$

A 的 δ-括号覆盖是一个集合 $\Delta \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{A}$，使得对于每个 $(A, B) \in \Delta$，满足不等式

$$\lambda(B \setminus A) \leq \delta$$

成立，并且对于每个 $A \in \mathrm{A}$，都存在 $(U, V) \in \Delta$，其中 $U \subseteq A \subseteq V$。此外，我们将 $N(\delta, \mathrm{A})$ 定义为 A 的 δ-覆盖的最小大小，并将 $N_{[\ ]}(\delta, \mathrm{A})$ 定义为 A 的 δ-括号覆盖的最小大小。

这两个概念密切相关。事实上，很容易证明，对于任意 $\delta > 0$，我们都有

$$N(\delta, \mathcal{A}) \leq 2N_{[\ ]}(\delta, \mathcal{A}) \leq N(\delta, \mathcal{A})(1 + N(\delta, \mathcal{A})).$$

在本文中，我们将主要使用两类集合，即

$$C^s = \{[0,x)|x \in [0,1]^s\} \qquad \mathcal{R}^s = \{[x,y)|x,y \in [0,1]^s\}$$

[GPW21],中的以下近期不等式改进了 [Gne08], 中的早期结果，为我们提供了 δ-括号覆盖的最小规模估计，并由此推广得到 δ-覆盖的估计。

定理 6 *[GPW21，定理 2.5。]* 设 $C_s :=$ 最大 $\left\{1, 1_{\text{。}} 1^{s-101}\right\}$。那么， $s \in \mathbb{N}$集合 C^s 的 δ-括号覆盖的最小规模具有如下上界

$$N_{[\,]}(\delta, C^s) \leq C_s \frac{s^s}{s!}(\delta^{-1}+1)^s. \tag{6}$$

此外，对于 R^s 中的集合，也有相应的界。

定理 7 *[Gne08，引理 1.17 和 1.18]*

$$N(\delta, \mathcal{R}^s) \leq N\left(\frac{\delta}{2}, C^s\right)^2 \tag{7}$$

$$N_{[\,]}(\delta, \mathcal{R}^s) \leq N_{[\,]}\left(\frac{\delta}{2}, C^s\right)^2 \tag{8}$$

最后，我们定义

$$\mathcal{D}^s := \{A \setminus B | A, B \in \mathcal{R}^s\}.$$

这使我们能够证明定理 5。我们决定在论文中给出（极端）差异的完整证明，因为据我们所知，现有文献尚未讨论这一情形。对于星差异度的情形，我们将尽量简要地阐述，以避免不必要的重复。

证明（定理 **5**）令 C_s 如定理 6 中所述。首先，我们定义以下序列

$$a_{k,s} = b_k \cdot \left(\frac{\ln\left(\frac{C_s^2}{\pi} 2^{k+2}\right)}{s} + 2\ln\left(2e(2^{k+2}+1)\right) \right) \tag{9}$$

对于 $k \geq 0$ 和 $a_{-1,\ s} = a_{0,\ s}$。据此，我们定义

$$A_s = 2\left(\sum_{k=-1}^{\infty} \sqrt{a_{k,s}}\right)^2, B = 2\left(\sum_{k=-1}^{\infty} \sqrt{b_k}\right)^2 < 178.$$

现在我们开始正式证明。由 (6) 和定理 7 可知，对于每个 $\varepsilon > 0$，都有

$$N_{[\,]}(\varepsilon, \mathcal{R}^s) \leq \left(C_s \frac{s^s}{s!}\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^s\right)^2,$$

这意味着对于每个 $k \geq -1$，当 $\varepsilon = 2^{-(k+1)}$ 时，我们有

$$N_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{R}^s) \le \left(\frac{s^s}{s!}C_s(2^{k+2}+1)^s\right)^2$$
$$\le \frac{\exp(2s)}{2\pi s}C_s^2\left(2^{k+2}+1\right)^{2s}$$
$$\le \frac{1}{2}\exp\left(\ln\left(\frac{C_s^2}{\pi}\right)+2\alpha s\ln\left(e(2^{k+2}+1)\right)\right) \tag{10}$$

