arXiv:2305.04731v1 [math.RT] 8 May 2023

(n, n, n) 的 Specht 模的 M 图基)

Jieru Zhu

Abstract. 受 Tymoczko 定义的 M-图启发，我们证明这些局部无交叉的 $\mathfrak{sl}_3$-网图构成分拆 (n, n, n) 对应的 Specht 模的一组基。进一步地，它们分别与多表基和非椭圆网基之间存在单位三角基变换。

1. Introduction

网图最早出现在李代数张量不变量的研究中 $\mathfrak{sl}_2$ [RTW32] 以及 $\mathfrak{sl}_3$ [Kup96, KK99]。类似地，作为 $\mathfrak{sl}_2$-网图的 Temperley-Lieb 图已应用于量子力学和理论物理。网范畴的近期发展 [CKM14, RT16, TVW17] 将这些结果推广到 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$，并为范畴化、链环同调和流形不变量开辟了新的方向。它使用平面图来描述 $\mathfrak{gl}_n$-模的一个满子范畴中的同态空间，即由自然模的外幂和对称幂生成的子范畴 V。随后，对于 Q 型李超代数也出现了相关结果 [BK21, BDK20], P 型[DKM21a, DKM21b], ；对于任意局部幺超代数上的 $\mathfrak{gl}_n$ 的变形，也有相关结果 [DKMZ23]。

同态空间 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})}(V^{\otimes d}, V^{\otimes t})$ 自然地承载对称群 Σ_d 的作用。在 [PPR09、RT22、IZ19、HKar], 中记录的若干情形下，该模与某个适当分拆对应的 Specht 模重合。具体而言，给定 d 的一个分拆 λ，令 S^λ 为与循环型 λ 相关联的不可约模。它通常被称为 Specht 模，并具有一个由形状为 λ 的标准杨表参数化的多表基。

模 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})}(V^{\otimes 3n}, \mathbb{C})$ 同构于 $S^{(n,n,n)}$ [PPR09、RT22]，其由非椭圆网图张成；非椭圆网图也称为约化网，它们在底部水平线上排列有 $3n$ 个边界点。Σ_d-作用通过叠置辫图来实现。Russell-Tymoczko [RT22] 证明了从多表基到网图基的基变换是单位三角的，并猜想过渡矩阵的元素均为非负数。关于 $\mathfrak{sl}_2$ 与两行分拆的这一猜想的类似版本，已在 [RT19、Rho19、IZ21] 中得到证明。

本文旨在为 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})}(V^{\otimes 3n}, \mathbb{C})$ 提供另一种网基。这些元素称为 M 图，最初由 Tymoczko [Tym12], 提出，其定义满足以下两个性质：

(1) 图由相交的 M 形“叉”组成。
(2) 这些 M 形分量的左弧彼此不交叉，右弧也彼此不交叉。

例 2.8 中给出了一些例子。这一无交叉条件可以看作是试图模仿 Templerly-Lieb 图的性质。在 [Tym12], 中，它们被用作一种中间媒介，以从标准杨表导出非椭圆网。本文将这些图作为主要研究对象，并论证它们也构成一个基（见定理 2.2、推论 2.15）。

定理 1.1. 具有 $3n$ 个边界点的 M 图构成 $S^{(n,n,n)}$ 的一个基。此外，以下三种基中任意两种之间都存在单位三角基变换：多表基、非椭圆约化网基和 M 图基。

同态空间的网基已得到充分研究。例如，胞腔基 [Eli15] 和典范基 [MPT14, Tub14] 已被明确构造。然而，对于它们与

Key words and phrases. Specht 模，网基，杯图，Kazhdan–Lusztig 理论。1

Kazhdan-Lusztig（KL）理论之间的联系，目前所知甚少。例如，Hecke 代数的标准基、KL 基和 Deodhar 基 [Deo90]分别由标准双模、不可分解的 Soergel 双模[Soe90], 和 Bott-Samelson 双模范畴化。它们在网图中的对应物仍有待研究。已有一项相关发现：Tymoczko [Tym12] 的工作表明，每个非椭圆网都作为某个 M 图的最高直和项出现。因此，我们提出这样一个问题：在抛物 Hecke 模的背景下，过渡矩阵是否与 KL 多项式有关？我们还希望，M 图基能作为中间工具，用于计算多表基与非椭圆网基之间的过渡矩阵，并为证明 [RT22]中提出的正性猜想提供方法。

