arXiv:2305.04733v1 [math.PR] 8 May 2023

# 关于具有不连续被积函数和局部时的分数布朗运动随机积分的离散化误差

瓦伦丁·GARINO 和劳里·VIITASAARI

Abstract. 我们研究关于分数布朗运动的随机积分 $\int_0^T f(B_s^H)dB_s^H$的等距黎曼近似，其中 $H > \frac{1}{2}$， $f$ 是任意局部有界变差函数，因此可能存在不连续点。我们证明，经过适当归一化的近似误差在 $L^2$拓扑下收敛到局部时的一个泛函，并给出该近似的收敛速率。因此，我们的结果既补充了该主题近期的一些进展，也为局部时的模拟提供了新方法。

数学主题分类（2020）：60G15、60G22、60H05、26A33

关键词：随机积分的近似、不连续被积函数、精确收敛速率、局部时、分数布朗运动

## 1. Introduction

随机积分离散化所产生的近似误差的收敛速率有着广泛的应用，因此一直是一个备受关注的研究课题。事实上，这类近似误差界有助于量化模拟的准确性；当只能获得离散观测值时，还可用于推导各种随机模型中参数估计的有限样本界。

这一主题一直是活跃的研究领域，在伊藤积分的背景下已经相对充分地得到理解，参见例如 [12]。随后，研究重点转向了分数布朗运动及相关过程的情形。在这种情况下，可以通过路径意义下的方式理解积分：对于 $H > \frac{1}{2}$，采用 Young 积分 [20]；对于$\frac{1}{4} < H < \frac{1}{2}$，则采用粗糙路径 [6]。在分数布朗运动情形下，对于带有 $H > \frac{1}{2}$且（足够）光滑的 $f$，$\int_0^T f(B_u^H)dB_u^H$的黎曼近似的收敛速率已知与 $n^{1-2H}$成正比，参见 [7] 及其中的参考文献。然而，当 $f$ 具有不连续性时，问题会更加微妙，因为积分的概念需要进行一些额外处理，参见

*Date*: 2023年5月9日。

例如 [5, 9, 10], ; 而且，在被积函数不连续的情况下，是否能得到相同的速率 $n^{1-2H}$尚不清楚。事实上，即使在布朗运动情形下，对 $f$ 引入不连续性也会使速率从 $n^{-1/2}$ 降低到 $n^{-1/4}$，参见 [2] ; 该文还证明，在分数布朗运动情形下，上界与 $n^{1/2-H}$ 成正比，这再次将是光滑情形速率 $n^{1-2H}$ 的一半。另一方面，随后在 [5], 中，研究出人意料地证明该速率与 $n^{1-2H}$ 成正比，这与布朗运动情形所产生的预期相反。最后，我们提及一篇近期预印本 [3],，其中作者研究了存在不连续性时期望的精确收敛速率，证实即使存在跳跃，速率 $n^{1-2H}$ 仍然是正确的。

本文继续了 [3] 的研究，证明了更强的收敛模式以及二阶收敛速率。也就是说，我们证明，经过适当的 $n^{1-2H}$归一化后，误差收敛到分数布朗运动局部时的一个（泛函），且收敛速率与$n^{(H-1)/2}$成正比。作为一个附带结果，我们的方法可根据过程 $B^H$的样本路径模拟局部时。显然，对于更规则的被积函数 $f$，我们将已知结果作为特例重新得到。我们的证明基于一项技术性估计：通过区分大增量和小增量，可以近似计算增量 $B^H$的函数的期望。该结果本身也可能具有独立的研究价值，并可应用于其他问题，见命题 1.6。

为介绍主要结果，回顾一下：当实值函数为凸函数时，其在分布意义下的二阶导数可视为一个正的且 $\sigma$有限的拉东测度。以下结果是本文的主要发现。

定理 1.1. 设 $B = (B_1, B_2)$ 是一个二维分数布朗运动（其中 $B^1$ 和 $B^2$ 相互独立），其赫斯特指数为 $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$。设 $f$ 是一个实值凸函数的左导数。对于 $(i, j) \in [\![1, 2]\!]^2$,$n \in \mathbb{N}^*$ 和 $t \in [0, T]$，令

$$S_n^{i,j}(t) := n^{2H-1} \left( \int_0^t f(B_s^i) dB_s^j - \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} f\left(B^i_{\frac{k}{n}}\right) \left( B^j_{\frac{k+1}{n} \wedge t} - B^j_{\frac{k}{n}} \right) \right).$$

那么，存在一个仅依赖于 $T, H$ 的常数 $P > 0$，使得如果分布导数 $\mu = f'$ 满足增长条件

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-P\frac{a^2}{2}} d\mu(a) < \infty, \tag{1}$$

*then*

$$\left\| S_n^{i,j}(t) - \delta_{ij} \int_{\mathbb{R}} L_t^i(a) d\mu(a) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \int_{\mathbb{R}} e^{-P\frac{a^2}{2}} d\mu(a) n^{-\frac{1-H}{2}}, \tag{2}$$

其中， $L^i$ 是 $B^i$ 的局部时， $\delta_{ij}$ 是克罗内克符号，而 $C = C(H,T)$ 是一个仅依赖于 $H,T$ 的常数。

注 1.2. 从我们的证明（见注 3.1）可以立即看出，对于任意函数 $f \in BV_{loc}$，该结果仍然成立，其中 $BV_{loc}$ 表示局部有界变差函数空间。在这种情况下，分布导数 $\mu = f'$ 是一个符号测度，其全变差测度为 $d|\mu|$，而增长条件（1）替换为

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-P\frac{a^2}{2}} d|\mu|(a) < \infty,$$

并且右端的积分是关于 $d|\mu|$进行的。

定理 1.1 的一个特例给出以下结果：

命题 1.3. 设 $B$ 为赫斯特指数为 $H > \frac{1}{2}$ 的一维分数布朗运动。对于所有 $a \in \mathbb{R}$，有

$$\left\| 2n^{2H-1} \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \left| B_{\frac{k+1}{n}\wedge t} \right| \mathbb{I}_{\left\{ sgn\left(B_{\frac{k+1}{n}\wedge t} - a\right) sgn\left(B_{\frac{k}{n}} - a\right) < 0 \right\}} - L_t(a) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \quad C(H,T) e^{-P\frac{a^2}{2}} n^{-\frac{1-H}{2}} \tag{3}$$

本文完成了始于 [2] 并在 [3]和 [5]中继续开展的研究。命题 1.3 最初是在赫斯特指数为 $H < \frac{1}{2}$ 的分数布朗运动情形下证明的（见 [14]）。近期论文 [13] 和 [16]中证明了密切相关的结果。值得注意的是，上述论文均未给出形如（3）的定量界。另一方面，在 $H < \frac{1}{2}$ 的情形下，速率 $\frac{1-H}{2}$ 已经出现在近期论文 [1], 中，该论文考察了局部时的各种近似（见 [1],推论 7）。

注 1.4. 当假设 $f$ 例如是一个 $\mathcal{C}^1$ 函数时，我们可以写成 $d\mu = f'd\lambda$ ，其中 $\lambda$ 是勒贝格测度。于是，我们可以使用众所周知的恒等式

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^i(a) d\mu(a) = \int_{\mathbb{R}} L_t^i(a) f'(a) da = \int_0^t f'(B_s^i) ds,$$

然后在光滑情形下得到已有结果（例如参见 [7]）。

注 1.5. 当函数 $f$ 不连续时（例如取 $x \to sgn(x)$），右端 (2) 中的速率 $\frac{1-H}{2}$（我们预期这是尖锐的）与正则情形 $f \in \mathcal{C}^1$有所不同；在正则情形下（见 [7], 推论 3.4），我们有：

$$S_n^{i,j}(t) - \frac{\delta_{ij}}{2} \int_0^t f'(B^i) ds = O_{\mathbb{P}}\left(\kappa_H(n)\right),$$

其中 $\kappa_H$ 定义为:

$$\kappa_H(n) := \begin{cases} n^{-\frac{1}{2}} & if\ H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ (n\ln(n))^{-\frac{1}{2}} & if\ H = \frac{3}{4} \\ n^{2H-2} & if\ H \in (\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

无论如何，我们可以看到 $\kappa_H(n) n^{\frac{1-H}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$。研究二阶误差的渐近行为

$$\epsilon(n) := n^{\frac{1-H}{2}} \left( S_n^{i,j} - \frac{\delta_{ij}}{2} \int_0^t L_t^i(a) d\mu(a) \right)$$

可能会是另一个有趣的问题。

证明定理 1.1 所需的主要技术性结果，是命题 1.6 中所述的定量界，该结果本身或许也具有独立的研究价值。在陈述该结果之前，我们先固定一些将在全文中使用的记号。

**1.1.** 记号与技术性结果。全文中，令 $T < \infty$ 为一个正实数，并考虑区间 $[0, T]$。对于所有 $s > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}^*$，记 $s_n = \frac{\lfloor ns \rfloor}{n}$，其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整函数。我们还使用 $\Gamma(\cdot)$ 表示通常的伽马函数。对于给定的时间指标 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_p$，记高斯向量 $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{i \in [\![1,p]\!]}$ 的协方差矩阵为 $\Sigma((0, t_1) \ldots, (t_{p-1}, t_p))$，其中 $B$ 是赫斯特指数为 $H \in$ 的分数布朗运动， $H \in \in (0, 1)$（更多细节见第 2 节）。最后，对于正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{q \times q}$，我们定义函数

$$d_Q(x) = e^{-x^T Q^{-1} x}, \quad x \in \mathbb{R}^q. \tag{4}$$

我们选取 $p, q \in \mathbb{N}^*$。对于每个子集 $A \subset [\![1, p+q]\!]$，我们将记作 $\_A := [\![1, p+q]\!] \setminus A$，并且对于 $i \in \{1, \ldots, Card(A)\}$，$A[i]$ 将表示 $A$ （按规范顺序）的第 $i$ 个元素。最后，在下文中， $D$ 和 $\beta$ 将表示仅依赖于 $T, H, p, q$ 并且可能依赖于 $M$ 的一般常数（见下文命题 1.6 中假设（$H_1$）的陈述），其值可能在不同的行之间发生变化。

考虑分数布朗运动的增量的一个泛函 $Y := F((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{i \in [\![1,\ m]\!]})$。我们的主要技术工具是即将给出的命题 1.6，它为 $\mathbb{E}[Y]$ 的期望提供了一个上界。更重要的是，在 $F$ 满足适当增长条件，且部分时间增量 $|t_i - t_{i-1}|$ 为“小”，另一些为“大”时，它给出了 $Y$ 的期望值与同一函数作用于一个分量相互独立的高斯向量所得期望值之间差异的定量上界。粗略地说，这意味着只要“小”增量彼此不相邻，它们就近似独立于“大”增量。直观而言，只要中间至少有一个大增量，小增量彼此之间就几乎独立。

命题 1.6 的证明依赖于对向量 $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{i\in[\![1,\ m]\!]}$ 的协方差矩阵进行详细研究，并推迟到第 4 节。

命题 1.6. 设 $p, q \in \mathbb{N}^*$ 满足 $p \leq q$，且设 $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_{p+q} \leq T$。令 $B$ 为赫斯特指数为 $H > \frac{1}{2}$ 的分数布朗运动，并令$F : \mathbb{R}^{p+q} \mapsto \mathbb{R}$ 为至多具有多项式增长的函数。另设以下三个假设:

($H_1$) 存在一个实数 $M > 0$、一个至多具有多项式增长的函数 $G : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}_+$，以及一个子集 $J \subset [\![1, p+q]\!]$，其基数为 $p$，且$1 \in J$，使得对所有 $(x_1, \ldots, x_{p+q})$,

$$\left| F\left(x_1, x_1 + x_2, \ldots, \sum_{k=1}^{p+q} x_k\right)\right| \leq G(x_1, \ldots, x_{p+q}) \prod_{i=1}^{q} \mathbb{I}_{\left\{|x_{\bar{J}[i]}| \leq M \sum_{l=1}^{p} |x_{J[l]}|\right\}}. \tag{5}$$

($H_2$) 存在一个 $h \in (0, 1)$，使得对于所有 $(i, j) \in J \times J$，都有

$$(t_i - t_{i-1}) \leq h(t_j - t_{j-1}).$$

($H_3$) 对所有 $(i, j) \in J^2$，都有 $i \neq j \implies |i - j| \geq 2$。

于是我们有:

(1.) 在假设 ($H_1$) 下，存在两个常数 $\beta, D > 0$，它们与所选取的时间点 $t_i$ 无关，使得对于所有 $a \in \mathbb{R}$，我们都有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[F(B_{t_1} - a, \ldots, B_{t_{p+q}} - a)\right] \\ \leq\ & \frac{\beta e^{-Da^2}}{\prod_{i=1}^{p+q} |t_i - t_{i-1}|^H} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \left| F\left(y_1, \ldots, \sum_{k=1}^{p+q} y_k\right)\right| \prod_{i=1}^{p} e^{-D \frac{y_{J[i]}^2}{|t_{J[i]} - t_{J[i]-1}|^{2H}}} dy_i. \end{aligned} \tag{6}$$

(2.) 此外，假设 ($H_2$) 和 ($H_3$) 也成立。通过协方差定义中心化高斯向量 $X := (X_1, \ldots, X_p)$。

$$Cov(X_i, X_j) = \delta_{ij} \left(t_{J[j]} - t_{J[j]-1}\right)^{2H},$$

且对于 $x = (x_1, \ldots, x_q)$，令 $B(x) = (B_1, \ldots, B_{p+q})$ 对所有 $k \in [\![1, p+q]\!]$ 定义为

$$\tilde{B}_k(x) - \tilde{B}_{k-1}(x) := \begin{cases} x_i \ \text{if } k = \bar{J}[i] \\ X_i - X_{i-1} \ \text{if } k = J[i], \end{cases}$$

其中 $\tilde{B}_0 = 0$。若 $\Sigma' := \Sigma\left((t_{\bar{J}[i-1]}, t_{\bar{J}[i]})\right)_{i\in[\![1,\ p+q]\!]}$ 表示 $(B_{t_{\bar{J}[i]}} - B_{t_{\bar{J}[i-1]}})_{i\in[\![1,\ q]\!]}$ 的协方差矩阵，则对所有 $a \in \mathbb{R}$，我们有

$$\left| \mathbb{E}\left[F(B_{t_1} - a, \ldots, B_{t_{p+q}} - a)\right] - \frac{d_{\Sigma'}((a, 0, \ldots, 0))}{(2\pi)^{\frac{q}{2}} \sqrt{det(\Sigma')}}\right.$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^q} \mathbb{E}[F(\tilde{B}(y))]dy_1 \dots dy_q \Big|$$

$$\leq \frac{h^{2-2H}\beta e^{-Da^2}}{\prod_{i=1}^{p+q}|t_i - t_{i-1}|^H} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \left| F\left(y_1, \dots, \sum_{k=1}^{p+q} y_k\right)\right| \prod_{i=1}^{p} e^{-D\frac{y_{J[i]}^2}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}} dy_i. \tag{7}$$