这里用到了斯特林公式。此外，

$$N(\varepsilon,\mathcal{R}^s) \le 2N_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{R}^s) \le \frac{1}{2}\exp\left(\ln\left(2\frac{C_s^2}{\pi}\right)+2\alpha s\ln\left(e(2^{k+2}+1)\right)\right).$$

现在我们来定义

$$\Omega_{M,s} = \left\{\max_{2^M\le N<2^{M+1}} N\cdot D_N^s(\mathcal{P}_{N,s}) > \sqrt{\alpha A_s+\beta B\frac{\ln(M)}{s}}\sqrt{s2^M}\right\}.$$

此外，我们令

$$y_{k,s} = \alpha a_{k,s}+\beta b_k\frac{\ln(M)}{s} \text{ and } t_{k,s} = \sqrt{y_{k,s}}\sqrt{s2^M}$$

并选择 $L\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{y_{-1,s}}\sqrt{\frac{s}{2^M}}\right) < 2^{-L} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{y_{-1,s}}\sqrt{\frac{s}{2^M}}. \tag{11}$$

证明将按以下方式展开：我们的目标是证明以下结论。

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{s=1}^{\infty}\Omega_{M,s}\right) < 1.$$

首先，在步骤 1 中，我们将使用二进制链来创建一些 $\mathrm{A}_k\subseteq\mathrm{D}^s$ 以及一些事件 $E_k(I)$、$I\in\mathrm{A}_k$，其中

$$\Omega_{M,s}\subseteq\bigcup_{k=0}^{L}\bigcup_{I\in\mathcal{A}_k}E_k(I).$$

然后，在步骤 2 中，我们将使用最大伯恩斯坦不等式，以便求出 $\mathbb{P}(E_k(I))$ 的估计值。

之后，在第 3 步中，我们将发现 $a_{k,s}$ 和 b_k 的定义正是为获得.....而量身定制的。

$$2^{k+1}(1+s)^{\alpha}M^{\beta}|\mathcal{A}_k|\mathbb{P}\left(E_k(I)\right)\le 1,$$

这意味着

$$\mathbb{P}\left(\Omega_{M,s}\right)\le\frac{1}{(1+s)^{\alpha}M^{\beta}},$$

由此，我们将在第 4 步最终推导出我们的结果。

步骤 1： 我们将使用二进制链。对于 $1 \leq k < L$，令 Γ_k 为 R^s 的一个 2^{-k}-覆盖。此外，令 Δ_L 为 R^s 的一个 2^{-L}-括号覆盖，并定义

$$\Gamma_L = \{A \in \mathcal{R}^s | \exists B \in \mathcal{R}^s \ (A, B) \in \Delta_L\}$$

$$\Gamma_{L+1} = \{B \in \mathcal{R}^s | \exists A \in \mathcal{R}^s \ (A, B) \in \Delta_L\}.$$

对于每个 $A \in \mathrm{R}^s$，我们选择一对 $(P_L(A), \ P_{L+1}(A)) \in \Gamma_L \times \Gamma_{L+1}$，使得 $\lambda(P_{L+1}(A) \setminus P_L(A)) \leq 2^{-L}$，且 $P_L(A) \subseteq A \subseteq P_{L+1}(A)$。归纳地，对于每个 $1 \leq k < L$，我们选择某个 $P_k(A) \in \Gamma_k \cup \{\emptyset\}$，使得 $P_k(A) \subseteq P_{k+1}(A)$，且 $\lambda(P_{k+1}(A) \setminus P_k(A)) \leq 2^{-k}$。最后，我们定义 $P_0(A) = \emptyset$。

对于每个 $A \in \mathrm{R}^s$，我们记 $I_k(A) = P_{k+1}(A) \setminus P_k(A)$，这意味着我们有 $\lambda(I_k(A)) \leq 2^{-k}$ 以及

$$\bigcup_{k=0}^{L-1} I_k(A) \subseteq A \subseteq \bigcup_{k=0}^{L} I_k(A). \tag{12}$$

