arXiv:2305.04688v1 [math.PR] 8 May 2023

单调马尔可夫链的谱隙与曲率

Justin Salez*

2023年5月9日

摘要

我们证明，任意单调马尔可夫链的绝对谱隙都等于其最优 Ollivier-Ricci 曲率，其中“最优”指的是对底层度量的选择。此外，我们还给出了一个基于递增函数局部变差的新表达式；与传统的狄利克雷形式变分表述相比，该表达式具有多项实际优势。作为示例，我们明确确定了任意网络上储库密度非均匀的非守恒排斥过程的最优曲率和谱隙，尽管该过程不具备可逆性。

1 引言

谱隙。本文中，我们固定有限状态空间 $\mathcal{X}$上的一个不可约随机矩阵 P。在传统上用于量化 P混合性质的各种参数中，最基本的或许是（绝对）谱隙

$$\gamma_\star \;=\; 1-\max\{|\lambda|\colon \lambda \text{ is a non-trivial eigenvalue of } P\},$$

其中，非平凡是指排除常数特征函数。这个量通常用于刻画马尔可夫链收敛到平衡态的速度，具体而言，

$$(d_{\mathrm{TV}}(t))^{1/t} \;\xrightarrow[t\to\infty]{}\; 1-\gamma_\star,$$

其中 $d_{\mathrm{TV}}(t)$ 表示在时间 t 时到平稳性的最坏情况全变差距离。在通常假设 P 是惰性且可逆的条件下，谱隙与 Poincar´é 常数一致，因此能够对混合时间、集中和等周不等式提供普适的控制。对于不熟悉相关内容的读者，详情请参阅经典教材 [20, 23] 。

*CEREMADE，CNRS，UMR 7534，巴黎第九大学，PSL大学，75016 巴黎，法国

Ollivier-Ricci 曲率。现在假设 $\mathcal{X}$ 配备了一个度量 ρ。当 P 的支撑集具有对称性时，一个自然的选择当然是跳数距离。

$$\rho(x,y) \;:=\; \min\{t \geq 0 \colon P^t(x,y) > 0\}, \tag{1}$$

不过，正如我们将看到的，更精巧的变体可能会带来益处。接下来，我们可以利用最优传输将度量 ρ “提升”到分布层面。具体而言，两个概率测度 μ 和 ν 在 $\mathcal{X}$ 上的 Wasserstein 距离定义如下：

$$\mathcal{W}(\mu,\nu) \;:=\; \min_{X\sim\mu, Y\sim\nu} \mathbb{E}\left[\rho(X,Y)\right],$$

其中，最小值取遍所有可能的耦合（X，Y），这些耦合对应于 μ 和 ν。由紧致性可知，极小值总能达到，后文将这些极小耦合称为最优耦合。按照 Ollivier[27, 26], 的做法，我们将曲率定义为 P 满足下式的最大数值 $\kappa \in \mathbb{R}$：

$$\forall \mu,\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}), \qquad \mathcal{W}(\mu P, \nu P) \;\leq\; (1-\kappa)\mathcal{W}(\mu,\nu). \tag{2}$$

由 Kantorovich 对偶可知，这实际上等价于以下泛函不等式：

$$\forall f \in \mathbb{C}^{\mathcal{X}}, \qquad \|Pf\|_{\mathrm{LIP}} \;\leq\; (1-\kappa)\|f\|_{\mathrm{LIP}},$$

其中 $\|f\|_{\mathrm{LIP}} := \max_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)}$ 表示 f 的 Lipschitz 常数。特别地，令 f 为 P 的一个非常数特征函数，便可直接得到

$$\kappa \;\leq\; \gamma_\star. \tag{3}$$

换言之，曲率始终构成绝对谱隙的下界。更重要的是，已有研究表明，这一基本量能够对几何 [15, 24], 混合时间 [6, 3], 扩张 [30, 25], 测度集中 [17, 16, 11], 谱独立性 [2] 乃至截断现象 [29]提供一系列强有力的控制。

