arXiv:2305.04751v2 [math.RT] 8 Dec 2023

$\mathfrak{sl}(m|n)$ 的魏尔群胚与 $\mathfrak{osp}(r|2n)$

LUKAS BONFERT 和 JONAS NEHME

摘要。我们给出 Heckenberger 和 Schneider 引入的 Cartan 图与魏尔群胚定义的一种便捷表述，并为正则可对称化的余根李超代数构造 Cartan 图。对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，我们用分拆显式描述 Cartan 图，并确定其魏尔群胚生成元之间的关系。

1. 引言

设 $\mathfrak{g}$ 是一个基本经典单李超代数，$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个嘉当子代数。众所周知，与半单李代数的情形不同，包含 $\mathfrak{h}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的所有 Borel 子代数并非彼此共轭。因此，存在若干组在 Weyl 群作用下不共轭的单根。不过，共轭类的数量是有限的（例如参见 [Mus12，定理 3.1.2]），这等价于说，偶部固定为 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 的 Borel 子代数只有有限多个。

在 [PS89] Penkov 和 Serganova 引入了奇反射，以在偶部相同的 Borel 子代数之间转换。具体而言，它们可描述如下（例如参见 [CW12, §1.4] 或 [Mus12, §3.5]）。设 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 是某个 Borel 子代数对应的单根，并假设简单根 α_i 是奇各向同性的。那么，对于通过在 α_i 处作奇反射从 $\mathfrak{b}$ 得到的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}'$，其单根 $\alpha'_j = r_i(\alpha_j)$ 为

$$\alpha'_j = r_i(\alpha_j) = \begin{cases} -\alpha_i & \text{if } j = i, \\ \alpha_j & \text{if } j \neq i, \alpha_j(h_i) = 0 \\ \alpha_j + \alpha_i & \text{if } j \neq i, \alpha_j(h_i) \neq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $h_i \in \mathfrak{h}$ 是与 α_i 对应的余根。更一般地，这些定义也适用于余伴随李超代数。在 [Ser11] 中，奇反射（以及某些其他映射）用于构造一个*Weyl 群胚*，它在 Borel 子代数集合上具有传递作用。

另一方面，Heckenberger和Yamane [HY08] 还引入了一个乍看之下似乎无关的魏尔群胚概念，作为 Nichols 代数理论中 Weyl 群的类比。在这一背景下，魏尔群胚由（半）Cartan 图构造，参见 [HS20, §9]。（半）Cartan 图是一个无向图 G，其边标记为 $\{1,\dots,n\}$，并且每个顶点 x都对应一个广义 Cartan 矩阵 $A(x)$（称为 Serre 矩阵），同时满足某些条件。在 [HY08, Ex. 3] 中，有限维余伴随李超代数给出了 Cartan 图的例子。此外，[HS20, §11] 为正则余伴随李超代数提供了另一种 Cartan 图的组合构造，仅使用 Cartan 数据。粗略地说，Cartan 图的顶点是 $\mathfrak{g}$的根的有序基，边对应于奇反射，而 Serre 矩阵定义了 $\mathfrak{g}$中的 Serre 关系。根据以下结果的

日期: 2023年12月11日。关键词和短语。 魏尔群胚,李超代数。

[HY08] Cartan 图的 Weyl 群胚是一个考克斯特群胚，即它由简单反射 $(s_i)_x$生成： $x \to r_i(x)$, 且仅受 Coxeter 型关系 $\mathrm{id}_x(s_i s_j)^{m(x)_{ij}}\ \mathrm{id}_x = \mathrm{id}_x$ 约束（对任何可能的复合均成立）。

我们的首个主要结果是用更便于理解的图形语言表述从 [HS20] in 构造 Cartan 图和 Weyl 群胚的一般方法，见第 2.1 节。此外，在第2.2节中，我们将 [HY08] 中有限维余伴随李超代数的 Cartan 图构造推广到正则可对称化的余伴随李超代数，并证明这等价于 [HS20]给出的组合定义。特别是，这意味着我们实际上得到了一个 Cartan 图。与 [HS20] 相比，我们着重于 Borel 子代数，而非嘉当数据，这从李理论的角度来看更有优势。这一视角使我们能够将这种 Weyl 群胚的概念与李超代数理论中的其他构造进行比较，见第2.5节。在命题 2.15 中，我们证明余伴随李超代数的 Weyl 群胚 W 中一个对象的自同构群与其 Weyl 群一致。

我们的第二个结果是对李超代数 $\mathfrak{sl}(m|n)$、 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的 Cartan 图和魏尔群胚的明确描述。这些魏尔群胚此前已在 [AA17] 中研究过。我们以分拆为基础，给出一种详尽而不同的描述。为此，我们首先回顾一些关于 $\mathfrak{sl}(m|n)$、 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 作为对反变李超代数的实现的标准结果，这相当于对所有 Borel 子代数按共轭分类。基于 [Mus12, §3] ，我们用能装入一个 $m \times n$ 矩形的分拆 λ 来描述 Borel 子代数（模共轭）。给定这样的一个分拆（以及在 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的情形下一个额外的符号 $\varepsilon \in \{+, -\}$），便可轻松构造一个 Borel 子代数 $\mathfrak{b}(\lambda)$（分别为 $\mathfrak{b}(\lambda, \varepsilon)$）；详情见第 3.1 至 3.3 节。要确定 Cartan 图，我们还需要明确描述所有 Borel 子代数对应的嘉当数据，这部分内容在附录 A 中计算。