对于每个 $1 \leq k \leq L$，令 $\mathrm{A}_k = \{I_k(A) | A \in \mathrm{R}^s\}$。由 (10) 可假设

$$|\mathcal{A}_k| \leq |\Gamma_{k+1}| \leq \frac{1}{2} \exp\left(\ln\left(\frac{C_s^2}{\pi}\right) + 2\alpha s \ln\left(e(2^{k+2}+1)\right)\right) \tag{13}$$

对所有 $1 \leq k \leq L$ 均成立。接下来我们定义这些事件

$$E_k(I) = \left\{ \max_{2^M \leq N < 2^{M+1}} \left| \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I \left(X_s^{(n)}\right) - N\lambda(I) \right| > t_{k,s} \right\},$$

其中 $I \in \mathrm{A}_k$。$E_k = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_k} E_k(I)$ 且 $E = \bigcup_{k=0}^{L} E_k$。隐含地，集合 E 仍依赖于 M和 s。我们首先证明 $\Omega_{M,s} \subseteq E$。我们知道，对于每个 $\omega \in E^C = \bigcap_{k=0}^{L} \bigcap_{I \in \mathcal{A}_k} E_k(I)^C$，都有

$$\max_{2^M \leq N < 2^{M+1}} \left| \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I \left(X_s^{(n)}(\omega)\right) - N\lambda(I) \right| \leq t_{k,s} \ \text{ for all } 0 \leq k \leq L, I \in \mathcal{A}_k.$$

给定某个 $N \in \left[2^M, 2^{M+1}\right),$，这意味着根据 (12) 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_A(X_s^{(n)}(\omega)) &\leq \sum_{k=0}^{L} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{P_{k+1}(A) \setminus P_k(A)}(X_s^{(n)}(\omega)) \\
&\leq \sum_{k=0}^{L} \left(N\lambda(P_{k+1}(A) \setminus P_k(A)) + t_{k,s}\right) \\
&= N\lambda(A) + N\lambda(P_{L+1}(A) \setminus A) + \sum_{k=0}^{L} t_{k,s}.
\end{aligned}$$

对每个 $A \in \mathrm{R}^s$ 都成立。由于 $P_L(A) \subseteq A \subseteq P_{L+1}(A)$，我们得到

$$\lambda(P_{L+1}(A) \setminus A) \leq \lambda(P_{L+1}(A) \setminus P_L(A)) \leq 2^{-L} \leq \frac{1}{2}\sqrt{y_{-1,s}}\sqrt{\frac{s}{2^M}}.$$

现在，由于 $N < 2^{M+1}$，我们有 $N\lambda(P_{L+1}(A) \setminus A) \leq \sqrt{y_{-1,\ s}}\ \sqrt{\frac{s}{2^M}}$ 因此

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_A(X_s^{(n)}(\omega)) &\leq N\lambda(A) + \sqrt{s2^M} \sum_{k=-1}^{L} t_{k,s} \\
&\leq N\lambda(A) + \sum_{k=-1}^{L} \left(\sqrt{\alpha a_{k,s}} + \sqrt{\beta b_k}\right) \\
&\leq N\lambda(A) + \sqrt{\left(\alpha \sum_{k=-1}^{L} a_{k,s}\right)^2} + \sqrt{\beta \left(\sum_{k=-1}^{L} b_k\right)^2} \\
&\leq N\lambda(A) + \sqrt{\alpha A + \beta B \frac{\ln(M)}{s}}\sqrt{s2^M}.
\end{aligned}$$

类似的论证表明

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_A(X_s^{(n)}(\omega)) &\geq \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{P_{k+1}(A) \setminus P_k(A)}(X_s^{(n)}(\omega)) \\
&\geq N\lambda(A) - N\lambda(P_{L+1}(A) \setminus A) - \sum_{k=0}^{L-1} t_{k,s}. \\
&\geq N\lambda(A) - \sqrt{\alpha A_s + \beta B \frac{\ln(M)}{s}}\sqrt{s2^M}.
\end{aligned}$$

综合起来，这意味着

$$N\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I(X_s^{(n)}(\omega)) - \lambda(\bar{I})\right| \leq \sqrt{\alpha A_s + \beta B \frac{\ln(M)}{s}}\sqrt{s2^M}.$$

