arXiv:2305.04700v1 [math.CA] 8 May 2023

齐次群上的稀疏极大函数

ASWIN GOVINDAN SHERI、JONATHAN HICKMAN 和 JAMES WRIGHT

Abstract. 我们注意到，Ricci–Stein 的经典论证可用于证明齐次群背景下，与某个固定测度的稀疏膨胀相关的极大函数的 L^p 界。这一结果重新得到了一些近期关于 Kor´anyi 球面上的平均以及 Nevo–Thangavelu 引入的一类水平球面平均的研究成果。此外，主定理的适用范围要广泛得多，我们通过若干具体例子探讨其推论。

1. Main result and examples

1.1. 引言。近年来，人们对齐次群 G上几何极大算子的 L^p 映射性质颇感兴趣。本文考虑作用于函数 $f \in C_c(G)$上的算子 $f \mapsto \sup_k |f * \sigma_k|$，其中 σ 是支集位于 G的某个子流形 S 上的测度，σ_k 是 σ 的（自同构）稀疏膨胀，卷积则相对于群运算进行。在海森堡群 $\mathbb{H}^m$的情形下，典型例子可通过取 S （在指数坐标下）为以下形式得到：

1）Korányi 球面 ´ $S := \{(x,\ u) \in \mathbb{H}^m :\ |x|^4 + |u|^2 = 1\}$：见 [11, 20];
2）水平（欧几里得）球面 $S := S^{2m-1} \times \{0\}$：见 [2, 19]。
我们将在下文第 §1.3 节中更详细地讨论这些例子。[1]

在这里，我们注意到，Ricci–Stein 的经典论证 [18] 导出了关于此类稀疏极大函数的一个非常一般且稳健的 L^p 理论。这些方法最初用于研究奇异积分类以及沿齐次子流形的极大算子（见 [18, 引理 4.2]）的有界性；因此，它们在当前语境中具有实用价值也就不足为奇了。尽管如此，鉴于人们对这些问题重新产生了兴趣，现在重新审视 [18] 的方法，并清晰阐述其含义，似乎正逢其时。

1.2. 设置与主要结果。设 $(G, \cdot)$ 是一个齐性群，其自同构膨胀族为 $(\delta_t)_{t>0}$；相关定义将在下文 §2.1 中回顾。给定 G 上的一个有限紧支撑博雷尔测度 σ 以及 $k \in \mathbb{Z}$，定义 σ 的 2^k-膨胀 σ_k，并将 σ 的反射记为 $\tilde{\sigma}$，定义如下。

$$\langle \sigma_k, \phi \rangle := \int_G \phi \circ \delta_{2^k}(x)\, \mathrm{d}\sigma(x) \quad \text{and} \quad \langle \tilde{\sigma}, \phi \rangle := \int_G \phi(x^{-1})\, \mathrm{d}\sigma(x) \qquad \text{适用于 } \phi \in C_c(G)。$$

[1]在许多近期研究中，包括上述引用的研究，作者也同样（且往往主要）致力于证明相关极大算子的稀疏界。而在本文中，我们仅关注 L^p 理论。

对于任意这样的测度 σ，我们考虑与之对应的平均算子

$$A[\sigma]f(x) := f * \sigma(x) = \int_G f(x \cdot y^{-1})\,\mathrm{d}\sigma(y) \qquad \text{for } x \in G,$$

以及稀疏极大函数

$$M[\sigma]f(x) := \sup_{k\in\mathbb{Z}} |A[\sigma_k]f(x)| \qquad \text{for } x \in G,$$

最初定义于 $f \in C_c(G)$。我们感兴趣的是建立关于 σ 的条件，以确保对于所有 $1 < p \leqslant \infty$，$M[\sigma]$ 在 $L^p(G)$ 上有界。

仿照 Ricci–Stein [18]（以及 [6]），我们考虑 σ 的迭代卷积乘积。对于 $N \in \mathbb{N}_0$，我们递归地定义第 N 个卷积乘积 $\sigma^{(N)}$：从 $\sigma^{(0)} = \sigma$ 开始，我们取

$$\sigma^{(N)} := \begin{cases} \sigma^{(N-1)} * \tilde{\sigma} & \text{if } N \text{ is odd,} \\ \sigma^{(N-1)} * \sigma & \text{if } N \geqslant 2 \text{ is even.} \end{cases} \tag{1.1}$$

我们的主要假设是根据 $\sigma^{(N)}$ 在较大的 N 时的正则性性质来表述的。

定义 1.1（曲率假设）。设 σ 是定义在 G 上的有限博雷尔测度。我们称 σ 满足 (CA)，如果以下条件成立：

i) 存在 $N > 0$，使得 $\sigma^{(N)}$ 关于 G 上的 Haar测度绝对连续；ii) 若 h 表示 $\sigma^{(N)}$ 关于 Haar测度的 Radon–Nikodym导数，则存在 $\gamma > 0$ 和 $C_\sigma > 0$，使得

$$\int_G |h(x \cdot y^{-1}) - h(x)|\,\mathrm{d}x + \int_G |h(y^{-1} \cdot x) - h(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant C_\sigma |y|_G^\gamma \quad \text{for } y \in G.$$

此处 $|\cdot|_G$ 表示 G 上齐次范数的一种选取；定义见 §2.1。[2]

根据上述定义，我们的主要定理如下。

定理 1.2. 设 G 为齐次群，σ 为 G 上有限且紧支撑的博雷尔测度。若 σ 满足 (CA)，则对所有 $1 < p \leqslant \infty$，$M[\sigma]$ 在 $L^p(G)$ 上有界。

定理 1.2 推广了文献中的许多结果。在欧几里得情形下，它等价于 Duoandikoetxea 和 Rubio de Francia 的一个经典结果 [7]，该结果讨论了满足傅里叶衰减假设的 σ 所对应的极大估计。对于海森堡群，它蕴含 §1.1 中讨论的球面平均（包括 Kor´anyi 球面和水平球面）的 L^p 有界性。它还蕴含关于沿 G 的齐次子流形取极大函数的 [18, 引理 4.2], 。不过，上述框架具有很强的普适性，还存在大量其他例子，其中一些将在下一小节中介绍。

如前所述，定理 1.2 的证明很大程度上依赖于 [18], 的方法，而这些方法又部分受到 [6]的启发。关键要素包括迭代的 T^*T 论证，这使我们能够利用条件 (CA)，以及针对齐次群情形调整的 Calder´on–Zygmund 理论。

[2]使用齐次范数只是为了方便；在这里，也可以同样用 $|y|_G$ 通常的欧几里得范数 $|y|$来替代。

1.3. 例子。定义 1.1 中的曲率假设适用于广泛的一类测度，因此，定理 1.2 统一并大幅推广了文献中的许多结果。这里我们简要介绍这类测度的一些典型例子；我们将在 §3 中更详细地讨论这些例子及其他例子。

1）欧几里得情形。设 σ 是 $\mathbb{R}^n$ 上有限的紧支撑博雷尔测度。在此情形下，不难证明 (CA) 成立，当且仅当存在某个 $\kappa > 0$ 和常数 $C_\sigma \geqslant 1$，使得

$$|\widehat{\sigma}(\xi)| \leqslant C_\sigma (1+|\xi|)^{-\kappa} \quad \text{for all } \xi \in \widehat{\mathbb{R}}^n, \quad \text{where} \quad \widehat{\sigma}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, \mathrm{d}\sigma(x). \tag{1.2}$$

因此，定理 1.2 得出了 [7] 的一个经典结果。满足 (1.2) 的测度的典型例子包括支撑在 $\mathbb{R}^n$ 上有限型子流形上的光滑密度：例如参见 [21, 第 VIII 章第 3 节.2]。此外，还有许多有趣的“分形”测度。相关文献浩如烟海，无法在此一一综述，但我们提及一些近期具有代表性的例子：源自丢番图逼近理论的测度 [10], 随机过程的实现 [9]，以及各种具有有趣维数性质的非构造性例子 [12]。

2）Kor´anyi 球及其推广。对于 $m \geqslant 1$，令 J 表示 $\mathbb{R}^{2m}$ 上由 $x^\top J y = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m (x_j y_{m+j} - x_{m+j} y_j)$ 给出的辛形式，其中 x、$y \in \mathbb{R}^{2m}$。考虑海森堡群 $\mathbb{H}^m$，我们将其视为赋有非交换群运算 $(x, u)\cdot(y, v) := (x+y, u+v+x^\top J y)$ 的 $\mathbb{R}^{2m+1}$。于是，Kor´anyi 球定义为集合

$$S := \{(x,u) \in \mathbb{R}^{2m}\times\mathbb{R} : |(x,u)|_{\mathbb{H}^m} = 1\} \quad \text{where} \quad |(x,u)|_{\mathbb{H}^m} := \left(|x|^4 + |u|^2\right)^{1/4};$$

也就是说，S 是相对于 Kor´anyi 范数 $|\cdot|_{\mathbb{H}^m}$而言的单位球面。我们取σ 为由环境空间 $\mathbb{R}^{2m+1}$上的勒贝格测度诱导的 S 上的归一化表面测度。