其中 $d_{\Sigma'}$ 由 (4) 给出， $\beta$、 $D$ 如 (6) 所示。

条件 ($H_1$) 中的子集 $J$ 对应于“小”增量的指标，而条件 ($H_1$) 则允许用一个依赖于增量的函数 $G$ ，对函数 $F$ 在点 $B_{t_k}$ 处的取值进行上界估计。其补集 $\overline{J}$ 对应于“大”增量的指标。此外，($H_1$) 中的指示函数乘积意味着，与大增量对应的变量受小增量（乘以某个常数）的上界限制，这些小增量由 $J$ 标记。因此，涉及小增量密度的陈述右端的上界是良定义的。条件 ($H_2$) 仅衡量大增量相较于小增量大出多少（常数为 $h$）。类似地，($H_3$) 仅表示小增量彼此不相邻。接下来，更重要的第二个陈述给出了差值的显式上界：比较真实期望与将小增量视为相互独立、并且仅通过由 $\overline{J}$ 标记的大增量所构成的协方差矩阵来考虑依赖关系时得到的期望。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾一些与分数布朗运动、局部时以及不连续过程的随机积分相关的有用概念和结果。第 3 节证明主要结果，即定理 1.1。主要技术工具命题 1.6 的证明见第 4 节。最后，附录汇集了其他一些有用的技术引理。

## 2. 预备知识

**2.1.** 分数布朗运动。设 $H \in (0,1)$。赫斯特指数为 $H$ 的一维分数布朗运动定义为中心高斯过程 $(B_t)_{t\geq 0}$ ，其 $B_0 = 0$ 且协方差函数 $\mathbb{E}[B_s B_t] = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$.。函数 $f\colon s,t \to \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$ 具有对称性和半正定性，这一点可见例如 [15]，因此它确为一个协方差函数。特别地，当$H = \frac{1}{2}$时，协方差简化为 $\mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t$ ，这对应于标准布朗运动的协方差。

我们采用以下众所周知的基本性质。

**引理 2.1.** 设 $B$ 是赫斯特参数为 $H \in \in (0,1)$ 的分数布朗运动。那么，

- $B$ 是 $H$-自相似的，即 $\forall c > 0$,

$$(B_{ct})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} (c^H B_t)_{t\geq 0},$$

其中 $\overset{\mathcal{L}}{=}$ 表示依分布相等。

- $B$ 具有平稳增量，即

$$(B_{t+s} - B_s)_{s\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} (B_t)_{t\geq 0}.$$

- 存在 $B$ 的一个修正版本，其路径几乎必然是 $\alpha$-H ¨older 连续的，对任意 $0 < \alpha < H$均成立。

由于协方差函数的结构复杂，对分数布朗运动进行计算通常比对标准布朗运动进行计算更加繁琐。幸运的是，借助下文给出的一些有用估计，可以简化这些计算。证明见 [11]。

引理 2.2. 设 $B$ 是一个 $H > \frac{1}{2}$ 的分数布朗运动，且 $T > 0$。那么，存在一个仅依赖于 $T$ 和 $H$的常数 $\beta > 0$，使得：

- 对于所有 $0 \leq t \leq T$、 $0 \leq u \leq v \leq T$、 $|\mathbb{E}[(B_v - B_u)B_t]| \leq t^{2H-1}|v-u|$。

<escape>•对所有 $0 \leq u \leq v \leq T$ 和 $0 \leq x \leq y \leq T$，其中 $u \leq x$ 且 $v - u \leq \frac{|x-v|}{2}$，$|\mathbb{E}[(B_v - B_u)(B_y - B_x)]| \leq \beta(v-u)(y-x)|y-u|^{2H-2}$.</escape>

注 2.3. 在 $u = k$、 $v = k+1$、 $x = j$ 和 $y = j+1$ 对于 $j \leq k$ 的情况下，我们可以将引理 2.2 的公式作为一个特例重新得到。
$\mathbb{E}[(B_{j+1} - B_j)(B_{k+1} - B_k)] = \mathbb{E}[B_1(B_{k+1-j} - B_{k-j})] \leq \beta(k-j)^{2H-2}$.
这应与已知的精确渐近表达式进行比较。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B_{j+1} - B_j)(B_{k+1} - B_k)] &= \mathbb{E}[B_1(B_{k+1-j} - B_{k-j})] \\ &\sim_{k-j\to\infty} H(2H-1)(k-j)^{2H-2}.\end{aligned}$$

在下文中，对于所有 $\{(a_1^1, a_2^1) \ldots, (a_1^m, a_2^m)\} \in [0,t]^{2m}$，我们将记作，

$$\begin{aligned}(8)\quad &\Sigma\left((a_1^1, a_2^1), \ldots, (a_1^m, a_2^m)\right) \\ &:= \begin{bmatrix} \mathbb{E}[(B_{a_1^1} - B_{a_2^1})^2] & \ldots & \mathbb{E}[(B_{a_1^1} - B_{a_2^1})(B_{a_1^m} - B_{a_2^m})] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{E}[(B_{a_1^m} - B_{a_2^m})(B_{a_1^1} - B_{a_2^1})] & \ldots & \mathbb{E}[(B_{a_1^m} - B_{a_2^m})^2] \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$B^H$的增量协方差矩阵。我们还将用到以下性质，即分数布朗运动[1]的局部非确定性：对于所有 $m \in \mathbb{N}^*$，存在一个常数$L_{H,\ m} > 0$ 使得

[1]局部非确定性性质的原始表述由 [4], 引入，是以条件方差的形式给出的。与高斯情形一样，条件过程也是高斯过程，因此可以推导出此处针对分数布朗运动给出的等价表述，参见 [4, 引理 2.3]。

对于所有 $0 = s_0 < s_1 \leq \ldots \leq s_m$ 以及所有（$u_1$，$\ldots$，$u_m$），

$$Var\left(\sum_{i=1}^{m} u_i(B_{s_i} - B_{s_{i-1}})\right) \geq L_{H,m} \sum_{i=1}^{m} |u_i|^2 (s_i - s_{i-1})^{2H}. \tag{9}$$

利用 H¨older 不等式，很容易得到相反方向的界

$$Var\left(\sum_{i=1}^{m} u_i(B_{s_i} - B_{s_{i-1}})\right) \leq m \sum_{i=1}^{m} |u_i|^2 (s_i - s_{i-1})^{2H}. \tag{10}$$

因此，局部非确定性意味着，增量的线性组合的方差与增量方差的线性组合在常数因子意义下同阶。关于高斯过程的局部确定性性质，更多细节可见 [4] 和 [18]。

非确定性蕴含以下性质，该性质将在命题 1.6 的证明中使用。设 $0 \leq s_0 < s_1 \leq s_2 < s_3 \ldots \leq s_{2m-2} < a_{2m-1}$ 且 $\Sigma((s_{2i+1}, s_{2i})_{i\in[\![0,\ m-1]\!]})$ 如式 (8) 所示。那么存在一个常数$k_{H,\ m} > 0$（仅依赖于 $H, T, m$），使得

$$k_{H,m} \prod_{i=0}^{m-1} |s_{2i+1} - s_{2i}|^{2H} \leq det\left(\Sigma\left((s_{2i+1}, s_{2i})_{i\in[\![0,m-1]\!]}\right)\right). \tag{11}$$

类似地，我们有上界

$$det\left(\Sigma\left((s_{2i+1}, s_{2i})_{i\in[\![0,m-1]\!]}\right)\right) \leq m! \prod_{i=0}^{m-1} |s_{2i+1} - s_{2i}|^{2H}. \tag{12}$$

由 (9) 和 (10) 可知，矩阵$\Sigma\left((s_i, s_{i-1})_{i\in[\![1,m]\!]}\right)$ 的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 满足

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\},\ L_{H,m} \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} |s_j - s_{j-1}|^{2H} \leq \lambda_i \leq m \max_{j\in\{1,\ldots,m\}} |s_j - s_{j-1}|^{2H}. \tag{13}$$

在不致混淆的情况下，我们将省略对 $m$ 的依赖，直接写作 $k_H$ 和 $L_H$。

2.2. 局部时。给定一个一般的 $d$ 维随机过程 $(X_t)_{t\geq 0}$，我们将区间 $I$ 上的占用测度定义为

$$\eta_X(B) = Leb(s \in I : X_s \in B).$$

也就是说，$\mu_X$ 度量了过程 $X$ 在集合 $B$上所花费的“时间”。如果占据测度 $\eta$ 关于勒贝格测度绝对连续，则 $\eta_X$ 关于勒贝格测度的密度 $L_I(a)$称为 $X$的局部时。在下文中，我们简单地记作 $L_t(a) = L_{[0,t]}(a)$，

对于给定的 $t > 0$。根据局部时的定义，我们有占用时间公式

$$\int_0^t f(X_s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)L_t(y)dy.$$

因此，我们有

$$L_t(a) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2^d\epsilon^d} \int_0^t \mathbb{I}_{B_s\in C_\epsilon(a)}ds,$$

其中 $C_\epsilon(a) = [a-\epsilon, a+\epsilon]^d$，且该极限对几乎处处的勒贝格意义下的$a$存在；或者，只要局部时 $L_t(a)$ 是连续函数（几乎必然），该极限对每个 $a$ 都存在。对于 $d$ 维分数布朗运动，众所周知，只要赫斯特指数 $H \in (0,1)$ 满足 $Hd < 1$，局部时就存在且连续，参见 [8]。

现在令 $d = 1$。对于 $u$、$v > 0$ 和 $x$、$y \in \mathbb{R}$，令 $\phi_{u,\,v}(x,y)$ 为 $(B_u, B_v)$ 在 $(x,y)$ 处的密度，即

$$\phi_{u,v}(x,y) := \frac{1}{2\pi\sqrt{det(\Sigma_{u,v})}} e^{-\frac{v^{2H}x^2}{2det(\Sigma_{u,v})} - \frac{u^{2H}y^2}{2det(\Sigma_{u,v})} + \frac{xy\mathbb{E}[B_uB_v]}{det(\Sigma_{u,v})}}, \tag{14}$$

其中 $\Sigma_{u,\,v}$ 表示向量 $(B_u, B_v)$ 的协方差矩阵。更一般地，令 $\phi_{u_1,\ldots,u_p}(x_1,\ldots,x_p)$ 为 $(B_{u_1},\ldots,B_{u_p})$ 在 $(x_1,\ldots,x_p)$ 处的密度。接下来给出一个关于分数布朗运动局部时在 $L^p(\Omega)$ 范数下近似的基本结果。

引理 2.4. 设 $H \in (0,1)$，$t \geq 0$ 和 $L_t(a)$ 为指标为 $H$ 的分数布朗运动的局部时。则对于所有 $p > 0$,

$$L_t^\epsilon(a) := \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t \mathbb{I}_{B_s\in[a-\epsilon,a+\epsilon]}ds \xrightarrow[\epsilon\to 0]{L^p} L_t(a).$$

证明. 由于对所有 $t > 0$，$L_t^\epsilon$ 依概率收敛到 $L_t$，因此只需证明$L_t^\epsilon$ 在每个空间 $L^p(\Omega)$ 中一致可积。另一方面，为此只需证明 $\forall p \in \mathbb{N}^*$，$\sup_{0<\epsilon<1}\mathbb{E}[|L_t^\epsilon|^p] < \infty$。

对于 $p \in \mathbb{N}^*$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|L^\epsilon(a)_t|^p] &= \frac{1}{2^p\epsilon^p}\int_{[0,t]^p}\prod_{i=1}^p \mathbb{E}[\mathbb{I}_{B_{u_i}\in[a-\epsilon,a+\epsilon]}]du_1\ldots du_p \\
&= \frac{1}{2^p\epsilon^p}\int_{[0,t]^p}\int_{[a-\epsilon,a+\epsilon]^p} dx_1\ldots dx_p du_1\ldots du_p \\
&\quad \times\frac{e^{-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}((0,u_1),\ldots,(0,u_p))x}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{det\left(\Sigma((0,u_1),\ldots,(0,u_p))\right)}} \\
&\leq K_H^p\int_{[0,t]^p}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{det\left(\Sigma((0,u_1),\ldots,(0,u_p))\right)}}du_1\ldots du_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq p! \int_{0=u_0<u_1<\ldots<u_p<t=u_{p+1}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \prod_{i=1}^{p+1} (u_i - u_{i-1})^{-H} du_1 \ldots du_p \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

其中倒数第二行源于分数布朗运动的局部非确定性性质。证明完毕。□

根据前面的计算，我们得到一个众所周知的公式：

$$\forall t \geq 0, \mathbb{E}[(L_t(a))^p] = \int_0^t \ldots \int_0^t \phi_{u_1,\ldots,u_p}(a,\ldots,a) du_1 \ldots du_p. \tag{15}$$

2.3. Riemann-Stieltjes 积分。当 $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是两个 $\alpha$ (分别为 $\beta$)-H¨older 连续函数，且满足 $\alpha + \beta > 1$ 和 $0 \leq a \leq b$时，早在 20 世纪初人们就已熟知（见 [20]），可以将积分 $\int_a^b x dy$ 定义为

$$\int_a^b x_s dy_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=\lfloor na \rfloor}^{\lfloor nb \rfloor - 1} x_{\frac{k}{n}} \left( y_{\frac{k+1}{n}} - y_{\frac{k}{n}} \right),$$

这一结论还可略微推广到具有 $\frac{1}{\alpha}$ (分别为 $\frac{1}{\beta}$ )-有限变差的函数。然而，在 $x_s = F(u_s)$ 的情况下，无法直接应用这一结论，因为 $u$ 不是 Lipschitz 连续的，且 $F$ 有间断点。事实上，此时 $x$ 的路径很容易对任意 $p > 0$ 都具有无限的 $p$-变差；简单情形 $F(\cdot) = I_{\cdot > a}$，且 $u$ 为例如分数布朗运动的一条路径，便足以说明这一点。在这种情况下，只要路径 $u$ 满足所谓的充分变异性条件（见 [5] 及其后续推广 [9, 10]），就可以使用 Z¨ahle 型论证（见 [5]）或 sewing 引理的推广（见 [19]）来定义该积分。我们将采用基于分数阶微积分的第一种方法，因为它更便于进行显式计算。详情请参阅奠基性论文 [21]。

