arXiv:2305.04709v2 [gr-qc] 4 Nov 2023

用于增强对数据离群值稳健性的重尾似然：引力波数据分析中的应用*

ArgyroSasli[1], *, Nikolaos Karnesis[1], Nikolaos Stergioulas[11] 希腊塞萨洛尼基塞萨洛尼基亚里士多德大学物理系，邮编54124（日期：2023年11月7日）

近年来，引力波天文学领域蓬勃发展。随着更加先进的地基探测器和空间天文台相继投入使用，预计在不久的将来，引力波事件的探测率将大幅提高。未来数据分析面临的挑战之一，是如何在存在探测器噪声瞬态或非平稳性，以及可能具有天体物理学和/或宇宙学起源的随机引力波信号的情况下，进行稳健的统计推断。对天文台总噪声了解不充分，可能会给已探测源的参数估计带来挑战。在本研究中，我们提出了一种基于广义双曲分布的重尾双曲似然。利用双曲似然，我们建立了一个稳健的数据分析框架，能够应对数据离群值、噪声非平稳性，以及噪声功率谱密度可能存在的不准确建模问题。我们将这一方法应用于引力波天文学中的实例，尤其是来自计划中的 LISA 任务的合成数据集。

I. 引言

近年来，自首次探测到引力波（GW）信号以来，已在 LIGO [2] 和 Virgo [3]地基探测器 [4–10]获得的引力波探测已发表目录中收录了 90 多个来自致密天体物理天体旋近和并合的引力波信号 [1], 。不久的将来，现有探测器（包括 KAGRA [11]）将以更高的灵敏度运行，而 LIGO-印度 [12, 13] 预计将开始建设。与此同时，新一代探测器（爱因斯坦望远镜（ET） [14],、Cosmic Explorer（CE） [15] 和 NEMO [16]）正处于规划阶段；空间激光干涉仪空间天线（LISA） [17] 、天琴和太极 [18]预计将在 2030 年代中期之后投入运行。这些天文台各自采用不同的设计，因此灵敏度曲线各不相同，旨在覆盖探测到的引力波信号的不同频率范围。然而，它们的一个共同点是，所有第三代探测器都将具有更高的引力波信号事件率，其中相当一部分信号会在时间和频率上重叠 [19]。与此同时，掌握仪器噪声对于成功探测和表征引力波信号至关重要 [20–24]。探测器噪声非平稳性，例如噪声功率谱密度（PSD）的缓慢变化 [25], 、仪器瞬态（毛刺） [26, 27], 、数据缺口 [28, 29], 或噪声突发 [30], ，可能会导致结果出现偏差，甚至造成虚警率计算错误。归根结底，我们预计，在分析未来科学数据丰富的数据集时，噪声非平稳性将发挥更为重要的作用。

在这项工作中，我们聚焦于 LISA 任务以及引力波频谱的毫赫兹频段。我们之所以这样选择，是因为可以确定，厘清 LISA 的噪声预算将是一项艰巨的任务（例如，参见 [20, 31] 及其中的参考文献）。此外，对于地基探测器，可以在现场开展专门实验，以高精度校准相关噪声模型 [32]。在太空中无法进行这种实践。

LISA目前仍处于研发阶段，预计将在2020年代中期之后开始收集数据。这意味着我们目前没有足够的先验信息来了解LISA噪声中可能存在的离群值。不过，我们可以根据LISA Pathfinder（LPF）任务数据进行推断 [33–35]。在LPF任务期间，测得1至100 mHz之间的差分加速度噪声水平随着时间推移持续降低，这是由于测试质量块笼内的真空条件不断变化；这一现象贯穿整个任务期间 [33, 36]。LISA噪声数据中也预计会出现这种效应。LISA频段内非平稳随机引力波信号的另一个例子，是银河系附近超紧致双星（UCBs）群体产生的综合信号 [17, 20, 31, 37, 38]。由于 LISA 星座的轨道运动使其朝向银河中心的方向不断变化，而这些天体大多位于银河中心附近，因此这种混淆信号具有循环平稳特性。第III 节将进一步介绍这类信号。除超紧致双星外，我们还预计会探测到源自其他类型天体物理源的随机信号 [39, 40]。

另一种会在噪声整体功率谱密度中表现为非平稳特征的噪声来源，是所谓的倾斜-长度耦合效应（TTL）。TTL 首次在 LPF 运行期间测得，它对应于航天器抖动运动被灵敏的干涉仪测量捕捉到所产生的效应 [34], ，会在差分加速度频谱的 $10-100\,\mathrm{mHz}$ [34, 36] 处产生类似“凸起”的噪声。这种效应取决于仪器光学组件的几何布局 [41, 42], ，并且会随时间受环境因素影响而变化 [34]。LISA 任务预计也会受到 TTL 噪声的影响。目前，

* asasli@auth.gr

表征计划是基于在数据后处理中部分扣除 TTL 的影响 [43–45]。最后，LPF 数据的经验也让我们对噪声毛刺有了一些认识 [26, 27]。

迄今为止，人们已经开发出多种技术来应对噪声非平稳性带来的各种问题。例如，应对快速噪声瞬变所引发问题的一种方法，是对这些瞬变进行建模，并将其与数据中的波形模型同时拟合 [46]。这类分析基于变维方法，例如可逆跳跃马尔可夫链蒙特卡洛（MCMC）[47, 48]。按照这一方法，在数据中搜索波形模型的同时，也会搜索数量未知、用于表示毛刺的模型。由于此类事件的数量未知，参数空间会随之动态变化。在 LISA 数据分析领域，这项技术已有不少应用 [49–52]。 [53], 中提出了另一种方法，其核心是检验时间序列的平稳性。该框架基于替代数据方法，首先检测具有不同统计噪声特性的数据片段，然后使用灵活的功率谱密度模型拟合数据的不同部分 [54]。

最后，还可以从所采用的似然函数层面着手解决这类问题，即使用尾部比通常的高斯分布更宽的模型。采用 Student t 分布 [55–57],提出了这样一种解决方案，该方法已被 LVK 合作组应用于引力波数据。在 [55], 中，首先为噪声的每个功率谱密度系数采用 Inv $-\chi^2$ 先验分布，该分布与高斯似然共轭。随后，得到的联合条件密度呈现为具有 $\nu > 0$ 自由度的 Student t 分布，并且根据调节参数 ν的不同，其尾部比高斯分布具有更重的尾部。这一特性能够容纳数据相对于我们所建模的噪声功率谱密度的任何偏差，无论这些偏差源于快速噪声瞬变，还是其他类型的噪声非平稳性。此外， [57], 的研究发现，除了噪声不确定性之外，双中子星信号相位演化中的不确定性也能够通过这种方法得到处理。然而，采用这种方法时，应当考虑到先验分布的选择可能会对最终后验分布产生不可忽略的影响。

除上述示例外，还可以遵循 [58], 的方法，使用高阶埃奇沃思展开对数据的非高斯性进行建模，以描述未知的信号分布。其他研究 [59–61], 采用了高斯似然与对数正态似然的线性组合。这样做主要是为了适应数据平均所导致的系统偏差。更早的研究还提出，在似然函数 [62, 63] 中使用不同分布的线性组合。

在此，我们引入双曲似然 $\Lambda_{\mathcal{H}}$，其基于广义双曲（$\mathcal{GH}$）分布的一个特殊情形，用于引力波数据的分析。 $\mathcal{GH}$ 分布已被用于金融学和计量经济学领域中相对较短时间序列的统计描述 [64–69]。 $\mathcal{GH}$ 分布的优势在于，只需调整其整体形状以适应输入数据给定的统计特性，就能够得到指数族 [68], 中的许多已知分布。因此，例如，在恢复瞬态信号的参数时，我们可以同时恢复底层噪声的统计特性。

在实践中，我们通过增加几个控制分布形状的参数来提高问题的维度。这些参数根据残差数据进行估计，随后用于推断其实际分布；这是因为双曲分布具有更大的灵活性，能够以完美或可接受的精度适应不同的分布，正如我们所展示的那样。例如，如果残差数据服从高斯分布，那么双曲分布的参数将渐近收敛到与高斯分布一致的值（详见第 IIB 节）。

因此，这一框架最主要、最重要的优势在于，它为瞬态信号的参数估计以及底层噪声的表征提供了一种稳健的方法。当探测器噪声受到噪声瞬变“污染”时，或者甚至在噪声模型并不完全已知时，这一特性都至关重要。正如前文所述，信号占主导的 LISA 数据便属于这种情况，其总噪声将由仪器噪声与给定的不可分辨随机引力波（GW）信号之和构成 [17, 31, 70]。

在第II 节中，我们介绍$\mathcal{GH}$ 分布背后的基本理论，并提出双曲似然，将其置于含噪数据中的信号检测背景下进行讨论。我们讨论了一些基本测试案例，并将这一框架应用于来自 LISA探路者任务 [33, 34]的真实数据。在第III 节中，我们使用合成数据，将这一表述应用于引力波天文学中的示例。针对我们对 LISA数据通道噪声知识的假设，我们采用不同的情形，随后将这一表述应用于取自 LISA数据挑战 [71]目录的一个验证双星案例。此项应用考虑了噪声功率谱密度被视为未知或被有意错误表征的情形。在噪声未知的情况下，采用双曲似然使我们能够同时恢复波形和噪声参数。当假定噪声处于错误水平时，基于双曲似然的性能分析与基于 Whittle似然的分析相同；后者被用作我们分析的基准。最后，在第IV节中，我们总结结论并讨论研究发现。

II. 理论背景

A. 高斯分布情形

我们首先假设，测量值 $y(t)$ 是信号 h 与噪声分量之和，其中信号可能取决于参数集$\boldsymbol{\theta}$，即

$$y = h(\boldsymbol{\theta}) + n, \tag{1}$$

为简洁起见，我们省略了对时间 t 的依赖。然后，假设噪声具有高斯特性，给定参数集 $\boldsymbol{\theta}$ 时，测量值 y 的似然形式为

$$p(y|\boldsymbol{\theta}) = C \times e^{-\frac{1}{2}\langle y-h(\boldsymbol{\theta})|y-h(\boldsymbol{\theta})\rangle}, \tag{2}$$

其中，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ 表示两个实值时间序列之间按噪声加权的内积。在 m 个数据通道的一般多维情形下

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_m(t) \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

我们将 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 写成矩阵形式:

$$\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = 4\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathrm{d}f\left[\tilde{\mathbf{a}}^\dagger(f)\mathbf{S}_n^{-1}(f)\tilde{\mathbf{b}}(f)\right], \tag{4}$$

其中，$\mathbf{S}_n$ 成为给定时间序列测量数组的噪声单边互谱矩阵。波浪号（˜）表示傅里叶变换，而（†）表示共轭转置运算。最后，我们将对数似然简洁地写为

$$\Lambda_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\theta}) \propto -\frac{1}{2}\langle y - h(\boldsymbol{\theta})|y - h(\boldsymbol{\theta})\rangle. \tag{5}$$

在式（2）中，我们假设噪声服从高斯分布，因此可以准确计算其功率谱密度。但情况并非总是如此。如果存在强烈的毛刺或其他非高斯特征，功率谱密度的计算将不准确，因为它是基于高斯分布这一假设的。此外，对于未来由信号主导的探测器，其仪器噪声及相应的功率谱密度在频谱的很大一部分范围内都将未知。