不难证明 σ 满足 (CA)，因此定理 1.2 推出相应的稀疏极大算子 $M[\sigma]$ 对所有 $1 < p \leqslant \infty$均有界。对于$n \geqslant 2$，这恢复了 [11] 的定理 1.2（另见 [20]）。不过，这里的设定可以大幅推广。例如，可以用任意分次李群 G 替代海森堡群，并用 G 中一大类凸集中的任意一个替代 Kor´anyi 球面 S。更具体地说，对于李代数 $\mathfrak{g}$ 中由某个开有界凸集的边界构成的任意解析子流形 Σ，我们可以考虑在 S 上取平均：$= \exp(\Sigma) \subset G$。这些推广的细节将在下文 §3.3 中讨论。

3）水平球面及其推广。回到海森堡群 $\mathbb{H}^m$，现在考虑（欧几里得）球面 $S^{2m-1}\times\{0\} \subseteq \mathbb{R}^{2m+1}$上的归一化表面测度 σ。在这种情况下，算子

$$A[\sigma_k] f(x,u) = \int_{S^{2m-1}} f\big(x - 2^k y, u - 2^k x^\top J y\big)\, \mathrm{d}\sigma(y), \qquad (x,\ u) \in \mathbb{R}^{2m+1}, \tag{1.3}$$

在 $\mathbb{H}^m$ 的水平分布上取椭球的平均值。Nevo–Thangavelu [16] 最早考察了这类平均值（在考虑相对于连续多个膨胀因子定义的“完整”极大函数时），此后相关研究已十分广泛：例如参见 [14, 15, 1, 17, 4, 3, 19, 13]。

与之前一样，σ 满足 (CA)，由此可得 $M[\sigma]$ 的有界性。这一结果重新得到 [2] 的定理 1.1（另见 [19],，其中考察了 $n = 1$ 情形以及对 M´etivier 群的推广），不过，正如 [19], 中所指出的，这类有界性也可直接由 [14] 等早期工作推出。然而，这一框架同样可以大幅推广。在此情形下，自然的做法是在分层群 G 中进行研究（相关定义见 §3.1），使得李代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^{\infty} V_j$ 是分次的，而 V_1 是一个维数为 d、生成 $\mathfrak{g}$ 的向量子空间。我们考虑 V_1 中的（欧几里得）单位球面 S^{d-1}，并通过指数映射将其映入 G。接着，令 σ 为 G 中该球面上的归一化表面测度。曲率假设 (CA) 在这一一般性层面仍然成立。此外，我们还可以将 V_1 中的球面 S^{d-1} 换成其他曲面，其维数甚至可以更低。若解析子流形 Σ 不包含在 V_1 的任何真仿射子空间中，则称其为非退化的。根据这一定义，对于 $S := \exp(\Sigma)$ 上任意光滑、紧支集密度，只要 $\Sigma \subset V_1$ 是非退化解析子流形，(CA) 仍然成立。

4）倾斜球面与扩展。前一个例子的一种有趣变体，是将（1.3）中的球面 S^{2m-1} “倾斜”。令 $v \in \mathbb{R}^{2m}$，现在考虑这些平均算子。

$$A[\sigma_k^v]f(x,u) = \int_{S^{2m-1}} f\big(x - 2^k y, u - 2^{2k}\langle v, y\rangle - 2^k x^\top J y\big)\, \mathrm{d}\sigma(y), \qquad (x,u) \in \mathbb{R}^{2m+1},$$

这对应于在 $S^{2m-1} \times \{0\}$ 上与 σ 的适当“倾斜”变体 σ^v 的伸缩版本进行海森堡卷积。此类平均以及对 M´etivier 群类的自然扩展，已在多项研究 [14, 1, 19]中得到考察。

倾斜测度 σ^v 也满足 (CA)，因此我们再次得到 $M[\sigma]$的有界性。这些结果还可推广到一般的分层的群以及解析子流形 $\Sigma \subseteq V_1$，前提是满足 3) 中所述的非退化假设。然而，我们还可以更进一步。事实上，我们可以用任意解析子流形 $\Sigma \subset \mathfrak{g}$ 替代倾斜球面，只要其投影 $\Pi_1(\Sigma)$ 到 V_1 不包含于 V_1的任何真仿射子空间中即可。这包括本文及上文 3) 中讨论的例子，但也包括一些并非与 G中的某个 d-平面分布相关的例子，例如在 G中对矩曲线 $(t、\ t^2、\ \ldots\ldots、\ t^n)$ 的群平移取平均。我们将在下文 §3.4 中讨论这些推广的细节。

记号约定。给定一列对象 L 和实数 $A、\ B \geqslant 0$，我们写作 $A \lesssim_L B$ 或 $B \gtrsim_L A$，表示对于某个常数 C_L，$A \leqslant C_L B$ 成立；该常数仅依赖于列表 L 中的项目以及底层群的选取 G。[3] 我们写作 $A \sim_L B$，表示 $A \lesssim_L B$ 且 $B \lesssim_L A$。

致谢。第一作者和第二作者感谢 David Beltran 和 Leonardo Tolomeo 在本项目中提出的各种宝贵意见和建议。第一作者获得了马克斯韦尔分析及其应用研究生院（The Maxwell Institute Graduate School in Analysis and its Applications）的资助。该研究生院是一个博士培养中心，其经费由英国工程与自然科学研究委员会（资助项目编号：EP/L016508/01）、苏格兰资助委员会、赫瑞-瓦特大学以及爱丁堡大学共同提供。

[3]我们也省略与 G 相关的各种构造所具有的依赖性，例如齐次范数、$\{X_j^R\}_{j=1}^n$ 右不变向量场的一组基，等等。

2. Proof of Theorem 1.2

2.1. 齐次群。我们首先回顾齐次群理论中的一些基本概念，这些概念与本文的证明相关。此处介绍的大部分内容均可参见经典专著 [8] 的第 1 章。

设 G 为一个连通、单连通的幂零李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$；我们始终默认假设 $\mathfrak{g}$ 是实数域上的有限维空间。在这些假设下，指数映射 $\exp\colon \mathfrak{g}\to G$ 是一个（全局定义的）微分同胚。这使我们可以将 G 与赋予群运算 $(x,y)\mapsto x\cdot y$ 的 $\mathbb{R}^n$ 等同起来。此外，该群运算是一个多项式映射，而 $\mathbb{R}^n$ 上通常的勒贝格测度是 G 的左不变和右不变 Haar测度。我们将维数 n 称为 G 的拓扑维数，有时也将其记为 $\dim G$。

若 $\mathfrak{g}$ 是李代数，则当每个 $\delta_t\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$都是代数自同构[4]，且在 $\mathfrak{g}$ 上存在某个具有正特征值的可对角化线性算子Λ，使得对于所有 $t>0$，$\delta_t:=\exp(\Lambda\log t)$ 时，$(\delta_t)_{t>0}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的一族膨胀。特别地，对于所有 s，$\delta_{st}=\delta_s\circ\delta_t$，$t>0$。在这种情况下，$\Lambda$ 称为膨胀矩阵。

齐次群是一个连通、单连通的幂零李群 G，其李代数 $\mathfrak{g}$ 上赋有一族膨胀 $(\delta_t)_{t>0}$。此时，映射 $\exp\circ\delta_t\circ\exp^{-1}\colon G\to G$ 是群自同构，称为 G 的膨胀，也记作 δ_t。

以下令 G 为一个齐次群 G。G 的齐次维数定义为

$$Q:=\operatorname{trace}(\Lambda)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j,$$

其中 Λ 是膨胀矩阵，$\lambda_j>0$ 是 Λ 的特征值（按重数计）。于是，G 上的 Haar 测度满足重要的缩放性质

$$t^{-Q}\int_G f\circ\delta_{t^{-1}}(x)\,\mathrm{d}x=\int_G f(x)\,\mathrm{d}x\qquad\text{for all } f\in L^1(G) \text{ and } t>0.$$

G 上的齐次范数是一个连续映射 $|\cdot|_G\colon G\to[0,\infty)$，它在 $G\backslash\{0\}$ 上为 C^∞，并满足：

a) 对所有 $x\in G$ 和 $t>0$，$|x^{-1}|_G=|x|_G$ 且 $|\delta_t x|_G=t|x|_G$；

b) 当且仅当 $x=0$ 时，$|x|_G=0$。

今后，我们假设 G 上的齐次范数 $|\cdot|_G$ 已选定；不难看出，这样的范数至少存在一个。此外，可以证明存在常数 $C_G\geqslant 1$，使得

$$|x\cdot y|_G\leqslant C_G\big(|x|_G+|y|_G\big)\qquad\text{for all } x,\,y\in G. \tag{2.1}$$

最后，我们固定 $\{X_1,\dots,X_n\}\subset\mathfrak{g}$ 为膨胀矩阵 Λ的一组正交特征向量基，使得 X_j 的特征值为 λ_j，且 $0<\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$。因此，对于 $1\leqslant j\leqslant n$，我们有 $\delta_t X_j=t^{\lambda_j}X_j$。此外，每个 X_j 都对应于 G 上的一个右不变向量场 X_j^R，该向量场尤其满足

$$\frac{\partial}{\partial t}g(\exp(tX_j)\cdot x)=(X_j^R g)(\exp(tX_j)\cdot x) \tag{2.2}$$