由于 A 是任意的，我们得到

$$N \cdot D_N^s(X_S^{(n)}(\omega)) \leq \sqrt{\alpha A_s + \beta B \frac{\ln(M)}{s}}\sqrt{s2^M},$$

并且由于这对每个 $\omega \in E^C$ 都成立，因此有 $\Omega_{M,\ s} \subseteq E$ 成立。**步骤 2：** 接下来，我们将估计任意 $I \in \mathrm{A}_k$ 对应的 $\mathbb{P}(E_k(I))$。定义$Z_n = \mathbb{1}_I(X_{(n)}) - \lambda(I)$。于是有 $\mathbb{E}(Z_n) = 0, |Z_n| \leq \max\{\lambda(I),\ 1 - \lambda(I)\} \leq 1$，并且 $\sigma^2 = \mathbb{E}\left(Z_n^2\right) = \lambda(I)(1 - \lambda(I))$。使用最大伯恩斯坦不等式 (5)，取$t = t_{k,\ s}$，我们得到

$$\mathbb{P}\left(E_k(I)\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t_{k,s}^2/2^M}{4\lambda(I)(1-\lambda(I)) + \frac{2}{3}t_{k,s}/2^M}\right).$$

通过对 (9) 进行简单计算可知，$y_{k,\,s}$ 关于 k 是递减的。因此，应用 (11) 可得

$$\frac{t_{k,s}}{2^M} = \frac{\sqrt{y_{k,s}}\sqrt{s2^M}}{2^M} \leq \sqrt{y_{0,s}}\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2^M}} < \sqrt{2}\,2^{-L+2}$$

从而

$$\frac{2}{3}\frac{t_{k,s}}{2^M} < \frac{2}{3}\sqrt{2}2^{-L+2} \leq \begin{cases} 2^{-k+1} & \text{for } k = 0,\ldots,L-1 \\ 2^{-L+2} & \text{for } k = L \end{cases}.$$

此外

$$\frac{t_{k,s}^2}{2^M} = \frac{\left(\sqrt{y_{k,s}}\sqrt{s2^M}\right)^2}{2^M} = y_{k,s}\cdot s.$$

下一个目标是将 $4\lambda(I)(1-\lambda(I)) + \frac{2}{3}t_{k,s}/2^M$ 的值最小化。为此，_我们必须区分若干种情况。

首先，如果 $k = 0$，我们回顾 $\lambda(I)(1-\lambda(I)) \leqslant \frac{1}{4}$，以便看出

$$\mathbb{P}\left(E_k(I)\right) \leq 2\exp\left(-\frac{y_{k,s}\cdot s}{3}\right).$$

现在，如果 $k = 1$，我们得到（再次利用 $\lambda(I)(1-\lambda(I))_{-} \leq \frac{1}{4}$）

$$\mathbb{P}\left(E_k(I)\right) \leq \exp\left(-\frac{y_{k,s}\cdot s}{2}\right) = \exp\left(-\frac{y_{k,s}\cdot s}{2^{-k+3}(1-2^{-k})}\right).$$

对于 $k \in \{2,\ldots,L-1\}$，我们有 $\lambda(I) \leq 2^{-k}$，因为 $I \in \Gamma_k$。基本微积分告诉我们，函数 $\lambda(1-\lambda)$ 和 $4\lambda(1-\lambda) + 2^{-k+1}(1-\lambda)$ 在区间 $[0,2^{-k}]$ 上分别在 $\lambda = 2^{-k}$ 处取得最大值，而该最大值分别为 $2^{-k}(1-2^{-k})$ 或 $3\cdot 2^{-k+1}(1-2^{-k})$。此外，$4\lambda(1-\lambda) + 2^{-k+1}\lambda$ 也在 2^{-k} 处取得最大值，从而最大值为 $2\cdot 2^{-k+1}(1-2^{-k}) + 2^{-k+1}2^{-k} \leq 3\cdot 2^{-k+1}(1-2^{-k})$。这意味着

$$\mathbb{P}\left(E_k(I)\right) \leq \exp\left(-\frac{y_{k,s}\cdot s}{2^{-k+3}(1-2^{-k})}\right).$$