令 $a < b$，并令 $f \in L^1(\mathbb{R})$。$f$的 $\alpha > 0$ 阶分数积分定义为

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} f(t) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \\ I_{b-}^{\alpha} f(t) &:= \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds. \end{aligned}$$

上述积分对几乎所有的 $t \in (a, b)$ 都收敛。此外，算子 $I_{a+}$ 和 $I_{b-}$ 定义了从 $L^1$ 到 $L^1$ 的单射线性映射。对于 $\alpha \in (0, 1)$ 和 $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^1)$, $g \in I_{b-}^{\alpha}(L^1)$，可以定义 Weyl-Marchaud 导数如下：

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(t)}{(t-a)^{\alpha}} + \int_a^t \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \right)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) := \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(t)}{(t-b)^{\alpha}} + \int_t^b \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \right).$$

关于黎曼–斯蒂尔切斯积分存在性的以下结果可见于 [5]:

定理 2.5. 设 $X$、$Y$ 是满足以下条件的实值随机过程:

(1) $X$（分别地，$Y$）是 $\alpha$（分别地，$\beta$）-H ¨lder 连续的，其中 $\alpha+\beta>1$。(2) 对几乎所有 $t\in(0,T)$，$X_t$ 具有密度 $p_t$，且满足

$$\int_0^T (\sup_{x\in\mathbb{R}} p_t(x)) dt < \infty.$$

(3) 存在 $H>0$ 和 $r>\frac{1}{H}$，使得

$$\frac{\mathbb{E}[|X_t - X_s|^r]^{\frac{1}{r}}}{|t-s|^H} < \infty.$$

那么，若 $F$ 是局部有界变差的实值函数，黎曼和

$$\sum_{k=\lfloor na \rfloor}^{\lfloor nb \rfloor} F\left(X_{\frac{k}{n}}\right)\left(Y_{\frac{k+1}{n}\wedge b} - Y_{\frac{k}{n}}\right)$$

对所有 $t\in(0,T)$ 均依概率收敛到一个极限，记为 $\int_a^b F(X_s)dY_s$。此外，令 $f_s = F(X_s)$ 并假设 $\alpha > 1-\beta$，则对于任意 $\gamma\in(1-\beta,\alpha)$，有

$$\begin{aligned} &\int_a^b f_t dY_s \\ =\ & (-1)^{\alpha} \int_a^b D_{a+}^{\gamma}\left(f - f_{a+}\right)(s) D_{b-}^{1-\gamma}\left(Y - Y_b\right)(s) ds + f_{a+}\left(Y_b - Y_a\right). \end{aligned}$$

此外，若 $F$ 是一个导数具有局部有界变差的利普希茨函数，则几乎必然有:

$$F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t F'(x_s) dx_s. \tag{16}$$

注意，若 $X = B^1$ 和 $Y = B^2$ 是两个赫斯特指数分别为 $H_1$ 和 $H_2$ 且满足 $H_1 + H_2 > 1$的分数布朗运动，则对于 $\alpha = H_1$、$\beta = H_2$ 和 $p_t$，定理 2.5 的假设均成立: $x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}t^H} e^{-\frac{x^2}{2t^{2H}}}$。因此，定理 3 中的黎曼–斯蒂尔切斯型积分存在，本文研究的问题是适定的。

## 3. Proof of Theorem 1.1

本节旨在证明定理 1.1。证明分为三个步骤。前两个步骤中，我们证明当 $f(x) = \mathbb{I}_{x>a}$ 对某个 $a \in \mathbb{R}$成立时的结果：先考虑 $i \neq j$，再考虑 $i = j$。因此，这两个步骤证明了关于这一特例的命题 1.3。最后一步，我们将此结果应用于一般函数 $f$。在整个证明过程中，不重要的常数 $\beta$ 和 $D$可能会逐行变化。

### 3.1. 步骤 1：

$i \neq j$ 和 $f$ 的定理 1.1 的证明： $x \to \mathbb{I}_{x>a}$。令$\gamma \in \left(\frac{1}{2}, H\right)$，并回忆 $s_n^k = \frac{\lfloor ns^k \rfloor}{n}$，其中 $k \in \{1, 2\}$。根据定理 2.5，我们有 [2]

$$
\begin{aligned}
&(17)\ \mathbb{E}\left[\left|S_n^{i,j}(t)\right|^2\right] \\
&= \beta n^{2(2H-1)} \int_{[0,t]^2} \\
&\quad \times \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{2}\left(\frac{\mathbb{I}_{B^i_{\left(s_n^k+\frac{1}{n}\right)\wedge t}>a} - \mathbb{I}_{B^i_{s^k}>a}}{\left(\left(s_n^k+\frac{1}{n}\right)\wedge t - s^k\right)^{1-\gamma}} + \int_{s^k}^{\left(s_n^k+\frac{1}{n}\right)\wedge t} \frac{\mathbb{I}_{B^i_{y_k}>a} - \mathbb{I}_{B^i_{s^k}>a}}{(y_k - s^k)^{2-\gamma}} dy_k\right)\right] \\
&\quad \times \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{2}\left(\frac{B^j_{s^k} - B^j_{s_n^k}}{\left(s^k - s_n^k\right)^{\gamma}} + \int_{s_n^k}^{s^k} \frac{B^j_{s^k} - B^j_{y_k}}{(y_k - s^k)^{1+\gamma}} dy_k\right)\right] ds^1 ds^2.
\end{aligned}
$$

由对称性，只需考虑 $0 < s^1 < s^2$，这也是我们接下来要做的。于是，对于$y_1 \in [s_n^1, s^1]$ 和$y_2 \in [s_n^2, s^2]$，根据引理 2.2（当 $s_n^2 - s^1 \geq \frac{2}{n}$时）以及 H¨older 不等式（当 $|s_n^2 - s^1| \leq \frac{2}{n}$ 时），我们有

$$
\left|\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{2}\left(B^j_{y_k} - B^j_{s^k}\right)\right]\right| \leq \left(\beta \frac{\left|y_2 - s^2\right|\left|y_1 - s^1\right|}{|s_n^2 - s^1|^{2-2H}} \wedge \left|y_2 - s^2\right|^H \left|y_1 - s^1\right|^H\right). \tag{18}
$$

Let

$$
F : (v, w, x, y) \to \left(\mathbb{I}_{w\geq 0} - \mathbb{I}_{v\geq 0}\right)\left(\mathbb{I}_{y\geq 0} - \mathbb{I}_{x\geq 0}\right).
$$

那么， $F$ 满足命题 1.6 中的假设（$H_1$），其中 $p = q = 2$、 $J = \{2, 4\}$、 $M = 1$ 和 $G \equiv 1$。因此，我们可以应用 (6) 得知，对于所有$0 < s^1 < s^2$、所有 $y_1 \in [s^1, \left(s_n^1 + \frac{1}{n}\right) \wedge t]$ 和 $y_2 \in [s^2, \left(s_n^2 + \frac{1}{n}\right) \wedge t]$，有

[2]根据分数阶分部积分公式，可以得到，上界和下界 $a$ 以及 $b$ 在 $f$ 和 $g$ 中的作用可以互换；为简化计算中的几个步骤，我们在此采用了这一点。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{2}\left|\mathbb{I}_{B^i_{y_k}>a}-\mathbb{I}_{B^i_{s^k}>a}\right|\right]\\
\leq\ & \frac{\beta e^{-Da^2}}{\prod_{i=1}^4|t_i-t_{i-1}|^H}\int_{\mathbb{R}^4}F\left(x_1,\dots,\sum_{i=1}^4x_i\right)e^{-\frac{Dx_2^2}{|y_1-s^1|^{2H}}-\frac{Dx_4^2}{|y_2-s^2|^{2H}}}\prod_{i=1}^4dx_i,
\end{aligned}$$

其中 $t_1=s^1$、$t_2=y_1$、$t_3=s^2$、$t_4=y_2$。由引理 A.2 可得

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{2}\left|\mathbb{I}_{B^i_{y_k}>a}-\mathbb{I}_{B^i_{s^k}>a}\right|\right]\leq\beta e^{-Da^2}\frac{|y_2-s^2|^H|y_1-s^1|^H}{|s^1|^H|s^2-y_1|^H}. \tag{19}$$

另一方面，对于任意 $s^1\leq s^2$，再次利用引理 A.2，我们还可以得到

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{2}\left|\mathbb{I}_{B^i_{y_k}>a}-\mathbb{I}_{B^i_{s^k}>a}\right|\right]\ \leq\ \mathbb{E}[|\mathbb{I}_{B^i_{y_2}>a}-\mathbb{I}_{B^i_{s^2}>a}|]\leq\beta e^{-Da^2}\frac{|y_2-s^2|^H}{(s^2)^H}. \tag{20}$$

由 (19) 和 (20) 可知，对于 $s^1<s^2$,

$$\begin{aligned}
&\int_{s^1}^{s_n^1+\frac{1}{n}\wedge t}\int_{s^2}^{s_n^2+\frac{1}{n}\wedge t}\prod_{k=1}^{2}\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbb{I}_{B_{y_k}>a}-\mathbb{I}_{s^k>a}|}{|y_k-s^k|^{2-\gamma}}\right]dy_2dy_1\\
=\ &\int_{s^1}^{s_n^1+\frac{1}{n}\wedge t}\int_{s^2}^{s_n^2+\frac{1}{n}\wedge t}\prod_{k=1}^{2}\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbb{I}_{B_{y_k}>a}-\mathbb{I}_{s^k>a}|}{|y_k-s^k|^{2-\gamma}}\right]dy_2dy_1\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t<s^2-\frac{1}{n}}\\
&+\int_{s^1}^{s_n^1+\frac{1}{n}\wedge t}\int_{s^2}^{s_n^2+\frac{1}{n}\wedge t}\prod_{k=1}^{2}\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbb{I}_{B_{y_k}>a}-\mathbb{I}_{s^k>a}|}{|y_k-s^k|^{2-\gamma}}\right]dy_2dy_1\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\geq s^2-\frac{1}{n}}\\
\leq\ &\beta e^{-Da^2}\int_{s^1}^{s_n^1+\frac{1}{n}\wedge t}\int_{s^2}^{s_n^2+\frac{1}{n}\wedge t}\frac{|y_2-s^2|^H|y_1-s^1|^H}{|s^1|^H|s^2-y_1|^H}dy_2dy_1\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t<s^2-\frac{1}{n}}\\
&+\int_{s^1}^{s_n^1+\frac{1}{n}\wedge t}\int_{s^2}^{s_n^2+\frac{1}{n}\wedge t}\prod_{k=1}^{2}\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbb{I}_{B_{y_k}>a}-\mathbb{I}_{s^k>a}|}{|y_k-s^k|^{2-\gamma}}\right]dy_2dy_1\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\geq s^2-\frac{1}{n}}\\
\leq\ &\beta e^{-Da^2}\frac{1}{(s^1)^H\left(s^2-\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\right)^H}\frac{1}{n^{2\gamma+2H-2}}\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t<s^2-\frac{1}{n}}\\
&+\int_{s^1}^{s^1+\frac{s^2-s^1}{2}}\int_{s^2}^{\left(s_n^2+\frac{1}{n}\right)\wedge t}\prod_{k=1}^{2}\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbb{I}_{B_{y_k}>a}-\mathbb{I}_{s^k>a}|}{|y_k-s^k|^{2-\gamma}}\right]dy_2dy_1\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\geq s^2-\frac{1}{n}}\\
&+\int_{s^1+\frac{s^2-s^1}{2}}^{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t}\frac{1}{|y_1-s^1|^{2-\gamma}}dy_1\int_{s^2}^{\left(s_n^2+\frac{1}{n}\right)\wedge t}\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbb{I}_{B_{y_2}>a}-\mathbb{I}_{s^2>a}|}{|y_2-s^2|^{2-\gamma}}\right]dy_2\\
&\times\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\geq s^2-\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \beta e^{-Da^2}\frac{1}{(s^1)^H\left(s^2-\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\right)^H}\frac{1}{n^{2\gamma+2H-2}}\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t<s^2-\frac{1}{n}}\\
&\quad+\beta e^{-Da^2}\frac{1}{(s^1)^H\left(\frac{s^2-s^1}{2}\right)^H}\frac{1}{n^{2\gamma+2H-2}}\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\geq s^2-\frac{1}{n}}\\
&\quad+\beta e^{-Da^2}\frac{1}{(s^2)^H\left(\frac{s^2-s^1}{2}\right)^{1-\gamma}}\frac{1}{n^{\gamma+H-1}}\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\geq s^2-\frac{1}{n}}. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

另一方面，对边界项和叉积项进行估计可得:

$$
\begin{aligned}
&\left|\prod_{k=1}^{2}\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{I}_{B^i_{\left(s_n^k+\frac{1}{n}\right)\wedge t>a}}-\mathbb{I}_{B^i_{s^k}>a}}{\left(\left(s_n^k+\frac{1}{n}\right)\wedge t-s^k\right)^{1-\gamma}}\right]\right|\\
&\leq \beta e^{-Da^2}\frac{n^{2-2H-2\gamma}}{(s^1)^H(s^2-(s_n^1+\frac{1}{n})\wedge t)^H}\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t<s^2-\frac{1}{n}}, \qquad (22)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{I}_{B^i_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t>a}}-\mathbb{I}_{B^i_{s^1}>a}}{\left(\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t-s^1\right)^{1-\gamma}}\int_{s^2}^{\left(s_n^2+\frac{1}{n}\right)\wedge t}\frac{\left|\mathbb{I}_{B^i_{y_2}>a}-\mathbb{I}_{B^i_{s^2}>a}\right|}{|y_2-s^2|^{2-\gamma}}dy_2\right]\right|\\
&\leq \frac{\beta e^{-Da^2}n^{2-2H-2\gamma}}{(s^1)^H(s^2-(s_n^1+\frac{1}{n})\wedge t)^H}\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t<s^2-\frac{1}{n}}\\
&\quad+\frac{\beta e^{-Da^2}n^{1-\gamma-H}}{((s_n^1+\frac{1}{n})\wedge t-s^1)^{1-\gamma}(s^2)^H}\mathbb{I}_{\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\geq s^2-\frac{1}{n}}. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