因此，可以采用噪声谱模型，并将其与信号参数一起进行拟合。于是，似然的对数可以写为

$$\Lambda_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{\theta}) \propto -\frac{1}{2}\left(\sum_f \left[\ln\left(S_n(\boldsymbol{\theta}_n)\right)\right] + \langle y - h(\boldsymbol{\theta}_h)|y - h(\boldsymbol{\theta}_h)\rangle\right), \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_n \sqcup \boldsymbol{\theta}_h$，因此 $\boldsymbol{\theta}_n \subseteq \boldsymbol{\theta}$ 噪声模型的参数。上述表达式构成了*Whittle*似然，对于高斯平稳时间序列而言，它是一种近似形式 [56, 72, 73]。在 [74], 中，作者将 [75] 的后验一致性结果扩展到了非高斯时间序列，为在不必假设高斯性的情况下，在对时间序列施加温和假设的条件下实现后验一致性提供了理论依据。他们指出，这种方法可以应用于非高斯时间序列，即使数据并非来自正态分布，只要样本量足够大，仍可能获得准确的谱密度估计。还可以进一步采用无信息且不适当的 Jeffreys 先验来描述噪声方差，并将噪声谱从式（6） [55, 76]的表达式中边缘化消去。

文献中已广泛研究了 Whittle 模型的局限性（例如，参见 [56, 73, 77] 及其中的参考文献），但在引力波天文学中，一个非常相关的情形是对具有较高自相关性的时间序列进行测量，这可能会降低式（6）中似然模型的效率。

正如引言中已经提到的，克服这些缺陷的一种建议解决方案是遵循 [55, 56], 所采用的策略，其中引入了一种基于*Student t* 分布的滤波器，该滤波器已被证明能够抵御数据非平稳性的影响。我们可以从公式（2）出发，并为噪声方差采用一个服从 Inv $-\chi^2$ 分布的先验。随后，根据 [55], ，通过对噪声方差进行积分消去，我们可以计算边缘后验分布，从而得到所需的 Student t 分布概率密度函数，其尾部比高斯情形更厚。Student t 分布可以通过自由度参数 ν进行调整，该参数既可以先验选定，也可以直接从数据中估计。其他一些研究也采用了类似的策略，通过为总似然构建复合模型来解决数据离群值问题。例如，在 [62] 中，噪声采用高斯分布，而数据爆发则采用均匀模型；在 [63], 中，总似然则采用了高斯混合模型。

在以下小节中，我们将讨论广义双曲模型。该模型以增加问题的维度为代价，提供了一个更通用的框架，用于处理各种数据不规则情况。

B. 广义双曲分布

现在，我们可以尝试通过使用 $\mathcal{GH}$ 分布族 [64–68] 来克服 Whittle 近似可能存在的不足。这种做法的优势之一在于，只需调整 $\mathcal{GH}$ 函数的参数，就几乎可以得到指数族中的任意分布。事实上，上文提到的学生 t 分布就是 $\mathcal{GH}$ 的一个特例。

函数，除 Student t 分布外，还会导出大量极限分布。变量 x 的 $\mathcal{GH}$ 分布族可表示为：

$$\begin{aligned}\mathcal{GH}(x|\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu) = \\ a(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)\left(\delta^2+(x-\mu)^2\right)^{(\lambda-\frac{1}{2})/2} \\ \times K_{\lambda-1/2}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)\exp\left[\beta(x-\mu)\right],\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$a(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-1/2}\delta^\lambda K_\lambda\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}, \tag{8}$$

且 K_λ 是第三类修正贝塞尔函数。参数（λ，α，β，δ，μ）的取值范围为 $\mu\in\mathbb{R}$ 且

$$\begin{aligned}&\delta\geq 0, |\beta|<\alpha, \quad \text{if } \lambda>0,\\ &\delta>0, |\beta|<\alpha, \quad \text{if } \lambda=0,\\ &\delta>0, |\beta|\leq\alpha, \quad \text{if } \lambda<0.\end{aligned} \tag{9}$$

式（7）在 $\beta\neq 0$ 时描述偏斜分布，在 $\beta=0$时描述对称分布。参数 μ用于调整分布沿 x轴的位置。方差的解析表达式为 [68]

$$\sigma^2 = \frac{\delta K_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{\gamma K_\lambda(\delta\gamma)} + \frac{\beta^2\delta^2}{\gamma^2}\left[\frac{K_{\lambda+2}(\delta\gamma)}{K_\lambda(\delta\gamma)} - \frac{K^2_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{K^2_\lambda(\delta\gamma)}\right], \tag{10}$$

其中 $\gamma\equiv\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$。$\mathcal{GH}$ 分布的均值的一般表达式为 [68]

$$\text{mean}(\mathcal{GH}) = \mu + \frac{\beta\delta}{\gamma}\frac{\mathcal{K}_{\lambda+\infty}(\delta\gamma)}{\mathcal{K}_\lambda(\delta\gamma)}. \tag{11}$$

$\mathcal{GH}$ 分布具有半重尾。特别是，对于 $\mu=0$，当 x $\to\pm\infty$时，其渐近行为为

$$\mathcal{GH}(x|\lambda,\alpha,\beta,\delta)\sim|x|^{\lambda-1}\exp((\mp\alpha+\beta)x), \tag{12}$$

相差一个乘法常数 [78]。

现在我们可以定义，如 [68]，中的<风格 id='2'>多元， </风格> d<风格 id='5'>- 维 </风格> $\mathcal{GH}$ 分布，适用于 $\boldsymbol{x}\in\text{IR}^d$，其中 d 为给定的维数。对于引力波探测器网络，维数对应于探测器的数量。然后，

$$\begin{aligned}\mathcal{GH}_d(\boldsymbol{x}|\lambda,&\alpha,\boldsymbol{\beta},\delta,\boldsymbol{\mu}) = \\ &A\frac{K_{\lambda-d/2}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+r}\right)}{\left(\alpha^{-1}\sqrt{\delta^2+r}\right)^{d/2-\lambda}}\exp\left[\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right],\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\beta}\in\text{IR}^d$，

$$A\equiv A(\lambda,\alpha,\boldsymbol{\beta},\delta,\boldsymbol{\mu}) = \frac{\left(\sqrt{\alpha^2-B}/\delta\right)^d}{(2\pi)^{d/2}K_\lambda\left(\delta\sqrt{\alpha^2-B}\right)}, \tag{14}$$

其中我们设定

$$r = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}), \tag{15}$$

以及 $B=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Delta^{-1}\boldsymbol{\beta}$。在（15）中，$\Delta$ 是一个正定矩阵 $\in\text{IR}^{d\times d}$ 其中 $|\Delta|=1$。

$\mathcal{GH}$ 分布在描述数据时可以相当灵活，不过代价是需要更多参数。对于一个具有 d 维的问题，参数数量为 $2d+3$。

C. 广义双曲分布的极限情形和子类

几种众所周知的分布是 $\mathcal{GH}$ 分布的极限情形或子类。下面，我们列出一些将在第II E1节中用于设置测试案例的情形。

- 正态高斯分布 $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ 是 $\mathcal{GH}$ 分布的极限情形，因为

$$\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{GH}(\lambda=1,\beta=0,\alpha\to\infty,\delta\to\infty,\mu), \tag{16}$$

前提是 $\alpha\to\infty$ 和 $\delta\to\infty$ 满足 $\delta/\alpha\to\sigma^2$。

- 正态逆高斯分布$\mathcal{NIG}(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \mu)$具有显式形式 [79]

$$\begin{aligned}\mathcal{NIG}(x|\alpha,\beta,\delta,\mu) &= \frac{\alpha\delta K_1(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})}{\pi\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}} \\ &\times\exp\left[\delta\gamma+\beta(x-\mu)\right],\end{aligned} \tag{17}$$

这是 $\mathcal{GH}$ 分布在 $\lambda=-1/2$ 下的一个子类。

$$\mathcal{NIG}(\alpha,\beta,\delta,\mu) = \mathcal{GH}(\lambda=-1/2,\alpha,\beta,\delta,\mu). \tag{18}$$

- 双曲分布 $\mathcal{H}$ 是$\mathcal{GH}$ 分布的一个子类，适用于 $\lambda=1$

$$\mathcal{H}(\alpha,\beta,\delta,\mu) = \mathcal{GH}(\lambda=1,\alpha,\beta,\delta,\mu), \tag{19}$$

其中 $\delta\geq 0$ 和 $|\beta|<\alpha$。当 $\beta=0$ 时，它变为对称双曲分布 ($\mathcal{SH}$)。更一般地，在多变量的 $d-$维情形下，多变量双曲 ($\mathcal{H}_d$) 分布是 $\lambda=(d+1)/2$ 时 $\mathcal{GH}_d$ 分布的一个子类。

$$\mathcal{H}_d(\alpha,\beta,\delta,\mu) = \mathcal{GH}_d\left(\lambda=\frac{d+1}{2},\alpha,\beta,\delta,\mu\right), \tag{20}$$

- 带有 ν 个自由度的 *Student t* 分布 是 $\mathcal{GH}$ 分布在 $\lambda=-\nu/2,\alpha=0,\beta=0,\delta=\sqrt{\nu}$ 且 $\mu=0$ 时的一个极限情形。

在附录A中，我们证明，通过使用具有适当似然函数的贝叶斯推断，可以针对测试数据恢复上述子类和极限情形的理论分布。

关于极限分布和 $\mathcal{GH}$ 分布子类的更详尽列表，请读者参阅[64–68, 80] 及其中所引文献。

D. 双曲似然函数

我们的主要目标是采用一种足够灵活的似然分布，以便能够重建种类繁多的数据分布。正如我们在后续各节的不同示例中所展示的，我们发现，基于多元双曲（$\mathcal{H}_\mathrm{d}$）分布的似然（即当 $\lambda=(d+1)/2$时 $\mathcal{GH}_\mathrm{d}$ 分布的子类）很适合我们的目的。

对于数据分布 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^d$，$1\le i\le n$，我们推导出相应的双曲似然函数，以推断其分布的参数（α，δ，$\boldsymbol{\beta}$）：[1]

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathcal{H}}(\alpha,\delta,\boldsymbol{\beta}) =& n\Bigg[\frac{d+1}{2}\ln\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)+\frac{1-d}{2}\ln(2\pi)\\ &-\ln(2\alpha)-\ln\left[K_{(d+1)/2}(\delta\gamma)\right]\Bigg]\\ &-\alpha\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\delta^2+r_i}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i,\end{aligned}\tag{21}$$

其中

$$r_i=\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\widehat{\Delta}^{-1}\boldsymbol{x}_i.\tag{22}$$

我们将在第 II E 节的测试案例中使用这一形式的似然，其中，对于 $d=1$，r_i可简化为 $r_i=x_i^2$。

对于更实际的应用，我们将在频域中采用上述式（21）。具体而言，在第 III 节中，我们采用对称的双曲似然（即 $\boldsymbol{\beta}=0$）。对于多个数据通道（见式（4）），并假设（α，δ）对所有频率均相同，则可写为

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\theta},\alpha,\delta) =& n\Bigg[\frac{d+1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)+\frac{1-d}{2}\ln(2\pi)\\ &-\ln(2\alpha)-\ln\left[K_{(d+1)/2}(\delta\alpha)\right]\Bigg]\\ &-\alpha\sum_{i}\sqrt{\delta^2+\mathrm{Re}\left\{r_i(\boldsymbol{\theta})\right\}},\end{aligned}\tag{23}$$

其中

$$r_i(\boldsymbol{\theta})=\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i^{\dagger}\mathbf{S}_n^{-1}\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i.\tag{24}$$

在上述关系中，我们使用了

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i=\sqrt{2\mathrm{d}f}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_i-\tilde{\boldsymbol{h}}_i(\boldsymbol{\theta})\right),\tag{25}$$

其中 $\mathrm{d}f$ 是给定的频率分辨率。式（23）中的求和遍历与所选频率范围（$f_{\min}$，$f_{\max}$）相对应的元素。

式（24）意味着我们通过 $\mathbf{S}_n$ 选定了噪声功率谱密度的一种给定估计（或模型）。正如以下各节所示，这种似然形式的一大优势是，可以通过联合估计（α，δ）参数来补偿噪声功率谱密度建模不当的影响。这两个参数还将表明数据可能偏离高斯分布，详见第 IIC 节。在相当特殊的情况下，如果不想假设任何功率谱密度模型，而是希望利用双曲似然的（α，δ）参数推断噪声特性，则可以使用

$$r_i(\boldsymbol{\theta})=\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i^{\dagger}\widehat{\Delta}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i,\tag{26}$$