最优曲率。 一个简单却至关重要的观察是，不等式（3）的左端取决于底层度量 ρ的选择，而右端则不受影响。显然，我们可以利用这种不对称性，具体做法如下：与其盲目地将 ρ 设为默认选择（1），不如将其视为一个变量，并尝试对其进行微调，以优化界（3）。除了谱隙之外，这一策略还可用于改进任何将 Ollivier-Ricci 曲率用作输入的估计

量。它已显著改进了若干重要马尔可夫链的混合时间分析。对于希望了解这一研究方向的读者，我们推荐阅读开创性论文 [22, 4]。受这一富有成效的思路启发，我们在此将马尔可夫链的最优曲率 定义为以下数值

$$\kappa_\star \;:=\; \sup_{\rho} \kappa(\rho),$$

其中， $\kappa(\rho)$ 表示 P 关于度量 ρ 的曲率，且上确界取遍 $\mathcal{X}$ 上所有可能的度量 ρ。尽管从理论角度来看，这一内蕴曲率概念具有重要意义，但在实践中，它似乎难以操作：其定义涉及三个嵌套的优化问题，原则上需要对所有概率测度对（μ,ν）、 μP 和 νP 的所有耦合（X,Y），以及 $\mathcal{X}$ 上的所有度量 ρ 进行检验。然而，我们的主要发现是，只要 P 满足一种称为单调性（monotony）的经典且广泛存在的性质， $\kappa_\star$ 就可以表示为一个极其简单的表达式。

单调链。从现在起，我们在状态空间 $\mathcal{X}$ 上固定一个偏序 $\preceq$。为避免退化情形，我们假设该关系足够丰富，能够以通常意义上的方式连接 $\mathcal{X}$：对于任意状态 x、$y \in \mathcal{X}$，存在一个有限序列 $(x_0,\dots,x_\ell)$，使得 $x_0 = x$、 $x_\ell = y$，且对于所有 $1 \le i \le \ell$、 $x_{i-1} \preceq x_i$ 或 $x_i \preceq x_{i-1}$。我们用 $\mathcal{I}$ 表示递增函数 $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 所构成的函数锥，即当 $x \preceq y$ 时， $f(x) \le f(y)$。最后，如果矩阵 P 的作用保持集合 $\mathcal{I}$ 不变，即，我们就称其为单调矩阵。

$$f \in \mathcal{I} \implies Pf \in \mathcal{I}.$$

根据 Strassen定理，这一稳定性性质等价于存在一个单调马尔可夫耦合：给定任意一对 $(x,y) \in \mathcal{X}^2$ with $x \preceq y$，我们可以联合构造两个随机状态 X 和 Y，其边缘分布分别为 $P(x,\cdot)$ 和 $P(y,\cdot)$，使得 $\mathrm{P}(X \preceq Y) = 1$。这类马尔可夫链在统计物理中随处可见：典型例子包括铁磁伊辛模型的 Glauber动力学、惰性生灭链、噪声投票模型，或具有任意储库密度的非守恒排斥过程。我们在 [20, 第 22] 章中介绍了其他几个例子，以及许多有趣的性质。本文旨在揭示这类马尔可夫链的曲率与谱隙之间一种非凡的联系。

2 主要结果及其含义

我们的主要贡献是以下这一令人惊讶的结果，它表明单调链总是使不等式（3）达到等号：其最优曲率 $\kappa_\star$ 等于其谱隙 $\gamma_\star$。此外，我们还利用递增函数的局部变化，给出了这些常数一个极其简单的刻画。具体而言，我们引入如下量

$$\mathfrak{v}_\star \;:=\; \inf_{f\in\mathring{\mathcal{I}}} \max_{x\lhd y} \left\{ \frac{Pf(y)-Pf(x)}{f(y)-f(x)} \right\}, \tag{4}$$

其中，$\mathcal{I}$表示严格递增函数的集合 $f\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$（即当 $x\prec y$ 时，$f(x)<f(y)$），而 $\lhd$ 表示 $\mathcal{X}$ 上通常的覆盖关系：

$$x\lhd y \iff x\prec y \text{ and there is no } z\in\mathcal{X} \text{ such that } x\prec z\prec y. \tag{5}$$

