arXiv:2305.04702v2 [math.DG] 1 Jul 2024

逆平均曲率流与里奇曲率针化三维流形

GERHARD HUISKEN 和 THOMAS KOERBER

摘要。设 (M,g) 是一个非紧致、连通、完备且具有非负里奇曲率的黎曼三维流形，并满足 $Ric \geq \varepsilon \operatorname{tr}(Ric)\, g$ 其中某个 $\varepsilon > 0$。本文基于逆平均曲率流给出一个新证明，说明 (M,g) 要么是平坦的，要么具有非欧几里得体积增长。结合 J. Lott [13] 以及 M.-C. Lee 和 P. Topping [11], 的工作，这为 R. Hamilton 的一个猜想提供了另一种证明。该猜想最近由 A. Deruelle、F. Schulze 和 M. Simon [7] 利用 Ricci 流证明。

1. 引言

设 (M,g) 是一个非紧致、连通、完备且具有非负里奇曲率的黎曼三维流形。回顾一下，若存在 $\varepsilon > 0$ 使得 (M,g) 满足

$$Ric \geq \varepsilon R\, g. \tag{1}$$

这里， Ric 和 R 分别表示（M,g）的里奇曲率和数量曲率。以下定理由 R. Hamilton [4, 猜想 3.39] 和 J. Lott [13,猜想 1.1]提出。A. Deruelle、F. Schulze 和 M. Simon [7, 定理 1.3]在附加假设（M,g）具有有界曲率的情况下证明了该定理。随后，M.-C. Lee 和 P. Topping[11, 定理 1.2] 证明可以去掉这一附加假设。

定理 1 ([11, 定理 1.2])。 设(M,g) 是一个非紧、连通、完备且里奇曲率受控的黎曼三维流形。那么 (M,g) 是平坦的。

注 2。 </style}关于定理 1，B.-L. Chen 和 X.-P. Zhu 主要定理 II] 以及 ***J. Lott*** [13, 定理 1。4]已取得相关进展。

注 3. ***R. Hamilton*** 已证明，每个紧致、连通、完备且 ***Ricci*** 曲率受钳制的黎曼三维流形，要么是平坦的，要么与某个球面空间形式光滑同伦；参见[8,主定理] 以及 [7,第 4]页的讨论。

为介绍 [7, 11, 13], 中的结果，令 $p \in M$并

$$\mathrm{AVR} = \frac{3}{4\,\pi} \lim_{r\to\infty} \frac{|B_r(p)|}{r^3}$$

为 (M,g) 的渐近体积比。注意，根据 Bishop-Gromov 定理，AVR 有定义，不依赖于 p，并且满足 AVR $\in [0,1]$。J. Lott [13] 已证明，如果 (M,g) 是 Ricci 钉扎的且曲率有界，那么存在一个从 (M,g) 演化而来的光滑 Ricci 钉扎 Ricci 流解。通过对该流进行详细的渐近分析，J. Lott 证明了，如果 (M,g) 不是平坦的，那么 (M,g) 具有正的渐近体积比；参见 [13, 推论

1.7]. 随后，M.-C. Lee 和 P. Topping [11] 证明，可以不再要求（M, g）具有有界曲率。相比之下，如果（M, g）具有正的渐近体积比，A. Deruelle、F. Schulze 和 M. Simon [7, 引理 8.2] 指出，（M, g）的渐近锥是一个具有非负曲率的三维 Alexandrov 空间。此外，A. Deruelle [6]以及 F. Schulze 和 M. Simon [17] 此前的工作表明，存在一个从（M, g）的渐近锥出发、具有非负曲率的膨胀孤立子解。利用他们的稳定性结果 [7, 定理 1.2] ，将这一解与 J. Lott [13], 构造的 Ricci 钳制解进行比较后，他们得出结论：（M, g）实际上是平坦的。

本文旨在借助逆平均曲率流，为定理 1 提供一种新的证明，并额外假设 (M, g) 具有正的渐近体积比。

定理 4. 设(M, g) 是一个非紧、连通、完备且 *Ricci* 曲率受控的三维黎曼流形。若(M, g) 具有正的渐近体积比，则(M, g) 与平坦的 $\mathbb{R}^3$ 等距。

注 5. 结合 *J. Lott* [13] 以及 *M.-C. Lee* 和 *P. Topping* [11], 的结果，定理 *4* 给出了定理 *1* 的一种新证明。