Acknowledgement

作者感谢 Jonathan Kujawa、Jaeseong Oh、Daniel Tubbenhauer 和 Tianyuan Xu 的有益讨论。作者感谢鲁汶天主教大学的 Fonds Sp´ecial de Recherche (FSR) 博士后奖学金对其工作的支持，并感谢 UC Louvain 的 IRMP 提供良好的工作环境。

2. Main Results

我们用 (n^3) 表示分拆 (n,n,n)。与 (n^3) 相关联的杨图是由 $3n$ 个方格组成的集合，这些方格排列成 $3\times n$ 阵列。形状为 (n^3) 的标准杨表，是用 $1,2,\dots,3n$ 填充这样的杨图，使得元素沿每一行和每一列递增。下面给出一个例子，其中 $n_1=3n-2$, $n_2=3n-1$, $n_3=3n$ 以节省空间。

$$T_0=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&4&\cdots&n_1\\\hline 2&5&\cdots&n_2\\\hline 3&6&\cdots&n_3\\\hline\end{array} \tag{2.1}$$

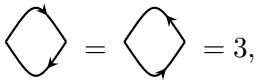
令 $\mathcal{T}^n$ 为形状为 (n^3) 的标准杨表集合。Specht 模 $S^{(n^3)}$ 是与循环型 (n^3) 对应的对称群 S_{3n} 的不可约模。它有一种经典构造，其多表基为 $\{v_T\}$，其中 T 遍历 $\mathcal{T}^n$ 的元素。我们省略 S_{3n} 作用的显式表述，并请读者参阅 [Ful97]。

群 S_{3n} 通过对 $\mathcal{T}^n$ 的元素进行置换而作用于其上（从右侧）。任意元素 $T\in\mathcal{T}^n$ 都可唯一表示为 $T=T_0.\sigma$，其中 $\sigma\in S_{3n}$。我们根据对应置换 $\sigma\in S_{3n}$ 的左弱 Bruhat 序，在 $\mathcal{T}^n$ 上施加偏序。更准确地说，对于 T_1、$T_2\in\mathcal{T}^n$、$T_1=T_0.\sigma_1$ 和 $T_2=T_0.\sigma_2$，当且仅当存在 σ_1 和 σ_2 的某些约化表达式，使前者是一个由连续字母组成的子词，且从 σ_2 中的第一个字母开始时，我们称 $T_1\le T_2$。

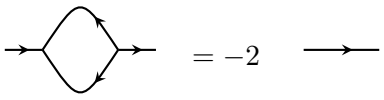
$\mathfrak{sl}_3$-网图是由有向顶点以及连接它们的有向边构成的平面图。每个边界点恰好关联一条边；内部顶点始终是三价的，其相邻边的定向有以下两种形式之一：



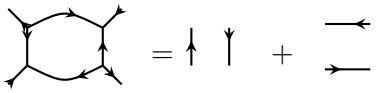
这类图示在同伦意义下等价，并满足以下进一步的局部关系：



(R1)

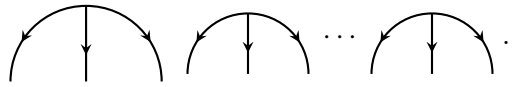


(R2)

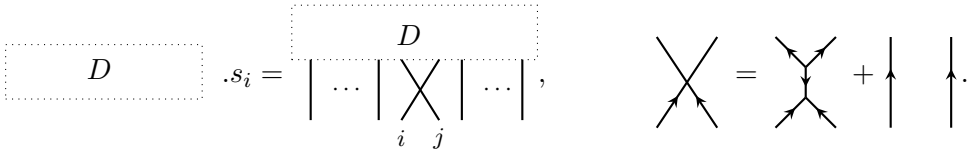


(R3)