最后，我们来讨论 $k = L$。与上一种情况类似，可以证明 that

$$\max_{\lambda\in[0,2^{-L}]}\{4\lambda(1-\lambda) + 2^{-L+2}\} \leq 2^{-L+3}(1-2^{-L}).$$

综合所有情况，我们可以看到，

$$\mathbb{P}\left(E_k(I)\right) \leq \exp\left(-\frac{y_{k,s}\cdot s}{b_k}\right) \tag{14}$$

始终成立。

步骤 3： 利用 (13) 和 (14)，我们计算

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_k|\mathbb{P}\left(E_k(I)\right) &\leq \frac{1}{2}\exp\left(\ln\left(2\frac{C_s^2}{\pi}\right)+2\alpha s\ln\left(e(2^{k+2}+1)\right)\right)\exp\left(-\frac{s\alpha a_{k,s}+\beta b_k\ln(M)}{b_k}\right)\\
&= \exp\left(\ln\left(2\frac{C_s^2}{\pi}\right)+2\alpha s\ln\left(e(2^{k+2}+1)\right)-\frac{s\alpha a_{k,s}+\beta b_k\ln(M)}{b_k}\right)\\
&= \exp\left(\ln\left(2\frac{C_s^2}{\pi}\right)+2\alpha s\left(\ln\left(e(2^{k+2}+1)\right)-\frac{a_{k,s}}{b_k}\right)-\beta\ln(M)\right)\\
&\leq \exp\left(\alpha s\left(\frac{\ln\left(2\frac{C_s^2}{\pi}\right)}{s}+2\ln\left(e(2^{k+2}+1)\right)-\frac{a_{k,s}}{b_k}\right)-\beta\ln(M)\right).
\end{aligned}$$

与...一起

$$2^{k+1}(1+s)^{\alpha}M^{\beta} \leq \exp\left(\ln(2^{k+1})+\alpha s\ln(2)+\beta\ln(M)\right),$$

这导致了

$$\begin{aligned}
&2^{k+1}(1+s)^{\alpha}M^{\beta}|\mathcal{A}_k|\mathbb{P}\left(E_k(I)\right)\\
&\qquad\leq \exp\left(\alpha s\left(\frac{\ln\left(\frac{C_s^2}{\pi}2^{k+2}\right)}{s}+2\ln\left(2e(2^{k+2}+1)\right)-\frac{a_{k,s}}{b_k}\right)\right)\\
&\qquad= \exp(0)=1.
\end{aligned}$$

因此

$$|\mathcal{A}_k|\mathbb{P}\left(E_k(I)\right) \leq 2^{-(k+1)}\frac{1}{(1+s)^{\alpha}}\frac{1}{M^{\beta}}. \tag{15}$$

步骤 4： 最后，由 (15) 可得

$$\mathbb{P}(E) \leq \sum_{k=0}^{L}\sum_{I\in\mathcal{A}_k}\mathbb{P}\left(E_k(I)\right) \leq \sum_{k=0}^{L}|\mathcal{A}_k|\mathbb{P}\left(E_k(I)\right) \leq \sum_{k=0}^{L}2^{-(k+1)}\frac{1}{(1+s)^{\alpha}}\frac{1}{M^{\beta}} < \frac{1}{(1+s)^{\alpha}}\frac{1}{M^{\beta}}. \tag{16}$$

请注意，$\mathbb{P}\left(\Omega_{1,\ s}\right)=0$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(M \cdot D_M^s(\mathcal{P}_{M,s}) > \sqrt{\alpha A_s + \beta B \frac{\ln(\log_2(M))}{s}}\sqrt{sM}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{s=1}^{\infty}\bigcup_{M=2}^{\infty}\Omega_{M,s}\right)\\ &\leq \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{M=2}^{\infty}\mathbb{P}\left(\Omega_{M,s}\right)\\ &\leq \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{M=2}^{\infty}\frac{1}{(1+s)^{\alpha}}\frac{1}{M^{\beta}}\\ &= (\zeta(\alpha)-1)(\zeta(\beta)-1).\end{aligned}$$