其中，由于我们现在是在频域中进行运算，$\widehat{\ }$并且为了得到无量纲的 r_i，Δ 的单位为 $1/\mathrm{Hz}$（或者，也可以通过使用单位为 $1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ 的适当参考值对 $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i$ 进行缩放，使其无量纲）。

定义似然函数后，由于我们在贝叶斯框架下进行分析，可以将参数的后验分布写为

$$p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})\propto p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}),\tag{27}$$

其中 $p(\boldsymbol{\theta})$ 为参数的先验。边际似然 $p(\boldsymbol{y})$ 通常充当归一化常数，因此在公式（27）中将其省略。

E. 测试案例

在将双曲似然 $\Lambda_{\mathcal{H}}$ 应用于引力波天文学中的示例之前，我们首先展示其重构非高斯测试分布的能力（包括若干解析分布，以及来自 LISA Pathfinder [33, 34] 任务的真实数据）。

1. *Reconstruction of one-dimensional test distributions*

接下来，我们将重构不同的一维测试分布（对应于第 $\mathcal{GH}$ II C 节讨论的分布的极限情形和子类），并假设 $\mathcal{H}$ 分布能够近似描述不同的情形（甚至包括那些具有 $\lambda\neq1$的情形）。对于每种情形，我们使用 Metropolis-Hastings马尔可夫链蒙特卡洛算法推断α、β、δ、μ参数，$\mathcal{H}$ 并将$\Lambda_{\mathcal{H}}$（其中 $d=1$）作为似然函数。这项初步的简单研究旨在展示 $\Lambda_{\mathcal{H}}$ 似然的灵活性。

[1] 我们的结果在 $\beta=0$ 时退化为 [66, 68] 中的双曲分布 Λ_{hyp}。

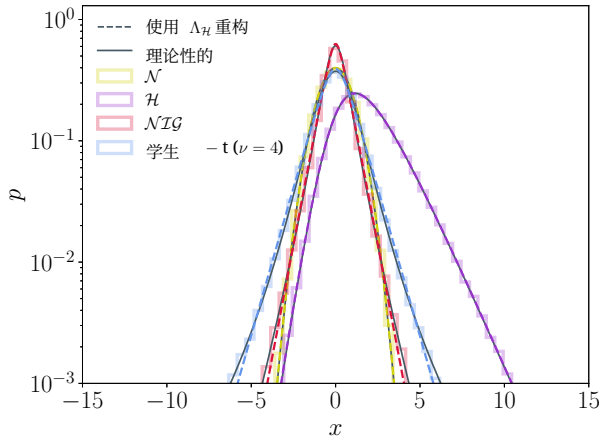


图 1：分别服从高斯 $\mathcal{N}$（黄色）、双曲 $\mathcal{H}$ （紫色）、$\mathcal{NIG}$ （红色）和学生 t 分布（浅蓝色）的随机生成数据。使用以 $\Lambda_{\mathcal{H}}$ 作为似然函数的贝叶斯推断得到的重构分布（实线）与理论分布（虚线）非常吻合。

为简单起见，我们生成 [2] 的所有数据（每种测试分布的 5×10^5个样本），其均值为零（μ =0）。每种测试分布的详细描述如下：

1. 正态高斯分布 $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$。2. 正态逆高斯分布 $\mathcal{NIG}(\alpha$ =1, $\beta = 0, \delta = 0.8, \mu = 0)$。3. 双曲分布，$\mathcal{H}(\alpha = 1.5, \beta = 0.75, \delta$ =2, $\mu = 0)$。4. 具有 $\nu = 4$ 的 Student t 分布。

上述生成的测试分布如图 1所示。实线表示各情形下的理论分布。虚线表示我们使用 $\Lambda_{\mathcal{H}}$ 似然对所有情形进行的重构。可以看到，对于 $\lambda = 1$ ($\mathcal{N}$ 和$\mathcal{H}$) 这两种情形，重构精度很高（詹森-香农散度[3] 小于 10^{-5}）。此外，使用相同的 $\Lambda_{\mathcal{H}}$ 似然时，$\lambda \neq 1$ ($\mathcal{NIG}$ 和学生 t 分布) 这两种情形也仍能得到相当准确的重构（詹森-香农散度分别为 2.5×10^{-4}和 5.1×10^{-4}）。这表明，$\Lambda_{\mathcal{H}}$ 似然能够灵活地重构不同数据分布，并通过其其他参数补偿 λ 的不同潜在取值。

最后，可以利用 $\{\alpha, \beta, \delta\}$ 参数来探究残差的统计特性。例如，在许多情况下，有必要检验给定数据集是否存在偏离高斯性的情况。对于此类应用，一个非常有用的图形工具是所谓的形状三角图，通过恢复得到的 $\{\alpha, \beta, \delta\}$ 系数，我们可以定性地表征残差的生成分布 [68, 69]。关于这一方法的更多细节，请参见附录A。

2. *Application to real data from the LISA Pathfinder mission*

LISA Pathfinder（LPF）是欧洲航天局于 2015 年底发射的一项任务，并持续运行至 2017 [33, 34]。LPF 的主要目标是测试未来空间引力波观测台的相关技术，例如 LISA 任务。LPF 本质上是一座太空实验室，内部有两个处于自由落体条件下的立方体测试质量块。两个测试质量块之间的差分加速度 $\Delta g(t)$通过激光干涉测量进行监测。任务期间，研究人员对差分加速度噪声预算进行了研究和建模，旨在为 LISA 任务的开发奠定坚实基础。LPF 任务最重要的测量之一是纯加速度噪声测量，在此期间未进行任何实验（即未对三体系统施加激励）。这些测量期间记录到了大量种类繁多的伪瞬态信号（毛刺）。尽管这些毛刺的物理起源尚未完全明确 [26]，，其统计特性已得到详细研究 [27]。关于 LPF 加速度噪声数据的更多研究，请参阅 [35, 36, 84–86]。

在此示例中，我们选取 $\Delta g(t)$ 数据段，该数据段记录于 2017-02-13 14:30:00.000 至 2017-03-02 21:50:19.000 UTC 之间。此数据段包含一系列毛刺，其中最强的毛刺（见图 2 上图）扭曲了对数据功率谱密度的数值估计。事实上，这类强烈的虚假信号很容易被检测到，并从数据中扣除。不过，这种数据离群值情形非常适合用于测试我们在第 IID 节中介绍的重尾似然框架。

我们首先截取[4] 该 $\Delta g(t)$时间序列，并确定最强毛刺信号的发生时间。我们还标记出不存在毛刺的 $\Delta g(t)$片段，旨在将其用作 $\Delta g(t)$功率谱密度（PSD）的基准。随后，我们使用双曲似然函数方程（21），对

[2] 随机值使用 `scipy.stats` pack- age [81]软件包生成。[3] 詹森-香农散度 [82, 83] 是 Kullback–Leibler 散度的一种特殊情况，可用作衡量两个分布相似性的度量。它具有对称性，当两个分布相似时，其取值接近于零。

[4] 为避免滤波器应用造成失真，我们去除了最前面和最后面的几个数据点。

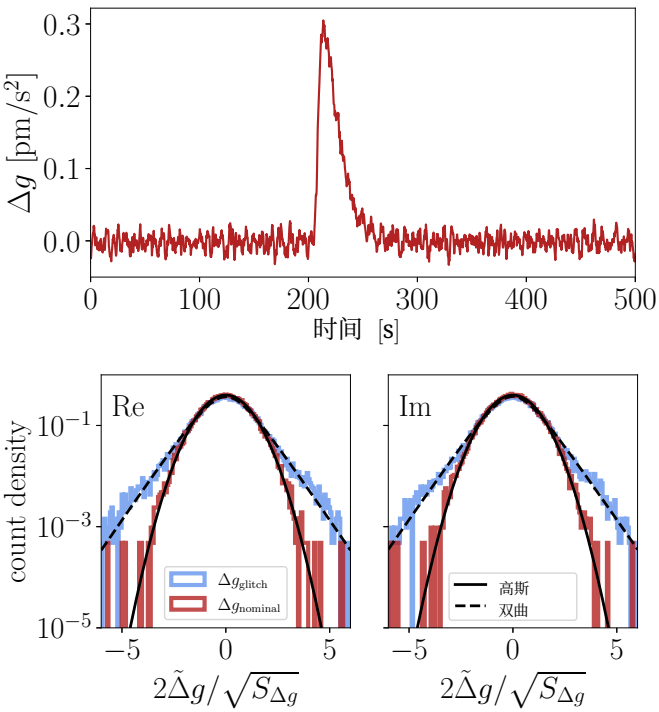


图 2：上图：LPF 任务中 $\Delta g(t)$ 时间序列数据里的一个强烈毛刺（详情见正文）。此处所示数据经过去趋势处理（减去均值），并进行了低通滤波，以便于可视化。˜下图：频域中分布 Δg 的直方图，使用一段时间上相近且不含离群值的数据片段的功率谱密度 $S_{\Delta g}$ 进行归一化。蓝色：包含强烈毛刺的数据片段。红色：参考数据集。虚线和点线分别表示高斯分布和双曲分布。

˜$\Delta g(f)$频域数据进行建模，并推断自由参数 α，β 和 δ。为避免陷入后验曲面的局部极大值，我们采用了马尔可夫链蒙特卡罗方法 [48]。

我们在图2的下方面板中绘出了结果，其中展示了噪声数据点分布的直方图。红色表示包含强烈毛刺的特定时间段内的 Δg 噪声。为便于比较，我们还选择了一个相邻的时间段，其中不存在数据离群值（蓝色数据）。虚线表示根据估计的 α、β和 δ 计算得到的双曲概率密度，而理论高斯分布则以虚线表示。重尾双曲分布，式（21），确实能够在数据中存在强烈毛刺时正确捕捉分布的尾部，而高斯分布仅适用于未检测到大型毛刺的时间段。我们注意到，由于数据的分布近乎对称，参数 β 被推断为非常接近零，因此对称双曲似然仍然是一个不错的选择可能是不错的选择。

这些初步结果十分令人鼓舞，因此我们现在可以继续将这一框架应用于更复杂的研究。如前所述，这类情况需要在含噪数据中搜索信号，此时正确建模残差和底层噪声的统计特性至关重要。在接下来的章节中，我们将把双曲似然函数应用于更贴近现实的案例，这些案例源自引力波数据分析面临的挑战。

在本项初步研究中，我们将重点关注对称双曲分布（即具有 $\beta = 0$），主要有两个原因。首先，我们发现，在本文介绍的简单应用中，对称双曲分布已完全足够；其次，它在计算需求方面更为轻量。事实上，对于包含 n 数据点的测量，贝塞尔函数的计算次数减少为一次，而非不对称情况下的$n + 1$，其中 $\beta \neq 0$。

III. 引力波数据分析中的应用

对任何给定信号的探测与表征，都需要充分了解仪器噪声。对于地面探测器的引力波（GW）测量，人们已对仪器噪声的统计特性开展了大量研究（例如 [87–89] 及其中的参考文献）。结合通过大量辅助通道监测仪器状态，这些工作有助于准确表征仪器的性能，几乎涵盖所有时段。

然而，未来的探测器（例如 LISA）将由信号主导，而天文台的噪声也不会完全已知。尤其是，LISA 将测量来自银河系内部、辐射信号的超紧致双星的完整种群 [17]。这些天体大多是双白矮星，其总数估计约为 $\mathcal{O}(10^6)$，它们发射近乎单色的引力波辐射。根据给定的种群模型，目前估计 LISA 可分辨的源总数为 $\mathcal{O}(10^4)$，其余源将在约 0。01 至 0。2 mHz 之间形成非平稳混淆信号 [31, 37, 38]。与此同时，由于空间和电力供应受限，星载天文台可用的校准仪器（温度计、磁力计等）数量将相当有限。再加上数据传输速率有限，与地面天文台相比，我们掌握的仪器噪声信息可能更少。我们将采用取自 LISA 数据场景的示例，主要分析来自超短周期双星的信号。在下一节中，我们将在不同噪声假设下比较第II节所述不同似然形式的性能。