本文中，我们仅考虑边界点全部位于一条水平线上的网图，该水平线绘制在图形的底部。我们进一步要求，边界点的定向从网图向外并指向这条水平线。在本文中，我们将始终采用这一约定的定向，后文不再特别说明。令 $D^{(n^3)}$ 为由这些网图张成的 $\mathbb{C}$-向量空间。如果一个网图不能应用任何局部关系 (R1,R2,R3)，则称其为非椭圆网图或约化网图。令 $\mathcal{W}^n$ 表示底部具有 $3n$ 个边界点的约化网图集合。文献 [PPR09] 已证明， $\mathcal{W}^n$ 构成了$D^{(n^3)}$的一组基。此类网图的一个例子是

$W_0 =$ 

空间 $D^{(n^3)}$ 具有对称群的右作用，其中每个简单换位$s_i = (i\ j)$， $j = i+1$，都通过在图的底部叠置一个交换图形来作用，如下图所示，其中定向从图形 D 流出。交叉应通过下述纽结关系来解释。



我们首先引用一些已知结果。

定理 2.1. [PPR09，引理 4.2],[IZ19，定理 3.9], [RT22，定理 6.1] 存在一个同构 $S^{(n^3)} \simeq D^{(n^3)}$，作为右 S_{3n}-模，将 v_{T_0} 映到 W_0。

定理 2.2. [RT22，定理 6.4] 从 $\{v_T\}_{T\in\mathcal{T}^n}$ 到 $\mathcal{W}^n$ 的基变换是单位三角的。

令 $S_{(3^n)}$ 为 T_0 在式 (2.1) 中的列稳定子群（即稳定每一列元素集合的置换群）。类似地，令 $S_{(n^3)}$ 为 T_0 的行稳定子群。它们都分别共轭于与分拆 (3^n)、(n^3) 相对应的杨子群。令 $\mathcal{D}^{(3^n)}$ 和$\mathcal{D}^{(n^3)}$ 分别为 $S_{(3^n)}$ 和 $S_{(n^3)}$的最短长度右陪集代表元集合。

叉形图是形式为 $W_0.\sigma$ for $\sigma \in \mathcal{D}^{(3^n)}$ 的网。也就是说， σ 不会改变 W_0 中每条弧内三个边界点的相对顺序。从图示上看，叉形图的每个内部顶点都与三个边界点相邻。图示请参见例 2.8。

我们从左到右将一个 web 的端点标记为 $1, 2, \ldots, 3n$。给定一个叉形图 w 和正整数 $a < b < c$，如果边界顶点 a、b、c 在 w 中通过一个三价顶点相连，则称 (a, b, c) 为 w 中的一条弧。显然，叉形图的任意边界点都属于某条弧。我们还将 (a, b) 称为左弧，将 (b, c) 称为右弧。我们分别将 a、b、c 称为该弧的左端点、中间端点和右端点。

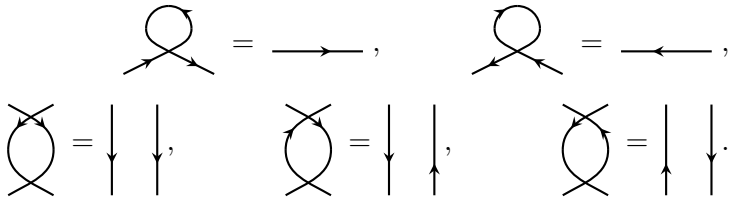
如果 $\sigma \in \mathcal{D}^{(n^3)}$，则进一步称叉形图 $W_0.\sigma$ 为多表列式图。换言之， σ 也不会改变所有左侧（中间、右侧）的端点的相对顺序。我们将具有 $3n$ 个边界点的多表列式图集合记为 $\mathcal{P}^n$。这是一个直接的组合事实： $\mathcal{D}^{(3^n)} \cap \mathcal{D}^{(n^3)}$与 $\mathcal{T}^n$ 之间存在双射，因此我们有集合之间的双射 $\mathcal{T}^n \simeq \mathcal{P}^n$。在建立一些记号之后，我们将明确说明这个双射。

以下引理表明，叉形图在弧的意义下是良定义的，即将 $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ 分拆为 3 元子集。这些结果众所周知；例如，可以直接利用纽结关系验证。