换句话说，为了实现

$$\mathbb{P}\left(D_M^s(\mathcal{P}_{M,s}) \leq \sqrt{\alpha A_s + \beta B \frac{\ln(\log_2(M))}{s}}\sqrt{\frac{s}{M}}\right) > 0$$

我们需要确保 $(\zeta(\alpha) - 1)(\zeta(\beta) - 1) < 1$，如所述。至此，证明完成。□

证明（定理 **4**）证明基本保持不变，只是$a_{k,\,s}$的定义需要改为

$$a_{k,s} = b_k \cdot \left(\frac{\ln\left(C_s 2^{k+2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)}{s} + \ln\left(2e(2^{k+1}+1)\right)\right).$$

以及我们使用定理 6 而不是定理 7 这一事实。因此， A_s 的最大值也随之改变。□

注记 *2* 将定理 5 的证明与 [AW13], 中的证明相比较，可以发现，对于 $s > 1$，我们总是有 $A_s < A$ （具体数值可见第 3 节）。

注 *3* 只要其他类别的集合的括号数存在类似于 (6) 的上界，该证明便可轻松推广。

3 数值结果

最后，我们将给出第 2 节结果中相关参数取值的显式计算。作为基准，我们将我们的结果与 [AW13] 中的常数进行比较。在 Aistleitner 和 Weimar 的论文中，尽管在他们的证明中也隐含地存在这种依赖关系，但他们忽略了 A_s 对 s 的依赖。然而，为了进行公平比较，我们不仅需要将我们的结果与定理 2 中给出的常数进行比较，还需要与不忽略上述依赖关系时可能得到的常数进行比较。显然，存在不同的选择可以使

α 和 β 满足

$$(\zeta(\alpha)-1)(\zeta(\beta)-1)<1$$

因此，由定理 4 和定理 5 可知，存在具有所需星差异度的双无限序列。这里我们将范围限制在 $\alpha=\beta=1$。$73>\zeta^{-1}(2)$，因为对称性简化了计算，而且定理 2 也考虑了这种情形。若不忽略 A_s 对 [AW13] 的依赖，将会得到

$$a_{k,s}=b_k\cdot\left(\frac{\ln\left(2^{k+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)}{s}+\ln\left(4e(2^{k+1}+1)\right)\right) \tag{17}$$

以及 $A_s=2\left(\sum_{k=-1}^{\infty}\sqrt{a_{k,\,s}}\right)^2$。

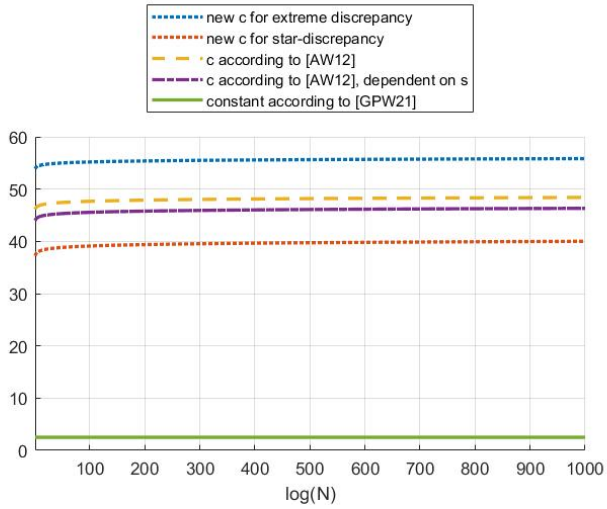

图 1 c 关于 N 的取值，依赖于 $s=10$。

在图 1 中，我们展示了最小可能值 c 的数值估计，使得

$$\mathbb{P}\left(D_N^{*s}(\mathcal{P}_{N,s})\le c\sqrt{\frac{s}{N}}\right)>0$$

取决于样本量 N。除了我们的结果所蕴含的差异和星差异度数值外，这里还列出了 [AW13] 的数值作为比较，分别包括依赖和不依赖 s 的情形。最后，图中还列出了 [GPW21], 的结果，其中 $c=2.4968$ 已针对有限维点集得到证明。可以看出，虽然我们的结果（一维情形）低于 [AW13], 的结果，但仍远高于 [GPW21] 的结果。在