[4]使得 $\delta_t\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是一个线性映射，并且 $\delta_t[X,Y]_{\mathfrak{g}}=[\delta_t X,\delta_t Y]_{\mathfrak{g}}$ 对所有 $X,Y\in\mathfrak{g}$均成立，其中 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 上的李括号。

对于所有 $g \in C^1(G)$ 和 $x \in G, t \in \mathbb{R}$。最后，该映射

$$\Upsilon\colon \mathbb{R}^n \to G, \qquad \Upsilon\colon (t_1, \dots, t_n) \mapsto \exp(t_n X_n) \cdot \ldots \cdot \exp(t_1 X_1)$$

是一个整体微分同胚（关于这一事实的证明，见 [8, 引理 1.31]）。

2.2. Littlewood–Paley 理论。以下固定一个齐次群 G 及其膨胀族 $(\delta_t)_{t>0}$。我们将使用一种适用于此情形的经典 Littlewood–Paley分解的变体。考虑一个函数 $\psi \in C_c^\infty(G)$，它满足零均值条件，即

$$\int_G \psi = 0$$

并构造其膨胀

$$\psi_k(x) := 2^{-kQ} \psi \circ \delta_{2^{-k}}(x);$$

此处 Q 是 G的齐次维数，定义见 §2.1。考虑卷积算子 $f \mapsto f * \psi_k$，其中 $f \in L^1(G)$。适当选取 ψ后，这些算子起到经典 Littlewood–Paley 频率投影的作用。

命题 2.1. 设 G 为一个齐次群。存在一个零均值的 $\psi \in C_c^\infty(G)$，使得

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f * \psi_k \qquad \textit{for all } f \in C_c(G), \tag{2.3}$$

其中，对所有 $1 < p \leqslant \infty$，收敛均以 L^p 意义成立。

这一结果是众所周知的（例如，可以由 [5, 命题 3.4] 推导得出）；不过，为了完整起见，我们在附录 A 中给出一个直接的证明。

2.3. 标准化约化。我们采用一系列标准约化，将极大算子的研究转化为证明一族线性算子的某些 L^2 型和弱型 $(1,1)$ 界。

消去性。为我们的算子引入一些额外的消去性很有用。设 $\phi \in C_c^\infty(G)$ 是一个非负函数，使得

$$\int_G \phi = \sigma(G).$$

注意，$\nu := \sigma - \phi$ 是 G 上的紧支集有符号博雷尔测度，使得 $\|\nu\| < \infty$，且 ν 在以下意义下为零均值:

$$\nu(G) = 0.$$

显然，我们有一个逐点不等式

$$M[\sigma] f(x) \leqslant M[\nu] f(x) + M[\phi] f(x).$$

此外，$M[\phi]$ 是 G 上的 Hardy–Littlewood极大函数的一种变体。众所周知（例如，参见 [8, 推论 2.5]），它在 $L^p(G)$ 上对所有$1 < p \leqslant \infty$都有界。因此，只需估计极大函数 $M[\nu]$即可。

由平方函数控制。利用命题 2.1，我们可以选取一个满足 (2.3) 的零均值函数 $\psi \in C_c^\infty(G)$ 。考虑极大函数族

$$M_\ell[\nu]f := M[\psi_\ell * \nu]f = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |f * \psi_{k+\ell} * \nu_k| \qquad \text{for } f \in C_c(G),$$

对所有 $\ell \in \mathbb{Z}$均有定义，因此我们可以逐点控制

$$M[\nu]f(x) \leqslant \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} M_\ell[\nu]f(x) \leqslant \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} S_\ell[\nu]f(x) \tag{2.4}$$

其中每个 $S_\ell[\nu]f$ 都是相应的平方函数

$$S_\ell[\nu]f := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f * \psi_{k+\ell} * \nu_k|^2\Big)^{1/2}.$$

因此，定理 1.2 是以下命题的推论。

命题 2.2。对于所有 $1 < p \leqslant 2$，存在某个 $\varepsilon(p) > 0$ 使得

$$\|S_\ell[\nu]f\|_{L^p(G)} \lesssim_{\sigma,p} 2^{-\varepsilon(p)|\ell|}\|f\|_{L^p(G)}$$

对所有 $f \in C_c(G)$ 和所有 $\ell \in \mathbb{Z}$均成立。

根据我们之前的观察（尤其是 (2.4)），命题 2.2 立即推出定理 1.2 在受限范围 $1 < p \leqslant 2$ 内成立；其余情形则可通过与 $p = \infty$ 的平凡估计插值推出。

线性化平方函数。为证明命题 2.2，我们采用标准的随机化过程，将平方函数线性化。设 $r = (r_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是一列独立同分布的随机符号，其中每个 r_k 以相同概率取值 $+1$ 和 -1 。考虑函数

$$T_{\ell,r}f := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_k T_\ell^k f \qquad \text{where} \qquad T_\ell^k f := f * \psi_{k+\ell} * \nu_k$$

根据 Khintchine 不等式，要证明命题 2.2，只需证明：对所有 $1 < p \leqslant 2$ ，都存在某个 $\varepsilon(p) > 0$ ，使得范数估计

$$\|T_{\ell,r}\|_{L^p(G)\to L^p(G)} \lesssim_p 2^{-\varepsilon(p)|\ell|} \tag{2.5}$$

对所有 $\ell \in \mathbb{Z}$ 均成立，且常数与 r 的实现无关。此外，(2.5) 又可由一对端点估计推出。

引理 2.3. 存在 $\rho > 0$ 使得

$$\|(T_\ell^k)^* T_\ell^j\|_{L^2(G)\to L^2(G)} + \|T_\ell^k (T_\ell^j)^*\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \lesssim_\sigma \min\{2^{-\rho|\ell|}, 2^{-\rho|j-k|}\} \tag{2.6}$$

对所有 j、k、$\ell \in \mathbb{Z}$, 均成立。

引理 2.4. 对所有 $\varepsilon > 0$，有

$$\|T_{\ell,r}\|_{L^1(G)\to L^{1,\infty}(G)} \lesssim_{\sigma,\varepsilon} 2^{\varepsilon|\ell|}, \tag{2.7}$$

其中隐含常数与 r 和 $\ell \in \mathbb{Z}$ 的实现无关。

一旦证明了引理 2.3 和引理 2.4，命题 2.2（从而定理 1.2）便可直接推出。

命题 2.2 的证明。固定 $\ell \in \mathbb{Z}$。结合引理 2.3 与经典的 Cotlar–Stein 引理（例如参见 [21, 第七章，§2]），我们可以推出存在 $\rho > 0$（不一定与引理 2.3 的陈述中相同），使得

$$\|T_{\ell,r}\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \lesssim_\sigma 2^{-\rho|\ell|}, \tag{2.8}$$

其中隐含常数与 r 的实现无关。固定 $1 < p \leqslant 2$。通过对 (2.8) 与引理 2.4 中的弱 L^1 估计进行插值（取 ε 足够小，具体取值依赖于 p），我们得到 (2.5)。如前所述，利用 Khintchine 不等式的标准论证随即给出命题 2.2 中的平方函数估计。□

2.4. 几乎正交性。本小节给出引理 2.3 的证明。为此，引入对曲率假设的一个略微推广会比较方便。设 σ 是 G 上的有限博雷尔测度。若 σ 可写成和式 $\sigma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_m$，其中每个 σ_j 都是 G 上满足 (CA) 的有限博雷尔测度，则称 σ 满足 (ΣCA)。于是，引理 2.3 可由以下结果直接推出。

引理 2.5. 设 μ, ϑ 是定义在 G 上的有限紧支撑博雷尔测度，且具有零均值并满足 (ΣCA)。那么存在 $\rho > 0$，使得

$$\|A[\mu_a * \vartheta_b]\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \lesssim_{\mu,\vartheta} 2^{-\rho|a-b|} \qquad \textit{for all } a, b \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

证明（引理 2.5 $\implies$ 引理 2.3）。展开定义后，我们可以写成

$$(T_\ell^k)^*(T_\ell^j) = A[\psi_{j+\ell} * \nu_j * \tilde{\nu}_k * \tilde{\psi}_{k+\ell}] \tag{2.10}$$

and

$$(T_\ell^k)(T_\ell^j)^* = A[\tilde{\nu}_j * \tilde{\psi}_{j+\ell} * \psi_{k+\ell} * \nu_k]. \tag{2.11}$$

回顾一下，测度 ψ、ν 均为零均值。此外，ϕ 满足 (CA)，而 $\nu = \sigma - \phi$ 是满足 (CA) 的测度之差。因此，当测度 μ 和 ϑ 取自集合 $\tilde{}\{\psi、\ \nu、\ \psi、\ \tilde{\nu}\}$ 时，我们有形如 (2.9) 的估计。为了对 (2.10) 和 (2.11) 中的算子进行估计，考虑表 1 中列出的测度对。因此，由引理 2.5，我们可以找到 $\rho > 0$，使得

$$\|A[\psi_{j+\ell} * \nu_j]\|_{L^2(G)\to L^2(G)} + \|A[\tilde{\nu}_j * \tilde{\psi}_{j+\ell}]\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \lesssim_\sigma 2^{-\rho|\ell|}, \tag{2.12}$$

and

$$\|A[\nu_j * \tilde{\nu}_k]\|_{L^2(G)\to L^2(G)} + \|A[\tilde{\psi}_{j+\ell} * \psi_{k+\ell}]\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \lesssim_\sigma 2^{-\rho|k-j|}. \tag{2.13}$$