引理 2.3. 下列关系成立。



引理 2.4. 以下关系也成立，众所周知，它们分别称为第一 Reidemeister 变换关系和第二 Reidemeister 变换关系。



我们指出，在应用第二 Reidemeister 变换后，叉形图中的任意两条弧至多相交一次。

给定 m 中的两条弧 $a=(a_1,b_1,c_1)$ 和 $b=(a_2,b_2,c_2)$，如果以下两个条件均成立，则称它们满足部分不交叉性质。

- 要么是 $a_1<a_2<b_2<b_1$，要么是 $a_2<a_1<b_1<b_2$。
- 要么 $b_1<b_2<c_2<c_1$，要么 $b_2<b_1<c_1<c_2$。

简言之， a 和 b 中的左弧互不相交，其右弧也互不相交。若叉形图 m 中的任意一对弧均满足部分不交叉性质，则称 m 为 M 图。令 $\mathcal{M}^n$ 表示具有 $3n$ 个边界点的 M 图集合。

现在我们来说明前面提到的双射 $\phi:\mathcal{T}^n\simeq\mathcal{P}^n$。令 $T\in\mathcal{T}^n$，并令 $\phi(T)$ 为叉形图，使得只要 T 中两个（带标记的）端点位于同一列，它们就在 $\phi(T)$ 中连接到同一个内部顶点。

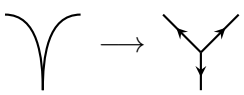
引理 2.5. $\phi(T)$ 是一个多表列式图。

证明。由于 T 中每一列都满足标准条件，每条弧的三个（左、中、右）端点内部的相对次序得以保持。同理，由于 T 中每一行都满足标准条件，所有左端点之间的相对次序也得以保持。□

由此可得 $\phi(T)=W_0.\sigma$ 与 $\sigma\in D_{(3^n)}\cap D_{(n^3)}$，且 ϕ 是一个双射。我们将先前定义的偏序从 $\mathcal{T}^n$ 转移到 $\mathcal{P}^n$，使得 ϕ 成为偏序集之间的双射。[IZ19，命题 2.5] 的三行类比形式可直接照搬，从而得到以下结果。

The定理 2.6。映射 $v_T\mapsto\phi(T)$ 定义了一个模同构 $\mathcal{D}^{(n^3)}\simeq\mathcal{W}^{(n^3)}$。

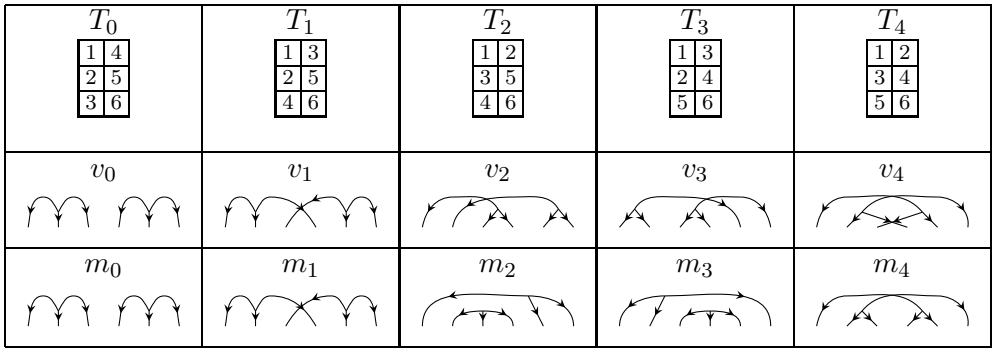
我们还要回顾一下 $\mathcal{T}^n$ 与 $\mathcal{M}^n$ 之间在 [Tym12] 中定义的一个双射。令 $T\in\mathcal{T}^n$。我们首先用整数 1、2、.....、$3n$ 标记水平线上的点。接下来，若 i 位于 T 的第一行，就用 $+$ 标记它；若位于 T 的中间行，就用 0 标记它；若位于 T 的最后一行，就用 $-$ 标记它。现在，我们查看所有标记为 $+$ 和 0 的顶点，并在它们之间绘制互不相交的弧，使得每个标记为 $+$ 的点对应一个左端点，而每个标记为 0 的点对应一个中间端点。众所周知，这样的图是唯一的。接下来，我们忽略当前绘制的弧，查看所有标记为 0 和 $-$ 的端点。现在，我们在它们之间绘制互不相交的弧，使得 0 对应中间端点，而 $-$ 对应右端点。然后，我们将两个阶段绘制的弧合并，并按照以下步骤修改标记为 0 的边界点，以得到 $\psi(T)\in\mathcal{M}^n$:



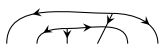
注记 2.7。与 [Tym12], 中的 M 图相比，我们保留 M 图中的交叉（而不是用纽结关系中的最高项替换它们）。

我们将偏序从 $\mathcal{T}^n$ 转移到 $\mathcal{M}^n$，使得 ψ 是偏序集之间的一个双射。我们将 $\mathcal{M}^n$ 上的这个偏序记为 $\leq$。此序称为影包含序，在 [RT22]中得到了深入而详尽的研究。不过，我们不会使用 [RT22], 中引入的 $\mathcal{M}^n$上的组合描述，而只会引用通过 $\mathcal{T}^n$给出的定义。

例 2.8. 对于 $n = 2$，我们列出形状为 (2^3) 的所有标准杨表，以及相应的多表列式图和 M 图，其中 $\phi(T_i) = v_i$ 且 $\psi(T_i) = m_i$。



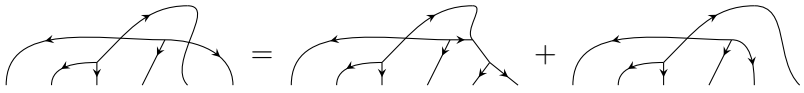
注意，$v_0 = m_0$ 和 $v_1 = m_1$。我们还补充了以下两个图，因此穷尽了具有 6 个底部边界点的叉形图的所有可能情况：

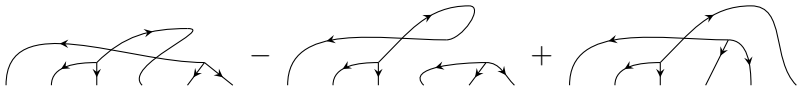
$u_2 = s_4.m_2 =$ , $u_3 = s_2.m_3 =$ .

命题 2.9. 所有具有 6 个边界点的叉形图都是 M-图的线性组合：

$$v_2 = s_2.m_1 = m_2 + m_1 - m_0, \qquad v_3 = s_4.m_1 = m_3 + m_1 - m_0,$$
$$u_2 = s_4.m_2 = m_4 + m_2 - m_0, \qquad u_3 = s_2.m_3 = m_4 + m_3 - m_0,$$
$$v_4 = m_4 + m_3 + m_2 + m_1 - m_0.$$

证明。前四个恒等式可通过类似的计算得到。下面以其中一个为例进行说明。

$u_2 =$ 

$=$  $= m_2 - m_0 + m_4.$

最后一个恒等式由前面的恒等式以及这一事实得出。

$$v_4 = s_4.v_2 = s_4.(m_2 + m_1 - m_0) = (m_4 + m_2 - m_0) + (m_3 + m_1 - m_0) + m_0$$
$$= m_4 + m_3 + m_2 + m_1 - m_0.$$

□

例 2.10. 按照例 2.8，多表基 $\mathcal{P} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4\}$ 到有序集合 M-图 $\mathcal{M} = \{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4\}$ 的过渡矩阵是单三角矩阵。特别地，$\mathcal{M}$ 构成了 $S^{(2,2,2)}$ 的基。

对于一个叉形图 m，定义 $c(m)$（即交叉的数量）为满足以下两种情况之一的数对 $\{(a, b)、(c, d)\}$ 的数量。

- (a, b) 和 (c, d) 都是 m, $a < c < b < d$ 或 $c < a < d < b$ 中的左弧。
- (a, b) 和 (c, d) 都是 m, $a < c < b < d$ 或 $c < a < d < b$ 中的右弧。

我们指出，上述定义的交叉数与图示中实际看到的交叉数不同。特别是，由左弧和右弧形成的交叉不计入上述 $c(m)$ 的定义中。除非另有说明，提到交叉数时，我们始终指 $c(m)$。