注 6. 我们的方法可推广到(M, g) 具有超二次体积增长，且(M, g) 中测地单位球的体积非塌缩的情形；参见定理 *12*。

现在我们概述定理 4 的证明。反设 (M, g) 不是平坦的。由于 (M, g) 具有非负里奇曲率且满足里奇曲率针化条件，因此 (M, g) 的数量曲率必定至少在某一点严格为正。由此可知，存在一个闭合、连通且向外极小化的曲面 $\Sigma \subset M$ ，使得

$$\int_\Sigma H^2 \, \mathrm{d}\mu < 16\,\pi. \tag{2}$$

这里，μ和 H 分别表示 Σ的面积元和平均曲率。回顾一下，如果一族嵌套的、紧包集开集 $E_t \subset M$ 的 $\{E_t\}_{t=0}^{\infty}$ 满足其边界 ∂E_t 光滑且严格平均凸，那么它按逆平均曲率流演化，当且仅当 #+#+#+#+

$$\frac{dx}{dt} = H^{-1}\,\nu.$$

这里， x 和 ν 分别是 ∂E_t的位置和外法向量。利用(M, g)具有正的渐近体积比，K. Xu [19] 的工作$\{E_t\}_{t=0}^{\infty}$ 表明，存在一个逆平均曲率流的弱解 $\partial^* E_0 = \Sigma$ ，其意义与T. Ilmanen和第一作者的工作 [10]中所述相同。这里， ∂^* 表示约化边界。利用(2)以及(M, g)是Ricci-pinched这一性质，我们证明:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\partial^* E_t} H^2 \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

相比之下，V. Agostiniani、M. Fogagnolo 和 L. Mazzieri 的研究 [1] 表明，对于每个$t \geq 0$,

$$\int_{\partial^* E_t} H^2 \, \mathrm{d}\mu \geq 16\,\pi \ \mathrm{AVR}, \tag{3}$$

矛盾；另请参见 X. Wang 的工作 [18] ，其中给出了（3）的另一种证明).

致谢。第二作者感谢奥地利科学基金会 Lise-Meitner 项目 M3184 的资助。本研究始于第一作者担任马克·戈登杰出访问教授期间，作者访问希伯来大学之时。作者感谢希伯来大学的热情接待。作者感谢 Or Hershkovits、Marco Pozetta 和 Miles Simon 所提供的有益讨论。作者感谢审稿人提出的宝贵意见和更正。

2. 定理 4 的证明

本节中，我们假设 (M, g) 是一个非紧、连通、完备的黎曼三维流形，其具有非负里奇曲率，并满足某个 $\varepsilon > 0$ 对应的条件 (1)。

本节的目标是证明定理 4。

我们回顾 S.-H. Zhu [20]，的以下结果，该结果推广了 R. Schoen 和 S.-T. Yau [16, 定理 3] 的先前工作。

命题 7. 若 (M, g) 不是平坦的，则 (M, g) 与 $\mathbb{R}^3$ 微分同胚。

证明。由 (1) 可知，存在 $p \in M$，使得 $Ric(p) > 0$。结论由 [20] 得出。 □

设 $\Sigma \subset M$ 是一个闭连通曲面，其面积测度为 $\mathrm{d}\mu$，指定法向量为 ν，平均曲率 H 相对于 ν 而言。在下文的引理 8 中，h 表示 Σ 的无迹第二基本形式。

引理 8。若 $\mathrm{genus}(\Sigma) \geq 1$，则有

$$2 \int_\Sigma Ric(\nu, \nu) + |\mathring{h}|^2 \, \mathrm{d}\mu \geq \int_\Sigma H^2 \, \mathrm{d}\mu \tag{4}$$

并且，若 $\mathrm{genus}(\Sigma) = 0$，则有

$$2 \int_\Sigma Ric(\nu, \nu) \, \mathrm{d}\mu \geq \varepsilon \left(16\,\pi - \int_\Sigma H^2 \, \mathrm{d}\mu \right). \tag{5}$$

证明。积分 利用收缩的高斯方程和高斯-博内定理，我们有 e

$$\int_\Sigma H^2 \, \mathrm{d}\mu = 16\,\pi \, (1 - \mathrm{genus}(\Sigma)) + 2 \int_\Sigma |\mathring{h}|^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma 4\, Ric(\nu, \nu) - 2\, R \, \mathrm{d}\mu.$$

利用 $Ric \geq 0$，我们有 $R \geq Ric(\nu, \nu)$。这推出了 (4)。

当 $\mathrm{genus}(\Sigma) = 0$ 时，利用 $Ric \geq 0$，我们有

$$2 \int_\Sigma R \, \mathrm{d}\mu \geq 16\,\pi - \int_\Sigma H^2.$$

结合 (1)，我们得到 (5)。 □

引理 9. 假设 (M, g) 不是平坦的。存在一个由闭合连通曲面 $\Sigma_i \subset M$ 组成的序列 $\{\Sigma_i\}_{i=1}^\infty$，满足

$$\lim_{i \to \infty} \int_{\Sigma_i} H^2 \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