定理 1（单调链的谱隙与曲率）。如果 P 是单调的，那么

$$\kappa_\star \;=\; \gamma_\star \;=\; 1-\mathfrak{v}_\star.$$

讨论与展望。除了这一令人惊讶的等价性本身具有显而易见的理论意义——它联系了三个本质上不同的概念（谱学概念、几何概念和变分概念）——我们认为上述结果还具有多方面的实际意义。一个直接的原因是，与谱隙相比，曲率通常能够更有力地控制混合时间和集中：我们的第一个等式 $\kappa_\star=\gamma_\star$ 表明，在所有单调链中，这些改进都可“免费”获得。另一个可能蕴含丰富应用的来源是我们的第二个等式 $\gamma_\star = 1-\mathfrak{v}_\star$。为说明其中缘由，我们先回顾一下惰性可逆链的谱隙具有如下变分刻画

$$\gamma_\star \;=\; \inf_{f} \left\{ \frac{\sum_{x,y\in\mathcal{X}} \pi(x)P(x,y)\,(f(y)-f(x))^2}{\sum_{x,y\in\mathcal{X}} \pi(x)\pi(y)\,(f(y)-f(x))^2} \right\}, \tag{6}$$

其中，π 表示平稳分布，且下确界取遍所有非恒定测试函数 $f\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$。与这一经典表述相比，我们以 $\mathfrak{v}_\star$ 给出的变分刻画具有若干实用优势，下面逐一列出。

1. 它不要求可逆性，也不要求惰性。

2. 该公式涉及上确界而非下确界，因此可以代入任意测试函数，为谱隙给出一个下界。

3. 该方法完全是局部的，不涉及对平稳分布 π取平均，而后者有时很难明确写出。

4. 它适用于比较差异很大的马尔可夫链：例如，我们看到，只要 Q 在 $Q-P$ 单调的意义上比 P“更加递增”，就有 $\gamma_\star(P) \geq \gamma_\star(Q)$。

我们计划在不久的将来将这些思想应用于具体模型。这里我们仅提及定理 1 在严格递增特征函数上的一个非常简单的应用。

严格递增的特征函数。假设 P 是单调的，并且它在 $\mathcal{I}$中存在一个特征函数 f，对应某个特征值 λ。于是我们可以将 f 代入 $\mathfrak{v}_\star$ 的定义，并利用变分刻画推出 $\gamma_\star \geq 1-\lambda$；而反向的不等式则由 $\gamma_\star$的定义直接得到。因此，我们可以放心地得出 $\gamma_\star = 1-\lambda$，无需再寻找其他特征函数及其对应的特征值。我们在此记录这一有用的观察。

推论 1（严格递增的特征函数）。若 P 是单调的，且 $f \in \mathcal{I}$ 满足 $Pf = \lambda f$，其中某个 $\lambda \in \mathbb{R}$，则必有 $\lambda = 1-\gamma_\star$。

据我们所知，此结果此前仅在附加假设 P 可逆，且其支撑集仅由可比元素对构成[20, 引理 22。18]的情况下才成立。一个不满足这两项附加条件的单调链例子，是具有非均匀储库密度的非守恒排斥过程。在第 4节中，我们将利用上述推论，明确确定该过程在任意网络上的谱隙和最优曲率。首先，让我们在连续时间马尔可夫链的框架下重新表述主要结果。

连续时间版本。考虑偏序集（ L 上的一个不可约马尔可夫生成元 $\mathcal{X}, \preceq$），并记（P_t）$_{t\geq 0}$ 为相应的半群。谱隙 $\gamma_\star$ 是 $-L$的非零特征值中实部最小者，而最优曲率 $\kappa_\star$ 的定义与前文相同，只是将条件（2）替换为其连续时间对应形式：

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathcal{W}(\mu P_t, \nu P_t) \leq e^{-\kappa t}\mathcal{W}(\mu,\nu).$$