为了从上述估计推出引理 2.3 的结论，我们反复应用杨氏不等式[5]，从而得到

$$\begin{aligned}&\|(T_\ell^k)^*(T_\ell^j)\|_{L^2(G)\to L^2(G)}\\ &\quad\lesssim_\sigma \min\left\{\|A[\psi_{j+\ell} * \nu_j]\|_{L^2(G)\to L^2(G)}, \|A[\nu_j * \tilde{\nu}_k]\|_{L^2(G)\to L^2(G)}\right\}\end{aligned}$$

[5]关于齐次群上的杨氏不等式，参见 [8, 命题 1.18]。该参考文献只讨论函数情形；不过，测度情形的版本也可用类似的方法证明。

算子	μ	ϑ	a	b	$2^{-\lvert a-b\rvert}$
$A[\psi_{j+\ell} * \nu_j]$	ψ	ν	$j+\ell$	j	$2^{-\lvert\ell\rvert}$
$A[\nu_j * \tilde{\nu}_k]$	ν	$\tilde{\nu}$	j	k	$2^{-\lvert k-j\rvert}$
$A[\tilde{\nu}_j * \tilde{\psi}_{j+\ell}]$	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\psi}$	j	$j+\ell$	$2^{-\lvert\ell\rvert}$
$A[\tilde{\psi}_{j+\ell} * \psi_{k+\ell}]$	$\tilde{\psi}$	ψ	$j+\ell$	$k+\ell$	$2^{-\lvert k-j\rvert}$

TABLE 1. 引理 2.5 的应用。

and

$$\|(T_\ell^k)(T_\ell^j)^*\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \lesssim_\sigma \min\Big\{\|A[\tilde{\nu}_j * \tilde{\psi}_{j+\ell}]\|_{L^2(G)\to L^2(G)}, \|A[\tilde{\psi}_{j+\ell} * \psi_{k+\ell}]\|_{L^2(G)\to L^2(G)}\Big\}.$$

将这些不等式与 (2.12) 和 (2.13) 结合起来，我们得到 (2.6)，从而完成了引理 2.3 的证明。□

证明（引理 2.5）。固定满足引理陈述的 μ 和 ϑ，以及满足 $a \leqslant b$ 的 a、$b \in \tilde{\mathbb{Z}}$。$A[\mu_a * \vartheta_b]$ 的伴随算子是算子 $A[\vartheta_b * \tilde{\mu}_a]$。由于对 μ 和 ϑ 的假设在反射下保持不变，只需证明存在某个 $\rho > 0$ 使得

$$\|A[\mu_a * \vartheta_b]\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \lesssim_{\mu,\vartheta} 2^{\rho(a-b)}.$$

由线性性，不失一般性，我们还可以假设 ϑ 满足 (CA)。通过简单的缩放论证，

$$\|A[\mu_a * \vartheta_b]\|_{L^2(G)\to L^2(G)} = \|A[\mu_{a-b} * \vartheta]\|_{L^2(G)\to L^2(G)}. \tag{2.14}$$

令 $\vartheta^{(n)}$ 表示 (1.1) 中引入的 n 重卷积乘积。为方便记号，记

$$A^{(n)} := A[\mu_{a-b} * \vartheta^{(n)}].$$

我们断言

$$\|A^{(n)}\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \leqslant \|\mu\|^{1/2}\|\vartheta\|^{n/2}\|A^{(n+1)}\|^{1/2}_{L^2(G)\to L^2(G)} \tag{2.15}$$

对任意 $n \in \mathbb{N}_0$均成立。

为证明该断言，我们使用希尔伯特空间恒等式

$$\|A^{(n)}\|_{L^2(G)\to L^2(G)} = \|(A^{(n)})^*(A^{(n)})\|^{1/2}_{L^2(G)\to L^2(G)}.$$

然而，

$$(A^{(n)})^*(A^{(n)}) = A[\mu_{a-b} * \vartheta^{(n)} * \mathcal{R}(\vartheta^{(n)}) * \tilde{\mu}_{a-b}]$$

其中 $\mathcal{R}$ 将测度 ϱ映射为其反射 $\tilde{\varrho}$。由 (1.1) 可推得

$$\mu_{a-b} * \vartheta^{(n)} * \mathcal{R}(\vartheta^{(n)}) * \tilde{\mu}_{a-b} = \mu_{a-b} * \vartheta^{(n+1)} * \mathcal{R}(\vartheta^{(n-1)}) * \tilde{\mu}_{a-b}.$$

因此，通过反复应用杨氏不等式，我们得到结论 (2.15)（注意，根据 (1.1) 的定义，第 $(n-1)$ 个卷积乘积涉及 n 个测度的卷积）。

由 (2.14) 并反复应用 (2.15)，我们可得

$$\|A[\mu_a * \vartheta_b]\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \lesssim_{\mu,\vartheta} \|A^{(n)}\|^{1/2^n}_{L^2(G)\to L^2(G)} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.16}$$

由于 ϑ 满足 (CA)，存在某个 $N \in \mathbb{N}_0$ ，使得 $\vartheta^{(N)}$ 相对于 G 上的 Haar测度绝对连续，其 Radon–Nikodym 导数为h ；此外，还存在某个 $\gamma > 0$ ，使得

$$\int_G \big|h(y^{-1}\cdot x) - h(x)\big|\,\mathrm{d}x \lesssim_\vartheta |y|_G^\gamma \qquad \text{for all } y \in G. \tag{2.17}$$

由 (2.16) 可知，只需针对该指数 N估计 $A^{(N)}$ 的算子范数。

根据杨氏不等式， $A^{(N)}$ 的算子界可由对$\|\mu_{a-b} * \vartheta^{(N)}\|_{L^1(G)}$的估计推出。由于 μ 为零均值，因此

$$\|\mu_{a-b} * \vartheta^{(N)}\|_{L^1(G)} = \|\mu_{a-b} * h\|_{L^1(G)} = \int_G \left|\int_G \big(h(y^{-1}\cdot x) - h(x)\big)\,\mathrm{d}\mu_{a-b}(y)\right|\mathrm{d}x.$$

应用三角不等式、富比尼–托内利定理以及 (2.17)，可得

$$\|\mu * \vartheta^{(N)}\|_{L^1(G)} \lesssim_\vartheta \int_G |y|_G^\gamma\,\mathrm{d}|\mu_{a-b}|(y) = 2^{\gamma(a-b)}\int_G |y|_G^\gamma\,\mathrm{d}|\mu|(y).$$

因此，

$$\|A[\mu_a * \vartheta_b]\|_{L^2(G)\to L^2(G)} \lesssim_{\mu,\vartheta} 2^{\rho(a-b)} \qquad \text{for } \rho := 2^{-N}\gamma$$

证明至此完成。 □

2.5. Calder´on–Zygmund 估计。本小节给出引理 2.4 的证明。论证基于适用于齐次群的 Calder´on–Zygmund 理论。

证明（引理 2.4）。记 K_ℓ and K_ℓ^k分别为 $T_{\ell,r}$ and T_ℓ^k 的核，使得

$$K_\ell = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_k K_\ell^k \qquad \text{and} \qquad K_\ell^k = \psi_{k+\ell} * \nu_k = (\psi_\ell * \nu)_k. \tag{2.18}$$

根据适用于齐次群背景的 Calder´on–Zygmund 理论（例如参见 [21, 第 I 章，第 §5] 节），要证明（ 2.7 ），只需验证 H¨ormander 条件

$$\sup_{y\in G}\int_{|x|_G \geqslant C_0|y|_G} |K_\ell(y^{-1}\cdot x) - K_\ell(x)|\,\mathrm{d}x \lesssim_\varepsilon 2^{\varepsilon|\ell|} \qquad \text{for all } \varepsilon > 0 \tag{2.19}$$

对于某个固定常数 $C_0 > 1$。事实上，我们取 $C_0 := 2C_G$ 为 $C_G \geqslant 1$ 三角不等式（2.1）中出现的常数。

由（2.18）可知，（2.19）显然由以下估计推出

$$\sup_{y\in G}\sum_{k\in\mathbb{Z}} I_\ell^k(y) \lesssim_\varepsilon 2^{\varepsilon|\ell|} \qquad \text{for all } \varepsilon > 0 \tag{2.20}$$

其中

$$I_\ell^k(y) := \int_{|x|_G \geqslant C_0|y|_G} |K_\ell^k(y^{-1}\cdot x) - K_\ell^k(x)|\,\mathrm{d}x.$$

为证明 (2.20)，我们首先确定 $y \in G$，使得 $I_\ell^k(y) = 0$。通过展开 K_ℓ^k 的定义，我们可以写出

$$I_\ell^k(y) = \int_{|x|_G \geqslant C_0 2^{-k}|y|_G} |(\psi_\ell * \nu)((\delta_{2^{-k}} y)^{-1} \cdot x) - (\psi_\ell * \nu)(x)| \, \mathrm{d}x. \tag{2.21}$$