确定李超代数$\mathfrak{sl}(m|n)$、 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$的 Cartan 图时，一个至关重要的观察是：用分拆组合描述 Borel 子代数，使得奇反射可以得到简便的描述：奇反射对应于向 λ中添加或从中移除一个特定的方格，详情参见第3.4节。这使得我们能够非常轻松地描述具体例子中 Cartan 图的形状，参见命题4.1。在命题4.2中，我们计算 Serre 矩阵，这些矩阵由第3节中计算出的嘉当数据得到。最后，我们确定其 Weyl 群胚中的考克斯特关系。有些出人意料的是，这些关系正如 Serre 矩阵所预示的那样，参见命题 4.4。

致谢。我们感谢 Catharina Stroppel 与我们进行了深入讨论，并对早期稿件提出了宝贵意见。本研究得到了马克斯·普朗克数学研究所（IMPRS Moduli Spaces）和 Hausdorff 数学中心的支持。该中心由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）根据德国卓越战略资助（EXC- 2047/1 – 390685813）。我们感谢这两个机构提供的热情接待和卓越的研究环境。

2. Cartan 图与魏尔群胚

2.1. 定义与一般性质。我们首先重新表述 [HS20, §9] 中 Cartan 图和魏尔群胚的定义。魏尔群胚的概念最初由 [HY08] 公理化引入。

设 I 和 J 为满足 $|I| < \infty$的集合。所谓 (I, J)-标记图，是指一个（无向）图 G，它的顶点为 X ，边为 E ，并配有集合映射$A\colon X \to J$和 $c\colon E \to I$。对于一条边 e，我们称 $c(e) \in I$ 为它的颜色。我们将

i-着色边画作 $x \overset{i}{\longleftrightarrow} x'$。通常会省略集合 I。

对于有限集合 I，令 $\mathrm{GCM}_I(\mathbb{Z})$ 表示其元素以 I 为指标的广义卡当矩阵集合。

定义 2.1。一个半 *Cartan* 图 是一个 $(I, \mathrm{GCM}_I(\mathbb{Z}))$-标记图，使得
(CG1) 对每个顶点 $x \in X$ 和每个 $i \in I$，都存在唯一一条与 x 关联的边 e，使得 $c(e) = i$,
(CG2) 并且对每条边 $x \overset{i}{\longleftrightarrow} y$ 以及所有 $j \in I$，均有 $A(x)_{ij} = A(y)_{ij}$。
矩阵 $A(x)$称为 *Serre* 矩阵。

我们称矩阵 $A(x)$ 为 Serre 矩阵，因为在特殊情况下，它们描述了 Serre 关系，见注 2.9。

注意，半 Cartan 图中明确允许出现环，而且事实上环非常常见。

注 2.2。由 (CG1) 可得对合 $r_i\colon X \to X$，它将顶点 x 映射到沿着其处唯一的 i 色边相邻的顶点。这恢复了 [HS20，定义 9.1.1] 中的公理。

设 G 是一个半 Cartan 图。对每个顶点 $x \in X$，我们关联一个以 $\{\alpha_i^x \mid i \in I\}$ 为基的 $\mathbb{Z}$- 格 $\mathbb{Z}_x^I$，并且对 $i \in I$，定义 $\mathbb{Z}$- 线性映射 $s_i = (s_i)_x\colon \mathbb{Z}_x^I \to \mathbb{Z}_{r_i(x)}^I$，使得 $(s_i)_x(\alpha_j^x) = \alpha^{r_i(x)}{}_j - A(x)_{ij}\alpha_i^{r_i(x)}$。

定义 2.3。G 的*Weyl* 群胚 W 是一个以X 为对象集合、由 $(s_i)_x\colon x \to r_i(x)$（其中 $i \in I, x \in X$）生成态射的群胚。态射的复合由 $\mathbb{Z}$-线性映射的通常复合给出；两个态射 $x \to y$ 相等，当且仅当它们作为 $\mathbb{Z}$-线性映射 $\mathbb{Z}_x^I \to \mathbb{Z}_y^I$相等。

注意到，由 (CG2) 可得，对所有 $i \in I$ 和 $x \in X$，$(s_i)_{r_i(x)}(s_i)_x = \mathrm{id}_x$，因此 W 确实是一个群胚。

注 2.4。通常，人们认为格 $\mathbb{Z}_x^I$ 位于一个固定的环境 $\mathbb{C}$ 维向量空间中。显然，格 $\mathbb{Z}_x^I$ 作为抽象格彼此同构，但作为环境向量空间中的子格，它们通常差异很大（尤其取决于顶点 x）。为强调这一点，我们始终会注明格 $\mathbb{Z}_x^I$ 所对应的顶点 x，以及它的基向量 α_i^x。

定义 2.5。设 G 是一个半 Cartan 图，W 是其 Weyl 群胚，并定义顶点 $x \in X$处的以下根集：

- 其实根 为
$$\Delta_x^{\mathrm{real}} = \{w(\alpha_i^y) \mid y \in X, w \in \mathcal{W}(y, x), i \in I\} \subseteq \mathbb{Z}_x^I,$$
- 正实根（分别为负实根）为 $\Delta^{\pm,\ \text{实}x} = \Delta_{\text{实}x} \cap \pm\sum_{i\in I}\mathbb{N}_0\alpha_i^x$。