A. 方法论

为了测试双曲似然的性能，我们利用合成数据设计了一系列实验。我们选择只研究来自超短周期双星的信号，主要是因为它们具有单色特性，同时也出于实际考虑，例如计算耗时极短。不过需要指出的是，我们的形式可直接应用于超大质量黑洞双星的啁啾信号。对于这些信号，在最简单的噪声情形下，即整个频带内功率谱密度水平变化（谱形相同，整体振幅不同），我们得到的结果与本节所述超短周期双星研究的结果非常相似。然而，当似然函数中假设的噪声功率谱密度水平与真实噪声功率谱密度的谱形不同时，情况会变得更加复杂。我们将这类研究留待未来开展。

在第一个实验中，我们根据特定的仪器灵敏度模拟数据，然后在假设噪声功率谱密度固定的情况下进行分析。我们采用三种似然形式。第一种是式（5）中的标准高斯似然，但假设的噪声功率谱密度与生成合成数据时所用的噪声功率谱密度不同，以模拟仪器噪声模型失配的情形。第二种是式（6）中的 Whittle似然，其中噪声功率谱密度模型与引力波波形参数同时拟合。最后，第三种是式（23）中的双曲似然，与上述高斯似然一样，噪声功率谱密度固定，但增加了额外参数，从而提高了灵活性。

值得注意的是，在第一个实验中，我们假设数据是理想合成数据。这意味着我们直接根据 LISA 灵敏度曲线 [90]模拟完全符合高斯分布且不间断的数据。同时，我们假设 LISA 星座是刚性的，并假定三艘航天器的测试质量块加速度噪声和航天器干涉噪声均相同 [91]。对于这种特殊情形，我们可以放心地使用噪声正交的时间延迟干涉测量（TDI） A， E和 T通道 [90, 92], ，这些通道由探测器输出 X， Y， Z 得到，具体如下：

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z-X), \quad E = \frac{1}{\sqrt{6}}(X-2Y+Z), \\ T = \frac{1}{\sqrt{3}}(X+Y+Z). \tag{28}$$

这也意味着，分析中使用的 A 和 E 通道将具有相同的谱形；在对未来仪器作出给定假设的情况下，该谱形由 [90, 93]给出。

$$S_n^{\mathrm{AE}}(f) = 8\sin^2(f^*)\big[2S^{\mathrm{acc}}_{\delta\nu/\nu}(A;f)\,(3+2\cos(f^*)+\cos(2f^*)) \\ +S^{\mathrm{OMS}}_{\delta\nu/\nu}(P;f)\,(2+\cos(f^*))\big], \tag{29}$$

其中 $f^* = 2\pi L f/c$, L 是 LISA 臂长，而噪声分量 $S^{\mathrm{acc}}_{\delta\nu/\nu}(A;f)$ 和 $S^{\mathrm{OMS}}_{\delta\nu/\nu}(P;f)$ 可在 [90]，中找到，并以相对频率单位表示（因此带有下标 $\delta\nu/\nu$）。这些函数分别取决于参数 A 和 P；与仪器当前要求水平相符的保守估计为 [61, 90, 93]

$$\sqrt{A} = 3\ \mathrm{fm/sec^2/\sqrt{Hz}},\ \text{and} \\ \sqrt{P} = 15\ \mathrm{pm/\sqrt{Hz}}. \tag{30}$$

该 T 通道是所谓的零通道，它会大幅抑制引力波信号，因此不会纳入我们的分析。上述假设将方程（5）、（6）和（23）的似然计算简化为仅需对以下两个通道的似然求和A 和 E 。在上述假设下，对于下一节中的应用，可以认为这两个通道之间不相关。

最后，为了开展分析，我们使用经并行回火 [48]增强的马尔可夫链蒙特卡罗算法，对参数的后验分布进行采样。对于下文各节中的应用，我们为采样器设置了一个可调节的温度梯级，共包含 30 个温度，每个温度下运行 50 个独立的行走者。我们通常允许在预热阶段进行 5×10^4 次采样，并在参数估计阶段为每个行走者进行 10^5 次采样。

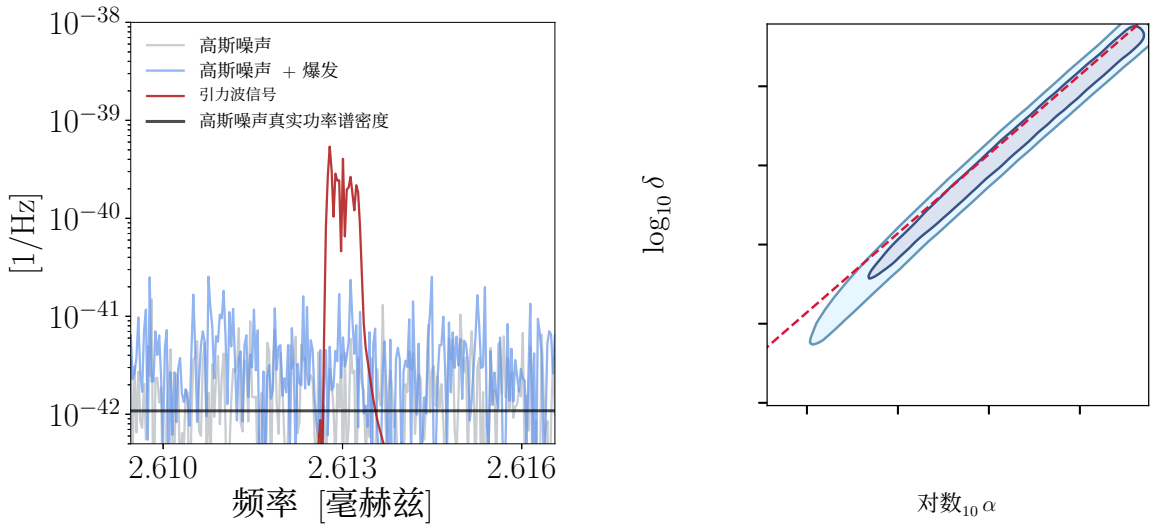
B. 超紧致银河双星

如前所述，银河系附近发出的超短周期双星大多是双白矮星（双白矮星） [38, 94, 95]。它们将是 LISA 频段中数量最多的源，其中数百万个源会在毫赫兹频段发射信号。对于本研究，我们将对嵌入高斯噪声中的单个双星进行参数估计，其功率谱密度由公式（29）给出。对于实际波形，我们采用了 [96]中首次提出的快速频域实现。随后，两个偏振可写为

$$h_+(t) = \frac{2\mathcal{M}}{D_L}\left(\pi f_0(t)\right)^{2/3}\left(1+\cos^2\iota\right)\cos\psi(t), \\ h_\times(t) = -\frac{4\mathcal{M}}{D_L}\left(\pi f_0(t)\right)^{2/3}\cos\iota\sin\psi(t), \tag{31}$$

其中 $\mathcal{M}$ 为啁啾质量， f_0 为瞬时引力波频率， D_L 为光度距离， ι 为双星轨道的倾角，而 ψ 为随时间变化的引力波相位。有关波形模型的更多细节，请参阅 [96 98] $\boldsymbol{\theta} = -$ $\{ \ {}_{10}\mathcal{A} \ f_0 \ {}_{10}\dot{f}_{\mathrm{gw}} \ \phi_0 \ \iota \ \psi \ \lambda_{\mathrm{E}} \ \beta_{\mathrm{E}}\}$ $\mathcal{A}$ 。最终推断得到的参数为 log，log 、，cos 、，、 sin ，其中 为总振幅，根据方程（31），可表示为

$$\mathcal{A} = D_L^{-1}\left(2\mathcal{M}^{5/3}\pi^{2/3}f_0^{2/3}\right). \tag{32}$$



(a) (b)

图 3: *(a)* 第 III 节研究中使用的不同数据集。在给定频率范围内，仪器噪声的功率谱密度以黑色实线表示（见方程（29）、（30））。为生成灰色数据，使用了该模型并加入高斯噪声。在第 IIIB 3 节的研究中，我们还注入了一系列高斯爆发，得到蓝色所示的噪声数据。注入的超紧致双星信号以深红色表示（见表 I）。 *(b)* 第 α 和 δ 两个参数之间的二维后验切片，采用方程（23、33）中定义的双曲似然，对应于第 IIIB2 节的第一项研究。等高线表示在 67% 和 90% 置信区间处采样得到的后验曲面，而红色虚线对应于仪器噪声真实注入功率谱密度水平的对数（详见正文）。

参数	值
振幅，$\log_{10}(\mathcal{A}$ [应变])	-21.37729133
初始频率，f_0 [毫赫兹]	2.61301
频率导数，$\log_{10} \dot{f}_0$	-16.53675992
倾角，$\cos(\iota$ [弧度])	0.05407993
黄纬，$\sin(\beta_{\rm E}$ [rad])	0.1012303
黄经，$\lambda_{\rm E}$ [rad]	4.052962883
偏振，ψ [rad]	0.80372815
相位，ϕ_0 [rad]	3.12184095

表 I: 数据中注入的超紧致双星信号的参数值。该注入用于第 III B2 和 III B 3节的研究。

上文中，$\lambda_{\rm E}$ 和 $\beta_{\rm E}$ 分别为给定的黄纬和黄经。我们使用的 GPU 加速软件可见于 [99]，该软件本质上是对 LDC 软件 [100]中实现的波形以及早期研究中所用波形的改编。单个双星的注入参数列于表 I中。

1. *Unknown noise spectrum*

我们首先研究噪声的真实功率谱密度完全未知的情况。针对这一问题的一种部分解决方案是

这个问题的一种解决方法是假设一个噪声功率谱密度的参数化模型，并使用式（6）的 Whittle似然，同时推断其参数和信号。这里，我们将改用式（ $\Lambda_{\mathcal{H}}$23）的双曲似然，其中 $\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{\theta})$ 由式（26）给出，而不对噪声功率谱密度作出明确假设。

采用噪声正交的 A 和 E 通道后，式（26）化为

$$r_i(\boldsymbol{\theta}) = 2\mathrm{d}f \sum_{c}^{\{A,E\}} \left|\tilde{y}_c - \tilde{h}_c(\boldsymbol{\theta})\right|^2 . \tag{33}$$

本质上，这相当于使用一个酉对角矩阵 $\hat{}\Delta$ 。

给定模拟数据，我们应该恢复一组能够反映噪声特征的 α和 δ 参数。由于在我们的示例中生成的是高斯噪声， α 和 δ 的后验分布应反映我们用于模拟的高斯正态分布的特征。

在本研究中，我们可以将注入频率附近的仪器噪声视为白噪声，仅仅是因为这类信号几乎是单色的，因此，信号附近窄频带内噪声功率谱密度的变化可以忽略不计（见图3a）。这进一步简化了我们的分析，因为这样我们就可以对分析中考虑的所有频率使用通用的 α 和 δ 参数。在其他情况下，例如当

在不同频率下进行多次注入模拟，不同的 α，δ 参数需要描述频谱的不同部分，如 [56]中使用 Student t 分布的示例所示。另一种简化方法是，我们对 α 和 δ 变量以及 A 和 E TDI 变量使用相同的系数，并假设两个数据通道具有相同的噪声水平[5]。

考虑到上述情况，我们应预期能够恢复出这样的参数：尽管 $\alpha \to \infty$ 和 $\delta \to \infty$，但它们的比值保持不变，并收敛于源初始发射频率附近噪声的方差 f_0。关于信号，我们从验证双星列表中选取一个相对较“响亮”的源 [71, 100],，并进一步对其进行调整，以获得略高的信噪比。注入波形的参数列于表 I中，而我们的合成数据集持续时间为 $T_{\rm obs} = 1$ 年，对应的频率分辨率为 $\sim 10^{-8}$ Hz。