由于 ν 和 ψ 均具有紧支集，因此可以找到某个 $R > 1$，使得 $\psi_\ell * \nu$ 的支集包含在球 $B(0, R2^{\max\{\ell,\ 0\}})$ 内。令 $C := 2R$。我们断言

$$I_\ell^k(y) = 0 \qquad \text{whenever} \quad |y|_G \geqslant C 2^{k+\max\{\ell,0\}}. \tag{2.22}$$

为证明这一点，固定 $y \in G$，使得 $|y|_G \geqslant C2^{k+\max\{\ell,\ 0\}}$。根据 (2.21)，只需验证

$$|(\delta_{2^{-k}} y)^{-1} \cdot x|_G, \ |x|_G \geqslant C 2^{\max\{\ell,0\}} \qquad \text{whenever} \quad |x|_G \geqslant C_0 |\delta_{2^{-k}} y|_G.$$

$|x|_G$ 上的下界显然成立。另一方面，由 (2.1) 以及我们对 C_0的选取，可推出

$$|(\delta_{2^{-k}} y)^{-1} \cdot x|_G \geqslant |\delta_{2^{-k}} y|_G \geqslant C 2^{\max\{\ell,0\}}.$$

因此，我们已经证明了 (2.22)。

根据杨氏不等式，核 K_ℓ^k 的 L^1 范数一致有界。因此，我们得到一致估计

$$I_\ell^k(y) \lesssim 1 \qquad \text{for any } k, \ell \in \mathbb{Z}. \tag{2.23}$$

为了对 k 求和，我们需要针对某些指数对改进 (2.23)，方法是建立一个关于 $k + \ell$ 具有几何衰减的估计。关键工具是 G 上的中值定理的一种变体。

引理 2.6（中值定理）。令 $g \in C_c^1(G)$。对于任意 $z \in G$，我们有

$$\int_G |g(z \cdot x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \lesssim \sum_{j=1}^n |z|_G^{\lambda_j} \|X_j^R g\|_{L^1(G)}.$$

引理 2.6 是 [8, 定理 1.33] 的一个变体；为完整起见，我们在本节末尾给出其证明。这里，λ_j 是膨胀矩阵 Λ 的特征值，而 X_j^R是 §2.1 中定义的右不变向量场。

固定 $k, \ell \in \mathbb{Z}$。放宽 (2.21) 中的积分区域后，我们看到，

$$\begin{aligned} I_\ell^k(y) &\leqslant \int_G |(\psi_\ell * \nu)((\delta_{2^{-k}} y)^{-1} \cdot x) - (\psi_\ell * \nu)(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_G \left| \int_G \psi_\ell((\delta_{2^{-k}} y)^{-1} \cdot x \cdot z^{-1}) - \psi_\ell(x \cdot z^{-1}) \, \mathrm{d}\nu(z) \right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \|\nu\| \int_G |\psi_\ell((\delta_{2^{-k}} y)^{-1} \cdot x) - \psi_\ell(x)| \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

我们将 $g = \psi_\ell$ 和 $z = (\delta_{2^{-k}} y)^{-1}$ 代入引理 2.6。根据 (2.2) 以及恒等式 $\delta_{2^{-\ell}} X_j = 2^{-\ell\lambda_j} X_j$，可得 $X_j^R \psi_\ell = 2^{-\ell\lambda_j} (X_j^R \psi)_\ell$。因此，我们推导出

$$I_\ell^k(y) \lesssim_\sigma \sum_{j=1}^n (2^{-k}|y|_G)^{\lambda_j} \|X_j^R(\psi_\ell)\|_{L^1(G)} = \sum_{j=1}^n (2^{-(k+\ell)}|y|_G)^{\lambda_j} \|X_j^R \psi\|_{L^1(G)}.$$

结合这一结果与平凡估计 (2.23)，我们得到

$$I_\ell^k(y) \lesssim_\sigma \min\Big\{1, \sum_{j=1}^n (2^{-(k+\ell)}|y|_G)^{\lambda_j}\Big\}. \tag{2.24}$$

为完成证明，我们分两种情况讨论。

情形 1：$\ell \geqslant 0$。由 (2.22) 和 (2.24)，可推得

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} I_\ell^k(y) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |y|_G\leqslant C2^{\ell+k}}} I_\ell^k(y) \quad \lesssim_\sigma \sum_{j=1}^n (2^{-\ell}|y|_G)^{\lambda_j}\Big(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ C^{-1}2^{-\ell}|y|_G\leqslant 2^k}} 2^{-k\lambda_j}\Big) \lesssim 1.$$

这是所需不等式 (2.20) 的一个强版本。

情形 2：$\ell < 0$。鉴于 (2.22)，我们可以将求和拆分为

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} I_\ell^k(y) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |y|_G\leqslant C2^k}} I_\ell^k(y) = \sum_{k\in\mathcal{A}_\ell(y)} I_\ell^k(y) + \sum_{k\in\mathcal{B}_\ell(y)} I_\ell^k(y)$$

其中

$$\mathcal{A}_\ell(y) := \{k\in\mathbb{Z} : 2^{-k}|y|_G \leqslant C2^\ell\},$$
$$\mathcal{B}_\ell(y) := \{k\in\mathbb{Z} : C2^\ell < 2^{-k}|y|_G \leqslant C\}.$$

我们对右侧和式中的每一项应用 (2.24)。当 k 取较大值时，可得估计

$$\sum_{k\in\mathcal{A}_\ell(y)} I_\ell^k(y) \lesssim_\sigma \sum_{j=1}^n (2^{-\ell}|y|_G)^{\lambda_j}\Big(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ C^{-1}2^{-\ell}|y|_G\leqslant 2^k}} 2^{-k\lambda_j}\Big) \lesssim 1.$$

另一方面，当 k 取较小值时，我们有

$$\sum_{k\in\mathcal{B}_\ell(y)} I_\ell^k(y) \lesssim_\sigma \#\mathcal{B}_\ell(y) \lesssim |\ell|.$$

因此，我们再次得到所需的不等式 (2.20)。

无论哪种情况，我们都得到 (2.20)，从而完成引理 2.4 的证明。 □

2.6. 一个平均值估计。还需给出引理 2.6 证明的细节。

证明（引理 2.6）。首先考虑形如 $z_j = \exp(\pm t_j X_j)$ 的元素，其中 $1 \leqslant j \leqslant n$ 和 $t_j > 0$。根据右不变性性质 (2.2)，我们有

$$|g(z_j\cdot x) - g(x)| = \Big|\int_0^{t_j} \frac{\partial}{\partial s} g(\exp(\pm sX_j)\cdot x)\,\mathrm{d}s\Big| = \Big|\int_0^{t_j} (X_j^R g)(\exp(\pm sX_j)\cdot x)\,\mathrm{d}s\Big|.$$

因此，通过交换积分次序并利用 Haar测度的平移不变性，

$$\int_G |g(z_j\cdot x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant |t_j|\|X_j^R g\|_{L^1(G)}. \tag{2.25}$$

现在考虑任意一个元素 $z \in G\backslash\{0\}$。如 §2.1 中所述，映射

$$\Upsilon(t_1,\dots,t_n) := \exp(t_nX_n)\cdot\ldots\cdot\exp(t_1X_1)$$

是一个整体微分同胚，因此 z 可以唯一地写成

$$z = z_n \cdot \ldots \cdot z_1 \qquad \text{where} \qquad z_j := \exp(t_j X_j)$$

对于某些 $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$。通过取 $\zeta_0 := 0$ and 定义一列群元素

$$\zeta_j := z_j \cdot \ldots \cdot z_1 \qquad \text{for } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

使得 $z = \zeta_n$。因此我们有

$$g(z \cdot x) - g(x) = \sum_{j=1}^{n} \big(g(\zeta_j \cdot x) - g(\zeta_{j-1} \cdot x) \big) = \sum_{j=1}^{n} \big(g(z_j \cdot x_j) - g(x_j) \big)$$

其中 $x_j := \zeta_{j-1} \cdot x$。通过反复应用上述情形中的不等式 (2.25),

$$\int_G |g(z \cdot x) - g(x)| \mathrm{d}x \leqslant \sum_{j=1}^{n} |t_j| \|X_j^R g\|_{L^1(G)} \lesssim \sum_{j=1}^{n} |z|_G^{\lambda_j} \|X_j^R g\|_{L^1(G)}, \tag{2.26}$$

如所需。注意，(2.26) 中的最后一步由不等式推出

$$|z|_G^{-1} \sum_{j=1}^{n} |t_j|^{1/\lambda_j} \leqslant \sup \Big\{ \sum_{j=1}^{n} |s_j|^{1/\lambda_j} : |\exp(s_n X_n) \cdot \ldots \cdot \exp(s_1 X_1)|_G \leqslant 1 \Big\} \lesssim 1,$$

而这又是群膨胀定义的直接推论。 □

3. Analysis of the examples

3.1. 分次群与分层群。我们研究定理 1.2 在分次群与分层群背景下的示例应用；现回顾相关定义（更多细节请参见 [8, 第 1] 章）。

具有李括号 $[\cdot,\cdot]$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 若存在一个向量空间分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^{\infty} V_j \qquad \text{where} \qquad [V_i, V_j]_{\mathfrak{g}} \subseteq V_{i+j} \quad \text{for } i, j \geqslant 1; \tag{3.1}$$