如果半群的作用保持递增函数 $\mathcal{I}$ 所构成的锥不变，我们自然称生成元 L 为单调的。换句话说，如果随机矩阵 P_t，那么 L 是单调的。

对于每个 $t>0$，它在前述意义下是单调的。这使我们能够将主定理应用于P_t对每个 $t>0$。随后，我们可以令 $t\to 0$并利用近似 $P_t = I+tL+o(t)$，得到定理 1 和推论 1的以下连续时间版本。

推论2（连续时间版本）。如果 L 是单调的，那么

$$\kappa_\star \;=\; \gamma_\star \;=\; -\inf_{f\in\mathring{\mathcal{I}}}\max_{x\lhd y}\left\{\frac{Lf(y)-Lf(x)}{f(y)-f(x)}\right\}.$$

°特别地，如果 $f\in\mathcal{I}$ 满足 $-Lf=\lambda f$，其中某个 $\lambda\in\mathbb{R}$，那么我们必然有 $\lambda=\gamma_\star$。

3 主要结果的证明

我们因此将... 假设 P 是单调的，我们的目标是建立双重恒等式

$$\gamma_\star \;=\; 1-\mathfrak{v}_\star \;=\; \kappa_\star.$$

由于我们始终有 $\kappa_\star\le\gamma_\star$，因此我们的任务归结为以下两个不等式:

(i)
$\gamma_\star \le 1-\mathfrak{v}_\star$;
(ii) $\kappa_\star \ge 1-\mathfrak{v}_\star$。

现在我们分别证明这两个结论。

3.1 断言（i）的证明

°如果 P 存在一个属于 $\mathcal{I}$ 的特征函数 f，那么第一条断言显然成立，因为此时只需将后者代入 $\mathfrak{v}_\star$ 的定义即可。遗憾的是，并非所有单调链都存在属于 $\mathcal{I}$ 的°特征函数：一个简单的反例是两个定义在 $\{0,1\}$ 上且谱隙不同的马尔可夫链的乘积。我们的解决方法是考虑下述引理意义上的“近似特征向量”，该引理证明了上文的断言（i）。

°引理1（证明断言（i））。对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $f_\varepsilon\in\mathcal{I}$ 使得

$$\max_{x\lhd y}\left\{\frac{Pf_\varepsilon(y)-Pf_\varepsilon(x)}{f_\varepsilon(y)-f_\varepsilon(x)}\right\} \;\le\; 1-\gamma_\star+\varepsilon. \tag{7}$$

°证明。我们首先注意到集合 $\mathcal{I}$ 非空。事实上，可以通过依次选择任意一个极小元素，为其赋予一个严格大于此前所有已赋值元素的值，将其从偏序集中移除，并重复这一过程，从而构造出一个严格递增函数$f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$。如有必要，将 f 替换为 $f - \pi f$ 后，我们还可以进一步假设 f 在平稳分布 π下是中心化的。现在，固定 $\varepsilon > 0$，并考虑中心化函数

$$f_\varepsilon \;:=\; \left(\mathrm{I} - \frac{P}{1-\gamma_\star+\varepsilon}\right)^{-1} f \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\gamma_\star+\varepsilon}\right)^n P^n f,$$

其存在性由以下事实保证：P 在中心化函数上的限制的谱半径为 $1-\gamma_{\star}$。注意，f_ε 严格递增，因为上述级数中的每一项都递增，且第一项严格递增。此外，根据构造，我们有 $Pf_\varepsilon = (1-\gamma_\star+\varepsilon)(f_\varepsilon - f)$，因此对任意 $x \lhd y$，

$$\begin{aligned} Pf_\varepsilon(y) - Pf_\varepsilon(x) &= (1-\gamma_\star+\varepsilon)\left[(f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)) - (f(y) - f(x))\right] \\ &\le (1-\gamma_\star+\varepsilon)\left(f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)\right), \end{aligned}$$

正如所需。 □

3.2 断言（ii）的证明

我们对断言（ii）的证明依赖于一个简单的观察：当底层度量 κ 具有某种“梯度结构”时，单调链的曲率 ρ有一个异常简单的表达式，下面我们将描述这种结构。回顾一下，偏序集 $(\text{的哈斯图 } \mathcal{X}, \trianglelefteq)$ 是图 $G = (\mathcal{X}, E)$，其边集由对称化覆盖关系 $\lhd$ 得到，该覆盖关系定义于 (5)：

$$E \;:=\; \left\{(x,y) \in \mathcal{X}^2 \colon x \lhd y \text{ or } y \lhd x\right\}.$$