证明。当 $\mathrm{AVR} = 0$ 时，断言由 [1, 定理 1.1] 得出。

在这种情况下 e AVR > 0，利用 (M, g) 非平坦且 $Ric \geq 0$，我们看到其中 i s

$p \in M$ 与 $R(p) > 0$。因此，

$$\int_{B_r(p)} H^2 \,\mathrm{d}\mu < 16\,\pi \tag{6}$$

只要 $r > 0$ 足够小；例如参见 [15, 命题 3.1]。令 $\Sigma' \subset M$ 为 $B_r(p)$ 的外向最小包络；参见 [10, 第 371] 页。利用 [10, (1.15)], 我们得到

$$\int_{\Sigma'} H^2 \,\mathrm{d}\mu \le \int_{B_r(p)} H^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

由 Bishop-Gromov 定理可得

$$|B_1(q)| \ge \frac{4\,\pi}{3}\ \mathrm{AVR}$$

对任意 $q \in M$ 均成立。利用这一点以及 AVR > 0，T. Coulhon 和 L. Saloff-Coste 的工作[5] 表明，存在 $\gamma > 0$，使得对于每个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的相对紧开集 $\Omega \subset M$，均有 $|\partial\Omega| \ge \gamma\,|\Omega|^{2/3}$；参见 [5, 定理 3] 下方的注释以及 [1, 2]。结合 [19, 定理 1.2], 可知，存在一个按照 [10, 第 368] 页意义下的逆平均曲率流的真弱解 $\{E_t\}_{t=0}^{\infty}$，使得 $\Sigma' = \partial^* E_0$。令 $\Sigma_t = \partial^* E_t$。由命题 7 和 [10, 引理 4.2]可知，对任意 $t \ge 0$，Σ_t 都是连通的。根据 [10, §5] 以及[9, Korollar 5.6]中的结果，Σ_t 属于 $W^{2\text{类},\,2} \cap C^{1,\,1}$ 并且有

$$\int_{\Sigma_0} H^2 \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{\Sigma_t} H^2 \,\mathrm{d}\mu + 2\int_0^t \int_{\Sigma_s} Ric(\nu,\nu) + |\mathring{h}|^2 \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}s \tag{7}$$

对每个 $t \ge 0$ 都成立。显然，函数

$$[0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_{\Sigma_t} H^2 \,\mathrm{d}\mu \tag{8}$$

是非增的。我们声称，

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\Sigma_t} H^2 \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

事实上，反设存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{\Sigma_t} H^2 \,\mathrm{d}\mu \ge \delta$$

对每个 $t \ge 0$ 都成立。如有必要，缩小 $\delta > 0$，并利用 (6)，我们可以假设

$$\int_{\Sigma_t} H^2 \,\mathrm{d}\mu \le 16\,\pi - \delta$$

对每个 $t \ge 0$ 都成立。利用引理 8，我们得到

$$2\int_{\Sigma_s} Ric(\nu,\nu) + |\mathring{h}|^2 \,\mathrm{d}\mu \ge \min\{1,\varepsilon\}\,\delta$$

对每个 $t \ge 0$ 都成立。结合 (7)，可知

$$\int_{\Sigma_t} H^2 \,\mathrm{d}\mu < 0$$

f或每 $t \ge 16\,\pi$ 分钟$\{1,\varepsilon\}^{-1}\,\delta^{-1}$一次。断言由此矛盾得证 . □

定理 *4* 的证明。 设 (M, g) 是一个非紧、连通且完备的黎曼三维流形，满足 Ricci 夹逼条件，并具有正的渐近体积比 AVR。反设 (M, g) 不是平坦的 $\mathbb{R}^3$。根据引理 9，存在一个闭的、连通的曲面 $\Sigma \subset M$，使得

$$\int_\Sigma H^2 \, \mathrm{d}\mu < 16\,\pi \ \mathrm{AVR}\,.$$

由于这与 [1, 定理 1.1], 不相容，因此断言得证。 □

A. 超二次体积增长

本节中，我们假设 (M, g) 是一个非紧致、连通、完备且具有非负里奇曲率的黎曼三维流形，并满足某个 $\varepsilon > 0$ 下的 (1)。此外，我们假设存在 $p \in M$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{|B_r(p)|}{r^{1+\alpha}} > 0 \tag{9}$$