定义 2.6. 若半 Cartan 图 G 满足以下条件，则称其为 *Cartan* 图
(CG3) $\Delta_x^{\mathrm{real}} = \Delta^{+,\ \mathrm{real}}_x \cup \Delta^{-,\ \mathrm{real}}_x$对所有 $x \in X$均成立；(CG4) 并且对所有 $x \in X$ 和 $i, j \in I$，都有

$$(r_i r_j)^{m(x)_{ij}}(x) = x,$$

其中 $m(x)_{ij} = |\Delta_x^{\mathrm{real}} \cap (\mathbb{N}_0\alpha_i^x + \mathbb{N}_0\alpha_j^x)|$。

2.2. **余伴随李超代数的 Cartan 图**。 现在我们从余伴随李超代数构造一个广义 Cartan 图。我们首先回顾 [Mus12, §5] 中余伴随李超代数的构造。一个*Cartan* 数据 是一个二元组 $(B,\ \tau)$，由矩阵 $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和奇偶向量$\tau \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 组成，其中 $n \in \mathbb{N}$。我们还固定 B 的一个最小实现，即选取一个维数为 $2n - \operatorname{rk}(B)$ 的向量空间 $\mathfrak{h}$，其中包含线性无关的根$\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ 和余根 $h_i \in \mathfrak{h}$，对应于 $1 \le i \le n$，且满足 $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$。利用这些数据，可以构造李超代数 $\tilde{\mathfrak{g}}(B,\ \tau)$，它具有 *Chevalley* 生成元 e_i和 f_i（奇偶性为 τ_i），并满足以下关系；这些关系类似于 Kac–Moody 李代数的定义关系：

$$
\begin{aligned}
[h, h'] &= 0 \quad \text{for all } h, h' \in \mathfrak{h},\\
[h, e_i] &= \alpha_i(h) e_i \quad \text{for all } h \in \mathfrak{h},\\
[h, f_i] &= -\alpha_i(h) f_i \quad \text{for all } h \in \mathfrak{h},\\
[e_i, f_j] &= \delta_{i,j} h_i.
\end{aligned}
$$

通常，我们称 $\mathfrak{h}$ 为嘉当子代数。注意，$\mathfrak{h}$ 集中于偶次部分，且为阿贝尔的。设 $\mathfrak{g}(B,\tau) = \tilde{\mathfrak{g}}(B,\tau)/\mathfrak{r}$，其中 $\mathfrak{r}$是与 $\mathfrak{h}$交集为零的 $\tilde{\mathfrak{g}}$的极大理想。从 $\mathfrak{g}(B,\tau)$ 的构造可清楚看出，将 B 的各行乘以非零标量进行重新缩放，会得到同构的李超代数。

接下来，我们将只讨论 [HS07，定义 4.8] 意义下的正则可对称化嘉当数据（允许对行进行重新缩放）。如果矩阵 B 是可对称化的，则称嘉当数据 (B,τ)（记号与第3节相同）为可对称化。若满足以下条件，则称 (B,τ) 为正则：

- B 没有全零行且不可分解（即不能拆分为块$B = \left(\begin{smallmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{smallmatrix}\right)$），
- $b_{ij} = 0$ 当且仅当 $b_{ji} = 0$,
- 若 $\tau_i = \bar{0}$，则 $b_{ii} \neq 0$，且对所有 j，$\frac{2b_{ij}}{b_{ii}} \in \mathbb{Z}_{\le 0}$，并且
- 若 $\tau_i = \bar{1}$ 且 $b_{ii} \neq 0$，则对所有 j，$\frac{2b_{ij}}{b_{ii}} \in 2\mathbb{Z}_{\le 0}$。

$(B,\ \tau)$ 的正则性意味着，对所有 i，$\operatorname{ad}_{e_i}\colon \mathfrak{g}(B,\ \tau) \to \mathfrak{g}(B,\ \tau)$ 都是局部幂零的，参见 [Ser11，第 2] 节。

若任意满足$\mathfrak{g}(B',\ \tau\prime) \cong \mathfrak{g}(B,\ \tau)$ 的嘉当数据 $(B',\ \tau\prime)$ 都是正则的，则称李超代数 $\mathfrak{g}(B,\ \tau)$ 正则。特别地，$\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 都是正则的，这可由附录 A 中对所有可能嘉当数据（按行重新缩放）进行的计算得出。

以下定义见 [HS20，定义 11.2.4]。由于我们将讨论范围限制在正则 Cartan 数据上，因此该定义略有简化。

定义 2.7。 对于正则 Cartan 数据 (B,τ)，*Serre* 矩阵 $A^{B,\tau}$是一个$n \times n$-矩阵，其元素为

$$
a_{ij}^{B,\tau} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j,\\ 0 & \text{if } i \neq j, b_{ij} = 0,\\ -1 & \text{if } i \neq j, b_{ij} \neq 0, b_{ii} = 0,\\ \frac{2b_{ij}}{b_{ii}} & \text{if } i \neq j, b_{ij} \neq 0, b_{ii} \neq 0. \end{cases}
$$

注意，由于 (B,τ) 具有正则性，Serre 矩阵 $A^{B,\tau}$是一个广义卡当矩阵。还要注意，特别是 $A^{B,\tau}$ 在将 B 的各行乘以非零标量后保持不变。

注记 2.8. $A^{B,\ \tau}$ 的定义可以视为对 B 的规范化，使其尽可能接近广义卡当矩阵的形式。将对角线元素非零的行重新缩放，使对角线元素变为 2；而