将 (18)、(21)、(22) 和 (23) 代入 (17)，并注意到当 $\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t<s^2-\frac{1}{n}$时，我们有 $s^2-\left(s_n^1+\frac{1}{n}\right)\wedge t\leq\frac{s^2-s^1}{2}$，可得

$$
\mathbb{E}[\left|S_n^{i,j}(t)\right|^2]\leq 2\left(R^{1,n}+R^{2,n}\right),
$$

with

$$
\begin{aligned}
R^{1,n} &:= n^{4H-2}\beta e^{-Da^2}\int_0^{t-\frac{2}{n}}\int_{s^1}^{s^1+\frac{2}{n}}\left(\frac{n^{2-2H-2\gamma}}{(s^1)^H|s^2-s^1|^H}\right.\\
&\quad+\left(\frac{1}{(s^2)^H|s^2-s^1|^{1-\gamma}}+\frac{1}{(s^2)^H((s_n^1+\frac{1}{n})\wedge t-s^1)^{1-\gamma}}\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{1}{(s^1)^H((s_n^2+\frac{1}{n})\wedge t-s^2)^{1-\gamma}}\right)n^{1-\gamma-H}\right)n^{2\gamma-2H}ds^2ds^1\\
&\leq \beta e^{-Da^2}n^{1-H}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} R^{2,n} &:= n^{4H-2}\beta e^{-Da^2}\int_0^t\int_{s^1+\frac{2}{n}}^t\left(\frac{n^{2-2H-2\gamma}}{(s^1)^H|s^2-s^1|^H}\right)\frac{n^{2\gamma-2}}{|s^2-s^1|^{2-2H}}ds^2ds^1 \\ &\leq \beta n^{2H-2}\int_0^t\int_{s^1+\frac{2}{n}}^t\frac{1}{(s^1)^H|s^2-s^1|^{2H-2}}ds^2ds^1 \\ &\leq \beta e^{-Da^2}n^{1-H}. \end{aligned}$$

至此，第一步的证明完成。

3.2. 步骤 2： $i=j$ 和 $f$ 的定理 1.1 证明： $x\to\mathbb{I}_{x>a}$。 对于$i=j$，我们省略记号中的上标，并使用变量替换公式 (16) 写成

$$\begin{aligned} S_n(t) &= n^{2H-1}\left(\int_0^t\mathbb{I}_{B_s>a}dB_s-\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\mathbb{I}_{B_{\frac{k}{n}}>a}\left(B_{\frac{k+1}{n}\wedge t}-B_{\frac{k}{n}}\right)\right) \\ &= n^{2H-1}\sum_{k=0}^{\lfloor nt\rfloor}\left(\left|B_{\frac{k+1}{n}\wedge t}-a\right|-\left|B_{\frac{k}{n}}-a\right|-\mathbb{I}_{B_{\frac{k}{n}}>a}\left(B_{\frac{k+1}{n}\wedge t}-B_{\frac{k}{n}}\right)\right) \\ &= n^{2H-1}\sum_{k=0}^{\lfloor nt\rfloor}\left|B_{\frac{k+1}{n}\wedge t}-a\right|\mathbb{I}_{\left\{sgn\left(B_{\frac{k+1}{n}\wedge t}-a\right)sgn\left(B_{\frac{k}{n}}-a\right)<0\right\}}. \end{aligned}$$

为了证明该断言，只需确立以下两个界：

$$\left|\mathbb{E}[S_n(t)L_t(a)]-\frac{1}{2}\mathbb{E}[L_t(a)^2]\right|\leq Ce^{-Da^2}n^{1-H}, \tag{24}$$

$$\left|\mathbb{E}[S_n(t)^2]-\frac{1}{4}\mathbb{E}[L_t(a)^2]\right|\leq Ce^{-Da^2}n^{1-H}. \tag{25}$$

我们将借助命题 1.6，按照步骤 1 进行。我们将首先证明界 (24)，然后简要概述界 25 的证明，后者可以用类似方法处理。

(24) 的证明：为了获得假设 ($H_1$)，我们引入一个修改后的版本

$$\left(S_n^\epsilon(t)\right)[k]:=\left|B_{\frac{k+1}{n}\wedge t}-a\right|\mathbb{I}_{\left\{sgn\left(B_{\frac{k+1}{n}\wedge t}-a\right)sgn\left(B_{\frac{k}{n}}-a\right)<0\right\}}\mathbb{I}_{\left|B_{\frac{k+1}{n}\wedge t}-a\right|>\epsilon}.$$

现在，根据引理 2.4 和 H¨older 不等式，我们有 亚洲欧美

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n(t)L_t(a)] &= \lim_{\epsilon\to0}\mathbb{E}[S_n(t)L_t^\epsilon(a)] \\ &= \lim_{\epsilon\to0}\mathbb{E}[S_n^\epsilon(t)L_t^\epsilon(a)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to 0} n^{2H-1} \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \int_0^t A^{\epsilon}_{s,k/n} ds \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} n^{2H} \int_0^t \int_0^t A^{\epsilon}_{u,v_n} du dv,
\end{aligned}
$$

其中 $A^{\epsilon}_{s,\ k/n} = \frac{1}{2\epsilon}\mathbb{E}[(S^{\epsilon}_n(t))\ [k]\mathbb{I}_{B_s\in[a-\epsilon,a+\epsilon]}]$。回顾式 (15)，我们有

$$
\mathbb{E}[L_t(a)^2] = \int_0^t \int_0^t \phi_{u,v}(a,a) du dv.
$$

由此得到如下界

$$
\left| \mathbb{E}[S_n(t) L_t(a)] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[L_t(a)^2] \right| \le R^{1,n} + R^{2,n} + R^{3,n} + R^{4,n},
$$

with

$$
\begin{aligned}
R^{1,n} &:= \limsup_{\epsilon\to 0} n^{2H} \int_0^t \int_0^t \left| A^{\epsilon}_{u,v_n} - \frac{\phi_{u,v}(a,a)}{2n^{2H}} \right| \\
&\quad \times \mathbb{I}_{min(u,v_n,|u-v_n|)>\frac{2}{n}} du dv \\
R^{2,n} &= n^{2H} \int_0^{\frac{2}{n}} \int_{\frac{2}{n}}^t \left( \sup_{\epsilon\in(0,1)} A^{\epsilon}_{u,v_n} + \frac{\phi_{u,v}(a,a)}{2n^{2H}} \right) du dv \\
R^{3,n} &= n^{2H} \int_{\frac{2}{n}}^t \int_0^{\frac{1}{n}} \left( \sup_{\epsilon\in(0,1)} A^{\epsilon}_{u,v_n} + \frac{\phi_{u,v}(a,a)}{2n^{2H}} \right) du dv \\
R^{4,n} &= n^{2H} \int_0^t \int_{u-\frac{2}{n}\vee 0}^{u+\frac{1}{n}\wedge t} \left( \sup_{\epsilon\in(0,1)} A^{\epsilon}_{u,v_n} + \frac{\phi_{u,v}(a,a)}{2n^{2H}} \right) du dv.
\end{aligned}
$$

我们证明

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\epsilon\to 0} \left| A^{\epsilon}_{s,\frac{k}{n}} - \frac{\left(\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)\wedge t - \frac{k}{n}\right)^{2H} \phi_{\frac{k}{n},s}(a,a)}{2} \right| \\
\le\ & \beta h^{2-2H} e^{-Da^2} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^H \left|s-\frac{k}{n}\right|^H n^{2H}}
\end{aligned}
$$

对于允许处理 $R^{1,\ n}$ 的 $\min\left(s,\frac{k}{n},\left|s-\frac{k}{n}\right|\right) \ge \frac{2}{n}$，以及

$$
\begin{aligned}
A^{\epsilon}_{s,\frac{k}{n}} &\le \frac{\beta e^{-Da^2}}{\min\left(s,\frac{k}{n}\right)^H \left|s-\frac{k}{n}\right|^H \frac{1}{\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)^H}} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^2} |x+y| \mathbb{I}_{sgn(x)\neq sgn(y)} e^{-D\frac{\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)^{2H} x^2}{2}} dx dy \\
&\le \beta \frac{n^{-2H}}{min\left(s,\frac{k}{n}\right)^H \left|s-\frac{k}{n}\right|^H} e^{-Da^2}
\end{aligned}
$$

对于允许处理 $R^{2,\ n} - R^{4,\ n}$ 的 min $\left(s, \frac{k}{n}, \left|s-\frac{k}{n}\right|\right) < \frac{2}{n}$。

• 首先令 $min\left(s、\ \frac{k}{n}\left|s-\frac{k}{n}\right|\right) > \frac{2}{n}$。我们定义函数 $F^{\epsilon}$: $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$，其定义为

$$F^{\epsilon}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}\mathbb{I}_{x_1\in[-\epsilon,\epsilon]}|x_3|\mathbb{I}_{sgn(x_2)\neq sgn(x_3)}\mathbb{I}_{|x_3|>\epsilon} & if\ s < \frac{k}{n} \\ \frac{1}{2\epsilon}\mathbb{I}_{x_3\in[-\epsilon,\epsilon]}|x_2|\mathbb{I}_{sgn(x_1)\neq sgn(x_2)}\mathbb{I}_{|x_2|>\epsilon} & otherwise. \end{cases}$$

现在，$F^{\epsilon}$ 满足命题 1.6 的假设（$H_2$）和（$H_3$），其中 $p = 1$、$q = 2$、$h = \frac{1}{n}$ $s$ 最小值 $\left(\frac{k}{n}, s-\frac{k}{n}\right)$，$t_1 = s$、$t_2 = \frac{k}{n}$、$t_3 = \frac{k+1}{n}$若$s < \frac{k}{n}$，以及 $t_1 = \frac{k}{n}$、$t_2 = \frac{k+1}{n}$、$t_3 = s$ 否则。

此外，（$H_1$）在 $M = 3$ 及其条件下成立，且

$$G^{\epsilon}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}|x_3|\mathbb{I}_{x_1\in[-\epsilon,\epsilon]} & if\ s < \frac{k}{n} \\ \frac{1}{2\epsilon}|x_2|\mathbb{I}_{x_3\in[-\epsilon,\epsilon]} & otherwise. \end{cases}$$

为简便起见，假设 $s > \frac{k}{n}$（情形 $s < \frac{k}{n}$ 可以完全类似地处理）。注意到，在（$a$, $a$）处取值的向量（$X_1$, $X_2$）的密度，与在（$a$, 0）处取值的（$X_1$, $X_2 - X_1$）的密度相同，因此利用命题 1.6 中的（7），对所有$\epsilon > 0$，有

$$\begin{aligned} & \left|A^{\epsilon}_{s,\frac{k}{n}} - \phi_{\frac{k}{n},s}(a,a)\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\epsilon}\mathbb{E}[F^{\epsilon}(\tilde{B}(x))]dx_1dx_2\right| \\ \leq\ & \frac{\beta h^{2-2H}e^{-Da^2}}{\prod_{i=1}^{3}|t_i - t_{i-1}|^H}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}}G^{\epsilon}(y_1,y_2,y_3)dy_3\right) \\ & \times|y_1+y_2|\mathbb{I}_{sgn(y_1)\neq sgn(y_1+y_2)}e^{-D\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)^{2H}y_2^2}dy_1dy_2 \\ \leq\ & \beta h^{2-2H}e^{-Da^2}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^H\left|s-\frac{k}{n}\right|^H n^{2H}}, \end{aligned}$$

其中，$B(x)$ 在第 1.1 小节中定义，$\phi_{u,\ v}$ 在式（14）中定义，并且最后一行用到了引理 A.1。

我们还有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\epsilon}\mathbb{E}[F^{\epsilon}(\tilde{B}(x))]dx_1dx_2 \\ =\ & \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{2\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{x_3\in[x_1+x_2-\epsilon,x_1+x_2+\epsilon]}dx_3\right)\mathbb{I}_{|x_2|>\epsilon} \\ & \times\frac{|x_1+x_2|\mathbb{I}_{sgn(x_1)\neq sgn(x_1+x_2)}e^{-\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)\frac{x_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)^H}}dx_1dx_2 \\ \xrightarrow[\epsilon\to 0]{}\ & \int_{\mathbb{R}^2}\frac{|x_1+x_2|\mathbb{I}_{sgn(x_1)\neq sgn(x_1+x_2)}e^{-\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)\frac{x_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)^H}}dx_1dx_2 \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)^{2H},$$

其中使用了勒贝格控制收敛定理，最后一个等式由引理 A.1 得出。类似地，对于 $s<\frac{k}{n}$ 的情形也有完全相同的界，因此我们得到

$$\begin{aligned}&\limsup_{\epsilon\to 0}\left|A^{\epsilon}_{s,\frac{k}{n}}-\frac{\left(\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)\wedge t-\frac{k}{n}\right)^{2H}\phi_{\frac{k}{n},s}(a,a)}{2}\right|\\ &\leq \quad \beta h^{2-2H}e^{-Da^2}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^{H}\left|s-\frac{k}{n}\right|^{H}n^{2H}}.\end{aligned}\tag{26}$$

• 设 next 为 $\left(s、\ \frac{k}{n}、\ \left|s-\frac{k}{n}\right|\right)<\frac{2}{n}$ 中的最小值。在这种情况下，我们可以使用命题 1.6 中的 (6) 得到，

$$\begin{aligned}A^{\epsilon}_{s,\frac{k}{n}} &\leq \frac{\beta e^{-Da^2}}{\min\left(s,\frac{k}{n}\right)^{H}\left|s-\frac{k}{n}\right|^{H}\frac{1}{\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)^{H}}}\\ &\quad\times\int_{\mathbb{R}^2}|x+y|\mathbb{I}_{sgn(x)\neq sgn(y)}e^{-D\frac{\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)^{2H}x^2}{2}}dxdy\\ &\leq \beta\frac{n^{-2H}}{min\left(s,\frac{k}{n}\right)^{H}\left|s-\frac{k}{n}\right|^{H}}e^{-Da^2},\end{aligned}$$

其中最后一行再次由引理 A.1 得出。

现在我们可以估计项 $R^{1,n}-R^{4,n}$。对于 $R^{2,n}$，上述界给出

$$\begin{aligned}|R^{2,n}| &\leq \beta n^{2H}n^{-2H}\int_0^{\frac{2}{n}}\int_0^t e^{-Da^2}\frac{1}{u^{H}\left(|u-v|^{H}+|u-v_n|^{H}\right)}dudv\\ &\leq \beta n^{2H}n^{-2H}\int_0^{\frac{2}{n}}\int_0^t e^{-Da^2}\frac{1}{u^{H}\left(3|u-v|^{H}+\left|\frac{1}{n}-u\right|^{H}\mathbb{I}_{v_n=\frac{1}{n}}\right)}dudv\\ &\leq \frac{\beta}{n}e^{-Da^2}\int_0^{\frac{2}{n}}\frac{1}{u^{H}\left(\frac{2}{n}-u\right)^{H}}+K\int_0^{\frac{2}{n}}\int_{\frac{2}{n}}^t\frac{1}{3|v-\frac{1}{n}|^{H}u^{H}}dudv\\ &\leq \beta n^{1-H}e^{-Da^2},\end{aligned}$$