其中，除有限多个向量空间 V_j 外，其余均等于 $\{0\}$。若 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的连通、单连通幂零李群，则由该分次结构自动得到 $\mathfrak{g}$ 上的自然膨胀结构，因此 G 是一个齐次群。

若李代数 $\mathfrak{g}$ 是分层的，即它是分次的且 V_1 作为代数生成 $\mathfrak{g}$；在此情况下，若 $\mathfrak{g}$ 的步长为 m，则

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j \qquad \text{where} \qquad [V_1, V_j]_{\mathfrak{g}} = V_{j+1} \quad \text{for } 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{3.2}$$

若李群 G 是一个分次群（分别地，分层群），则称其为分次群（分别地，分层群），当且仅当它是一个齐次群，且其李代数 $\mathfrak{g}$ 是分次的（分别地，分层的）。

我们可以通过Baker–Campbell–Hausdorff公式将 $\mathfrak{g}$ 上的李括号与 G 上的群论交换子联系起来。特别地，对于 x、 $y \in G$，定义

$$[x, y]_G := x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}.$$

然后，根据Baker–Campbell–Hausdorff公式,

$$[\exp(X), \exp(Y)]_G = \exp\big([X, Y]_{\mathfrak{g}} + e_3(X, Y) \big) \tag{3.3}$$

对于所有的 X、$Y \in \mathfrak{g}$，其中 $e_3(X、Y)$ 是 X 和 Y 的阶数至少为3的李括号的线性组合。

3.2. 解析子流形的检验条件。设 G 为一个齐次群，S 为一个光滑子流形。若博雷尔测度 σ 在 G 上具有如下形式：$\eta \mathrm{d}\sigma_S$，其中 $\eta \in C_c^\infty(S)$ 是 S 上的一个光滑紧支集函数，而 σ_S 是 G上的 Haar测度所诱导的 S 上的自然曲面测度，则称 σ 为 S 上的C_c^∞-密度。

我们考虑一些检验条件，以确保 S 上的任意 C_c^∞-密度都满足 (CA)。对于解析子流形，Ricci– Stein [18]给出了一个非常简单的充分条件。

命题 3.1（推论 2.3, [18]）。设 S 是齐次群 G的一个连通解析子流形。若 S 生成群 G，则 σ 上的任意 C_c^∞-密度都满足 (CA)。

这里我们称集合 $S \subseteq G$ 生成 G，如果 $G = \langle S \rangle$，其中

$$\langle S \rangle := \{s_1 \cdot \ldots \cdot s_N : s_1, \ldots, s_N \in S \cup \tilde{S}\} \tag{3.4}$$

对于 $\tilde{S} := \{s^{-1} : s \in S\}$。Ricci–Stein [18] 在表面上较弱的条件下工作，即 $G = \operatorname{clos}(\langle S \rangle)$；然而，在我们考虑的所有情形中（也就是说，对于 S 一个连通解析子流形），这些条件最终都等价。

我们指出，[18, 推论 2.3] 中的结果实际上稍微更一般。在那里，作者考虑了一族连通解析子流形 S_j，其中$1 \leqslant j \leqslant N$使得迭代乘积集 $S_1 \cdot \ldots \cdot S_N$包含 G 的一个非平凡开子集。对于每个 j，固定 σ_j 在 S_j 上的一个光滑密度，并考虑卷积乘积 $\sigma_1 * \cdots * \sigma_N$。为得到命题 3.1，我们选择使 $\tilde{S_j}$在 S 与反射 S 之间交替，并相应地使σ_j 在 σ 与 $\tilde{\sigma}$之间交替。根据 [18, 命题 1.1], ，假设 S 生成 G意味着存在某个 N，使得 $S_1 \cdot \ldots \cdot S_N$包含 G的一个非平凡开子集，因此 [18, 推论 2.3] 适用。[6]

3.3. 科尔´ányi 球面及其扩展。我们回到 §1.3 第 2）节讨论过的科尔´ányi 球面及其扩展这一例子。这里我们在分次李群 G with $\dim G \geqslant 2$ 的框架下进行讨论。利用命题 3.1，我们验证(CA) 适用于一大类测度；在指数坐标下，这些测度支集于凸域的边界上。

引理 3.2. 设 G 为一个分次李群，且 $\dim G \geqslant 2$，并假设 Ω 是 $\mathfrak{g}$ with analytic boundary $\Sigma := \partial\Omega$ 中的一个开凸域。那么，$\exp(\Sigma)$ 上的任意 C_c^∞-密度都满足 (CA)。

引理 3.2 适用于海森堡群中的科尔´ányi 球面，因此，根据定理 1.2，我们得到对 [11, 定理 1.2] 的重要扩展。

[6]或者，如果 $e \in S$（在极大函数的应用中，我们总可以假设这一点），那么 S 生成 G这一条件等价于

$$G = \bigcup_{N=1}^{\infty} S_1 \cdot \ldots \cdot S_N$$

对于如上所定义的 S_j。于是，利用贝尔纲定理，很容易证明存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得 $S_1 \cdot \ldots \cdot S_N$包含一个非平凡的开集。

证明（引理 3.2）。根据命题 3.1，只需证明 $\exp(\Sigma)\cdot\exp(\Sigma)$在 G 中包含一个开球（例如，相对于齐次范数定义）。事实上，若此成立，则 $\exp(\Sigma)$ 必定生成原点附近的一个开球 B。利用Baker–Campbell–Hausdorff公式，给定 $x\in G$，存在某个 $y\in B$和 $N\in\mathbb{N}$，使得 $x=y^N=y\cdot\ldots\cdot y$，因此 $\exp(\Sigma)$ 生成 G。

设 $\mathfrak{g}$ 为与 G 相关联的李代数，并假设它具有如 (3.1) 所示的分次。对于 $X\in\mathfrak{g}$，定义线性映射

$$\Phi_X\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\qquad \Phi_X(Y)\colon Y\mapsto[X,Y]_{\mathfrak{g}}.$$

关键断言是，对于任意 $X\in\mathfrak{g}$，核 $\ker\Phi_X$ 的维数至少为 2。

暂且假设该断言成立，我们作如下论证。不失一般性，设 $B_G(0,1):=\{x\in G:|x|_G<1\}\subseteq\exp(\Omega)$。取 $x\in B_G(0,1)$，并令 $X:=\exp^{-1}(x)$。设 H_X 是 $\ker\Phi_X$ 的一个二维子空间，并令 S^{n-1} 表示 $\mathfrak{g}$ 中关于欧几里得范数的单位球面。由 Ω 的凸性，对于每个 $W\in S^{n-1}\cap H_X$，存在唯一的实数 $t(W),s(W)>0$，使得

$$X+t(W)W,\quad X-s(W)W\in\Sigma.$$

其中 $t(W)W$和 $s(W)W$是 W的通常数乘。此外，映射

$$F\colon S^{n-1}\cap H_X\to\mathbb{R},\qquad F\colon W\mapsto t(W)-s(W)$$

是连续的。显然，$t(-W)=s(W)$和 $s(-W)=t(W)$，因此 $F(-W)=-F(W)$。集合 $S^{n-1}\cap H_X$是一个一维（欧几里得）球面。由介值定理，存在某个 $W_x\in S^{n-1}\cap H_X$使得 $F(W_x)=0$，或者等价地，$t(W_x)=s(W_x)$。由于 $W_x\in H_X$，根据 Baker–Campbell–Hausdorff公式以及李括号的双线性，

$$x\cdot x=x\cdot w_x\cdot w_x^{-1}\cdot x\in\exp(\Sigma)\cdot\exp(\Sigma),\qquad \text{where } w_x:=\exp(t(W_x)W_x).$$

由于 $x\in B_G(0$是任意选取的，我们得出 $\exp(\Sigma)\cdot\exp(\Sigma)$ 在 G中包含一个开球。

剩下需要验证的是，对所有 $X\in\mathfrak{g}$，都有 $\dim\ker\Phi_X\geqslant 2$。根据分次的定义，$\Phi_X$ 的像总是包含于 $\bigoplus_{j\geqslant 2}V_j$中。因此，若 $\dim(V_1)\geqslant 2$，则由秩-零化度定理可立即得出结论。另一方面，若 $\dim(V_1)=1$，则必有 $[V_1,\ V_1]=\{0\}$。因此，像 Φ_X 包含于 $\bigoplus_{j\geqslant 3}V_j$ 中，我们可以再次应用秩-零化度定理，推出所需结论。□

3.4. 水平球面与延拓。我们回到 §1.3 中讨论的水平球面及各种延拓的例子，见 3) 和 4)。这里自然应考虑分层李群 G，使得李代数 $\mathfrak{g}$ 具有如 (3.2) 所示的分层。令 $\Pi_1\colon\mathfrak{g}\to V_1$ 表示到 V_1 上的子空间投影。主要结果如下。

引理 3.3. 设 G 是一个分层李群，且 $\dim G\geqslant 2$，$\Sigma\subseteq\mathfrak{g}$ 是一个连通解析子流形，使得 $\Pi_1(\Sigma)$ 在向量加法意义下生成 V_1。$\exp(\Sigma)$ 上的任意 C_c^∞-密度都满足 (CA)。