对于奇各向同性根（即 $b_{ii} = 0$），我们将所有非零的非对角元素替换为 -1。特别是，若 B 是广义卡当矩阵，则 $A^{B,\tau} = B$。

注2.9。我们称矩阵 $A^{B,\tau}$ 为 Serre 矩阵，因为它用于表述余伴随李超代数 $\mathfrak{g}(B,\tau)$ 的 Serre 关系。具体来说，我们有

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0,$$

参见例如 [Mus12，第 5.2 条引理。13]

本节余下部分固定一个正则可对称化的反变李超代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(B,\tau)$，其中 $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$，并令 $I = \{1, \dots, n\}$。

根据这一构造的直接推论，$\mathfrak{g}$ 具有根空间分解$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$。$\mathfrak{g}$ 的一个有序根基（在 [Ser11, §3]中简称为基）是一个线性无关根的序列 $\Pi' = (\beta_1, \dots, \beta_n)$，满足存在$e'_i \in \mathfrak{g}_{\beta_i}$、$f\prime_i \in \mathfrak{g}_{-\beta_i}$，使得它们与 $\mathfrak{h}$一起生成 $\mathfrak{g}$，并且满足 $[e'_i, f'_j] = 0$（对$i \neq j$）。这些 β_i 称为单根，并且每个根都可以表示为单根的一个 $\mathbb{Z}$-线性组合，其中所有系数要么均为非负数，要么均为非正数。

有序根基的一组 Chevalley 生成元 e'_i, f'_i 确定一个 Cartan 数据 $(B', \tau\prime)$，由 $\tau\prime_i = |e'_i|$ 和 $b'_{ij} = \beta_j(h'_i)$ 给出，其中 $h'_i = [e'_i, f\prime_i] \in \mathfrak{h}$。注意，$B$ 和 B' 的秩相同，因此这会导出一个同构 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}(B', \tau')$。注意，$e'_i$ 和 $f\prime_i$ 在相差一个标量的意义下是唯一的，因此 Cartan 数据 (B', τ') 在对 B' 的行进行重新缩放后是唯一的。

令 X 为 $\mathfrak{g}$ 的有序根基的标记集。对于每个 $x \in X$，固定与 $\Pi(x)$ 中单根对应的 Chevalley 生成元，并令 $(B(x)\ \tau(x))$ 为由此得到的 Cartan 数据。

定义 2.10。$\mathfrak{g}$ 的*Cartan* 图$\mathrm{G}_\mathfrak{g}$是由以下各项组成的（I，$\mathrm{GCM}_I(\mathbb{Z})$）标记图：

- 顶点集 X，
- 根据以下规则确定边：
  - 对于每个奇各向同性根 $\alpha_i^x \in \Pi(x)$ 和 $\Pi(x\prime)$，若后者由 $\Pi(x)$ 在 α_i^x 处进行奇反射得到（定义见 (1.1)），则存在一条颜色为 $i \in I$ 的边 $x \overset{i}{\longleftrightarrow} x\prime$。
  - 对每个非奇各向同性的根 $\alpha_i^x \in \Pi(x)$，都有一条颜色为 $i \in I$ 的边 $x \overset{i}{\longleftrightarrow} x$。
- Serre 矩阵 $A(x) = A^{B(x)\ \tau(x)}$.

$\mathfrak{g}$ 的 *Weyl* 群胚 是 $\mathrm{G}_\mathfrak{g}$的 Weyl 群胚。

注记 2.11。先验地，Cartan 图取决于 Chevalley 生成元的选择。不过，如上所述，这些生成元在相差一个标量的意义下是唯一的。对 Chevalley 生成元进行重新缩放，相当于对 $B(x)$ 的各行进行重新缩放，而这不会影响 Serre 矩阵 $A^{B(x),\tau(x)}$。因此，$\mathrm{G}_\mathfrak{g}$ 是良定义的。

顾名思义，$\mathrm{G}_\mathfrak{g}$ 确实是一个 Cartan 图（甚至是一个半 Cartan 图）这一点并不显然；我们将在下文推论 2.14 中验证这一点。为此，我们首先必须证明上述 G 的定义等价于[HS20，定义 11.2.6]中的构造。以这种方式将 Weyl 群胚与余伴随李超代数关联起来的想法可追溯至 [HY08，例 3]。

注记 2.12. 对于 Cartan 图 $\mathrm{G}_\mathfrak{g}$，定义 2.3 中的基向量 α_i^x 可以与有序根基 $\Pi(x) \subseteq \mathfrak{h}^*$中的单根对应起来；一般来说，其中许多根作为 $\mathfrak{h}^*$的元素来看时是相同的。不过，不同有序根基中的单根应始终加以区分。用 Cartan 图的术语来说，这对应于区分不同顶点处的单根，正如注记 2.4 中所解释的那样。

为了证明 $G_{\mathfrak{g}}$ 确实与 [HS20] 中构造的对象相同，我们需要确定奇反射对对称 Cartan 数据的影响。类似的公式（不假设对称性）也见于 [GHS22, §2.2.4] 和 [HS07, §4]（更多背景也可参见 [AA17]）。