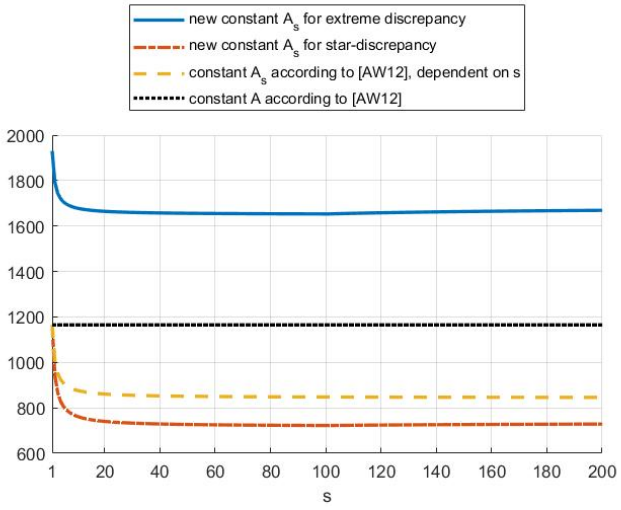

图 2 A_s 随 s 变化的概览

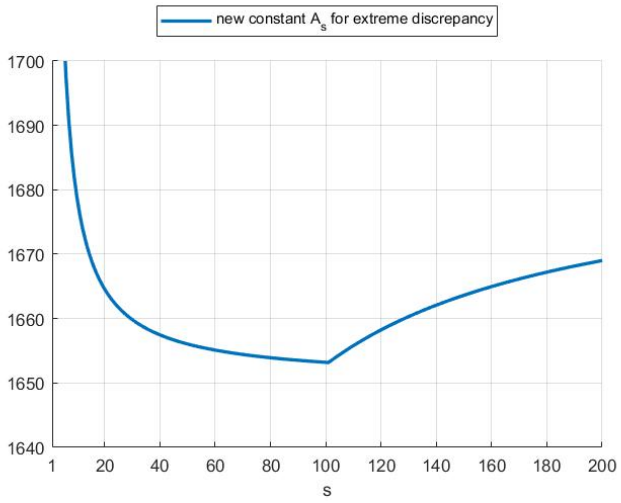

图 3 A_s 关于 s的局部放大图

图 2 展示了 A_s 的四个不同数值。对于 $s = 1$，星差异度的三个参数取值相等。由于我们使用了

$$a_{k,s} = b_k \cdot \left(\frac{\ln\left(C_s 2^{k+2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)}{s} + \ln\left(2e(2^{k+1}+1)\right) \right)$$

与（17）不同，但对于 $s > 1$，情况发生了变化。此外，我们看到，正如定理 7 所预期的那样，差异度对应的 A_s 值大于星差异度对应的值。

在两幅图中都可以观察到的一个现象是，差异度对应参数的值约为星差异度对应值的两倍。这源于定理 7 所述的关系：$N(\delta, \mathrm{R}^s) \le N\left(\frac{\delta}{2}, \mathrm{R}^s\right)^2$；此外，在定理 5 和定理 4 的证明中取对数，基本上会使 A_s 的值加倍。 −

最后，图 3 展示了差异度情形的特写视图。可以观察到，在 $s = 101$ 之前，A_s 的值一直在减小，之后则持续增大，直到达到约 1670 的值。这是由 C_s 的性质导致的，参见定理 6；C_s 从 $s = 101$ 起开始增大。

总而言之，所有数值结果都表明，至少对于较高维数，与 [AW13] 相比，我们得到的结果有明显改进。不过，对于 [GPW21], 中研究的一维情形，人们已知的结果要丰富得多，因此常数的取值显著更小。尽管如此，我们相信，我们的工作是改善较高维数下数值结果的一步。