随后，我们对表 I 中列出的波形参数以及 $\Lambda_{\mathcal{H}}$ 似然函数的参数 α、δ 同时进行参数估计。图 3b 展示了参数 α、δ 的二维后验分布。对于对称分布，在高斯分布的极限情况下，即当 $\alpha \to \infty$ 和 $\delta \to \infty$ 时，式 (10) 简化为 $\sigma^2 \to \delta/\alpha$ [6], 。图 3b 中的红色虚线表示 $\log_{10}\delta - \log_{10}\alpha = \log_{10}\sigma^2$，其中 σ^2 在此对应于数据的功率谱密度 $S_n^{\rm AE}(f_0)$ 的“正确”值，单位采用我们为数据选定的相同无量纲单位。从二维后验分布与该直线的吻合情况可以看出，推断得到的参数 α、δ 会将双曲分布调整为数据残差的真实高斯分布。

最后，恢复得到的波形参数与基准高斯似然情形下的后验分布完全相同；在该情形中，式（5）中的噪声设为真实的功率谱密度值。这一初步结果展示了双曲似然在恢复噪声的正确参数以及残差统计特性方面的能力和稳健性。

2. *Noise spectral model mismodeling*

我们的下一步是在不同的场景中测试这一框架，重点关注噪声功率谱密度的模型失配。这种情况更接近现实，因为我们需要对噪声的底层功率谱密度作出一些假设。对于毫赫兹频段附近的 LISA，情况正是如此，因为天体物理种群产生的随机信号贡献未知 [31, 38–40, 70]。

实际上，我们通过将错误的噪声功率谱密度模型代入公式（5）、（6）和（23）的似然函数，模拟模型失配情形。由于我们的信号几乎是单色的，这相当于噪声真实模型与所采用模型之间的总体功率谱密度水平差异。我们使用与之前相同的源信号（见表 I），并模拟 $T_{\rm obs} = 1$ 年的观测时长。使用基于公式（29）的功率谱密度，并假设公式（30）中的数值对应于“正确”的噪声水平，我们得到的信噪比（SNR）为 $\rho = \sqrt{\langle h|h\rangle} = 122.7$。

接下来，我们假设并不知道“正确”的噪声水平，因此只能猜测；我们采用不同的“错误”功率谱密度，并使用式（29），但取“错误”的数值，

$$\begin{aligned} &\sqrt{A} = 2.5\ \text{fm/sec}^2/\sqrt{\text{Hz}},\ \text{and} \\ &\sqrt{P} = 11\ \text{pm}/\sqrt{\text{Hz}}, \end{aligned} \tag{34}$$

这意味着，采用上述模型后，我们会在双星的特定辐射频率处将噪声水平严重低估~ 1.57 倍。随后，我们使用并行回火马尔可夫链蒙特卡洛 [48] 对参数空间进行采样，并考察三种不同的情况。

1. 第一项参数估计分析采用了式（5）的标准高斯似然（$\Lambda_{\mathcal{N}}$），并假设噪声具有式（34）中的“错误”PSD 水平。2. 第二项分析采用了式（6）的 Whittle 似然（$\Lambda_{\mathcal{W}}$），并使用了一种 PSD 模型：该模型在感兴趣的频率附近（$f_{\rm min} = f_0 - 1$ [mHz], $f_{\rm max} = f_0 + 1$ [mHz]）呈平坦功率谱密度谱，再乘以单个参数 $n_{\rm level}$。对于 $n_{\rm level} = 1$，我们取 PSD 为式（29）在 $f = f_0$ 处给出的值，但其中使用了式（34）的“错误”参数。通过拟合自由参数 $n_{\rm level}$，我们实质上是在寻找对所采用的“错误”PSD 的修正。3. 最后，我们考虑的第三种情形是使用式（23,24）的双曲似然形式（$\Lambda_{\mathcal{H}}$），同样假设噪声具有式（34）中的“错误”PSD 参数。在此，我们允许（$\Lambda_{\mathcal{H}}$）的自由参数 α, δ 对 PSD 的错误假设进行补偿。此应用凸显了双曲似然的优势之一，即能够检测给定噪声模型假设的任何偏离，或残差对高斯性的任何偏离。

为了验证每次参数估计运行的性能，我们将其与基准情形进行比较，基准情形采用正确噪声模型下的高斯似然，该模型由方程（29）描述，参数则来自方程（30）。

该应用的结果总结于图 4 和表 II中。从图 4中的二维后验分布角图可以明显看出，

[5] 对于未来的应用，将$\mathcal{GH}$ 分布推广到 α，$\delta \in \mathbb{R}^d$，[6] 值得探讨。请注意，正如图3a所示，$S_n^{\rm AE}(f_0) \sim 10^{-42}\text{Hz}^{-1}$，这解释了所选单位制中 α，δ 的特定数值；在该单位制中，假设 Δ 的量纲为1/Hz，且不对 $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i$ 数据进行任何进一步缩放。通过适当的重新缩放，可以使 α，δ 都处于 $\to \infty$的范围内。

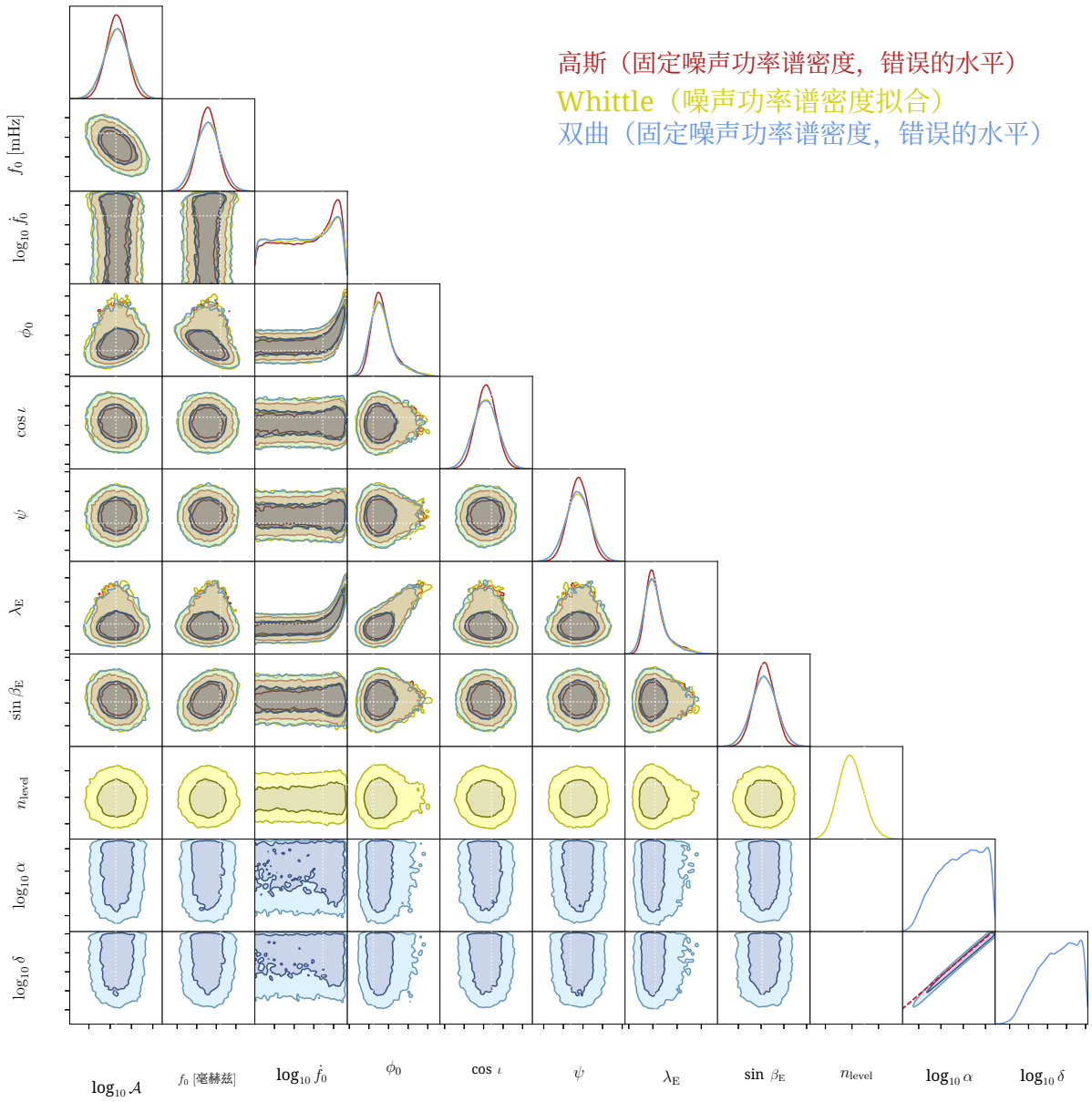


图4：角图，展示了在第III B2节所述的噪声模型失配情况下，表征注入波形和噪声特性的所有参数的二维后验切片。最优信噪比为122。7。具体而言，深红色表示采用具有错误功率谱密度水平的高斯似然时得到的后验分布 $\Lambda_{\mathcal{N}}$，黄色表示采用 Whittle 似然（$\Lambda_{\mathcal{W}}$）得到的后验分布，该方法允许拟合噪声水平。最后，浅蓝色表示采用双曲似然并在白化过程中使用错误功率谱密度水平时得到的后验分布。所有参数的真实注入值（双曲似然情况下的 α 和 δ 除外）均以白色虚线表示。红色虚线曲线表示

$$\log_{10}\delta - \log_{10}\alpha = \log_{10} n_{\rm level}^{(\rm correct)} \text{ line.}$$

使用高斯似然的朴素方法 $\Lambda_{\mathcal{N}}$，采用基于方程（34）中“错误”噪声参数的功率谱密度，会低估后验分布宽度。另一方面，通过自由参数 $n_{\rm level}$ $\Lambda_{\mathcal{W}}$校正功率谱密度后，我们得到的结果与基准情形一致。恢复出的 $n_{\rm level}$ 参数为 1.5 ± 0.12（90%置信区间），其中包含正确值的 $n^{(\rm correct)}$ 级别$\sim$ 1.57。使用双曲似然也能获得非常相似的二维后验分布$\Lambda_{\mathcal{H}}$，但无需对功率谱密度（PSD）假设任何参数化模型。相反，通过自由参数 α， δ 的 $\Lambda_{\mathcal{H}}$。在图 4 中，我们还绘制了对数$_{10}\,\delta$ –对数$_{10}\,\alpha$ = 对数$_{10}\,n^{(\rm correct)}$ 级别

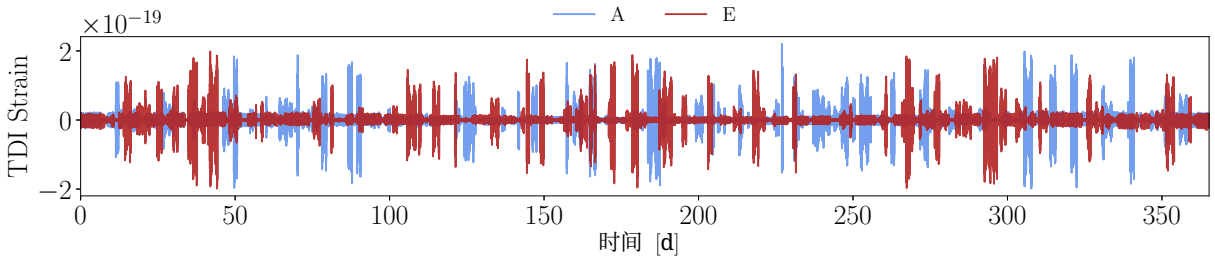


图 5： A （浅蓝色）和 E （深红色）TDI 通道的时间序列包含注入的双星信号、标称仪器噪声以及噪声突发。噪声突发被随机放置在合成时间序列中，其持续时间和谱形也通过从预定义分布中抽样生成（详情见正文）。