命题 2.13. 设 Π 是 $\mathfrak{g}$ 的一个有序根基，且 $\alpha_i \in \Pi$ 是奇各向同性的。设 Π' 是由 Π 在 α_i 处作奇反射得到的。假设存在 Π 的 *Chevalley* 生成元，使得相应 *Cartan* 数据 (B, τ) 中的矩阵 B 是对称的。那么存在一组 Π' 的 *Chevalley* 生成元，使得相应的 *Cartan* 数据 (B', τ') 为

$$b'_{jk} = \begin{cases} -b_{jk} & \text{if } j = i \text{ or } k = i, \\ b_{jk} & \text{if } j, k \neq i, b_{ji}b_{ik} = 0, \\ b_{jk} + b_{ik} + b_{ji} & \text{if } j, k \neq i, b_{ji}b_{ik} \neq 0, \end{cases} \qquad \tau'_j = \begin{cases} \tau_j & \text{if } b_{ij} = 0, \\ \tau_j + \bar{1} & \text{if } b_{ij} \neq 0. \end{cases}$$

特别地，由可对称化 *Cartan* 数据经奇反射得到的任何 *Cartan* 数据都是可对称化的。

证明。 回顾 (1.1)， Π' 中的单根为

$$\{-\alpha_i\} \cup \{\alpha_j \mid j \neq i, b_{ij} = 0\} \cup \{\alpha_j + \alpha_i \mid j \neq i, b_{ij} \neq 0\}.$$

相应 Chevalley 生成元的一种可能选取为

$$e'_j = \begin{cases} f_i & \text{if } j = i, \\ e_j & \text{if } j \neq i, b_{ij} = 0, \\ [e_i, e_j] & \text{if } j \neq i, b_{ij} \neq 0, \end{cases} \qquad f'_j = \begin{cases} -e_i & \text{if } j = i, \\ f_j & \text{if } j \neq i, b_{ij} = 0, \\ \frac{1}{b_{ij}}(-1)^{\tau_j}[f_i, f_j] & \text{if } j \neq i, b_{ij} \neq 0. \end{cases}$$

注意，这种根向量的选取在相差一个标量的意义下是唯一的，因为简单根和两个简单根之和所对应的根空间都是一维的，因此，其他任何根向量选取都会导致矩阵 B' 重新缩放。我们的缩放选取确保了 B' 是对称的。

根据根向量计算可得（特别是利用 e_i 和 f_i 为奇元，且 B 是对称的这一点）

$$h'_j = [e'_j, f'_j] = \begin{cases} -h_i & \text{if } j = i, \\ h_j & \text{if } j \neq i, b_{ij} = 0, \\ h_i + h_j & \text{if } j \neq i, b_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

由此可推出

$$b'_{jk} = \begin{cases} -b_{jk} & \text{if } j = i \text{ or } k = i, \\ b_{jk} & \text{if } j, k \neq i, b_{ji}b_{ik} = 0, \\ b_{jk} + b_{ik} + b_{ji} & \text{if } j, k \neq i, b_{ji}b_{ik} \neq 0 \end{cases}$$

如所述。最后， $\tau'_j = |e'_j| = |e_j| = \tau_j$，除非 $b_{ij} \neq 0$，此时 $\tau_j = |e'_j| = |e_j| + |e_i| = |e_j| + \bar{1} = \tau_j + \bar{1}$。□

推论 2.14。设 (B, τ) 是一个正则可对称化 *Cartan* 数据， $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(B, \tau)$， $\tilde{}$，且 B 是 B 的对称化。那么，$\mathcal{G}_{\mathfrak{g}}$ 正是由 $\tilde{}(B, \tau)$ 在 *[HS20，定义 11.2.6]* 中构造的对象。特别地，$\mathcal{G}_{\mathfrak{g}}$ 是一个 *Cartan* 图。

证明。在 [HS20], 中，Weyl 群胚是利用李超代数 $\mathfrak{g}'(B, \tau) \subseteq \mathfrak{g}(B, \tau)$ 定义的，该代数由 e_i 和 f_i 生成。唯一的区别在于， $\mathfrak{g}'(B, \tau)$ 的 Cartan 子代数仅由 h_i 张成，因此这不会影响 Weyl 群胚的构造。

根据以下观察，这些定义是一致的：Serre 矩阵在对矩阵 B 的各行进行重新缩放时保持不变，并且奇反射对命题 2.13 中确定的对称 Cartan 数据所产生的作用与

来自 [HS20，引理 11.2.7] 的公式一致。$G_{\mathfrak{g}}$ 是 Cartan 图则由 [HS20，定理 11.2.10] 得出。□

2.3. **自同构**。我们希望比较余伴随李超代数 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群胚 W 中一个对象的自同构群与其 Weyl 群。

在 [GHS22] 中引入了 W 的一个连通分支的 Weyl 群。由第2.5节中的观察可知，Cartan 图 $G_{\mathfrak{g}}$ 的一个连通分支中的根，与根群胚骨架的一个连通分支中的实根一致，后者定义见 [GHS22, Def. 4.1.2]。根据 [GHS22, Prop. 4.3.12]，W 的一个连通分支的 Weyl 群由非各向同性根处的反射生成，这些根在该连通分支的某个有序根基中作为单根出现。

在 [Ser11, §4] 中，$\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群被定义为 $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ 的子群，该子群由 $\mathfrak{g}$ 的所有主偶根对应的反射生成，其中偶根 α 是主的，当且仅当在某个有序根基中，α 或 $\frac{1}{2}\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$ 的简单根。注意，该定义不依赖于 $G_{\mathfrak{g}}$ 的连通分支。

命题 2.15。设 $\mathfrak{g}$ 是一个余伴随李超代数，$\mathcal{W}$ 是其 *Weyl* 群胚。对于任意对象 $x \in \mathcal{W}$，群 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{W}}(x)$ 同构于包含 x 的连通分支的 *Weyl* 群 W_x。