通常，G中的路径是顶点 $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_\ell)$ 的有限序列，使得对所有 $1 \le i \le \ell$，都有 $\{\sigma_{i-1}, \sigma_i\} \in E$。整数 $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$ 称为该路径的长度，记作 $|\sigma|$。我们用 $\Sigma_{x\to y}$ 表示所有起点为 x、终点为 y 的路径集合。现在，给定任意°函数 $f \in \mathcal{I}$，我们通过以下公式在 $\mathcal{X}$ 上定义度量 ρ：

$$\rho(x,y) \;:=\; \min_{\sigma \in \Sigma_{x\to y}} \left\{ \sum_{i=1}^{|\sigma|} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})| \right\}. \tag{8}$$

在得到的度量空间 $(\mathcal{X}, \rho)$ 上，任意单调链的曲率由下面的引理给出，由此对所有 $f \in \mathcal{I}$ 取上确界即可直接推出断言（ii）。

引理 2 （证明断言（ii））。 相对于度量 P （8）的曲率为

$$\kappa(\rho) \;=\; 1-\max_{x\lhd y}\left\{\frac{Pf(y)-Pf(x)}{f(y)-f(x)}\right\}.$$

证明。 由定义（8）可知，我们的度量 ρ 满足

$$\rho(x,y) \;\geq\; f(y)-f(x), \tag{9}$$

对所有 x、$y\in\mathcal{X}$ 均成立。此外，当 $x\preceq y$ 时等号成立，因为覆盖关系 $\lhd$ 的定义本身保证存在一条从 x 到 y 的路径 σ，使得对所有 $1\leq i\leq|\sigma|$ 均有 $\sigma_{i-1}\lhd\sigma_i$。现在，固定满足 $x\lhd y$ 的 x、$y\in\mathcal{X}^2$。那么，对于 $P(x,\cdot)$ $P(y,\cdot)$ 的任意耦合 (X,Y)，上述观察确保了：

$$\mathbb{E}\left[\rho(X,Y)\right] \;\geq\; \mathbb{E}\left[f(Y)-f(X)\right] \;=\; Pf(y)-Pf(x), \tag{10}$$

当 $\mathbf{P}(X\preceq Y)=1$ 时等号成立。但我们关于 P 的单调性假设恰好保证了存在这样的单调耦合。因此，我们得到这两个恒等式。

$$\begin{aligned}\mathcal{W}\left(P(x,\cdot),P(y,\cdot)\right) &= Pf(y)-Pf(x),\\ \rho(x,y) &= f(y)-f(x),\end{aligned}$$

只要 $x\lhd y$。这已经表明 $\mathfrak{v}:=\max_{x\lhd y}\left\{\frac{Pf}{f(y)-Pf(x)\,(y)-f(x)}\right\}$ 是不等式成立的最小数。

$$\mathcal{W}\left(P(x,\cdot),P(y,\cdot)\right)\leq\mathfrak{v}\,\rho(x,y). \tag{11}$$

当 $\{x,y\}\in E$ 时成立。现在注意到，这个不等式自然也推广到任意点 $x,y\in\mathcal{X}$，因为我们可以将它应用于从 x到 y 的一条测地路径（即在 $\rho(x,y)$ 的定义中取到最小值的路径）上的所有边，然后运用 $\mathcal{W}(\cdot,\cdot)$ 的三角不等式即可得出结论。最后，给定 $\mu,\nu\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$，我们可以通过以下两个步骤构造 μP和 νP的一个耦合 (X',Y')：

1. 根据 μ 和 ν 的一个最优耦合生成 (X,Y)。

2. 对于每个可能的实现 $(x,y)\in\mathcal{X}^2$，在事件 $\{(X,Y)=(x,y)\}$ 条件下，令 (X',Y') 服从 $P(x,\cdot)$ 和 $P(y,\cdot)$ 的最优耦合分布。