设 m 是一个叉形图。与 m 相关联的边界词，先将其所有左端点标记为 $+$，中间端点标记为 0，右端点标记为 $-$，然后按从左到右的顺序读出这些标签。

令 $w=(w_i)_{i=1}^{3n}\in\{+,0,-\}^{3n}$ 为叉形图的边界词。我们在标签集合上施加全序$-<0<+$。w中的逆序数记为 Inv(w)，它是

$$\mathrm{Inv}(w)=\#\{(i,j),1\le i<j\le 3n\mid w_i>w_j\}.$$

对于 $\{+,0,-\}$ 中的两个词 w_1、w_2，如果 w_1 和 w_2 恰好在两个（不一定相邻的）位置上不同，且 w_1 通过以下方式之一由 w_2 得到，则称 $w_1\prec w_2$：

- 将一对 (+,0) 替换为 (0, +),
- 将一对 (+, –) 替换为 (–, +),
- 将一对 (0, –) 替换为 (–,0)。

引理 2.11. 如果 $w\prec v$，则 Inv(w) <Inv(v)。

证明。假设对于 $1\le a<b\le 3n$，w 和 v 在边界点 a 和 b 处不同。交换 v_a 和 v_b 后，$1\le i<a$ 的字母 $w_i=v_i$ 和 $b<i\le 3n$ 不会影响 Inv 中的计数。此外，通过考察位置 a 和 b 之间（不包括这两个位置）的字母，可以发现它们之间的计数在交换前后保持不变。因此，我们只考虑 $a<t<b$ 对应的字母 v_t，并将其与位置 a 或位置 b 配对。我们选取三种情况中的一种，即 $v_a=+$ 和 $v_b=0$，并进一步将其分为三个子情况。其他情形的论证类似。

1) 假设 $v_t=+$。那么（t，b）计入 v 的 Inv，但不计入 w。Iv 的值减少一。

2）设 $v_t=0$，这与上述情形对称，Iv 的值减少 1。

3）设 $v_t=-$，则（a，t）对 v 的 Inv 计数有贡献，而（a，t）对 w 的 Inv 计数有贡献。Iv 的值保持不变。

上述论证表明，w 的计数小于或等于 v 的计数。现在考察对（a，b）本身，它对 v 中的计数有贡献，但不对 w作贡献，因此有 In(w) < In(v)。□

备注 2.12。对于 $\mathcal{P}^n$ 的边界词集合，或等价地，对于 $\mathcal{M}^n$ 的边界词集合，与 $\mathcal{T}^n$ 存在双射。该双射通过如下方式定义：若顶点 i 位于 $+$（分别为 0 和 $-$）的第一行（分别为第二行和第三行）中，则将其设为 $T\in\mathcal{T}^n$。可以对 $\preceq$ 取传递闭包，并在 $\mathcal{T}^n$ 上定义一个新的偏序。根据引理 2.11，该关系实际上是一个偏序，因为引理 2.11 保证了自反性。它是 $\le$ 在 $\mathcal{T}^n$ 上定义的偏序（该偏序在开头定义）的细化。事实上，$\le$ 可以通过要求符号对在 $\preceq$的定义中彼此相邻来定义。还可以证明这两个偏序并不相同。例如，杨表 $T=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&6\\\hline\end{array}\!\!\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&8\\\hline\end{array}$ 和 $S=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline\end{array}\!\!\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&6&8\\\hline\end{array}$ 在传递 5 7 9 5 7 9

属于 $\preceq$ 的闭包，但不属于 $\le$。

例 2.13. 我们列出例 2.8 中所有叉形图的边界词和交叉数。

m	$v_0=m_0$	$v_1=m_1$	v_2	v_3	v_4
w	$+0-+0-$	$+0+-0-$	$++0-0-$	$+0+0--$	$++00--$
$c(m)$	0	0	1	1	2

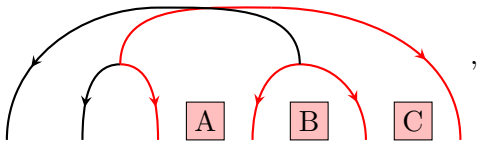
m	u_2	u_3	m_2	m_3	m_4
w	w_4	w_4	w_2	w_3	w_4
$c(m)$	1	1	0	0	0