特别地，如果对于每个偶根 α，在该连通分支的某个有序根基中，α 或 $\frac{1}{2}\alpha$ 都会出现，那么 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{W}}(\mathfrak{b})$ 同构于 $\mathfrak{g}$ 的 *Weyl* 群。

证明。根据定义，Weyl 群 W_x 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ 的子群。另一方面，通过将 W 定义中的 $\mathbb{Z}$ 格与 $\mathfrak{h}^*$ 中由根张成的 $\mathbb{Z}$ 格对应起来（如备注 2.12 所示），我们也可以将 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{W}}(x)$ 视为 $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ 的子群。我们断言，这些群各自的生成元在 $\mathfrak{h}^*$ 上作用为相同的反射。

对于 $x' \in$ W 和一个奇各向同性单根 $\alpha_i^{x'} \in \Pi(x')$，令 $r_i(\Pi(x'))$ 为在 $\alpha_i^{x'}$ 处进行奇反射后，由 $\Pi(x')$ 得到的有序根基。根据构造，W 的相应生成元 $(s_i)_{x'}$ 仅在由单根 $\Pi(x')$ 和 $r_i(\Pi(x'))$ 给出的 $\mathfrak{h}^*$ 的基之间执行显式的基变换，因此在 $\mathfrak{h}^*$ 上作用为恒等映射。但这意味着，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{W}}(x)$ 由所有在某个有序根基中作为单根出现的非各向同性根处的反射生成。由于两种情形下定义反射的公式相同（见定义 2.3 及 [Ser11，§4], [GHS22，式 (7)]），我们得到 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{W}}(x) \subseteq W_x$。

根据 W_x 的定义，反向包含显然成立。□

注 2.16。由命题 2.15 可知，按照定义 2.5 的意义，W 的实根与 $\mathfrak{g}$ 的实根相同。

2.4. **Cartan 图的连通分支**。一般而言，余伴随李超代数的 Cartan 图会有许多连通分支，见下文注 2.17。不过在某些情况下，只考虑其中一个分支就足够了。

注 2.17。$\mathfrak{g}$ 的有序根基 Π' 确定了分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}'^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}'^+$，将其分为相对于其单根的正部分和负部分。略微滥用一下术语，我们称 $\mathfrak{b}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}'^+$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 博雷尔子代数。

由于奇反射不会改变博雷尔子代数的偶部，余伴随李超代数的 Cartan 图分裂成若干个彼此之间没有边的连通分支。如果偶部相同的博雷尔子代数代表了博雷尔子代数的所有共轭类，那么这些连通分支看起来都相同，因此我们只关注其中一个连通分支。这是为了

例如 $\mathfrak{sl}(m|n)$、 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的情形，参见例如 [Mus12，第 3.1] 节。

注 2.18。由 [HS20，定理 9.3.5]可知，在奇反射下可以一致地排列单根：对于有序根基 $\Pi = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n)$，以及 Π 的一个非平凡重排 Π'，不可能通过奇反射从 Π 得到Π'。因此，Cartan 图 $\mathrm{G}_{\mathfrak{g}}$ 分解为 $n!$ 个相同的连通分支（边的编号可以不同），且这些分支之间没有边。不过，这一结论依赖于 $\mathrm{G}_{\mathfrak{g}}$ 是 Cartan 图，因此我们无法先验地选定单根的一致排列。据我们所知，无法仅根据李超代数的根组合学找到单根的一致排列，尽管其存在性是一个纯粹的李理论问题。

2.5. **与其他 Weyl 群胚概念的关系**。文献中有若干种称为*Weyl* 群胚 的构造。我们对 Weyl 群胚 W 的定义推广了 [HY08] 中的构造。它与其他概念的关系如下。

在 [Ser11] Serganova 提出了另一种称为*Weyl* 群胚C 的概念，其对象是嘉当数据 (B, τ)，态射是相应余伴随李超代数之间保持嘉当子代数的同构 $\mathfrak{g}(B, \tau) \to \mathfrak{g}(B', \tau')$。根据 [Ser11，定理 4，14]它与 W 的关系如下。

比较 1. Weyl 群胚 W 是 C 中包含 $\mathfrak{g}(B, \tau)$ 的连通分支的子群胚，它是通过遗忘所有对应于矩阵 B 的行重新缩放的态射得到的。

可以说，这相当于只保留本质上重要的信息，因为重新缩放行仅仅意味着选择不同的 Chevalley 生成元。

在一篇近期预印本 [GHS22]，中，Gorelik、Hinich 和 Serganova 构造了另一种 Weyl 群胚，称为根群胚。对于一个固定的有限集合 X，其对象是四元组 $(\mathfrak{h}, a, b, p)$，其中 $\mathfrak{h}$ 表示一个嘉当子代数，$a\colon X \to \mathfrak{h}$ 是一个像为线性无关余根集合的映射，$b\colon X \to \mathfrak{h}^*$ 是一个像为线性无关根集合的映射，而 p 表示相应的奇偶性。根群胚由以下三类态射生成：

- $(\mathfrak{h}, a, b, p) \to (\mathfrak{h}, \theta \circ a, \theta^{-1} \circ b, p)$ 对任意同构 $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$,
- $(\mathfrak{h}, a, b, p) \to (\mathfrak{h}, a', b, p)$，其中 $a'(x) = \lambda(x)a(x)$ 对某个 $\lambda\colon X \to \mathbb{C}^*$,
- 偶反射和奇反射。