行[7], 这与以下对象的二维后验分布一致α， δ 因为 $\alpha \to \infty$ 以及 $\delta \to \infty$，这证实了使用 $\Lambda_{\mathcal{H}}$即使内积中使用了错误的功率谱密度，也能获得与使用正确功率谱密度的基线结果等效的后验分布。

在表 II 中，我们展示了三种不同似然选择（使用错误的功率谱密度水平）与基准模型（采用正确功率谱密度的高斯分布）之间所有参数边缘后验概率密度函数的詹森–香农散度。显然，双曲分布与基准情形非常吻合，并且在纠正错误功率谱密度假设方面，其准确度与Whittle似然相当。

这一结果表明，当噪声谱形并非完全已知，或噪声具有未被恰当建模的特征时，双曲似然形式具有稳健性。正如前文所述，未来的 LISA 数据便属于这种情况：银河系中所有超短周期双星的集合信号所产生的混淆噪声将形成混淆随机前景。因此，一种可能的应用是采用重尾似然（例如本文提出的方法），在稳健的统计框架下进行参数估计和搜索。

最后需要说明的是，在本次练习中反转噪声假设后，我们得到了非常相似的结果，即真实噪声低于似然函数中假设的噪声。在这种情况下，使用 $\Lambda_{\mathcal{N}}$ 似然时，后验分布的展宽被高估；使用另外两种选择时，则估计准确。

3. *Gaussian bursts*

在第三个应用中，我们关注一个更贴近现实的场景。具体来说，我们将第IIIB 2 节生成的数据注入高斯噪声爆发，并将其随机放置在的时间序列中。

[7] 预计该方程成立，因为数据已使用噪声的功率谱密度进行白化，见式（24）。

表II：第III B2 节中，采用错误功率谱密度（PSD）水平的三种不同似然选择所得的所有参数边缘后验概率密度函数（PDF）之间的 Jensen-Shannon（JS）散度，与采用正确功率谱密度（PSD）的高斯分布基准模型进行比较（详见正文）。

	詹森-香农散度（$\times 10^{-3}$）		
$\boldsymbol{\theta}$	$\Lambda_{\mathcal{N}}$	$\Lambda_{\mathcal{W}}$	$\Lambda_{\mathcal{H}}$
$\log_{10}\mathcal{A}$	11	0.4	0.3
f_0	12	0.7	0.4
$\log_{10}(\dot{f}_0)$	1	0.4	0.9
$\cos\,\iota$	11	0.4	0.4
$\sin\,\beta_{\rm E}$	11	0.4	0.5
$\lambda_{\rm E}$	7	1.1	1.7
ψ	12	0.4	0.6
ϕ_0	5	0.9	2.3

A以及 E TDI 通道。噪声突发由式（29）的同一模型生成，参数从 $\log_{10} A \sim \mathcal{U}[-32, -28]$和 $\log_{10} P \sim \mathcal{U}[-23.6, -19.6]$ 中均匀抽取（单位见式（30））。其持续时间 $d_{\rm burst}$ 也从以下范围均匀抽取：$d_{\rm burst} \sim \mathcal{U}[0.01, 10]$ 天。因此，最终的时间序列由注入高斯噪声中的波形模型以及叠加的高斯突发组成，如图5所示。自然，存在这类噪声非平稳性预计会扭曲整体噪声功率谱密度的谱形。然而，在我们的应用中，我们关注的是一个在频率上定位非常精确的单个超紧致双星。因此，突发的影响类似于上文第 IIIB2 节中功率谱密度的模型失配。图 3a对此进行了说明，其中展示了信号的各个分量、模拟的高斯仪器噪声以及高斯噪声突发在频域中的表现。

因此，我们可以采用相同的分析方法，使用与前文相同的一系列似然形式。首先，在高斯似然下，根据数据对参数的后验分布进行采样；该似然假设采用无伪影噪声模型

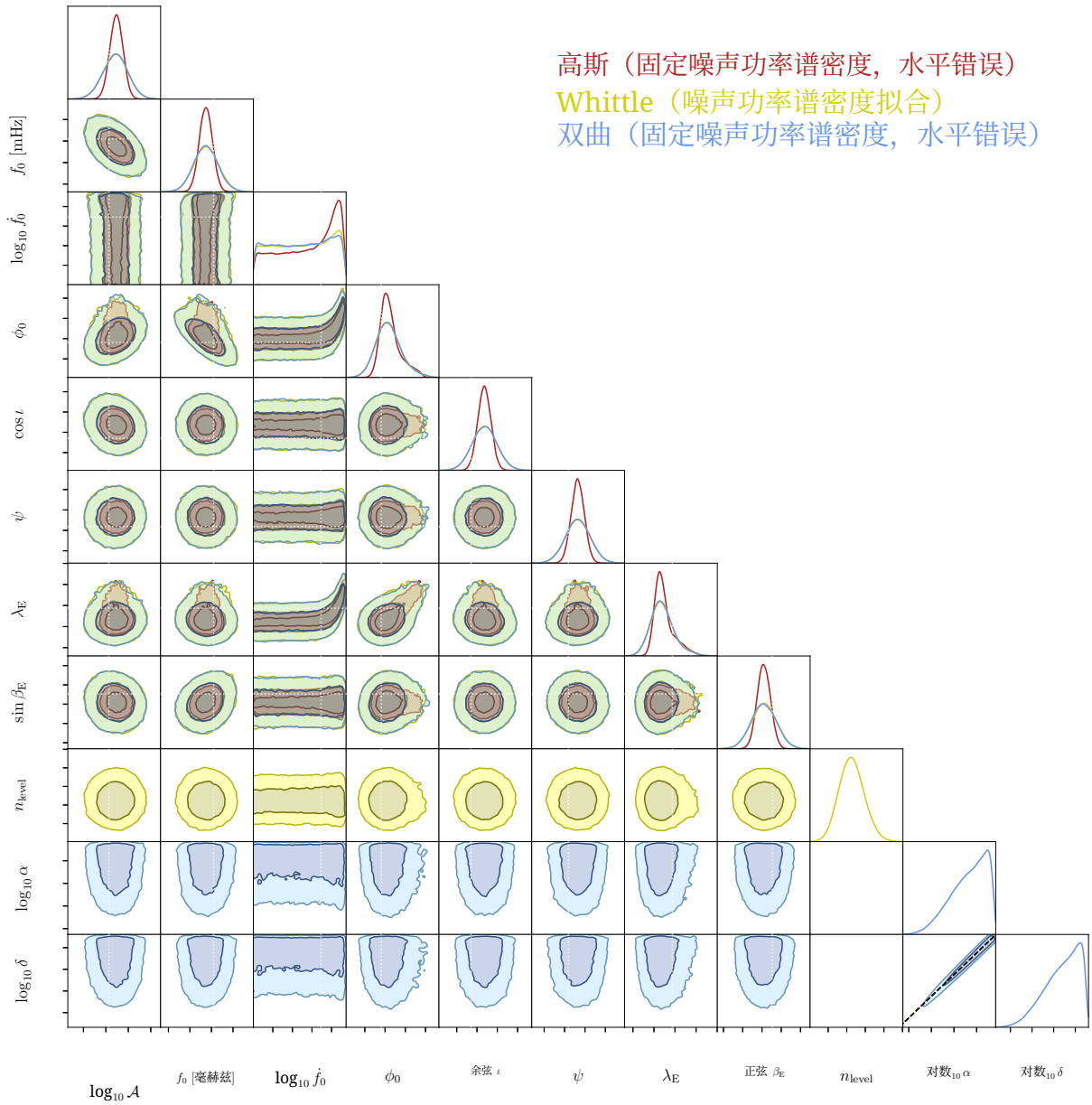


图 6：与图 4相同，但针对第 IIIB 3 节中的噪声非平稳性情形。此处黑色虚线表示 $n_{\rm level}$ 通过 Whittle似然分析估计得到的噪声参数（详情见正文）。

($\Lambda_{\mathcal{N}}$)。这种关于数据的假设预计会导致波形参数后验分布宽度的估计出现偏差。随后，我们使用惠特尔似然 $\Lambda_{\mathcal{W}}$ 重复分析，并拟合噪声水平 $n_{\rm level}$。最后，我们使用双曲分布（$\Lambda_{\mathcal{H}}$），并拟合式（ α 和 δ ）中的参数（23）。请注意，在此应用中我们没有基准运行，因为随机注入高斯突发后，我们无法获得“真实”的噪声功率谱密度。

结果可总结于图 6，其中我们绘出了每种情形下采样参数的二维后验切片。显然，双曲和噪声拟合高斯似然几乎

性能相同，相应的边缘后验分布彼此高度吻合。计算詹森-香农散度后可验证这一点，其结果对所有参数都在 $\sim 10^{-4}$ 的量级。此外，正如预期，使用 Whittle似然估计的 $n_{\rm level}$ 噪声参数（ $n_{\rm level}$ 的最大后验值以黑色虚线表示于图6中）与使用双曲似然分析得到的 δ/α 比值一致。这一结果再次证实，双曲似然在参数估计情境中具有多样性和稳健性 $\Lambda_{\mathcal{H}}$，尤其适用于仪器噪声特性并非完全已知的情况。

IV. 结论与讨论

我们提出了一种用于稳健推断的重尾似然框架，并展示了其在引力波数据分析中的应用。具体而言，我们采用了广义双曲（$\mathcal{GH}$）分布；该分布的极限分布包括指数族中多种广泛使用的分布。这种内在的灵活性使我们能够更准确地对残余噪声建模，在处理真实数据时尤其有用。在引力波天文学中，这类情况十分常见：需要从特定探测器或探测器网络的噪声中搜寻引力波信号。由于对探测器噪声统计特性的了解有限，这项任务可能颇具挑战性，因为噪声可能偏离理想的高斯特性。这种情况通常由噪声瞬变和爆发、数据缺口、谱线，甚至前景随机引力波信号的存在所导致。

基于 ($\mathcal{GH}$) 分布的一个子类（双曲分布， $\mathcal{H}$），我们推导出了式（ $\Lambda_{\mathcal{H}}$ （21）中的双曲似然函数 α， δ 和 β ，并在简单的测试案例中展示了它的性能和灵活性。我们从已知为 $\mathcal{GH}$极限情形的分布中模拟随机变量。这些分布包括高斯分布（$\mathcal{N}$）、 $\mathcal{NIG}$和学生 t 分布。在每种情况下，推断得到的 α、δ 和 β 参数 $\Lambda_{\mathcal{H}}$ （詹森-香农散度的结果表明）使目标分布与后验分布高度吻合；即使目标分布的某个 $\mathcal{GH}$ 参数（λ）不同于双曲分布中假定的 λ=1值，也依然如此。这很好地说明，双曲分布具有足够的自由度，可以调整以适应不同的分布（且精度可接受）。

作为下一步，我们将这一方法应用于更贴近实际的情形，这些情形取材于引力波天文学中遇到的问题。对于当前的地面探测器，由于仪器易于接近，且有大量辅助通道可用，噪声的谱形通常能够得到较好的理解，因此可以较有把握地进行推断。即便如此，仍始终存在瞬变事件的风险，例如可能随机出现的噪声毛刺。对于未来的空间观测站（如 LISA），情况则大不相同，因为届时噪声的谱形将无法完全获知。这是由于可用的辅助通道数量有限，同时也因为 LISA 可探测的大量信号共同产生了“混淆噪声”。