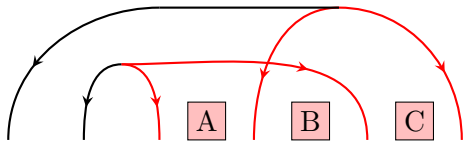
这里，w_i 是 v_i、$0\le i\le 4$的边界词。另外请注意 $w_0\prec w_1\prec w_2\prec w_4$ 和 $w_0\prec w_1\prec w_3\prec w_4$。

定理 2.14。M-图 $\mathcal{M}^n$ 构成了 $S^{(n,n,n)}$的一组基。

证明。为证明张成性，我们说明任意多表列式图都可以写成 M-图的线性组合。我们按字典序进行归纳：先考察边界词中逆序数的个数，再考察交叉的个数 $c(m)$。对于 $c(m)$ 的基础情形 $=0$，证明显然，因为两组基底重合。现在假设 m 是一个具有 $c(m) > 0$的叉形图。在 m中选取一个交叉（由两条左弧相交或两条右弧相交形成），并聚焦于构成该交叉的两条弧。我们声称，可以利用命题 2.9 将其改写为 M- 图的线性组合，其中交叉数严格减少，或者边界词的逆序数严格降低。请注意，这一过程可能会影响其他弧，但逆序数仅取决于边界标签，而边界标签由端点是左端点、中间端点还是右端点决定，这又完全取决于例 2.8中给出的 14 种情形。还请注意，在大多数情形下，也就是说，只要起始于 v_2、 v_3、 v_4，就能得到边界词逆序数严格减少的图的线性组合，由此归纳得证。

现在我们考虑剩余两种情况之一（u_2 和 u_3），另一种情况类似。假设有一个叉形图 m 包含 u_2 作为子图，并利用命题 2.9 将其改写为若干叉形图，这些叉形图分别包含 m_4、 m_2、 m_1 作为子图。包含 m_4 的图记作m'，其他图的边界词的逆序数都严格更少。我们比较 m 和 m'的图示，其中右弧以红色标出。

$m' =$ 

，
$m =$ 

根据引理 2.4，我们可以假设任意两条左弧（或右弧）至多相交一次。注意，在 m 和 m'中，左弧集合保持不变。为了计算 $c(m)$，我们观察其余的右弧。首先讨论另一条右弧从区域 A 开始、在区域 C 结束的情况。这条弧与 m' 中的红色弧不相交，但与 m中的两条红色弧都相交。它在 m 中产生的交叉数多于在 m'中产生的交叉数。在所有其他情况下， m和 m' 中的交叉数相同，留给读者验证。再考虑图中所示的红色弧，它们使 m 中的交叉数比 m'多一个，因此我们证明了 $c(m') < c(m)$。

线性无关性源于这样一个事实： $\mathcal{P}^n$ 和 $\mathcal{M}^n$ 具有相同的基数，而该基数等于 $S^{(n^3)}$的维数。□

结合定理 2.2，我们得到以下结果：

推论 2.15. 以下三个基中的任意一对之间都存在单位三角基变换：多表基 $\mathcal{P}^n$、非椭圆基 $\mathcal{W}^n$和 M 图基 $\mathcal{M}^n$。

References

[BDK20] Gordon C Brown、Nicholas J Davidson 和 Jonathan R Kujawa， *Quantum webs of type q*，arXiv 预印本 arXiv:2001.00663（2020年）。[BK21] Gordon C Brown 和 Jonathan R Kujawa， *Webs of type q*，《代数组合》4（2021年），第6期，1027–1072。[CKM14] Sabin Cautis、Joel Kamnitzer 和 Scott Morrison， *Webs and quantum skew Howe duality*，数学年刊 360（2014年），第1-2期，351–390。[Deo90] V. V. Deodhar， *A combinatorial setting for questions in Kazhdan-Lusztig theory*，几何奉献 36（1990年），第1期，95–119。[DKM21a] Nicholas Davidson、Jonathan R Kujawa 和 Robert Muth， *Howe duality of type p*，arXiv 预印本 arXiv:2109.03984（2021年）。[DKM21b]， *Webs of type p*，arXiv 预印本 arXiv:2109.03410（2021年）。[DKMZ23] Nicholas Davidson、Jonathan R Kujawa、Robert Muth 和 Jieru Zhu， *Superalgebra deformations of web categories: finite webs* 2302 04073 2023 ，arXiv 预印本 arXiv:。（）。[Eli15] Ben Elias， *Light ladders and clasp conjectures*，arXiv 预印本 arXiv:1510.06840（2015年）。