在 [GHS22, §4.2.5] 中，根群胚的骨架 定义为由偶反射和奇反射生成的子群胚。此外，根群胚的脊柱 定义为仅由奇反射生成的子群胚，参见 [GHS22, §4.2.8]。

给定一个秩为 n 的正则可对称化 Cartan 数据 (B, τ)，我们可以选取 $\mathfrak{h}$ 的一个极小实现，即一个向量空间 $\mathfrak{h}$，连同线性无关的余根 $a_1, \ldots a_n$ 和线性无关的根 $b_1, \ldots, b_n$，使得自然配对满足 $\mathrm{h}a_i, b_j\mathrm{i} = B_{ij}$。由此得到一个四元组 $v = (\mathfrak{h}, a, b, \tau)$。该四元组在根群胚中的连通分支是一个可容许的、完全可反射的分支，含义见 [GHS22, Def. 3.2.3, §3.4.1]。

比较 2. </style}在根群胚骨架中，v 的连通分支是 W 的单连通覆盖，其含义见 [HS20，定义 9.1.10 和 10.1.1]。

比较 3. 由所有各向同性反射生成的 W 的子群胚 W′，与根群胚主干中 v 的连通分支同构。

Sergeev 和 Veselov 在[SV11]中提出了另一种魏尔群胚的概念。不过，正如他们所指出的，这种构造与我们所采用的魏尔群胚概念完全无关。

3. $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的 Borel 子代数

为了详细描述 $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的魏尔群胚，我们首先需要做一些准备。回顾一下，李超代数$\mathfrak{sl}(m|n)$ 在矩阵中表示为

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

使得 $\mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(D) = 0$ 以及通常的超交换子 $[x,y] = x \circ y - (-1)^{|x||y|} y \circ x$。

正交辛李超代数 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 明确地由所有如下形式的矩阵给出

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -u^t & -v^t & x & x_1 \\ v & a & b & y & y_1 \\ u & c & -a^t & z & z_1 \\ \hline -x_1^t & -z_1^t & -y_1^t & d & e \\ x^t & z^t & y^t & f & -d^t \end{array}\right) \tag{3.1}$$

其中，a 是任意的（$m \times m$）矩阵；b 和 c 是斜对称（$m \times m$）矩阵；d 是任意的（$n \times n$）矩阵；e 和 f 是对称（$n \times n$）矩阵；u 和 v 是（$m \times 1$）矩阵；y、y_1、z 和 z_1 是（$m \times n$）矩阵；而 x 和 x_1 则是（$1 \times n$）矩阵。李超代数 $\mathfrak{osp}$（$2m|2n$）由相同的矩阵给出，但需删除第一行和第一列。我们按此顺序用 0、1、……、m、-1、……、$-m$、（$m+1$）……、（$m+n$）$-$（$m+1$）……、$-$（$m+n$）标记行和列（对于 $\mathfrak{osp}$（$2m|2n$），省略 0）。

为确定 $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的 Weyl 群胚，我们需要明确描述作为余伴随李超代数的所有可能实现。因此，我们需要确定它们的所有有序根基，这在很大程度上等同于确定它们的 Borel 子代数及相应的嘉当数据。这些结果是标准的，而且本质上已经包含在[Kac77, §2.5.5], 中，尽管其中的表述不太方便，也没有为我们的目的提供足够明确的说明。

对于 $\mathfrak{sl}(n|n)$，还存在一个小小的额外困难，因为单根并非线性无关，而且从由 $\mathfrak{sl}(n|n)$ 计算得到的嘉当数据构造余伴随李超代数，得到的是 $\mathfrak{gl}(n|n)$，而不是 $\mathfrak{sl}(n|n)$。尽管如此，下面的所有计算中我们仍将使用 $\mathfrak{sl}(n|n)$，因为关于 Borel 子代数和单根的所有结论都适用于 $\mathfrak{gl}(n|n)$。

令 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 或 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$。回顾一下（例如参见 [Mus12, §3.1]），对于固定的博雷尔子代数 $\mathfrak{b}_{\bar{0}} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，具有偶部 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 的博雷尔子代数 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ 只有有限多个。此外，这些博雷尔子代数可以相对容易地用装入 $m \times n$ 矩形中的分拆来描述，例如参见 [Mus12, 命题 3.3.8]：对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$，具有固定偶部的博雷尔子代数与装入 $m \times n$ 矩形中的分拆集合 λ 存在双射。对于 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，每个装入 $m \times n$ 矩形中的分拆 λ 都确定两个博雷尔子代数 $\mathfrak{b}(\lambda, +)$ 和 $\mathfrak{b}(\lambda, -)$；当且仅当 $\lambda_1 = n$ 时，它们重合。

在下文第 3.1 至 3.3 节中，我们将基于 Mus12 第 3.3–3.4] 节中的描述，详细说明 $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的 Borel 子代数。我们在附录 A 中计算相应的嘉当数据。为此，使用置换而非分拆会更加方便，因此我们将频繁使用引理 A.1 在两者之间转换。

3.1. () 的 Borel 子代数 $\mathfrak{sl}(m|n)$。

对于李超代数 $\mathfrak{sl}(m|n)$，我们固定由所有对角矩阵构成的$m+n-1$维嘉当子代数 $\mathfrak{h}$，并关注偶部为标准

上三角矩阵偶 Borel 子代数。按照惯例，我们用 $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*(1 \leq i \leq m+n)$ 表示到第 i 个对角项的投影。