为作演示，我们仅分析了一个双白矮星双星信号；该信号被注入到具有代表性的 LISA 探测器有色高斯噪声中，且信噪比较高（$\rho = 122.7$，其波形参数见表 I ），并探讨了三种不同的应用。在第一项研究中，我们使用我们提出的双曲似然 $\Lambda_{\mathcal{H}}$ 进行参数估计，见方程（23）、（26），其中假定噪声水平完全未知（未假定功率谱密度，也未在频域进行白化）。根据推断得到的对称双曲分布参数 $\{\alpha, \delta\}$，我们能够刻画噪声。特别是，正如理论所预测的，我们发现残差的分布渐近地（当 α，$\delta \to \infty$）趋于假定的高斯分布，其对数 δ – 对数 α = 对数 $S_n^{\mathrm{AE}}(f_0)$，其中 $S_n^{\mathrm{AE}}(f_0)$ 是双星发射频率 f_0处的噪声谱密度。

接下来，我们研究了噪声功率谱密度水平模型失配的情形。本质上，我们假设参数估计过程中采用了错误的噪声水平，并将其代入式（5）中的高斯似然。对此，我们假设噪声功率谱密度低于用于模拟数据的真实值。与之前一样，我们还使用双曲似然 $\Lambda_{\mathcal{H}}$对单个银河系双星进行了参数估计分析，预期 $\{\alpha, \delta\}$ 系数会“调节”似然，以减轻这种噪声功率谱密度模型失配的影响。图 3 和表 II所示结果证实了这一点。使用 $\Lambda_{\mathcal{H}}$时得到的参数波形后验分布，与采用正确噪声水平的基准高斯似然所得到的结果几乎完全相同。此外，从双曲似然的参数后验分布中得到的比值 δ/α 收敛到了真实噪声功率谱密度水平与模型失配情形下的噪声功率谱密度水平之比 $n^{(\mathrm{true})}$ 水平。因此，真实的功率谱密度通过 $\Lambda_{\mathcal{H}}$ 似然得到了完整表征。

最后，我们在一个稍微更贴近现实的场景中测试了这一框架：分析中考虑的两个 TDI 通道的仪器噪声都被随机散布在时间上的高斯突发“污染”。采用与之前相同的方法，我们得到了验证本研究所提出的重尾框架有效性的结果。具体而言，我们证明，使用双曲似然能够恢复波形参数正确的后验分布宽度；由于噪声突发带来了额外的不确定性，这些宽度大于简单高斯似然所预测的值（详情请见第 IIIB3 节）。

我们预计，本研究提出的新框架将对未来观测台的数据非常有用，因为届时噪声模型无法被完全获取。双曲似然具有很强的适应性，因为双曲分布的形状可以调整以拟合残差数据。从这个意义上说，采用 Whittle 近似来处理似然的一项优势是，双曲似然可以收敛到不同于高斯分布的其他分布。因此，该框架有许多应用场景，其中一个主要例子是对噪声伪影进行建模，例如爆发、数据缺口、毛刺或其他类型的非平稳性。同时，即使不存在噪声非平稳性，也可以使用双曲似然来探查我们的

噪声模型是否存在任何模型失配。最后，另一种应用是依据双曲似然的参数值，并借助形状三角图等工具，对不同数据片段进行高斯性检验。

在我们的计算中，我们使用了并行回火马尔可夫链蒙特卡罗方法 [48]，和 GPU 加速的波形 [99]，并将我们的代码作为开源软件提供[8]。

致谢

我们谨向整个 LDC 研究组表示感谢，特别感谢 M. Le Jeune 就 LDC 数据提供的宝贵意见和极具帮助的指导。我们还要感谢 M. Katz、Q. Baghi 和 N. Korsakova 提出的宝贵意见以及富有成果的讨论。NS 和 NK 感谢 Gr-PRODEX 2019 资助计划（PEA 4000132310）提供的支持。NK 感谢欧盟「地平线 2020」研究与创新计划通过 Marie Sklodowska-Curie 资助协议（编号：101065596）提供的资助。AS 感谢 Bodos- saki 基金会通过提供博士奖学金给予的支持。

附录 A：形状三角图

形状三角图是一种非常实用的图形工具，可用于直观呈现指数族分布的重尾程度或偏斜程度。我们可以先使用广义双曲分布来刻画一个新分布。然后，根据恢复得到的 $\{\alpha, \boldsymbol{\beta}, \delta\}$ 系数，可以将感兴趣的分布置于形状三角图 [68, 69]中，从而对其进行定性分类。为此，我们采用不同于通常 $\{\alpha, \boldsymbol{\beta}, \delta\}$ 集合的参数化方式。根据 [68, 69]，我们可以计算

$$\begin{aligned} \zeta &= \delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}, \quad \varrho = \beta/\alpha, \\ \xi &= (1+\zeta)^{-1/2}, \quad \chi = \xi\varrho, \end{aligned} \tag{A1}$$

然后使用与尺度和位置无关的参数χ 和 ξ；它们在 $\chi-\xi$ 平面上构成一个三角形，因为$0 \leq |\chi| < \xi < 1$。在形状三角图中的位置能直观地反映分布的重尾程度和偏斜程度。这种可视化工具在实际应用中很有帮助，例如实时监测数据质量，或根据不同数据段的统计特性 [101]对其进行分类。

在这里，我们研究第 IIE 节中的相同检验分布，但对于参数λ 为负值的两种情况，我们采用 $\mathcal{GH}$ 分布作为 $\lambda<0$，与 [68]中的做法相同。

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{GH}_{\rm d}}(\alpha,\delta) =& n\Big[-\lambda\log(\delta)+\frac{d}{2}\log(2\pi)-\log\left(K_\lambda(\delta\alpha)\right)\Big] \\ &-\frac{1}{2}\left(\lambda-\frac{d}{2}\right)\sum_{j=1}^{n}(\delta^2+x_j^2) \\ &+\sum_{j=1}^{n}K_{\lambda-\frac{d}{2}}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+x_j^2}\right). \end{aligned} \tag{A2}$$

我们假设采用两种不同似然的原因是：一种用于 λ ($\Lambda_{\mathcal{H}}$ 方程 (21)) 中 的正值，另一种负值的情形（$\Lambda_{\mathcal{GH}_{\rm d}}$ 式（A2））， 源于式（9中对定义域的规定。因此，与第II E 节 相比，此处的区别在于，$\{\alpha, \beta, \delta\}$ 的后验分布是使用 $\Lambda_{\mathcal{GH}_{\rm d}}$ 式（A2）估计的，其中测试用例分布为学生 t 分布或 $\mathcal{NIG}$。

获得后验分布后，我们根据方程（ $\{\chi, \xi\}$A1）计算参数，并将其标示在形状三角图上，如图7所示。形状三角图在 $\chi-\xi$平面上以图形方式呈现了所得分布的特征。我们用叉号标出注入值，用彩色圆点标记恢复参数（$\mathcal{N}$ 黄色表示 $\mathcal{H}$ 紫色， $\mathcal{NIG}$ 红色，最后，学生 t 分布情形用浅蓝色表示）。从图7所示结果可以明显看出，我们成功地恢复了底层分布，将其视为 $\mathcal{GH}$ 分布的特殊情形或极限情形。

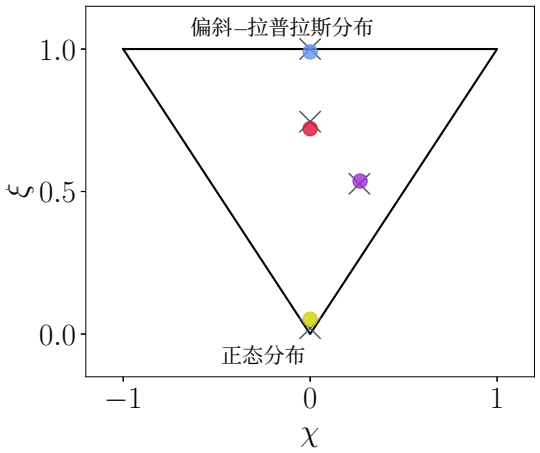


图 7：假设数据由高斯分布 $\mathcal{N}$ （黄色）、双曲分布 $\mathcal{H}$ （紫色）、正态逆高斯分布 $\mathcal{NIG}$（红色）和学生 t 分布（浅蓝色）生成时， χ, ξ 注入值（叉号）和恢复值（实心圆）的形状三角形。

[1] Abbott B.P. 等， Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016), arXiv:1602.03837 [gr-qc]. [2] Aasi J. 等， 《经典与量子引力》32, 074001 2015( ). [3] Acernese F. 等， 《经典与量子引力》32, 024001 2014( ). [4] Abbott B. P. 等（LIGO科学合作组和Virgo合作组）， Phys. Rev. X 6, 041015 (2016). [5] Abbott B. P. 等（LIGO科学合作组和Virgo合作组）， Phys. Rev. X 9, 031040 (2019). [6] Abbott R. 等（LIGO科学合作组和Virgo合作组）， Phys. Rev. X 11, 021053 (2021). [7] Abbott R. 等， “GWTC-2.1：LIGO和Virgo在第三次观测运行前半段观测到的致密双星并合深度扩展目录”， (2021). [8] Abbott R. 等， “GWTC-3：LIGO和Virgo在第三次观测运行后半段观测到的致密双星并合”， (2021). [9] Abbott R. 等， “利用引力波推断的GWTC-3并合致密双星群体”， (2021). [10] A. H. Nitz, S. Kumar, Y.-F. Wang, S. Kastha, S. Wu, M. Sch¨afer, R. Dhurkunde, and C. D. Capano, 《天体物理学杂志》946, 59 (2023). [11] Y. Aso, Y. Michimura, K. Somiya, M. Ando, O. Miyakawa, T. Sekiguchi, D. Tatsumi, and H. Yamamoto, Phys. Rev. D 88, 043007 (2013), arXiv:1306.6747 [gr-qc]. [12] C. S. Unnikrishnan, 《现代物理学D辑国际期刊》 **22**, 1341010 2013 1510 06059 ( ), [ ] arXiv: . physics.ins-det . [13] M. Saleem, J. Rana, V. Gayathri, A. Vijayku- mar, S. Goyal, S. Sachdev, J. Suresh, S. Sudhagar, A. Mukherjee, G. Gaur, B. Sathyaprakash, A. Pai, R. X. Adhikari, P. Ajith, and S. Bose, 《经典与量子引力》39, 025004 (2021). [14] Punturo M. 等， 《经典与量子引力》27, 194002 2010( ). [15] V. Srivastava, D. Davis, K. Kuns, P. Landry, S. Ballmer, M. Evans, E. D. Hall, J. Read, and B. S. Sathyaprakash, 《天体物理学杂志》931, 22 (2022). [16] Ackley K. 等， , 《澳大利亚天文学会刊》37, e047 (2020), arXiv:2007.03128 [astro-ph.HE]. [17] Amaro-Seoane P. 等， “激光干涉仪空间天线”， (2017). [18] Y. Gong, J. Luo, and B. Wang, 《自然·天文学》5, 881 2021 2109 ( ), arXiv: .07442 [astro-ph.IM]. [19] S. Wu and A. H. Nitz, Phys. Rev. D 107, 063022 (2023). [20] T. B. Littenberg and N. J. Cornish, Phys. Rev. D 107, 063004 2023( ). [21] N. Christensen and R. Meyer, Rev. Mod. Phys. 94, 025001 2022( ). [22] T. B. Littenberg and N. J. Cornish, Phys. Rev. D 91, 084034 2015 1410 ( ), arXiv: .3852 [gr-qc]. [23] Q. Baghi, N. Karnesis, J.-B. Bayle, M. Besan˛con, and H. Inchausp´e, (2023), arXiv:2302. 12573 [gr-qc].