项 $R^{3,n},R^{4,n}$ 也可以类似地处理。最后，由 (26) 可得

$$|R^{1,n}| \leq \int_{[0,T]^2}dudv\left(\frac{\beta e^{-Da^2}h^{2-2H}}{min\left(v_n,u\right)^{H}\left|v_n-u\right|^{H}}\right.$$

$$+\left|\frac{\phi_{u,v}(a,a)}{2}-n^{2H}\frac{\left(\left(u_n+\frac{1}{n}\right)\wedge t-u_n\right)^{2H}}{2}\phi_{u,v_n}(a,a)\right|\Bigg)\mathbb{I}_{(u,v)\in\mathcal{C}},$$

其中 $\mathcal{C}=\left\{(u,v)\in[0,T]^2,\ \min(u,v_n,|u-v_n|)\geq\frac{2}{n}\right\}$。

根据引理 A.3，我们可得

$$\begin{aligned}
|R^{1,n}| &\leq \int_0^t\int_{t-\frac{1}{n}}^t \phi_{u,v}(a,a)dvdu \\
&\quad+\int_{[0,T]^2}\frac{\beta e^{-Da^2}h^{2-2H}}{min\left(v_n,u\right)^H|v_n-u|^H}\mathbb{I}_{(u,v)\in\mathcal{C}}dudv+\beta e^{-Da^2}n^{H-1} \\
&\leq \beta e^{-\frac{a^2}{2T}}n^{H-1} \\
&\quad+e^{-Da^2}\left(\int_{[0,T]^2}\frac{\beta e^{-Da^2}h^{2-2H}}{4^H min\left(v,u\right)^H|v-u|^H}\mathbb{I}_{(u,v)\in\mathcal{C}}dudv+n^{H-1}\right) \\
&\leq e^{-Da^2}\left(\int_{[0,T]^2}\beta e^{-Da^2}n^{2-2H}\left(\frac{1}{4^H min\left(v,u\right)^H|v-u|^{1+H}}\right.\right. \\
&\quad\left.\left.+\frac{1}{4^H min\left(v,u\right)^{1+H}|v-u|^H}\right)\mathbb{I}_{(u,v)\in\mathcal{C}}dudv+n^{H-1}\right) \\
&\leq \beta e^{-Da^2}n^{H-1}.
\end{aligned}$$

由此证明了界 (24)。 □

证明 (25)：为了证明界 (25)，我们可以看到

$$\mathbb{E}[S_n(t)^2]=\sum_{k,j=0}^{\lfloor nt\rfloor}A_{\frac{k}{n},\frac{j}{n}},$$

with

$$\begin{aligned}
A_{\frac{k}{n},\frac{j}{n}} &:= \mathbb{E}\left[F\left(B_{\frac{k}{n}},B_{\frac{k+1}{n}\wedge t},B_{\frac{j}{n}},B_{\frac{j+1}{n}\wedge t}\right)\right], \\
F:(u,v,w,x) &\to |v-a|\mathbb{I}_{sgn(u-a)\neq sgn(v-a)}|x-a|\mathbb{I}_{sgn(w-a)\neq sgn(x-a)}.
\end{aligned}$$

函数 $F$ 满足命题 1.6 的假设，其中 $q=2$、$p=2$ 和 $h=\frac{1}{n}$ ~~$\frac{1}{\text{最小值}\left(\frac{k}{n},\frac{j}{n},\left|\frac{j}{n}-\frac{k+1}{n}\right|,\left|\frac{j+1}{n}-\frac{k}{n}\right|\right)}$~~。最后，应用命题 1.6 并按照证明 (24) 的方法进行推导，可得当 $\min\left(\frac{k}{n},\frac{j}{n},\frac{|k-j|}{n}\right)>\frac{2}{n}$ 时，

$$\left|A_{\frac{k}{n},\frac{j}{n}}-\frac{\left(\frac{k+1}{n}\wedge t-\frac{k}{n}\right)^{2H}\left(\frac{j+1}{n}\wedge t-\frac{j}{n}\right)^{2H}}{4}\phi_{\frac{k}{n},\frac{j}{n}}(a,a)\right|$$

$$\leq \quad \beta e^{-Da^2} h^{2-2H} \frac{n^{-4H}}{\min\left(\left(\frac{k}{n}\right)^H, \left(\frac{j}{n}\right)^H\right)\left|\frac{k}{n}-\frac{j}{n}\right|^H}.$$

因此，完全按照证明 (24) 的方法进行推导并应用引理 A.3，即可得到所需的界。□

3.3. 步骤 3：一般情形。我们在步骤 1 和步骤 2 中已证明，对于某个常数 $D, \beta$，当 $f = \mathbb{I}_{\cdot > a}$ 时，并记

$$S^{i,j}_{n,a}(t) := n^{2H-1}\left(\int_0^t \mathbb{I}_{B^i_s > a} dB^j_s - \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{I}_{B^i_{\frac{k}{n}} > a}\left(B^j_{\frac{k+1}{n}\wedge t} - B^j_{\frac{k}{n}}\right)\right),$$

对于所有 $t \in [0,T]$，我们有

$$\left\| S^{i,j}_{n,a}(t) - \frac{\delta_{ij}}{2} L^i_t(a) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta n^{-\frac{1-H}{2}} e^{-Da^2}.$$

此外，众所周知（例如参见 [17] 第 224 页），对于所有 $x \in I$，我们可以写成，其中 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间，

$$f(x) = \beta_I + \int_I sgn(x-a)\mu(da).$$

由此可知，对于 $x, y \in I$，我们有

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_I (sgn(x-a) - sgn(y-a))\mu(da) \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} (\mathbb{I}_{x>a} - \mathbb{I}_{y>a})\mu(da) \end{aligned}$$

因此，对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$，该公式均成立。

现假设 $\mu$ 满足带有 $P = D$ 的增长条件 (1)，其中 $D$ 如步骤 1 和步骤 2 中所述。利用詹森不等式和 Fubini 定理（这是可行的，因为 $\mu$ 是一个 $\sigma$-有限拉东测度），我们得到

$$\begin{aligned} & \left\| S^{i,j}_n(t) - \delta_{ij} \int_{\mathbb{R}} L^i_t(a) d\mu(a) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq \quad & 4 \left\| \int_{\mathbb{R}} \left| S^{i,j}_{n,a}(t) - \delta_{ij} L^i_t(a) \right| d\mu(a) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq \quad & 4 \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| S^{i,j}_{n,a}(t) - \delta_{ij} L^i_t(a) \right|}{\exp(-\frac{Pa^2}{2})} e^{-\frac{Pa^2}{2}} d\mu(a) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq \quad & 4 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{Pa^2}{2}} d\mu(a) \int_{\mathbb{R}} \frac{\| S^{n,a}_{i,j}(t) - \frac{\delta_{ij}}{2} L_t(a) \|^2_{L^2(\Omega)}}{\exp(-Pa^2)} d\mu(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq K\beta n^{1-H}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{Pa^2}{2}}d\mu(a)\int_{\mathbb{R}} e^{-Pa^2}d\mu(a) \\ &\leq C(H,T)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{Pa^2}{2}}d\mu(a)\right)^2 n^{1-H}. \end{aligned}$$

由此完成定理 1.1 的证明。

注 3.1. 注 1.2 的结论可直接由步骤 3 的论证得出：使用 Jordan 分解，将有界变差函数写作 $f=f_1-f_2$，其中 $f_1$ 和 $f_2$ 是凸函数的导数。于是 $\mu=f'=\mu_1-\mu_2$，只需在上界中使用全变差测度 $|\mu|=\mu_1+\mu_2$ 即可。

## 4. 命题 1.6 的证明

我们引入以下记号：

$$\mathcal{D} = [\![1,p+q]\!]^2\setminus J\times J, \tag{27}$$

其中 $J$ 与命题 1.6 的陈述中相同。

我们将首先证明以下引理，它给出了向量 $(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})_{k\in[\![1,\ p+q]\!]}$ 的行列式的一种有用分解。

引理 4.1. 设 $\Sigma:=\Sigma\left((0,t_1),\ldots,(t_{p+q},t_{p+q-1})\right)$ 且 $\Sigma'=\Sigma\left(\left(t_{\bar{J}[i]},t_{\bar{J}[i-1]}\right)_{i\in[\![1,\ q]\!]}\right)$。假设命题 1.6 的条件（$H_2$）和（$H_3$）得到满足。那么，存在一个常数 $\beta>0$（与（$t_1$，…，$t_{p+q}$）无关）以及函数 $\Theta_j$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$j\in\{1,2,3,4\}$，使得对所有 $0<h<1$，我们有 $|\Theta_j(h)|\leq\beta h^{2-2H}$ 以及

(a.)

$$det\left(\Sigma\right)=det\left(\Sigma'\right)\prod_{i=1}^{p}|t_{J_{[i]}}-t_{J_{[i]}-1}|^{2H}\left(1+\Theta_1(h)\right). \tag{28}$$

（b.）对于 $i\in J$,

$$\Sigma_{ii}^{-1}=\frac{1}{|t_i-t_{i-1}|^{2H}}\left(1+\Theta_2(h)\right) \tag{29}$$

(c.) 对于 $i\neq j\in J$,

$$\Sigma_{ij}^{-1}=\frac{1}{|t_i-t_{i-1}|^{H}|t_j-t_{j-1}|^{H}}\Theta_3(h) \tag{30}$$

（d.）对于 $i$、$j\in[\![1$、$q]\!]$,

$$\Sigma^{-1}_{\bar{J}[i],\bar{J}[j]}=\Sigma'^{-1}_{ij}\left(1+\Theta_4(h)\right) \tag{31}$$

（e.）对于 $(i,j)\in\mathcal{D}$,

$$|\Sigma_{ij}^{-1}|\leq\frac{\beta}{\max\left(|t_i-t_{i-1}||t_j-t_{j-1}|^{2H-1},|t_i-t_{i-1}|^{2H-1}|t_j-t_{j-1}|\right)}. \tag{32}$$

我们只证明（a.）和（b.），因为只需写出 $\Sigma_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} det\ \Sigma\ C_{ij}()$，其余各项的证明类似，其中 $C$ 是 $\Sigma$的余子式矩阵。在整个证明过程中，我们用 $\Theta(h)$表示满足 $|\Theta(h)| \leq \beta h^{2-2H}$的一般函数。

（a.）的证明：

证明分为两个步骤。第一步中，我们证明一个中间结果

$$det\left(\Sigma\left(\left(t_{\bar{J}[i]}, t_{\bar{J}[i]-1}\right)_{i\in[\![1,q]\!]}\right)\right) = det(\Sigma')(1+\Theta(h)), \tag{33}$$

其中，记号 $\Sigma((t_1^i, t_2^i))_{i\leq m}$ 在（8）中定义，随后在第二步完成实际证明。

步骤 1：证明（33）由假设（$H_1$）可知，对所有 $i \in [\![1,q]\!]$，

$$\left|(t_{\bar{J}[i]} - t_{\bar{J}[i-1]}) - (t_{\bar{J}[i]} - t_{\bar{J}[i]-1})\right| \leq h \min_{l\in[\![1,q]\!]} \left|t_{\bar{J}[l]} - t_{\bar{J}[l]-1}\right|.$$

此外，得益于引理 2.2 和 H¨older 不等式，对于所有 $i$、$j \in [\![1$、$q]\!]$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{J[j]}} - B_{t_{J[j]-1}}\right)\left(B_{t_{J[i]}} - B_{t_{J[i]-1}}\right)\right]\right. \\
&\left.-\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{J[j]}} - B_{t_{J[j-1]}}\right)\left(B_{t_{J[i]}} - B_{t_{J[i-1]}}\right)\right]\right| \\
\leq\ & h \min_{j\in[\![1,q]\!]} \left|t_{\bar{J}[l]} - t_{\bar{J}[l]-1}\right|\left(|t_{\bar{J}[i]} - t_{\bar{J}[i]-1}|^{2H-1} + |t_{\bar{J}[j]} - t_{\bar{J}[j]-1}|^{2H-1}\right) \\
&+h^{2H} \min_{j\in[\![1,q]\!]} \left|t_{\bar{J}[l]} - t_{\bar{J}[l]-1}\right|^{2H} \\
\leq\ & 3h|t_{\bar{J}[j]} - t_{\bar{J}[j]-1}|^H |t_{\bar{J}[i]} - t_{\bar{J}[i]-1}|^H.
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&det\left(\Sigma\left(\left(t_{\bar{J}[i]}, t_{\bar{J}[i]-1}\right)_{i\in[\![1,q]\!]}\right)\right) \\
=\ & \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{[\![1,q]\!]}} sgn(\tau)\prod_{i=1}^{q}\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{\bar{J}[j]}} - B_{t_{\bar{J}[j]-1}}\right)\left(B_{t_{\bar{J}[\tau(j)]}} - B_{t_{\bar{J}[\tau(j)]-1}}\right)\right] \\
=\ & det\left(\Sigma\left(\left(t_{\bar{J}[i]}, t_{\bar{J}[i-1]}\right)_{i\in[\![1,q]\!]}\right)\right) + G(h),
\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{S}_{[\![1,\ q]\!]}$ 是 $[\![1$的置换群，$q]\!]$ 和

$$|G(h)| \leq \sum_{r=1}^{q}\binom{q}{r}(3h)^r \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{[\![1,q]\!]}}\prod_{i=1}^{q}|t_{\bar{J}[i]} - t_{\bar{J}[i]-1}|^H |t_{\bar{J}[\tau(i)]} - t_{\bar{J}[\tau(i)]-1}|^H$$

$$\begin{aligned} &\leq h3^q 2^q q! \prod_{i=1}^{q} |t_{\bar{J}[i]} - t_{\bar{J}[i]-1}|^{2H} \\ &\leq h^{2-2H} \frac{3^q 2^q (q)!}{k_H} det\left(\Sigma'\right), \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由（11）得到。这证明了第一步。

步骤 2：证明（28）我们将行列式分解为

$$\begin{aligned} det\left(\Sigma\right) &= det\left(\Sigma\left(\left(t_{\bar{J}[i]-1}, t_{\bar{J}[i]}\right)_{i\in[\![1,q]\!]}\right)\right) det\left(\Sigma\left(\left(t_{J[i]-1}, t_{J[i]}\right)_{i\in[\![1,p]\!]}\right)\right) \\ &\quad + \sum_{\tau\in\mathfrak{H}} sgn(\tau) \prod_{j=1}^{p+q} \mathbb{E}\left[\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\left(B_{t_{\tau(j)}} - B_{t_{\tau(j)-1}}\right)\right] \end{aligned}$$