所得的数对 (X', Y') 显然是 μP和 νP的一个耦合，因此，

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\mu P, \nu P) &\leq \mathbb{E}\left[\rho(X', Y')\right] \\
&= \sum_{x,y\in\mathcal{X}} \mathbf{P}\left((X,Y)=(x,y)\right)\mathcal{W}\left(P(x,\cdot),P(y,\cdot)\right) \\
&\leq \mathfrak{v}\sum_{x,y\in\mathcal{X}} \mathbf{P}\left((X,Y)=(x,y)\right)\rho(x,y) \\
&= \mathfrak{v}\mathbb{E}\left[\rho(X,Y)\right] \\
&= \mathfrak{v}\mathcal{W}(\mu,\nu),
\end{aligned}$$

其中，中间的不等式直接来自（11）。由于这对所有 μ、$\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 都成立，因此我们可以据此计算得出 $1-\mathfrak{v} \leq \kappa(\rho)$，而 $\mathfrak{v}$ 在（11）中的最优性表明，这实际上就是等式，正如所需。 □

4 排斥过程的应用

排斥过程是一种经典的相互作用随机游走模型：不可区分的粒子试图在图上彼此独立地运动，但如果目标位置已被占据，跳跃就会被取消 [32, 21]。这里我们考虑该模型的非守恒变体，其中粒子还可能在某些顶点处生成和湮灭，以此模拟与外部储库接触。关于模型的背景和研究动机，请参阅开创性著作[1, 19] 或较新的论文 [12, 13, 31, 33] 。该模型由一个整数 $n \in \mathbb{N}$（表示位置数）、一个非负对称数组 $(c_{ij})_{1\leq i,\ j\leq n}$（指定交换率），以及两个非负向量 $(r_i^+)_{1\leq i\leq n}$ 和 $(r_i^-)_{1\leq i\leq n}$（分别描述生成率和湮灭率）参数化。具有这些参数的排斥过程是一个连续时间马尔可夫链，其状态空间为 $\mathcal{X} = \{0,1\}^n$，无穷小生成元 L 对任意 f的作用如下：$\mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(Lf)(x) &:= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left[f(x^{i\leftrightarrow j}) - f(x)\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} r_i^+\left[f(x^{i,1}) - f(x)\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} r_i^-\left[f(x^{i,0}) - f(x)\right],
\end{aligned}$$

其中，$x^{i\leftrightarrow j}$、$x^{i,\,1}$ 和 $x^{i,\,0}$ 分别表示由 x 通过交换第 $i-$ 个和第 $j-$ 个坐标（交换）、将第 $i-$ 个坐标重置为 1（生成）以及将其重置为 0（湮灭）而得到的向量。为确保不可约性，以下假设矩阵 c 的支撑集连接各个位置，且 r^+ 和 r^- 的支撑集均非空。

在上述过程的分析中发挥重要作用的一个简单对象是底层网络的拉普拉斯矩阵 $\Delta = (\Delta_{ij})_{1\le i,\ j\le n}$ 其定义如下：

$$\Delta_{ij} \;:=\; \begin{cases} c_{ij} & \text{if } j \neq i \\ -r_i^+ - r_i^- - \sum_{k\in[n]\setminus\{i\}} c_{ik} & \text{if } j = i. \end{cases}$$

这个对称负定矩阵描述了单个随机游走者如何根据导通系数穿行于 n 各个位置（c_{ij}）$_{1\le i,\ j\le n}$ 并以随空间变化的速率（$r_i^+ + r_i^-$ ）$_{1\le i\le n}$被杀死。下文的定理2 表明，$2^n \times 2^n$ 生成元 L 的混合性质基本上由 $n \times n$ 矩阵 Δ的混合性质决定。这一非凡的“维数约化”构成了对 Aldous 著名的谱隙猜想的一种非保守推广；该猜想现已由 Caputo、Liggett 和 Richthammer 证明[10]。有趣的是，类似的现象近来已在其他若干相互作用粒子模型中得到证实 [7, 14, 8, 9, 28, 5, 18]。然而，据我们所知，对于排斥过程，人们仅在可逆情形下知道该结论成立，此时向量 $\kappa^+ + \kappa^-$为常数[31]。