[24] L. Speri, N. Karnesis, A. I. Renzini, 和 J. R. Gair， 《自然·天文学》6，1356（2022）。[25] M. C. Edwards, P. Maturana-Russel, R. Meyer, J. Gair, N. Korsakova, 和 N. Christensen， 《物理评论D》102，084062 2020( )。[26] M. Armano *et al.*（LISA Pathfinder）， 《物理评论D》106，062001 2022 2205 ( )， arXiv: .11938 [天体物理学仪器与方法]。[27] Q. Baghi, N. Korsakova, J. Slutsky, E. Castelli, N. Kar- nesis, 和 J.-B. Bayle， 《物理评论D》105，042002（2022）， arXiv:2112.07490 [广义相对论与量子宇宙学]。[28] K. Dey, N. Karnesis, A. Toubiana, E. Barausse, N. Ko- rsakova, Q. Baghi, 和 S. Basak， 《物理评论D》104，044035 2021 2104 ( )， arXiv: .12646 [广义相对论与量子宇宙学]。[29] Q. Baghi, I. Thorpe, J. Slutsky, J. Baker, T. Dal Can- ton, N. Korsakova, 和 N. Karnesis， 《物理评论D》100，022003 2019 1907 ( )， arXiv: .04747 [广义相对论与量子宇宙学]。[30] S. Drasco 和 E. E. Flanagan， 《物理评论D》67，082003（2003）。[31] N. Karnesis, S. Babak, M. Pieroni, N. Cornish, 和 T. Littenberg, 《物理评论D》104，043019（2021）。[32] B. P. Abbott, others, T. L. S. Collaboration, 和 Virgo合作组， 《经典与量子引力》37，055002（2020）。[33] M. Armano *et al.*， 《物理评论快报》120，061101（2018）。[34] M. Armano *et al.*， 《物理评论快报》116，231101（2016）。[35] G. Anderson *et al.*， 《物理评论D》98，102005（2018）， arXiv:1809.08969 [天体物理学仪器与方法]。[36] M. Armano *et al.*， 《物理评论D》97，122002（2018）， arXiv:1806.08581 [天体物理学仪器与方法]。[37] M. Georgousi, N. Karnesis, V. Korol, M. Pieroni, 和 N. Stergioulas， 《皇家天文学会月报》519，2552（2022）， https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/519/2/2552/48483550/stac3686.pdf。[38] V. Korol, N. Hallakoun, S. Toonen, 和 N. Karne- sis， 《皇家天文学会月报》511，5936（2022）， arXiv:2109.10972 [天体物理学高能天体物理学]。[39] S. Babak, C. Caprini, D. G. Figueroa, N. Karnesis, P. Marcoccia, G. Nardini, M. Pieroni, A. Ricciardone, A. Sesana, 和 J. Torrado, (2023 2304 06368), arXiv: . 天体 [ ] 物理学宇宙学 . [40] F. Pozzoli, S. Babak, A. Sesana, M. Bonetti, 和 N. Karnesis, (2023), arXiv:2302.07043 [天体物理学星系天文学]。[41] M.-S. Hartig, S. Schuster, 和 G. Wanner， 《光学杂志》24，065601 2022 2201 ( )， arXiv: .06943 [物理学仪器与探测器]。[42] M. Armano *et al.*， arXiv电子印本， arXiv:2308.02398（2023）， arXiv:2308. 02398 [天体物理学仪器与方法]。[43] S. Paczkowski, R. Giusteri, M. Hewitson, N. Karnesis, E. D. Fitzsimons, G. Wanner, 和 G. Heinzel, 《物理评论D》106，042005（2022）。[44] D. George, J. Sanjuan, P. Fulda, 和 G. Mueller， 《物理评论D》107，022005（2023）， arXiv:2208.14890 [广义相对论与量子宇宙学]。[45] N. Houba, S. Delchambre, T. Ziegler, G. Hechen- blaikner, 和 W. Fichter， 《物理评论D》106，022004（2022）。[46] N. J. Cornish 和 T. B. Littenberg， 《经典与量子引力》32，135012（2015）， arXiv:1410. 3835 [广义相对论与量子宇宙学]。[47] P. J. Green， 《生物计量学》82，711（1995）， https://academic.oup.com/biomet/article-pdf/82/4/711/699533/82-4-711.pdf。[48] N. Karnesis, M. L. Katz, N. Korsakova, J. R. Gair, 和

[8] https://github.com/asasli/hyperbolic_likelihood_filter

N. Stergioulas, (2023), arXiv:2303.02164 [广义相对论与量子宇宙学]。[49] R. Umst¨atter, N. Christensen, M. Hendry, R. Meyer, V. Simha, J. Veitch, S. Vigeland, 和 G. Woan, 《物理评论D》72, 022001（2005）。[50] T. B. Littenberg, N. J. Cornish, K. Lackeos, 和 T. Robson, 《物理评论D》101, 123021（2020）。[51] T. B. Littenberg 和 N. J. Cornish, 《物理评论D》107, 063004 2023( )。[52] Q. Baghi, N. Karnesis, J.-B. Bayle, M. Besan.con, 和 H. Inchausp´e, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》2023, 066（2023）。[53] M. C. Edwards, P. Maturana-Russel, R. Meyer, J. Gair, N. Korsakova, 和 N. Christensen, 《物理评论D》102, 084062 2020 2004 ( ), arXiv: .07515 [广义相对论与量子宇宙学]。[54] M. C. Edwards, R. Meyer, 和 N. Christensen, 《物理评论D》92, 064011（2015）。[55] C. R¨over, 《物理评论D》84, 122004（2011）。[56] C. R¨over, R. Meyer, 和 N. Christensen, 《经典与量子引力》28, 015010（2011）。[57] S. Banagiri, M. W. Coughlin, J. Clark, P. D. Lasky, M. A. Bizouard, C. Talbot, E. Thrane, 和 V. Mandic, 《皇家天文学会月报》492, 4945 2020( )。[58] L. Martellini 和 T. Regimbau, 《物理评论D》89, 124009（2014）, arXiv:1405.5775 [天体物理学宇宙学]。[59] S. Hamimeche 和 A. Lewis, 《物理评论D》77, 103013（2008）, arXiv:0801.0554 [天体物理学]。[60] L. Verde, H. V. Peiris, D. N. Spergel, M. R. Nolta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, E. Wollack, 和 E. L. Wright, 《天体物理学杂志增刊丛刊》148, 195（2003）。[61] R. Flauger, N. Karnesis, G. Nardini, M. Pieroni, A. Ric- ciardone, 和 J. Torrado, 《JCAP》01, 059（2021）, arXiv:2009.11845 [天体物理学宇宙学]。[62] J. D. E. Creighton, 《物理评论D》60, 021101（1999）。[63] B. Allen, J. D. E. Creighton, E. E. Flanagan, 和 J. D. Romano, 《物理评论D》65, 122002（2002）。[64] M. L. Bianchi, A. Hitaj, 和 G. L. Tassinari, arXiv电子印本, arXiv:2005.06390（2020）, arXiv:2005.06390 [q- fin.ST]。[65] S. Borak, A. Misiorek, 和 R. Weron, “厚尾资产收益模型”, 载于 *Statistical Tools for Finance and Insurance*, P. Cizek, W. K. Hardle, 和 R. Weron 编（Springer Berlin Heidelberg, 德国柏林海德堡, 2011）, 第21–55页。[66] K. Prause, fDM预印本48（1997）。[67] E. Eberlein 和 K. Prause, 载于 *Mathematical Finance—Bachelier Congress 2000* 2002 （ Springer, ）第245–267页。[68] K. Prause（1999）。[69] U. K¨achler, K. Neumann, M. Sørensen, 和 A. Streller, 《数学与计算机建模》29, 1（1999）。[70] P. Auclair *et al.*（LISA宇宙学工作组）, 《相对论专题评论》26, 5（2023）, arXiv:2204.05434 [天体物理学宇宙学].[71] “LISA数据挑战”, https://lisa-ldc.lal. in2p3.fr/（）, 访问日期: 2023-01-01。[72] P. Whittle, 《英国皇家统计学会会刊B辑（方法学）》19, 38（1957）。[73] N. Choudhuri, S. Ghosal, 和 A. Roy, 《生物计量学》91, 211 2004( )。[74] Y. Tang, C. Kirch, J. E. Lee, 和 R. Meyer, “非高斯过程谱密度的后验一致性平稳时间序列, ”（ 2021 2103 01357 ）, arXiv: . [ ] math.ST . [75] C. Kirch 、 M. C. Edwards 、 A. Meier 和 R. Meyer, arXiv 电子预印本, arXiv: 1701.04846（2017）, arXiv: 1701.04846 [统计学方法]。[76] S. Vitale *et al.*, 《物理评论D》90, 042003（2014）。[77] A. Contreras-Crist´an、E. Guti´errez-Pe˜na 和 S. G. Walker, 《统计学通信: 模拟与计算》35, 857（2006）, https://doi.org/10.1080/03610910600880203。[78] O. E. Barndorff-Nielsen 和 P. Blaesild（1981）。[79] O. Barndorff-Nielsen, 《伦敦皇家学会会刊A辑: 数学与物理科学》353, 401 1977（）。[80] E. Eberlein 和 E. A. v. Hammerstein, 载于 *Seminar on Stochastic Analysis Random Fields and Applications*, 由 R. C. *IV* Dalang、M. Dozzi 和 F. Russo 编（Birkh¨auser Basel, 巴塞尔, 2004）, 第 221–264 页。[81] P. Virtanen *et al.*, 《自然: 方法》17, 261（2020）。[82] M. Men´endez、J. Pardo、L. Pardo 和 M. Pardo, 《富兰克林研究所学报》334, 307（1997）。[83] F. Nielsen, 《熵》22, 221（2020）。[84] Thorpe J.I. 等, 《天体物理学杂志》883, 53（2019）。[85] M. Armano *et al.*, 《物理评论D》99, 082001（2019）, arXiv: 1812.05491 [天体物理学仪器与方法]。[86] M. Armano *et al.*, 《物理评论快报》118, 171101（2017）, arXiv: 1702.04633 [天体物理学仪器与方法]。[87] Martynov D. V. 等, 《物理评论D》93, 112004（2016）。[88] Abbott R. 等, 《经典与量子引力》37, 055002 2020（）。[89] F. Acernese *et al.*, arXiv 电子预印本, arXiv: 2210.15633（2022）, arXiv: 2210.15633 [广义相对论与量子宇宙学]。[90] S. Babak、A. Petiteau 和 M. Hewitson, （2021）, arXiv: 2108.01167 [天体物理学仪器与方法]。[91] T. A. Prince、M. Tinto、S. L. Larson 和 J. W. Arm- strong, 《物理评论D》66, 122002（2002）。[92] M. Tinto 和 S. V. Dhurandhar, Living Rev. Rel. 8, 4（2005）, arXiv: gr-qc/0409034。[93] LISA科学研究团队, *LISA Science Requirements Document* 3 001 , 技术报告 ESA-L -EST-SCI-RS-（欧洲航天局, 2018）。[94] A. P. Stephan、S. Naoz、A. M. Ghez、M. R. Morris、A. Ciurlo、T. Do、K. Breivik、S. Coughlin 和 C. L. Rodriguez, 《天体物理学杂志》878, 58（2019）。[95] V. Korol、E. M. Rossi、P. J. Groot、G. Nele- mans、S. Toonen 和 A. G. A. Brown, 《皇家天文学会月刊》470, 1894 2017（）, https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/470/2/1894/18139327/stx1285.pdf。[96] N. J. Cornish 和 T. B. Littenberg, 《物理评论D》76, 083006 2007（）。[97] T. Robson、N. J. Cornish、N. Tamanini 和 S. Toonen, 《物理评论D》98, 064012（2018）。[98] M. L. Katz、C. Danielski、N. Karnesis、V. Korol、N. Tamanini、N. J. Cornish 和 T. B. Littenberg, 《皇家天文学会月刊》517, 697 2022（）, https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/517/1/697/46383714/stac2555.pdf。[99] “GBGPU”, https://zenodo.org/record/6500434, 访问日期: 2023-01-01。[100] “LISA数据挑战软件”, https:// gitlab.in2p3.fr/LISA/LDC（）, 访问日期: 2023-01-01。[101] D. Hartmann 和 C. Christiansen,

沉积学 **39**, 697 (1992), https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1365-3091.1992.tb02145.x。