并且

$$\inf_{q\in M} |B_1(q)| > 0. \tag{10}$$

注意，根据 Bishop-Gromov 定理，$\alpha \leq 2$。此外，注意如果 $\alpha \leq 1$，则 (M, g) 是抛物型的；参见 [12, 推论 2.3]。

本节旨在给出一种基于逆平均曲率流的替代证明，证明 (M, g) 要么是平坦的，要么具有次二次体积增长，即 $\alpha \leq 1$。

根据 T. Coulhon 和 L. Saloff-Coste 的工作，利用 (9) 和 (10)，有如下等周不等式

$$|\partial\Omega| \geq \gamma \, \min\{|\Omega|^{2/3}, |\Omega|^{\alpha/(1+\alpha)}\} \tag{11}$$

对某个 $\gamma > 0$ 以及每个边界光滑的相对紧开集 $\Omega \subset M$，该不等式均成立；参见下文 [5, Theorème 3] 的注释。

引理 10. 假设 (M, g) 不是平坦的。那么存在一个逆平均曲率流的真弱解 $\{E_t\}_{t=0}^{\infty}$，使得对每个 $t \geq 0$,

$$\int_{\partial^* E_t} H^2 \, \mathrm{d}\mu < 16\,\pi\, e^{-t}.$$

证明. 由引理 9，存在一个闭的连通曲面 $\Sigma \subset M$，满足

$$\varepsilon\,(16\,\pi - \int_\Sigma H^2 \, \mathrm{d}\mu) \geq \int_\Sigma H^2 \, \mathrm{d}\mu.$$

将 Σ 替换为其外向极小包络，并利用 [10, (1.15)], ，我们可以假设 Σ是外向极小的。根据 [19, 定理 1.2], ，利用 (11)，存在逆平均曲率流的一个适当弱解 $\{E_t\}_{t=0}^{\infty}$，满足 $\partial^* E_0 = \Sigma$。令 $\Sigma_t = \partial^* E_t$。与引理 9 的证明类似，我们可以看到函数 (8) 是非递增的，因此，对于每个 $t \geq 0$,

$$\varepsilon\,(16\,\pi - \int_{\Sigma_t} H^2 \, \mathrm{d}\mu) \geq \int_{\Sigma_t} H^2 \, \mathrm{d}\mu. \tag{12}$$

同样，与引理 9 的证明一样，利用 (12) 和引理 8，我们可知：

$$\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\Sigma_t} H^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_0^t \int_{\Sigma_s} H^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}s.$$

利用这一点，

$$\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu < 16\,\pi,$$

该断言得证。 □

注 11. 正如引理 *10* 所断言的，逆平均曲率流的适当弱解的存在性也可由 [14, 注 1.6 和定理 1。7], 推出，即使不假设 (10)，但将 (9)替换为

$$0 < \lim_{r\to\infty} \frac{|B_r(p)|}{r^{1+\alpha}} < \infty.$$

然而，我们无法核实 [14, 定理 3。6]证明中的所有论证。

定理 12. 设 (M, g) 是一个非紧、连通、完备的黎曼三维流形，它具有 *Ricci* 钳制性质，并且对于某个 $\alpha > 0$ 满足 (9) 和 (10)。若 (M, g) 不是平坦的，则 $\alpha \leq 1$。

证明。 设 $\{E_t\}_{t=0}^\infty$ 是引理 10 中的逆平均曲率流的一个适当弱解。令$\Sigma_t = \partial^* E_t$。由 [10, 引理 5. 1], 可知，对于几乎处处的 Σ_t，以及几乎处处的 $t \geq 0$，有 $H > 0$ $\mathrm{d}\mu$，并且 $H^{-1} \in L^1(\Sigma_t)$。利用 Hölder 不等式，对于几乎处处的 $t \geq 0$,

$$|\Sigma_t|^{3/2} \leq \int_{\Sigma_t} H^{-1} \,\mathrm{d}\mu \left(\int_{\Sigma_t} H^2 \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/2}. \tag{13}$$

回顾 [10, 指数增长引理 16], ，即

$$|\Sigma_t| = |\Sigma_0|\, e^t. \tag{14}$$

结合引理 10 和（13），我们得到，对于几乎处处的 $t \geq 0$,

$$\int_{\Sigma_t} H^{-1} \,\mathrm{d}\mu \geq \sqrt{\frac{|\Sigma_0|^3}{16\,\pi}}\, e^{2\,t}. \tag{15}$$

如在 [10, §5], 中所论证的，我们看到

$$|E_t| \geq |E_0| + \int_0^t \int_{\Sigma_s} H^{-1} \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}s$$