[Ful97] W. Fulton, *Young tableaux*, 伦敦数学会学生文本丛书, 第35卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1997年, 附有表示论和几何方面的应用。[HKar] Samuel David Heard 和 Jonathan R Kujawa, *Positivity and web bases for specht modules of hecke algebras*, 《国际数学研究通讯》（即将出版）。[IZ19] Mee Seong Im 和 Jieru Zhu, *Transitioning between tableaux and spider bases for specht modules*, arXiv 预印本 arXiv:1911.05049v1（2019年）。[IZ21], *Transitioning between tableaux and spider bases for specht modules*, 《代数与表示论》（2021年）, 1–13。[KK99] M. Khovanov 和 G. Kuperberg, *Web bases for $\mathfrak{sl}(3)$ are not dual canonical*, 太平洋数学杂志 188（1999年）, 第1期, 129–153。[Kup96] G. Kuperberg, *Spiders for rank 2 Lie algebras*, 《数学物理通讯》180（1996年）, 第1期, 109–151。[MPT14] Marco Mackaay、Wan Pan 和 Daniel Tubbenhauer, *The $\mathfrak{sl}_3$ web algebra*, 数学杂志 277（2014年）, 401–479。[PPR09] T. K. Petersen、P. Pylyavskyy 和 B. Rhoades, *Promotion and cyclic sieving via webs*, 代数组合杂志 30（2009年）, 第1期, 19–41。[Rho19] Brendon Rhoades, *The polytabloid basis expands positively into the web basis*, 《数学论坛：西格玛》第7卷, 剑桥大学出版社, 2019年, 第e26页。[RT16] David EV Rose 和 Daniel Tubbenhauer, *Symmetric webs, jones–wenzl recursions, and q-howe duality*, 《国际数学研究通讯》2016（2016年）, 第17期, 5249–5290。[RT19] H. M. Russell 和 J. S. Tymoczko, *The transition matrix between the Specht and web bases is unipotent with additional vanishing entries* 2019 5, 1479 1502 , 《国际数学研究通讯》IMRN（ ）, 第–期。[RT22] Heather M Russell 和 Julianna Tymoczko, *The transition matrix between the specht and $\mathfrak{sl}_3$ web bases isunitriangular with respect to shadow containment*, 《国际数学研究通讯》2022（2022年）, 第5期, 3371–3416。[RTW32] G Rumer、E Teller 和 H Weyl, *Eine für die valenztheorie geeignete basis der binären vektorinvarianten*, *nachrichten von der ges. der wiss* ¨ 1932 498 504 , 哥廷根。数学-物理学组（ ）, –。[Soe90] W. Soergel, *Kategorie $\mathcal{O}$*, *perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, 《美国数学会杂志》3（1990年）, 第2期, 421–445。[Tub14] D. Tubbenhauer, *$\mathfrak{sl}(3)$-web bases, intermediate crystal bases and categorification*, 代数组合杂志 40（2014年）, 第4期, 1001–1076。[TVW17] Daniel Tubbenhauer、Pedro Vaz 和 Paul Wedrich, *Super q–howe duality and web categories*, 《代数与几何拓扑》17（2017年）, 第6期, 3703–3749。[Tym12] J. Tymoczko, *A simple bijection between standard $3 \times n$ tableaux and irreducible webs for $\mathfrak{sl}_3$*, 代数组合杂志 35（2012年）, 第4期, 611–632。

Institut de Recherche en Mathématique et en Physique, Universite Catholique de Louvain
Email address: jieru.zhu@uclouvain.be