定理 2（降维）。生成元 L 的谱隙和最优曲率等于矩阵 $-\Delta$的最小特征值。

证明。令 $\lambda > 0$ 为正定矩阵 $-\Delta$的最小特征值。根据 Perron 定理和我们的不可约性假设，存在相应的特征向量 $v = (v_i)_{1\le i\le n}$，其各分量均为正。令 $p := (-\Delta)^{-1} r^+$，并考虑由下式定义的函数 $f\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) \;:=\; \langle v, x - p\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} v_i (x_i - p_i).$$

我们声称，f 是算子 L 对应于特征值 $-\lambda$ 的一个特征函数。事实上，利用

根据 L的定义，我们发现

$$\begin{aligned}(Lf)(x) &= \sum_{i=1}^{n} v_i \left[\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_j - x_i) + r_i^+(1-x_i) - r_i^- x_i\right] \\ &= \langle v, \Delta x + r^+ \rangle \\ &= \langle v, \Delta(x-p) \rangle \\ &= \langle \Delta v, x - p \rangle \\ &= -\lambda f(x),\end{aligned}$$

其中我们依次使用了恒等式 $r^+ = -\Delta p$、关于 Δ 的对称性以及恒等式$\Delta v = -\lambda v$。现在，v 的正性确保特征函数 f 关于通常的逐坐标序 $\preceq$ 在 $\{0,1\}^n$上严格递增。此外，该序在每一种可能的转移 $x \mapsto x^{i\leftrightarrow j}$、 $x \mapsto x^{i,\,1}$ 以及 $x \mapsto x^{i\text{下都显然保持不变},\,0}$因此在由两个轨迹于相同的随机时刻执行这些转移所构成的“显然”耦合下也保持不变。因此， L 是单调的，我们可以调用推论 2 得出 $\gamma_\star = -\lambda$，正如所需。

□

致谢。作者衷心感谢 Pietro Caputo 提出了若干有趣的潜在应用方向，这些方向将在不久的将来展开研究。本研究部分获得法国大学学院的支撑。

参考文献

[1] L. Bertini、A. De Sole、D. Gabrielli、G. Jona-Lasinio 和 C. Landim。《边界驱动对称简单排斥过程的大偏差》。数学物理分析与几何，6(3)：231–267，2003。

[2] Antonio Blanca、Pietro Caputo、Zongchen Chen、Daniel Parisi、Daniel ˇ Stefankovi ˇc 和 Eric Vigoda。《马尔可夫链的混合：耦合、谱独立性与熵因子化》。载于《2022 年 ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集》（SODA），第 3670–3692 页。[工业与应用数学学会（SIAM）],费城，宾夕法尼亚州，2022 年。

[3] Magnus Bordewich 和 Martin Dyer. 无压缩的路径耦合. J. Discrete Algorithms, 5(2):280–292, 2007.

[4] Magnus Bordewich、Martin E. Dyer 和 Marek Karpinski. 度量构造、停止时间与路径耦合. Electron. Colloquium Comput. Complex., TR05, 2005.[5] Alexandre Bristiel 和 Pietro Caputo. 随机游走与排列的熵不等式, 2021.[6] R. Bubley 和 M. Dyer. 路径耦合：证明马尔可夫链快速混合的一种技术. In Proceedings 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pages 223–231, 1997.[7] Pietro Caputo. Kac 游走及其他二元碰撞过程的谱隙. ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., 4:205–222, 2008.[8] Pietro Caputo、Cyril Labb´e 和 Hubert Lacoin. 单纯形上相邻游走的混合时间. Ann. Probab., 48(5):2449–2493, 2020.[9] Pietro Caputo、Cyril Labb´e 和 Hubert Lacoin. 凸势下 $\nabla\varphi$界面 Gibbs 采样器的谱隙与截断现象, 2020.[10] Pietro Caputo、Thomas M. Liggett 和 Thomas Richthammer. Aldous 谱隙猜想的证明. J. Amer. Math. Soc., 23(3):831–851, 2010.[11] Ronen Eldan、James R Lee 和 Joseph Lehec. 离散空间马尔可夫链中的输运熵不等式与曲率. In A Journey Through Discrete Mathematics, pages 391–406. Springer, 2017.[12] Nina Gantert、Evita Nestoridi 和 Dominik Schmid. 开边界简单排斥过程的混合时间, 2021.[13] Patr´ıcia Gon¸calves、Milton Jara、Rodrigo Marinho 和 Ot´avio Menezes. 含储库 SSEP 收敛至平衡态的精确速率, 2021.[14] Jonathan Hermon 和 Justin Salez. 零程过程的 Aldous 谱隙猜想的一个版本. Ann. Appl. Probab., 29(4):2217–2229, 2019.[15] J¨urgen Jost、Florentin M¨unch 和 Christian Rose. 图上的刘维尔性质与非负 Ollivier 曲率. arXiv preprint arXiv:1903.10796, 2019.