显然，引理 3.3 适用于 Heisen-berg（以及 M´etivier）群中的水平球和倾斜球例子，因此，结合定理 1.2，我们得到了对 [2, 定理 1.1]（以及 L^p 中顺带提及的有界性结果）的重大推广。当然，引理 3.3 的适用范围要广泛得多，并且

提供了一类丰富的任意维数例子，这些例子不一定与该群中的任何 d-平面分布相关。

鉴于命题 3.1，引理 3.3 的证明归结为证明以下引理。

引理 3.4（生成元检验）。设 G 是一个分层李群且 $S \subseteq G$。那么， S 生成 G 当且仅当 $\Pi_1 \circ \exp^{-1}(S)$ 生成 V_1（就向量加法而言）。

在给出证明之前，我们先引入一些有用的记号以及 Baker–Campbell–Hausdorff 公式 (3.3) 的一些推论。

设 G 为一个李代数为 $\mathfrak{g}$的分次李群。对于 $1 \leqslant \ell \leqslant m$，定义映射

$$\Phi_\ell \colon \mathfrak{g}^\ell \to \mathfrak{g}, \qquad \Phi_\ell \colon (X_1, \dots, X_\ell) \mapsto [X_1, [X_2, \dots, [X_{\ell-1}, X_\ell]_{\mathfrak{g}} \dots]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}},$$

它由代数元素的李括号构成的嵌套序列组成。注意， Φ_ℓ将子空间 V_1^ℓ 映射到 V_ℓ中。如果 G 是分层的，那么这个受限映射是满射。

另一方面，对于 $1 \leqslant \ell \leqslant m$，定义映射

$$\phi_\ell \colon G^\ell \to G, \qquad \phi_\ell \colon (x_1, \dots, x_\ell) \mapsto [x_1, [x_2, \dots, [x_{\ell-1}, x_\ell]_G \dots]_G]_G,$$

它取群元素的一个嵌套交换子序列 ℓ 。通过迭代应用 Baker–Campbell–Hausdorff公式 (3.3)，我们得到

$$\phi_\ell(\exp(X_1), \dots, \exp(X_\ell)) = \exp\big(\Phi_\ell(X_1, \dots, X_\ell) + e_{\ell+1}(X_1, \cdots, X_\ell)\big), \tag{3.5}$$

对于所有 X_1， …， $X_\ell \in \mathfrak{g}$，其中 $e_{\ell+1}(X_1$、 $\cdots$、 $X_\ell)$ 是由 X_1， …， X_ℓ 的李括号构成的阶数至少为 $\ell + 1$ 的线性组合。

将上述引入的 Π_1 定义推广，对于 $j \in \mathbb{N}$，令 $\Pi_j \colon \mathfrak{g} \to V_j$ 表示到 V_j 上的子空间投影，并且

$$\pi_j := \exp \circ \Pi_j \circ \exp^{-1} \colon G \to G$$

李群中的对应映射。因此，我们可以将（3.5）重新解释为

$$\pi_i \circ \phi_\ell(\exp(X_1), \dots, \exp(X_\ell)) = \exp\big(\Pi_i \circ \Phi_\ell(X_1, \dots, X_\ell)\big) \quad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant \ell. \tag{3.6}$$

此外，给定任意 $X_1, \dots, X_\ell \in \mathfrak{g}$，由 (3.1) 可得

$$\Pi_i \circ \Phi_\ell(X_1, \dots, X_\ell) = 0 \qquad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant \ell - 1 \tag{3.7}$$

and

$$\Pi_\ell \circ \Phi_\ell(X_1, \dots, X_\ell) = \Phi_\ell\big(\Pi_1(X_1), \dots, \Pi_1(X_\ell)\big). \tag{3.8}$$

另一方面，对于任意给定的 $x_1, \dots, x_\ell \in G$，将 (3.6) 与 (3.7) 结合可得 and (3.8)，我们有

$$\pi_i \circ \phi_\ell(x_1, \dots, x_\ell) = e \qquad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant \ell - 1 \tag{3.9}$$

and

$$\pi_\ell \circ \phi_\ell(x_1, \dots, x_\ell) = \phi_\ell\big(\pi_1(x_1), \dots, \pi_1(x_\ell)\big). \tag{3.10}$$

类似地，映射 $\Pi_1 \circ \exp^{-1} \colon G \to V_1$ 是一个群同态，也就是说，

$$\Pi_1 \circ \exp^{-1}(x \cdot y) = \Pi_1 \circ \exp^{-1}(x) + \Pi_1 \circ \exp^{-1}(y) \qquad \text{for all } x, y \in G, \tag{3.11}$$

其中，右侧的求和是按向量加法进行的。

证明（引理 3.4）。一个方向显然成立，因此我们假设 $\Pi_1 \circ \mathbf{exp}^{-1}(S)$生成 V_1。我们要证明 S 生成 G。如同 (3.4) 中所述，令 $\langle S\rangle$ 表示由 S生成的 G 的子群。

我们首先断言，对于任意满足 $X \in V_1$的 $x = \mathbf{exp}(X) \in G$，存在某个 $\mathbf{g}(x) \in G$ 使得

$$\mathbf{g}(x) \in \langle S\rangle \quad \text{and} \quad \pi_1(\mathbf{g}(x)) = x. \tag{3.12}$$

事实上，由我们对 S 的假设可知，存在一个由元素构成的有限序列。

$$s_1, \dots, s_k \in S \quad \text{such that} \quad X = \Pi_1 \circ \exp^{-1}(s_1) + \cdots + \Pi_1 \circ \exp^{-1}(s_k).$$

若定义 $\mathbf{g}(x) := s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$，则显然有 $\mathbf{g}(x) \in \langle S\rangle$，而根据 (3.11)，我们还可以得到

$$\Pi_1 \circ \exp^{-1}(\mathbf{g}(x)) = \Pi_1 \circ \exp^{-1}(s_1) + \cdots + \Pi_1 \circ \exp^{-1}(s_k) = X,$$

这立即推出 (3.12)。因此，我们得到一个满足 (3.12) 的函数 $\mathbf{g}\colon\ \mathbf{exp}(V_1) \to G$。该函数并非唯一确定，但就我们的目的而言，取任意一个这样的 $\mathbf{g}$ 即可。[7]

假设 G 是一个 m 阶群，我们现在使用归纳法证明

$$G_\ell := \Big\{ \exp(Y) : Y \in \bigoplus_{i=\ell}^{m} V_i \Big\} \subseteq \langle S\rangle \tag{3.13}$$

对所有 $1 \leqslant \ell \leqslant m+1$，其中将 G_{m+1} 解释为 $\{0\}$。对于 $\ell = 1$，上述陈述变为 $G = \langle S\rangle$，这正是该引理的内容。

我们取 $\ell = m+1$ 作为归纳法的基础，此时 (3.13) 是平凡的。令 $2 \leqslant \ell \leqslant m+1$，并通过归纳假设设 $G_\ell \subseteq \langle S\rangle$。要完成论证，只需证明 $G_{\ell-1} \subseteq \langle S\rangle$。

固定 $y \in G_{\ell-1}$，使得

$$y = \exp\Big(\sum_{i=\ell-1}^{m} Y_i\Big) \qquad \text{for some } Y_i \in V_i,\ \ell - 1 \leqslant i \leqslant m.$$

由于 G是分层的，我们可以找到 X_1、.....、$X_{\ell-1} \in V_1$，使得

$$\Phi_{\ell-1}(X_1, \dots, X_{\ell-1}) = Y_{\ell-1}.$$

令 $x_j := \mathbf{exp}(X_j)$，其中 $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$。由 (3.10) 和 (3.12) 可得

$$\begin{aligned} \pi_{\ell-1}\big(\phi_{\ell-1}(\mathbf{g}(x_1), \dots, \mathbf{g}(x_{\ell-1}))\big) &= \phi_{\ell-1}\big(\pi_1(\mathbf{g}(x_1)), \dots, \pi_1(\mathbf{g}(x_{\ell-1}))\big) \\ &= \phi_{\ell-1}(x_1, \dots, x_{\ell-1}) \\ &= \exp(Y_{\ell-1}), \end{aligned}$$

其中，最后一步得益于 (3.6) 和 (3.8)。另一方面，由 (3.9) 我们有 e

$$\pi_i\big(\phi_{\ell-1}(\mathbf{g}(x_1), \dots, \mathbf{g}(x_{\ell-1}))\big) = e \qquad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant \ell - 2.$$

因此，我们可以写成

$$z := \phi_{\ell-1}(\mathbf{g}(x_1), \dots, \mathbf{g}(x_{\ell-1})) = \exp\Big(Y_{\ell-1} + \sum_{i=\ell}^{m} Z_i\Big)$$

对于某个 $Z_i \in V_i$，对于 $\ell \leqslant i \leqslant m$。鉴于 (3.12) 以及 z 根据 $\mathbf{g}(x_j)$的交换子定义，我们有 $z \in \langle S\rangle$。