其中，$\mathfrak{H}$ 是 $[\![1$ 的置换集合中不稳定 $J$ 的置换，即存在至少一个元素属于 $J$，其在该置换下的像属于 $J$。

- 与步骤 1 类似，我们有

$$\begin{aligned} &det\left(\Sigma\left(\left(t_{J[i]}, t_{J[i]-1}\right)_{i\in[\![1,p]\!]}\right)\right) = \prod_{i=1}^{p} |t_{J[i]} - t_{J[i]-1}|^{2H} \\ &+ \sum_{\kappa\in\mathfrak{S}_{[\![1,p]\!]}, \kappa\neq Id} sgn(\kappa) \prod_{j=1}^{p} \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{J[j]}} - B_{t_{J[j]-1}}\right)\left(B_{t_{J[\kappa(j)]}} - B_{t_{J[\kappa(j)]-1}}\right)\right]. \end{aligned}$$

令 $R(j,\tau) := \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{J[j]}} - B_{t_{J[j]-1}}\right)\left(B_{t_{J[\kappa(j)]}} - B_{t_{J[\kappa(j)]-1}}\right)\right]$。对于任意$\kappa \in \mathfrak{S}_{[\![1,p]\!]}$，我们有

$$\begin{cases} R(j,\tau) &= |t_{J[j]} - t_{J[j]-1}|^{2H} \text{ if } \kappa(j) = j \\ |R(j,\tau)| &\leq \frac{|t_{J[j]} - t_{J[j]-1}||t_{J[\kappa(j)]} - t_{J[\kappa(j)]-1}|}{|t_{max\{j-1,\kappa(j)-1\}} - t_{min\{j,\kappa(j)\}}|^{2-2H}} \text{ if } \kappa(j) \neq j, \end{cases}$$

其中，第二种情形中的不等式由引理 2.2 得出。由假设（$H_2$），我们知道，如果 $\tau(j) \neq j$，则至少有一个元素 $k \in J$ 满足 $k \in [\![t_{min\{j,\tau(j)\}+1}, t_{max\{j-1,\tau(j)-1\}}]\!]$。因此，

$$\begin{aligned} &\frac{|t_{J[j]} - t_{J[j]-1}||t_{J[\kappa(j)]} - t_{J[\kappa(j)]-1}|}{|t_{max\{j-1,\kappa(j)-1\}} - t_{min\{j,\kappa(j)\}}|^{2-2H}} \\ \leq\ & h^{2-2H} |t_{J[j]} - t_{J[j]-1}|^{H} |t_{J[\kappa(j)]} - t_{J[\kappa(j)]-1}|^{H}. \end{aligned}$$

最后，对于一个排列 $\kappa \in \mathfrak{S}_{[\![1,p]\!]}$，令 $T_\kappa \subset [\![1,p]\!]$ 表示满足 $\kappa(j) \neq j$的点集 $j$。我们有

$$\left|\sum_{\kappa\in\mathfrak{S}_{[\![1,p]\!]},\kappa\neq Id} sgn(\kappa)\prod_{j=1}^{p}\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{J[j]}}-B_{t_{J[j]-1}}\right)\left(B_{t_{J[\kappa(j)]}}-B_{t_{J[\kappa(j)]-1}}\right)\right]\right|$$

$$\leq \sum_{\kappa\in\mathfrak{S}_{[\![1,p]\!]},\kappa\neq Id} h^{Card(T_\kappa)(2-2H)}\prod_{j=1}^{p}|t_{J[j]}-t_{J[j]-1}|^H|t_{J[\tau(j)]}-t_{J[\tau(j)]-1}|^H$$

$$\leq h^{2-2H}p!\prod_{j=1}^{p}|t_{J[j]}-t_{J[j]-1}|^{2H}$$

$$\leq \Theta(h)\prod_{j=1}^{p}|t_{J[j]}-t_{J[j]-1}|^{2H}.$$

- 得益于第一步，我们还可以得到，

$$det\left(\Sigma\left(\left(t_{\bar{J}^1_\sigma[i]},t_{\bar{J}^1_\sigma[i]-1}\right)_{i\in[\![1,p+q]\!]}\right)\right)=det\left(\Sigma'\right)(1+\Theta(h)).$$

这与前一点结合起来可得

$$det\left(\Sigma\left(\left(t_{\bar{J}[i]},t_{\bar{J}[i]-1}\right)_{i\in[\![1,q]\!]}\right)\right)det\left(\Sigma\left(\left(t_{J[i]},t_{J[i]-1}\right)_{i\in[\![1,p]\!]}\right)\right)$$

$$= det\left(\Sigma'\right)\prod_{i=1}^{p}|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}\left(1+\Theta(h)\right).$$

- 最后，我们来分析表达式

$$\sum_{\tau\in\bar{\mathfrak{H}}} sgn(\tau)\prod_{j=1}^{p+q}\mathbb{E}\left[\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\left(B_{t_{\tau(j)}}-B_{t_{\tau(j)-1}}\right)\right].$$

由于 $\tau$不稳定 $J$，存在一对 $(k_0,k_1)\in J\times J$使得 $\tau(k_0)\in J$以及 $\tau(k_1)\in J$。再次感谢引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{k_0}}-B_{t_{k_0-1}}\right)\left(B_{t_{\tau(k_0)}}-B_{t_{\tau(k_0)-1}}\right)\right]\\ \leq\ & |t_{\tau(k_0)}-t_{\tau(k_0)-1}||t_{k_0}-t_{k_0-1}|^{2H-1}\\ \leq\ & h^{1-H}|t_{k_0}-t_{k_0-1}|^H|t_{\tau(k_0)}-t_{\tau(k_0)-1}|^H.\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{k_1}}-B_{t_{k_1-1}}\right)\left(B_{t_{\tau(k_1)}}-B_{t_{\tau(k_1)-1}}\right)\right]\\ \leq\ & h^{1-H}|t_{k_1]}-t_{k_1-1}|^H|t_{\tau(k_1)}-t_{\tau(k_1)-1}|^H.\end{aligned}$$

此外，对于 $k\neq k_0$、$k_1$，我们可以利用 H¨older 不等式得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(B_{t_k}-B_{t_{k-1}}\right)\left(B_{t_{\tau(k)]}}-B_{t_{\tau(k)-1}}\right)\right]\\ \leq\ & |t_k-t_{k-1}|^H|t_{\tau(k)}-t_{\tau(k)-1}|^H.\end{aligned}$$

综合以上各项，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\tau\in\mathfrak{H}} sgn(\tau)\prod_{j=1}^{p+q}\mathbb{E}\left[\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\left(B_{t_{\tau(j)}}-B_{t_{\tau(j)-1}}\right)\right]\right| \\
\leq\ & (p+q)!h^{2-2H}\prod_{i=1}^{p+q}|t_k-t_{k-1}|^H|t_{\tau(k)}-t_{\tau(k)-1}|^H \\
\leq\ & (p+q)!h^{2-2H}\prod_{i=1}^{p+q}|t_k-t_{k-1}|^{2H} \\
\leq\ & (p+q)!h^{2-2H}\prod_{i=1}^{q}|t_{\bar{J}[k]}-t_{\bar{J}[k-1]}|^{2H}\prod_{i=1}^{p}|t_{J[k]}-t_{J[k-1]}|^{2H} \\
\leq\ & (p+q)!\frac{h^{2-2H}}{k_H}det\left(\Sigma\left(\left(t_{\bar{J}[i]},t_{\bar{J}[i-1]}\right)_{i\in[\![1,q]\!]}\right)\right)\prod_{i=1}^{p}|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}.
\end{aligned}$$

由局部非退化性质可知 $\Pi_{i=1}^{q}|t_{\bar{J}[k]}-t_{\bar{J}[k-1]}|^{2H}$ 与 $\Pi_{i=1}^{p}|t_{J[k]}-t_{J[k-1]}|^{2H}$ 是 equa y o ows rom e oca non- e em n sm prop- erty，见式 (11)。因此，证明完成。 □

式 (29) 的证明：令 $i\in J$。我们有 $\Sigma_{ii}^{-1}=\frac{C_{ii}}{det(\Sigma)}$，其中 $C$ 是 $\Sigma$ 的余子式矩阵。

- 我们已经证明
$$det(\Sigma)=det(\Sigma')\prod_{k=1}^{p}|t_{J[i]}-t_{J[k-1]}|^{2H}(1+\Theta(h)).$$
- 以完全相同的方式继续推导，我们可以证明
$$C_{ii}=det(\Sigma')\prod_{k\neq i}|t_{J[k]}-t_{J[k-1]}|^{2H}(1+\Theta(h)).$$

至此，式 (29) 的证明完成。 □

我们还需要以下一个初等结果。

引理 4.2. 设 $0\leq s_0<s_1\leq s_2<s_3\ldots\leq s_{2m-2}<s_{2m-1}\leq T$和 $\Sigma:=\Sigma\left((s_{2i-1},s_{2i-2})_{i\in[\![1,m]\!]}\right)$ 如 8 中所述。那么，存在常数$D=D(m,H,T)>0$，与 $s_i$ 的选取无关，使得对所有 $x\in\mathbb{R}^m$,

$$x^T\Sigma^{-1}x\geq D(m,H,T)\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}.$$

证明。注意到，当 $m=1$ 时，结论显然成立。我们对 $m$ 使用归纳法。现在假设，对于某个 $m\in\mathbb{N}^*$，结论对每个 $k\leq m$ 都成立，并考虑满足命题中相同条件的 $(s_i)_{i\in[\![0,\ 2m+1]\!]}$。不失一般性，我们假设增量按如下方式排序： $\forall i\in[\![1,m]\!]$, $|s_{2i-1}-s_{2i-2}|\geq|s_{2i+1}-s_{2i}|$。

首先注意到，如果 $l \in [\![1, m]\!]$，则对 (31) 和 (32) 稍作修改，即可推出存在一个函数 $\Theta$，它与 $s_i$ 的选取无关，使得 $|\Theta(h)| \leq \beta h^{2-2H}$，并且对所有 $i, j > l$，

$$\Sigma_1^{-1}\left((s_{2k-1}, s_{2k-2})_{k\in[\![1,\ m+1]\!]}\right)_{ij} = \Sigma^{-1}\left((s_{2k-1}, s_{2k-2})_{k\in[\![l+1,\ m+1]\!]}\right)_{ij} (1+\Theta(h_l)), \tag{34}$$

与 $h_l = \frac{|s_{2l+1}-s_{2l}|}{|s_{2l-1}-s_{2l-2}|}$，并且

$$\left|\Sigma^{-1}\left((s_{2k-1}, s_{2k-2})_{k\in[\![1,m+1]\!]}\right)_{ij}\right| \leq \frac{K}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^H |s_{2j-1}-s_{2j-2}|^H}. \tag{35}$$

我们引入一个截断参数 $\kappa > 0$，使得

$$\max(\sqrt{\kappa}, |\Theta(\kappa)|) \leq \left(\frac{D(m)}{16K(m+1)^2}\right) \tag{36}$$

并令 $x \in \mathbb{R}^{m+1}$。我们将区分以下几种情况：

(i.) 假设对所有 $i \in [\![1, m]\!]$，$\frac{|s_{2i+1}-s_{2i}|}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|} \geq \kappa$ 都成立。那么根据 (13)，我们有，

$$x^T\Sigma^{-1}x \geq \frac{1}{(m+1)|s_1-s_0|^{2H}} \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 \geq \frac{\kappa^{2H(m+1)}}{(m+1)} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}.$$

(ii.) 现在假设前一个条件不成立，并令

$$i_0 = \min\left\{i \in [\![1, m]\!] | \frac{|s_{2i+1}-s_{2i}|}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|} < \kappa\right\}.$$

我们再次区分两种子情形：

(ii.1) 假设

$$\max_{i\in[\![1,i_0]\!]} \frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}} \geq \kappa \max_{i\in[\![i_0+1,m+1]\!]} \frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}. \tag{37}$$

在这种情况下，同样由 (13) 可得，

$$\begin{aligned}
x^T\Sigma^{-1}x &\geq \frac{1}{m+1}\frac{1}{|s_1-s_0|^{2H}} \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 \\
&\geq \frac{1}{m+1} \max_{i\in[\![1,i_0]\!]} \frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}} \frac{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}{|s_1-s_0|^{2H}} \\
&\geq \frac{\kappa^{2H(i_0-1)}}{(m+1)} \max_{i\in[\![1,i_0]\!]} \frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}} \\
&\geq \frac{\kappa^{2H(i_0-1)+1}}{(m+1)} \max_{i\in[\![1,m+1]\!]} \frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}} \\
&\geq \frac{\kappa^{2H(m+1)}}{(m+1)^2} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}},
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式源于对所有 $i \leq i_0$，$\frac{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}{|s_1-s_0|^{2H}} \geq \kappa^{2H(i-1)}$ 均成立这一事实。

(ii.2) 最后，若条件 $(ii.1)$ 不成立，则根据 (34)，我们有

$$\begin{aligned} x^T\Sigma^{-1}x &= \sum_{i,j>i_0}\Sigma_{ij}^{-1}x_ix_j+\sum_{i,j\le i_0}\Sigma_{ij}^{-1}x_ix_j+2\sum_{i<i_0,j\ge i_0}\Sigma_{ij}^{-1}x_ix_j \\ &\ge \sum_{i,j\ge i_0}\Sigma^{-1}\left((s_{2k-1},s_{2k-2})_{k\in[\![i_0+1,m+1]\!]}\right)_{ij}x_ix_j-2\left|\sum_{i<i_0,j\ge i_0}\Sigma_{ij}^{-1}x_ix_j\right| \\ &\quad -|\Theta(\kappa)|\sum_{i,j\ge i_0}\left|\Sigma^{-1}\left((s_{2k-1},s_{2k-2})_{k\in[\![i_0+1,m+1]\!]}\right)_{ij}x_ix_j\right| \end{aligned} \tag{38}$$

根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{i,j\ge i_0}\Sigma^{-1}\left((s_{2k-1},s_{2k-2})_{k\in[\![i_0+1,m+1]\!]}\right)_{ij}x_ix_j &\ge D(m)\sum_{i=i_0+1}^{m+1}\frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}} \\ &\ge \frac{D(m)}{2}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}. \end{aligned}$$

此外，由（35）可知，

$$\begin{aligned} &\Theta(\kappa)\sum_{i,j\ge i_0}\left|\Sigma^{-1}\left((s_{2k-1},s_{2k-2})_{k\in[\![i_0+1,m+1]\!]}\right)_{ij}x_ix_j\right| \\ \le\ &\Theta(\kappa)K(m-i_0)\sum_{i=i_0+1}^{m+1}\frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}} \\ \le\ &\frac{D(m)}{16(m+1)}\sum_{i=i_0+1}^{m+1}\frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}, \end{aligned}$$

其中最后一行由 $\kappa$ 的定义得出。

同理，我们有

$$\begin{aligned} \left|2\sum_{i<i_0,j\ge i_0}\Sigma_{ij}^{-1}x_ix_j\right| &\le 2\sum_{i\le i_0,j>i_0}\frac{K|x_ix_j|}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^H|s_{2j-1}-s_{2j-2}|^H} \\ &\le 2(m+1)^2\max_{i>i_0}\frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}\sqrt{\kappa} \\ &\le 2(m+1)^2\sqrt{\kappa}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}} \\ &\le \frac{D(m)}{8}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}, \end{aligned}$$

其中第三个不等式源于条件（37）未得到满足，最后一行则根据定义得出

的 $\kappa_\circ$ 将所有这些元素代入（38）式，得到

$$x^T\Sigma^{-1}x \geq \frac{D(m)}{4}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{x_i^2}{|s_{2i-1}-s_{2i-2}|^{2H}}.$$

在每种情况下，该结果对 $k=m+1$ 均成立，从而通过归纳法完成证明。□

为了证明命题 1.6，我们还需要以下结果，其证明显然，因此略去。

引理 4.3. 设 $x\in\mathbb{R}_\circ$ 则 $|e^x-1|\leq|x|e^{x\vee 0}$.