[16] Ald´eric Joulin。《曲率连续时间马尔可夫链的泊松型偏差不等式》。Bernoulli，13(3):782–798，2007年。[17] Ald´eric Joulin 和 Yann Ollivier。《马尔可夫链蒙特卡罗方法中的曲率、集中与误差估计》。Ann. Probab.，38(6):2418–2442，2010年。[18] Seonwoo Kim 和 Federico Sau。《对称包含过程的谱隙》，2023年。[19] C. Landim、A. Milan´es 和 S. Olla。《边界驱动排斥过程中的平稳涨落与非平衡涨落》。Markov Process. Related Fields，14(2):165–184，2008年。[20] David A. Levin 和 Yuval Peres。《马尔可夫链与混合时间》。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。第二版，[MR2466937], 由 Elizabeth L. Wilmer 参与撰写，并包含 James G. Propp 和 David B. Wilson 撰写的“从过去开始的耦合”一章。[21] Thomas M. Liggett。《相互作用粒子系统》。数学经典丛书。Springer-Verlag，柏林，2005年。1985年原版的重印本。[22] Ravi Montenegro 和 Prasad Tetali。《用于采样独立集的 Glauber动力学的快速收敛》。第15卷，第229–241页。1999年。离散概率、组合学和理论计算机科学中的统计物理方法（新泽西州普林斯顿，1997年）。[23] Ravi Montenegro 和 Prasad Tetali。《马尔可夫链混合时间的数学方面》。Found. Trends Theor. Comput. Sci.，1(3):x+121，2006年。[24] Florentin M¨unch。《图上的非负 Ollivier 曲率、反向 Poincar´e 不等式、Buser 不等式、Liouville 性质、Harnack 不等式及特征值估计》。arXiv 预印本 arXiv:1907.13514，2019年。[25] Florentin M¨unch 和 Justin Salez。《非负曲率马尔可夫链的混合时间与扩张》。Journal de l’École polytechnique — Math´ematiques，10:575–590，2023年3月。[26] Yann Ollivier。《度量空间与马尔可夫链的 Ricci 曲率综述》，Adv. Stud. Pure Math. 第57卷。日本数学会，东京。

[27] Yann Ollivier. 度量空间上马尔可夫链的 Ricci 曲率。《Journal of Functional Analysis》，256(3):810–864，2009年。[28] Matteo Quattropani 和 Federico Sau. 有限维几何上的平均过程及其离散对偶的混合，2021年。[29]Justin Salez. 非负曲率马尔可夫链的截断现象。arXiv 预印本 arXiv:2102.05597，2021年。[30]Justin Salez. 稀疏扩展图具有负曲率。《Geom. Funct. Anal.》，32(6):1486–1513，2022年。[31]Justin Salez. 带蓄水池的排斥过程截断现象的普适性。《Ann. Probab.》，51(2):478–494，2023年。[32] Frank Spitzer. 马尔可夫过程的相互作用。《Advances in Math.》，5:246–290（1970），1970年。[33] Hong-Quan Tran. 带蓄水池的非可逆 SSEP 的截断现象，2022年。