对于每个 $t \geq 0$。结合 (14) 和 (15)，可得

$$\liminf_{t\to\infty} |\Sigma_t|^{-2}\, |E_t| > 0. \tag{16}$$

相比之下，利用 (11)，我们有

$$|\Sigma_t|^{-2}\, |E_t| \leq \gamma^{-2}\, |E_t|^{(1-\alpha)/(1+\alpha)}.$$

除非 $\alpha \leq 1$，否则这与 (16) 不相容，因此该断言得证。 □

References

[1] Virginia Agostiniani、Mattia Fogagnolo 和 Lorenzo Mazzieri，《具有非负里奇曲率的流形中闭超曲面的尖锐几何不等式》，《数学发明》（2020 年），第 222 卷，第 1033–1101 页。

[2] Simon Brendle，非负曲率流形上的 Sobolev 不等式，《纯粹与应用数学通讯》（2023），第 76 卷，2192–2218[3] Bing-Long Chen 和 Xi-Ping Zhu，具有逐点针化曲率的完备黎曼流形，《数学发明》（2000），第 140 卷，423–452[4] Bennett Chow、Peng Lu 和 Lei Ni。Hamilton 的 Ricci 流，数学研究生教材，第 77 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州；科学出版社，北京，纽约，ISBN?978-0-8218-4231-7；0-8218-4231-5[5] Thierry Coulhon 和 Laurent Saloff-Coste，《群与流形的等周不等式》，《伊比利亚美洲数学杂志》（1993），第 9 卷，293–314[6] Alix Deruelle，通过 Ricci 膨胀子平滑正曲率度量锥，《几何与泛函分析》（2016），第 26 卷，188–249[7] Alix Deruelle、Felix Schulze 和 Miles Simon，Ricci 流与三维 Ricci 针化流形的初始稳定性估计，arXiv 预印本 arXiv:2203.15313（2022），见 https://arxiv.org/abs/2203.15313[8] Richard S. Hamilton，具有正 Ricci 曲率的三维流形，《微分几何杂志》（1982），第 17 卷，255–306[9] Mirjam Heidusch，逆平均曲率流的正则性，博士论文，2001。见 https://publikationen.uni-tuebingen.de/xmlui/handle/10900/48198.[10] Gerhard Huisken 和 Tom Ilmanen，逆平均曲率流与黎曼 Penrose 不等式，《微分几何杂志》（2001），第 59 卷，353–437[11]Man-Chun Lee 和 Peter M Topping，具有非负针化 Ricci 曲率的三维流形，arXiv 预印本 arXiv:2204.00504（2022），见 https://arxiv.org/abs/2204.00504[12] Peter Li 和 Luen-Fai Tam，具有有限全曲率的完备曲面，《微分几何杂志》（1991），第 33 卷，139–168[13] John Lott，关于具有逐点针化非负 Ricci 曲率的三维流形，《数学年刊》（2023），1–20[14] Luciano Mari、Marco Rigoli 和 Alberto G. Setti，关于 $1/H$-流通过 p-Laplace 逼近：利用 Ricci 曲率下界下伪距离得到的新估计，《美国数学杂志》（2022），第 144 卷，779–849[15] Andrea Mondino，关于 Willmore 泛函临界点存在性的一些结果，《数学杂志》（2010），第 266 卷，583–622[16] Richard Schoen 和 Shing Tung Yau，具有正 Ricci 曲率和数量曲率的完备三维流形，《微分几何研讨班》，第 209–228 页，《数学年刊研究》，102，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1982[17] Felix Schulze 和 Miles Simon，从锥出发的具有非负曲率算子的膨胀孤立子，《数学杂志》（2013），第 275 卷，625–639[18] Xiaodong Wang，关于完备非负 Ricci 曲率流形中闭超曲面不等式的注记，《图卢兹数学科学学院年刊》（第 6 辑）（2023），第 32 卷，173–178[19] Kai Xu，等周问题与弱逆平均曲率流的适当性，arXiv 预印本 arXiv:2307.00725（2023），见 https://arxiv.org/abs/2307.00725[20] Shun-Hui Zhu，关于拟正 Ricci 曲率的开三维流形，《美国数学会会刊》（1994），第 120 卷，569–572

Gerhard Huisken 蒂宾根大学 数学系
Aufder Morgenstelle 10 72076 德国
蒂宾根
g
er
hard.huisken@uni-tuebingen.de

托马斯·克尔贝尔维也纳大学数学系奥斯卡-摩根施特恩广场
1号奥地利维也纳,
1
0
9
0
h
t
t
p
s://
o
r
c
i
d.
org/0000-0003-1676-0824tho
mas.koerber@univie.ac.at