现在我们可以完成命题 1.6 的证明了。与引理 4.1 和命题 1.6 的陈述一样，令我们写成 $\Sigma:=\Sigma((t_i,t_{i-1}))_{i\in[\![1,p+q]\!]}$，以及 $\Sigma':=\Sigma\left(\left(t_{\bar{J}[k-1]},t_{\bar{J}[k]}\right)_{k\in[\![1^{,q}]\!]}\right)$ 以简化表达式。还要记住，$\Theta$ 是满足$|\Theta(h)|\leq\beta h^{2-2H}$的一般函数。此外，令 $A$（分别为 $A'$）表示 $q+p$（分别为$q$）维向量，其第一个坐标为 $a$，其余坐标均为 0。

(6) 的证明:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F\left(B_{t_1}-a,\dots,B_{t_{p+q}}-a\right)\right]\\
=\;&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p+q}{2}}\sqrt{det(\Sigma)}}\int_{\mathbb{R}^{p+q}}e^{-\frac{y^T\Sigma^{-1}y}{2}}dy_1\dots dy_{p+q}\\
&\times F\left(y_1-a,\dots,y_1-a+\sum_{k=2}^{i}y_k,\dots,y_1-a+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\\
=\;&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p+q}{2}}\sqrt{det(\Sigma)}}\int_{\mathbb{R}^{p+q}}e^{-\frac{(y+A)^T\Sigma^{-1}(y+A)}{2}}\\
&\times F\left(y_1,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{i}y_k,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)dy_1\dots dy_{p+q},
\end{aligned}$$

其中，我们进行了变量替换 $y_1\to y_1-a_\circ$

现在我们可以应用引理4.2以及分数布朗运动的局部非确定性性质（见引理 11），从而得到

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[F\left(B_{t_1}-a,\dots,B_{t_{2p+q}}-a\right)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{\beta}{(2\pi)^{\frac{p+q}{2}}\prod_{i=1}^{p+q}|t_i-t_{i-1}|^H}\int_{\mathbb{R}^{p+q}}e^{-D\frac{(y_1+a)^2}{|t_1|^{2H}}-D\sum_{k=2}^{p+q}\frac{y_k^2}{|t_k-t_{k-1}|^{2H}}}\\
&\times\left|F\left(y_1,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{i}y_k,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right|dy_1\dots dy_{p+q}.
\end{aligned}$$

现在我们可以利用假设 $(H_1)$：事实上，当 $|y_1| \le M\sum_{i=1}^{p}|y_{J[i]}|$ 时，我们有：

$$(a+y_1)^2 \le \frac{a^2}{4} \implies \sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}} \ge \sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}} + \frac{y_1^2}{2pMT^{2H}}$$
$$\ge \sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}} + \frac{a^2}{8pMT^{2H}}.$$

由此得到一个界

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[F\left(B_{t_1}-a,\dots,B_{t_{2p+q}}-a\right)\right]\right| \\
\le\ & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p+2}{2}}\prod_{i=1}^{p+q}|t_i-t_{i-1}|^H}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} e^{-D'a^2-D'\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}} \\
&\times\left|F\left(y_1,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{i}y_k,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right|dy_1\dots dy_{p+q},
\end{aligned}$$

其中 $D'=\frac{D}{8pMT^{2H}}\wedge\frac{1}{4T^{2H}}$。至此完成 (6) 的证明。 □

¯(7) 的证明：回顾一下，$1\in J$。现在再次利用变量替换 $y_1\to y_1-a$，可以写成：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[F(B_{t_1}-a,\dots,B_{t_{p+q}}-a)] \\
=\ & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p+q}{2}}\sqrt{det(\Sigma)}}\int_{\mathbb{R}^{2p+q}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{p}y_{J[i]}^2\Sigma^{-1}_{J[i],J[i]}}{2}\right) \\
&\times\exp\left(-\frac{\sum_{i,j=1}^{p+q}y_iy_j\Sigma^{-1}_{i,j}}{2}\mathbb{I}_{(i,j)\in\mathcal{D}}\right) \\
&\times F\left(y_1-a,\dots,y_1-a+\sum_{k=2}^{i}y_k,\dots,y_1-a+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)dy_1\dots dy_{p+q} \\
=\ & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p+q}{2}}\sqrt{det(\Sigma)}}\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{p}y_{J[i]}^2\Sigma^{-1}_{J[i],J[i]}}{2}\right) \\
&\times\exp\left(-\frac{\sum_{i,j=1}^{p+q}(y+A)_i(y+A)_j\Sigma^{-1}_{i,j}}{2}\mathbb{I}_{(i,j)\in\mathcal{D}}\right) \\
&\times F\left(y_1,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{i}y_k,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)dy_1\dots dy_{p+q}
\end{aligned}$$

其中，记号 $\mathcal{D}$ 在式 (27) 中引入。

由引理 4.1 的第一项可得

$$\frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}} = \frac{(1+\Theta(h))}{\sqrt{\det(\Sigma')}\prod_{i=1}^{p}|t_{J_\sigma^1[i]} - t_{J_\sigma^1[i]-1}|^H}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F\left(B_{t_1}-a,\dots,B_{t_{p+q}}-a\right)\right]\\
=\;& \frac{d_{\Sigma'}(a,0,\dots,0)}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}\sqrt{det(\Sigma')}}\\
&\times\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\prod_{i=1}^{p}|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^H}\\
&\times F\left(y_1,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{i}y_k,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\\
&\times(1+\Theta(h))\,R dy_1\dots dy_{p+q}.
\end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned}
R \;=\;& \exp\Bigg(\frac{-(y+A)^T\Sigma^{-1}(y+A)+(u(y)+A')\Sigma'^{-1}(u(y)+A')}{2}\\
&+\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\Bigg),
\end{aligned}$$

其中记号 $d_M$ 已在（4）中引入，而 $u(y)$ 是满足条件的 $q$ 维向量。

$$\forall i\in[\![1,q]\!],\ u(y)_i := y_{\bar{J}[i]}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\mathbb{E}[F(B_{t_1}-a,\dots,B_{t_{p+q}}-a)]-\frac{d_{\Sigma'}(A')}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}\sqrt{det(\Sigma')}}\\
&\quad\times\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\mathbb{E}[F(\tilde{B}(y))]dy_1\dots dy_{p+q}\Bigg|\\
\leq\;& e_1+e_2,
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
e_1 \;:=\;& \frac{d_{\Sigma'}(A')}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}\sqrt{det(\Sigma')}}\int_{\mathbb{R}^{p+q}}|1-R|\left|F\left(y_1,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right|\\
&\times\frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\prod_{i=1}^{p}|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^H}dy_1\dots dy_{p+q},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} e_2 &:= \frac{d_{\Sigma'}(A')}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}\sqrt{det(\Sigma')}}\Theta(h)\int_{\mathbb{R}^{p+q}} R\left|F\left(y_1,\ldots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right| \\ &\quad\times\frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\prod_{i=1}^{p}|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{H}}dy_1\ldots dy_{p+q}. \end{aligned}$$

我们只研究项 $e_1$，而 $e_2$ 的界较容易，可以用类似的方法得到，从而

$$\begin{aligned} e_2 &\leq \beta\theta(h)e^{-Da^2}\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\left|F\left(y_1,\ldots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right| \\ &\quad\times\exp\left(-D\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)dy_1\ldots dy_{p+q}, \end{aligned} \tag{39}$$

对于 $\beta, D>0$ 独立于 $t_1,\ldots,t_{p+q}$ 的情形。对于项 $e_1$，注意到 $R$ 可写为 $R=e^{R'}$，因此由引理 4.3 可得 $|1-R|\leq|R'|e^{R'\vee 0}$。于是

$$\begin{aligned} &|1-R| \\ \leq\ &\left|\frac{1}{2}(y+A)^TM^{-1}(y+A)-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J_\sigma^1[i]}}{2|t_{J_\sigma^1[i]}-t_{J_\sigma^1[i]-1}|^{2H}}\right. \\ &\left.-\frac{1}{2}\left(u(y)+A'\right)M'^{-1}\left(u(y)+A'\right)\right|e^{R'\vee 0} \end{aligned}$$

现在我们根据 $R'>0$ 或 $R'\leq 0$ 是否成立，分两种情况讨论：

- 若 $R'<0$，则

$$\begin{aligned} &d_{\Sigma'}(A')\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)e^{R'\vee 0} \\ =\ &\exp\left(-\frac{1}{2}\left(u(y)+A'\right)\Sigma'^{-1}\left(u(y)+A'\right)-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right) \\ \leq\ &\exp\left(-D\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\left(A'_{\bar{J}[i]}+y_{\bar{J}[i]}\right)^2}{2|t_{\bar{J}[i]}-t_{\bar{J}[i]-1}|^{2H}}+\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)\right). \end{aligned}$$

  最后一行由引理 4.2 得出。
- 如果 $R'>0$，我们类似地有

$$d_{\Sigma'}(A')\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)e^{R'\vee 0}$$

$$\leq \exp\left(-D\sum_{i=1}^{p+q}\frac{(y_i+A_i)^2}{|t_i-t_{i-1}|^{2H}}\right)$$
$$\leq \exp\left(-D\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\left(A'_{\bar{J}[i]}+y_{\bar{J}[i]}\right)^2}{|t_{\bar{J}[i]}-t_{\bar{J}[i]-1}|^{2H}}+\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)\right)$$

从而得到相同的上界。

接下来，利用 $(H_1)$ 并按照上述 (6) 的证明进行推导，我们得到对于某个 $D>0$, 其与 $t_i$ 的选择无关,

$$\left|F\left(y_1,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right| d_{\Sigma'}(A')\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)e^{R'\vee 0}$$
$$\leq \left|F\left(y_1,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right|\exp\left(-Da^2-D\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right).$$

接下来需要对项 $R'$ 进行界。利用引理 4.1 中的 (b.)、(c.) 和 (d.)，我们有

$$\left|\frac{1}{2}(y+A)^T\Sigma^{-1}(y+A)-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J_\sigma^1[i]}^2}{2|t_{J_\sigma^1[i]}-t_{J_\sigma^1[i]-1}|^{2H}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(u(y)+A'\right)\Sigma'^{-1}\left(u(y)+A'\right)\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p+q}|(y_i+A_i)(y_j+A_j)||\Sigma_{ij}^{-1}|\mathbb{I}_{(i,j)\in\mathcal{D}}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{p}|y_{J[i]}y_{J[j]}||\Sigma^{-1}_{J[i],J[j]}|+\Theta(h)\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}|y_{J[i]}|^2\frac{1}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}},$$

with

$$|\Sigma_{ij}^{-1}|\mathbb{I}_{(i,j)\in\mathcal{D}}\leq\frac{\beta}{\max\left(|t_i-t_{i-1}||t_j-t_{j-1}|^{2H-1}+|t_j-t_{j-1}||t_i-t_{i-1}|^{2H-1}\right)},$$
$$|\Sigma^{-1}_{J[i],J[j]}|\leq\Theta(h)\frac{1}{|t_{J[i]}-t_{J[j]-1}|^H|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^H}.$$

对于该项、】【

$$\frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{p}|y_{J[i]}y_{J[j]}||\Sigma^{-1}_{J[i],J[j]}|+\Theta(h)\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}|y_{J[i]}|^2\frac{1}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}},$$

我们使用恒等式 $|ab|\leq\frac{a^2+b^2}{2}$ 和 $a^2e^{-a^2}\leq e^{\frac{-a^2}{2}}$，并得到存在两个常数 $\beta$、$D>0$，它们与 $t_i$ 的选择无关，使得

$$\left|F\left(y_1,\dots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right| d_{\Sigma'}(A')\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}\frac{y_{J[i]}^2}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)e^{R'\vee 0}$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{p}|y_{J[i]}y_{J[j]}||\Sigma^{-1}_{J[i],J[j]}|+\Theta(h)\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}|y_{J[i]}|^2\frac{1}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)$$

$$\leq \quad \Theta(h)e^{-Da^2-D\sum_{i=1}^{p}\frac{y^2_{J[i]}}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}}.$$

(40)

对于项

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p+q}|(y_i+A_i)(y_j+A_j)||\Sigma^{-1}_{ij}|\mathbb{I}_{(i,j)\in\mathcal{D}},$$

需要区分以下三种情况：$(i,j)\in J\times J$、$(i,j)\in J\times J$，以及 $(i,j)\in J\times J$。如果 $(i,j)\in J\times J$，那么对于所有 $l\in[\![1,p]\!]$，均有如下结论：

$$|\Sigma^{-1}_{ij}|\leq\frac{\beta}{|t_j-t_{j-1}||t_i-t_{i-1}|^{2H-1}}\leq\frac{\beta}{h}\frac{1}{|t_i-t_{i-1}|^{H}|t_{J[l]}-t_{J[l]-1}|^{H}}.$$

然后，结合 $(H_1)$，我们得到

$$\left|F\left(y_1,\ldots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right||\Sigma^{-1}_{i,j}||y_iy_j|$$

$$\leq \quad h\left|F\left(y_1,\ldots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right|\sum_{l=1}^{p}M\beta\frac{|y_iy_{J[l]}|}{|t_i-t_{i-1}|^{H}|t_{J[l]}-t_{J[l]-1}|^{H}}.$$

(41)

情形 $(i,j)\in J\times J$ 可以通过对称论证处理，即交换 $i$ 和 $j$的角色。最后，当 $(i,j)\in J\times J$时，我们得到

$$\left|F\left(y_1,\ldots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right||\Sigma^{-1}_{i,j}||y_iy_j|$$

$$\leq \quad h^{2H}\left|F\left(y_1,\ldots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right|\sum_{l,r=1}^{p}M^2\beta\frac{|y_iy_{J[l]}|}{|t_{J[r]}-t_{J[r]-1}|^{H}|t_{J[l]}-t_{J[l]-1}|^{H}}.$$

(42)

综上，我们得到

$$\left|F\left(y_1,\ldots,y_1+\sum_{k=2}^{p+q}y_k\right)\right|d_{\Sigma'}(A')\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}\frac{y^2_{J[i]}}{2|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}\right)e^{R'\vee 0}$$

$$\times\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p+q}|y_iy_j||\Sigma^{-1}_{ij}|\mathbb{I}_{(i,j)\in\mathcal{D}}$$

(43) $\beta(h+h^{2H})e^{-Da^2-D\sum_{i=1}^{p}\frac{y^2_{J[i]}}{|t_{J[i]}-t_{J[i]-1}|^{2H}}}$.