[7]我们可以轻易地规定附加条件，以确保 $\mathbf{g}$ 有唯一确定的定义，从而避免定义中的任意选择。

根据 Baker–Campbell–Hausdorff公式，存在多项式映射

$$P_{z,i}\colon \bigoplus_{j=\ell}^{m} V_j \mapsto V_i$$

使得如果 $u = \exp(U) := \exp(\sum_{i=\ell}^{m} U_i) \in G_\ell$ with $U_i = \Pi_i U \in V_i$，那么

$$\pi_i(u \cdot z) = \exp(U_i + P_{z,i}(U)) \qquad \text{for } \ell \leqslant i \leqslant m$$

其中，$P_{z,\,i}$仅依赖于 U_ℓ、.....、U_{i-1}和 z。特别地，$P_{z,\,i}(U)$与 U_i、.....、U_m无关，因此多项式$P_{z,\,\ell}$作为 U 的函数是常数（事实上，$P_{z,\,\ell}(U) = Z_\ell$）。另一方面，其余的投影由下式给出#+#+#+#+

$$\pi_i(u \cdot z) = e \quad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant \ell - 2 \quad \text{and} \quad \pi_{\ell-1}(u \cdot z) = \exp(Y_{\ell-1})$$

对于任意如上所述的 $u \in G_\ell$，归纳假设蕴含 $u \cdot z \in \langle S \rangle$。鉴于$P_{z,\,i}$的依赖性质，可以通过归纳法选取 U_i，使得

$$Y_i = U_i + P_{z,i}(U) \qquad \text{for } \ell \leqslant i \leqslant m.$$

因此，根据前述观察，$y = u \cdot z \in \langle S \rangle$ 我们得出$G_{\ell-1} \subseteq \langle S \rangle$。至此，归纳法得以结束，证明也随之完成。□

Appendix A. Existence of the Littlewood–Paley decomposition

这里给出命题 2.1 的证明。为此，采用与本文其余部分略有不同的记号较为方便：给定 $f \in C(G)$和一个连续参数 $t > 0$，我们记作 $f_t := t^{-Q} f \circ \delta_{t^{-1}}$，因此本文前文使用的记号 f_k 对应于 f_{2^k}。

命题 2.1 可由关于 L^p 近似恒等元的一个基本结果推出。考虑满足以下条件的 $\phi \in C_c^\infty(G)$

$$\int_G \phi = 1. \tag{A.1}$$

对任意 $f \in C_c(G)$，可得

$$\|f * \phi_t - f\|_{L^p(G)} \to 0 \quad \text{as } t \to 0_+ \qquad \text{for all } 1 \leqslant p \leqslant \infty \tag{A.2}$$

and

$$\|f * \phi_t\|_{L^p(G)} \to 0 \quad \text{as } t \to \infty \qquad \text{for all } 1 < p \leqslant \infty; \tag{A.3}$$

标准证明留给读者（另见 [8, 命题 1.20]）。

证明（命题 2.1）。设 $\phi \in C_c^\infty(G)$ 满足上述条件 (A.1)。由 (A.2) 和 (A.3)，可得

$$f = \lim_{K \to \infty} f * \phi_{2^{-K}} - f * \phi_{2^K}$$

因此，根据微积分基本定理，

$$f = -\lim_{K \to \infty} \int_{2^{-K}}^{2^K} f * \Big(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\Big)\, \mathrm{d}t = -\sum_{k \in \mathbb{Z}} f * \Big(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{\partial \phi_t}{\partial t}\, \mathrm{d}t\Big), \tag{A.4}$$

其中，在每种情况下，收敛均在 $L^p(G)$ 中以 $1 < p \leqslant \infty$的方式成立。计算可知

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) = -t^{-1} h_t(x) \qquad \text{for some } h \in C_c^\infty(G).$$

此外，如果我们定义

$$\psi(x) := \int_1^2 h_t(x)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}, \tag{A.5}$$

那么，通过简单的变量代换，

$$-\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x)\,\mathrm{d}t = \int_{2^k}^{2^{k+1}} h_t(x)\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \psi_{2^k}(x). \tag{A.6}$$

结合 (A.4) 和 (A.6)，我们看到，对于 (A.5) 中定义的 ψ，(2.3) 成立。

接下来只需证明 ψ 的均值为零。显然，只需证明函数 h 具有同样的性质。然而，由于

$$\int_G h(x)\,\mathrm{d}x = -t\frac{\partial}{\partial t}\int_G \phi_t(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{t=1},$$

h 的零均值性质可直接由 (A.1) 得出。 □

References

[1] Theresa C. Anderson、Laura Cladek、Malabika Pramanik 和 Andreas Seeger, *Spherical means on the Heisenberg group: stability of a maximal function estimate*, 《J. Anal. Math.》145 (2021)，第 1 期，1–28。MR 4361901[2] Sayan Bagchi、Sourav Hait、Luz Roncal 和 Sundaram Thangavelu, *On the maximal function associated to the spherical means on the Heisenberg group*, 《New York J. Math.》 **27** 2021，631–675。MR 4250270[3] David Beltran、Shaoming Guo、Jonathan Hickman 和 Andreas Seeger, *The circular maximal operator on Heisenberg radial functions*, 《Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.》 (5) **23** （2022），第 2 期，501–568。MR 4453958[4] Geoffrey Bentsen, *L^p regularity for a class of averaging operators on the Heisenberg group*, 《Indiana Univ. Math. J.》71 (2022)，第 2 期，819–855。MR 4420107[5] Michael Christ, *Harmonic analysis and differential equations on nilpotent groups*, 讲义，Cortona 数学暑期学校，1992 年。[6] *Hilbert transforms along curves. I. Nilpotent groups*, 《Ann. of Math.》(2) 122 (1985)，第 3 期，575–596。MR 819558[7] Javier Duoandikoetxea 和 Jos´e L. Rubio de Francia, *Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates*, 《Invent. Math.》 **84** 1986，第 3 期，541–561。MR 837527
[8] G. B. Folland 和 Elias M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, 数学札记，第 28 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1982 年。MR 657581[9] Jonathan M. Fraser 和 Tuomas Sahlsten, *On the Fourier analytic structure of the Brownian graph*, 《Anal. PDE》 **11** 2018，第 1 期，115–132。MR 3707292
[10] Robert Fraser 和 Kyle Hambrook, *Explicit Salem sets in $\mathbb{R}^n$*, 《Adv. Math.》416 (2023)，论文编号 108901，23 页。MR 4548424[11] Pritam Ganguly 和 Sundaram Thangavelu, *On the lacunary spherical maximal function on the Heisenberg group*, 《J. Funct. Anal.》 **280** 2021，第 3 期，论文编号 108832，32 页。MR 4170795
[12] Thomas William Körner, *Hausdorff and Fourier dimension*, 《Studia Math.》 **206** 2011，第 1 期，37–50。MR 2845614[13] Juyoung Lee 和 Sanghyuk Lee, *L^p estimates for the circular maximal operator on Heisenberg radial functions*, 《Math. Ann.》 **385** 2023，第 3–4 期，1–24。MR 4566682
[14] Detlef Müller 和 Andreas Seeger, *Singular spherical maximal operators on a class of two step nilpotent Lie groups*, 《Israel J. Math.》 **141** 2004，315–340。MR 2063040
[15] E. K. Narayanan 和 S. Thangavelu, *An optimal theorem for the spherical maximal operator on the Heisenberg group*, 《Israel J. Math.》 **144** 2004，211–219。MR 2121541
[16] Amos Nevo 和 Sundaram Thangavelu, *Pointwise ergodic theorems for radial averages on the Heisenberg group*, 《Adv. Math.》 **127** 1997，第 2 期，307–334。MR 1448717
[17] Malabika Pramanik 和 Andreas Seeger, *L^p–L^q estimates for a class of integral operators with folding canonical relations*, 《J. Geom. Anal.》 **31** 2021，第 7 期，6725–6765。MR 4289243
[18] Fulvio Ricci 和 Elias M. Stein, *Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integrals. II. Singular kernels supported on submanifolds*, 《J. Funct. Anal.》 **78** 1988，第 1 期，56–84。MR 937632

[19] Joris Roos、Andreas Seeger 和 Rajula Srivastava，*Lebesgue space estimates for spherical maximal functions on Heisenberg groups*，2022 年 24 月，19222 页，《国际数学研究通报》（Int. Math. Res. Not. IMRN）（），第 – 19257 期。MR 4523247[20] Rajula Srivastava，*On the Korányi spherical maximal function on Heisenberg groups*，《数学年刊》（Math. Ann.）（2022）。https://doi.org/10.1007/s00208-022-02533-2。[21] Elias M. Stein，*Harmonic analysis: real-variable methods orthogonality and oscillatory integrals*，《普林斯顿数学丛书》第 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993 年，在 Timothy S. Murphy 协助下编写，《调和分析专著》第 III 卷。MR 1232192

School of Mathematics, James Clerk Maxwell Building, The King's Buildings, PeterGuthrie Tait Road, Edinburgh, EH9 3FD, UK.*Email address*: a.govindan-sheri@sms.ed.ac.uk

School of Mathematics James Clerk Maxwell Building The King's Buildings Peter , , , , , , Guthrie Tait Road Edinburgh EH9 3FD UK.
Email address: jonathan.hickman@ed.ac.ukSchool of Mathematics, James Clerk Maxwell Building, The King's Buildings, PeterGuthrie Tait Road, Edinburgh, EH9 3FD, UK.*Email address*: j.r.wright@ed.ac.uk