4 未来研究

我们目前正致力于将本文所采用的方法从独立同分布序列推广到其他类型的随机变量，例如负相关随机变量和 γ-负相依随机变量。推广过程中的主要挑战在于为这类随机变量找到适当的极大不等式，例如最大伯恩斯坦不等式的相应版本。关于这一主题已有大量研究，参见例如 [Bou21、KM11、Mór79、Sze13]。我们认为，现有文献中的方法可以调整后应用于上述几类情形。在此背景下，接下来的挑战是证明具有这类特征的无限序列或矩阵确实存在。据我们所知，除了一些相对简单的例子外，目前尚无已知实例，因此这也是一个仍悬而未决的问题。

参考文献

Ais11. C. Aistleitner。《覆盖数、二进制链与偏差》。复杂性杂志，27:531–540，2011。Ais13. C. Aistleitner。《关于无限维无限序列的偏差逆问题》。复杂性杂志，29:182–194，2013。AW13. C. Aistleitner 和 M. Weimar。《双无限随机矩阵的概率星差异界》。载于 J. Dick、F. Kuo、G. Peters 和 I. Sloan 编，《style id='5'>2012年蒙特卡罗与拟蒙特卡罗方法》，第271–287页，柏林、海德堡，2013。Springer Berlin Heidelberg。Bou21. F. Boukhari。《弱依赖条件下具有指数衰减的极大不等式》。载于《style id='7'>AIP会议论文集》，第2334卷，第090002页。AIP Publishing LLC，2021。DGKP08. B. Doerr、M. Gnewuch、P. Kritzer 和 F. Pillichshammer。《小规模低偏差点集的逐分量构造》。蒙特卡罗方法及其应用，14:129–149，2008。DGW14. C. Doerr、M. Gnewuch 和 M. Wahlström。《偏差度量的计算及其应用》。载于 W. Chen、A. Srivastav 和 G. Travaglini 编，《style id='11'>偏差理论全景》，第621–678页，Cham，2014。Springer International Publishing。DHB20. M. Dixon、I. Halperin 和 P. Bilokon。《style id='13'>金融机器学习》。Springer，瑞士，2020。Dic07. J. Dick。《关于小星差异序列存在性的一点注记》。复杂性杂志，23:649–652，2007。EM96. U. Einmahl 和 D. M. Mason。《关于部分和增量行为的一些普适结果》。概率年刊，24(3):1388—1407，1996。Gla03. P. Glasserman。《style id='19'>金融工程中的蒙特卡罗方法》。Springer，纽约，2003。Gne08. M. Gnewuch。《轴平行盒的括号数及其在几何偏差中的应用》。复杂性杂志，24(2):154–172，2008。GPW21. M. Gnewuch、H. Pasing 和 C. Weiß。《广义 Faulhaber 不等式、改进的括号覆盖及其在偏差中的应用》。计算数学，90:2873–2898，2021。HNWW01. S. Heinrich、E. Novak、G. W. Wasilkowski 和 H. Woźniakowski。《星差异的逆问题线性依赖于维数》。算术学报，96:279–302，2001。KM11. P. Kevei 和 D. M. Mason。《关于最大伯恩斯坦不等式的一点注记》。伯努利，17(3):1054–1062，2011。Mat99. J. Matousek。《style id='29'>几何偏差：图解指南》，第18卷。Springer Science & Business Media，柏林、海德堡，1999。Mór79. F.A. Móricz。《部分和最大值的指数估计》。匈牙利科学院数学学报，I(33):159—167，1979。Nie92. H. Niederreiter。《style id='33'>随机数生成与拟蒙特卡罗方法》，《style id='35'>CBMS-NSF应用数学区域会议系列》第63卷。SIAM，宾夕法尼亚州费城，1992。Pas94. S. H. Paskov。《style id='37'>带有金融应用的高维积分计算》。哥伦比亚大学。技术报告 CUCS-023–94，纽约州纽约市 10027，1994。Sch72. W. M. Schmidt。《关于分布不规则性的第七篇》。算术学报，21:45–50，1972。Sze13. Z. Szewczak。《关于独立和相依随机向量和的最大 Lévy–Ottaviani 不等式》。波兰科学院数学通报，61(2):155–160，2013。WN19. C. Weiß 和 Z. Nikolic。《关于 lsmc 最优回归设计的一个方面》。蒙特卡罗方法与应用，4:283–290，2019。