对某些 $D, \beta > 0$。现在结合 (39)、(40)、(43)，以及 $h, h^{2H} \leq h^{2-2H}$ 当 $H > \frac{1}{2}$ 且 $h \in (0, 1)$ 时这一事实，可得所需结果 (7)。至此，证明完成。□

## References

[1] R. Altmeyer：占据时间泛函的近似。 *Bernoulli* **27** (2021)，第 4 期，第 2714–2739 页。[2] E. Azmoodeh 和 L. Viitasaari：分数布朗运动积分离散化的收敛速率。 *Journal of theoretical Probability* **28** (2015)，第 396–422 页。[3] E. Azmoodeh、P. Ilmonen、N. Shafik、T. Sottinen 和 L. Viitasaari：关于分数布朗运动及相关过程驱动的积分离散化的精确收敛速率（被积函数不连续）。arXiv 预印本 arXiv: 2209 06708 。S. [4] Berman 和 R. Getoor：高斯过程的局部非决定性与局部时。 *Indiana University Mathematics Journal* **23** (1973)，第 1 期，第 69–94 页。[5] Z. Chen、L. Leskel¨a 和 L. Viitasaari：对不连续求值的随机过程的路径意义下的斯蒂尔切斯积分 *Stochastic Processes and their Applications*, 129 (2019)，第 8 期，第 2723–2757 页。[6] P. Friz 和 M. Hairer： *A Course on Rough Paths: With Introduction to Regularity Structures* 2020 ( )， Springer Cham。[7] V. Garino、I. Nourdin 和 P. Vallois：分数布朗运动驱动积分的黎曼近似的渐近误差分布。 *Electronic Journal of Probability* **27** 2022 1 43 ( )，第 – 页。[8] D. Geman 和 J. Horowitz：占据密度。 *The Annals of Probability* (1980)，第 1–67 页。[9] M. Hinz、J. T¨olle 和 L. Viitasaari：有界变差系数下路径的变异性与微分方程。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré – Probabilités et Statistiques*(2023)，即将出版。[10] M. Hinz、J. T¨olle 和 L. Viitasaari：占据测度与路径的索博列夫正则性、变异性及复合。 *Electronic Journal of Probability* **27**(73) (2022)，第 1-29 页。[11] A. Jaramillo、I. Nourdin 和 G. Peccati：分数局部时的近似：零能量与导数。 *The Annals of Applied Probability* **31** (2021)，第 5 期，第 2143–2191 页。[12] P.E. Kloeden 和 E. Platen： *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* (1992)，Springer Berlin。[13] T. Matsuda 和 N. Perkowski：随机缝合引理的扩展及其在分数随机微积分中的应用。 *arXiv preprint arXiv:2206.01686* (2022) [14] S. Mukeru：分数布朗运动局部时的表示。 *Statistics and Probability Letters* **131** 2017 1 12 ( )，第 – 页。[15] I. Nourdin： *Selected aspects of fractional Brownian motion*. 2012，Springer。[16] M. Podolskij 和 M. Rosenbaum：关于《与布朗半鞅增量相关的随机测度的极限：分数布朗运动相关局部时统计量的渐近行为》的评论。 *Journal of financial Econometrics* **16** 2018 4, 588 598 ( )，第 – 期。[17] D. Revuz 和 M. Yor： *Continuous martingales and Brownian motion* **293** 2013，Springer Science & Business Media。[18] Y. Xiao：高斯和稳定随机场的局部非决定性性质及其应用。 *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques.* **15** 2006 1, 157 193 ( )，第 – 期。[19] P. Yaskov：关于路径意义下的黎曼–斯蒂尔切斯积分 *Statistics and Probability Letters* **150** 2019 101 107 , ( )，第 – 页。

[20] L.C. Young：与 Stieltjes 积分相关的 H¨older 型不等式。*Acta Mathematica* **67 (1936)**，第 1 期，第 251–282 页。[21] M. Z ¨ *Prob-* ahle：关于分形函数的积分与随机微积分。*ability theory and related fields* **111** 1998 3, 333 374 **(**），第 – 期。

## AppendixA. Some technical results

本节证明三个引理，它们对定理 1.1 的证明很有用。

引理 A.1. 设 $\theta^2 > 0$ 和 $X \sim \mathcal{N}(0, \theta^2)$。那么，对所有 $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} |y + X - \alpha| \mathbb{I}_{sgn(y+X-\alpha) \neq sgn(y-\alpha)} dy\right] = \frac{1}{2}\theta^2.$$

证明. 作变量替换 $y \to y - \alpha$ ，得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} |y + X - \alpha| \mathbb{I}_{sgn(y+X-\alpha) \neq sgn(y-\alpha)} dy\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} |y + X| \mathbb{I}_{(y+X)>0, y<0} dy\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} |y + X| \mathbb{I}_{(y+X)<0, y>0} dy\right] \\ = \; & 2\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} |y + X| \mathbb{I}_{(y+X)>0, y<0} dy\right]. \end{aligned}$$

这里还利用了 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} |y + X| \mathbb{I}_{(y+X)>0, y<0} dy\right] \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} \int_{-\infty}^{0} \int_{-y}^{\infty} (x + y) e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} dx dy \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} \left( \int_{0}^{\infty} \int_{y}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} dx dy - \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} \int_{0}^{x} y dy dx \right) \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} \left( \int_{0}^{\infty} \theta^2 e^{-\frac{y^2}{2\theta^2}} dy - \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} dx \right) \\ = \; & \theta^2 \mathbb{P}[X > 0] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2 \mathbb{I}_{X>0}] = \frac{1}{4}\theta^2, \end{aligned}$$

从而完成证明。 □

引理 A.2. 设 $X_1$、$X_2$ 是相互独立的中心化高斯变量，其方差分别为 $\theta_1^2$ 和 $\theta_2^2$。那么，对所有 $\alpha > 0$，有

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} |\mathbb{I}_{y>\alpha} - \mathbb{I}_{y+X_2>\alpha}| \, dy\right] \leq |\theta_2|$$

*and*

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} |(\mathbb{I}_{y_1>\alpha} - \mathbb{I}_{y_1+X_1>\alpha}) (\mathbb{I}_{y_1+X_1+y_2>\alpha} - \mathbb{I}_{y_1+X_1+y_2+X_2>\alpha})| \, dy_2 dy_1\right] \leq |\theta_1\theta_2|.$$

证明. 对 $y_1 \to y_1 - \alpha$ 进行变量替换，并对 $X_1$ 进行条件化，可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \left|\left(\mathbb{I}_{y_1>\alpha} - \mathbb{I}_{y_1+X_1>\alpha}\right)\left(\mathbb{I}_{y_1+X_1+y_2>\alpha} - \mathbb{I}_{y_1+X_1+y_2+X_2>\alpha}\right)\right| dy_2 dy_1\right] \\ \leq\ & \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \left|\mathbb{I}_{y_1>0} - \mathbb{I}_{y_1+X_1>0}\right| \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{I}_{y_2>-(y_1+X_1)} - \mathbb{I}_{y_2+X_2>-(y_1+X_1)}\right| |X_1\right] dy_2 dy_1\right] \end{aligned}$$

按照引理 A.1 的方法，我们可以看到，对于所有 $\beta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{I}_{y>\beta} - \mathbb{I}_{y+X_2>\beta}\right|\right] dy \leq |\theta_2|,$$

这证明了命题的第一部分。

于是,

$$\begin{aligned} & \left|\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathbb{I}_{y_1>\alpha} - \mathbb{I}_{y_1+X_1>\alpha}\right)\left(\mathbb{I}_{y_1+X_1+y_2>\alpha} - \mathbb{I}_{y_1+X_1+y_2+X_2>\alpha}\right) dy_2 dy_1\right]\right| \\ \leq\ & \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left|\mathbb{I}_{y_1>0} - \mathbb{I}_{y_1+X_1>0}\right| |\theta_2| dy_1\right] \\ \leq\ & |\theta_1\theta_2|, \end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

引理 A.3. 设 $\phi$ 如 (14) 所示，且 $a \in \mathbb{R}$。存在一个常数 $\beta > 0$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{[0,T]^2} |\phi_{u,v}(a,a) - \phi_{u_n,v}(a,a)| \, \mathbb{I}_{(u,v)\in\mathcal{C}} du dv \leq \beta e^{-\frac{a^2}{4T^{2H}}} n^{1-H}, \tag{44}$$

$$\int_{[0,T]^2} |\phi_{u,v}(a,a) - \phi_{u_n,v_n}(a,a)| \, \mathbb{I}_{(u,v)\in\mathcal{C}} du dv \leq \beta e^{-\frac{a^2}{4T^{2H}}} n^{1-H} \tag{45}$$

其中 $\mathcal{C} = \{(u,v) \in [0,T]^2,\ \min(u, v, |u-v|) > \frac{2}{n}\}$。

证明。我们只证明（44），因为（45）的证明类似。记为 $d_{u,v} = det(\Sigma(\min(u,v), (\max(u,v) - \min(u,v))))$. 根据局部非确定性，我们有 $|d_{u,v}| \geq k_H \min(u,v)^{2H} |u-v|^{2H}$。还需注意，由于 $(u,v) \in \mathcal{C}$, $\frac{|u_n \wedge v|^{2H}(|u-v| \wedge |u-n-v|^{2H})()}{|u \wedge v|^{2H} |u-v| \vee |u-n-v|} \leq 4^{2H}$。我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{C}} |\phi_{u,v}(a,a) - \phi_{u_n,v}(a,a)| \, du dv \\ \leq\ & \int_{\mathcal{C}} \left( e^{-\frac{a^2}{4T^{2H}}} \left| \frac{1}{\sqrt{d_{u,v}}} - \frac{1}{\sqrt{d_{u_n,v}}} \right| \right. \\ & \left. + \frac{4^H}{k_H \min(u,v)^H |u-v|)^H} \left( e^{-\frac{a^2|u-v|^{2H}}{4d_{u,v}}} - e^{-\frac{a^2|u_n-v|^{2H}}{4d_{u_n,v}}} \right) \right) du dv. \end{aligned}$$

利用引理 2.2，我们可以看出，函数 $(u,v)\to d_{u,v}$ 对于 $x_1\le x_2$ 满足，

$$\begin{aligned}|d_{x_1,v}-d_{x_2,v}| &\le K|x_1-x_2|\left((x_1\wedge v)^{2H-1}(|v-x_1|\vee|v-x_2|)^{2H}\right.\\ &\quad\left.+(x_1\wedge v)^{2H}(|v-x_1|\vee|v-x_2|)^{2H-1}\right).\end{aligned}$$

因此，由于平方根函数是 $\frac{1}{2}$-H¨older 连续的，有不中返

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\sqrt{d_{u,v}}}-\frac{1}{\sqrt{d_{u_n,v}}}\right|\\ \le\ &\frac{K}{\sqrt{n}}\frac{(u_n\wedge v)^{H-\frac{1}{2}}(|u-v|\vee|u_n-v|^H+(u_n\wedge v)^H(|u-v|\vee|u_n-v|^{H-\frac{1}{2}})}{k_H(u_n\wedge v)^{2H}(|u-v|\wedge|u_n-v|)^{2H}}\\ \le\ &\frac{4^HK}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\min(u,v)^H|u-v|^{H+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\min(u,v)^{H+\frac{1}{2}}|u-v|^H}\right).\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}&\left|e^{-\frac{a^2|u-v|^{2H}}{4d_{u,v}}}-e^{-\frac{a^2|u_n-v|^{2H}}{4d_{u_n,v}}}\right|\\ =\ &\left|e^{-\frac{|a||u-v|^H}{2\sqrt{d_{u,v}}}}-e^{-\frac{|a||u_n-v|^H}{2\sqrt{d_{u_n,v}}}}\right|\left|e^{-\frac{a|u-v|^H}{\sqrt{d_{u,v}}}}+e^{-\frac{|a||u_n-v|^H}{2\sqrt{d_{u_n,v}}}}\right|\\ \le\ &2\left|\frac{|a||u-v|^H}{2\sqrt{d_{u,v}}}-\frac{|a||u_n-v|^H}{2\sqrt{d_{u_n,v}}}\right|\frac{K_H(u\wedge v)^H|u-v|^H}{|a||u-v|}\\ \le\ &K\left|\frac{1}{\sqrt{d_{u,v}}}-\frac{1}{\sqrt{d_{u_n,v}}}\right|+K\frac{n^{-H}}{|u-v|^H},\end{aligned}$$

其中我们利用了这样一个事实：$\forall x>0$、$e^{-x}\le\frac{1}{x}$，以及$d_{u,v}\le K_H(u\wedge v)^{2H}|u-v|^{2H}$。

最后，

$$\begin{aligned}&\int_{[0,T]^2}|\phi_{u,v}(a,a)-\phi_{u_n,v}(a,a)|\,\mathbb{I}_{(u,v)\in\mathcal{C}}dudv\\ \le\ &e^{-\frac{a^2}{4T^{2H}}}\int_{\mathcal{C}}\left(\frac{4^HK}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\min(u,v)^H|u-v|^{H+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\min(u,v)^{H+\frac{1}{2}}|u-v|^H}\right)\right.\\ &\left.+\frac{1}{n^H\min(u,v)^H|u-v|^{2H}}\right)dudv\\ \le\ &Kn^{1-H}e^{-\frac{a^2}{4T^{2H}}}.\end{aligned}$$

□

Uppsala University, Department of Mathematics, 751 06, Uppsala, Sweden
*Email address*: valentin.garino@math.uu.se

Uppsala University, Department of Mathematics, 751 06, Uppsala, Sweden*Email address*: lauri.viitasaari@math.uu.se