给定一个分拆 $\lambda \in \mathrm{P}_{m\times n}$，我们可以按如下方式构造一个偶部为 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 的 Borel 子代数$\mathfrak{b}(\lambda)$ 的奇部：按照 (A.1) 中的方式，将 λ 画在一个 $m \times n$ 矩形中，并将其视为右上方的 $m \times n$ 块。与 λ 的方格相对应的元素必须为 0，而右上方块中的其他元素可以任意取值。类似地，将 λ 的补集的转置（在 $m\times n$ 矩形中取补集）画入右下方的 $n\times m$ 块，即可确定其中的零元素和任意元素。例如，上三角矩阵的“标准” Borel 子代数对应于 $\lambda = \emptyset$，另一个具体例子见下文的例 3.1。根据 [Mus12, 命题 3.38]，所有 $\mathfrak{b}(\lambda)$ 都是偶部为 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 的 $\mathfrak{sl}(m|n)$ 的 Borel 子代数。

例 3.1. 设 $m = 3$、$n = 4$ 和 $\lambda =$ (4,2,1)。那么 $\mathfrak{sl}(3|4)$ 的对应博雷尔子代数为

$$\mathfrak{b}(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} * & * & * & \boxed{0} & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 & \boxed{0} & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ \hline \boxed{*} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right) \tag{3.2}$$

利用引理 A.1 在交错排列与分拆之间进行转换，我们可以明确描述 $\mathfrak{sl}(m|n)$ 的 Borel 子代数的有序根基和嘉当数据，参见命题 A.3。

3.2. 关于 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 的 Borel 子代数。为了描述$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$的所有 Borel 子代数，我们固定嘉当子代数 $\mathfrak{h}$，它由对角矩阵构成，并令 $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ ($i \in \{\pm 1, \ldots, \pm(m+n)\}$)表示到对角元素的投影。我们还固定偶部的标准 Borel 子代数 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$，它由以下简单根定义：对于 $1 \leq i \leq m-1$，为 $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$；对于 $1 \leq j \leq n-1$，为 ε_m 和$\varepsilon_{m+j} - \varepsilon_{m+j+1}$，并与 $2\varepsilon_{m+n}$一起构成。

对于分拆 $\lambda \in \mathrm{P}_{m\times n}$，我们可以如下构造偶部为 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 的博雷尔子代数$\mathfrak{b}(\lambda)$的奇部：采用 (3.1) 中的记号，我们要求 $z = 0$ 和 $x = 0$，而 x_1 和 y_1 可以任意选取。注意，y 和 z_1 是 $m \times n$-矩阵，我们将其与引理 A.1 中的 $m \times n$-矩形对应起来。对于 y，对应于 λ 的方格中的元素必须为零，其余元素任意；对于 z_1，规则恰好相反。再次由 Mus12 命题 3.3 [，$\mathfrak{b}(\lambda)$ 都是偶部为 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 的 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 的 Borel 子代数。

例 3.2. 设 $m = 1$、$n = 2$，并考虑分拆 $\lambda =$(1)。相应的 $\mathfrak{osp}(3|4)$ 的博雷尔子代数为

$$\mathfrak{b}(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\ * & * & 0 & \boxed{0} & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & \boxed{*} & \boxed{0} \\ \hline * & \boxed{*} & * & * & * & * & * \\ * & \boxed{0} & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{*} & 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

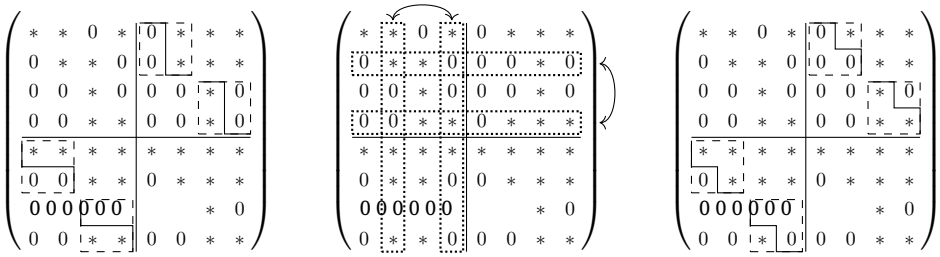
相应的有序根基和嘉当数据通过命题 A.4 中的交错排列来描述。

3.3. () 的博雷尔子代数 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$。 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的情形稍微复杂一些。同样，我们固定嘉当子代数 $\mathfrak{h}$，它由对角矩阵组成，并令 $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ 表示投影到第 i 个对角元素（使用与 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 相同的有序基和指标约定）。此外，我们固定偶部的标准博雷尔子代数 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$，它由 $1 \le i \le m-1$ 的简单根 $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$，以及 $1 \le j \le n-1$ 的 $\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m$ 和 $\varepsilon_{m+j} - \varepsilon_{m+j+1}$ 连同 $2\varepsilon_{m+n}$ 给出。

设给定一个分拆 $\lambda \in \mathrm{P}_{m\times n}$ 和 $\varepsilon \in \{+, -\}$。由此，我们按如下方式构造偶部为 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 的博雷尔子代数 $\mathfrak{b}(\lambda, \varepsilon)$ 的奇部。如果 $\varepsilon = +$，则按照第 3.2 节中的相同规则，由 λ 确定各项。如果 $\varepsilon = -$，我们进行与 $+$ 相同的构造，但随后交换右上块的第 m 行和第 $(-m)$ 行。$\mathfrak{b}(\lambda, \varepsilon)$ 是根据 [Mus12，命题 3.3.8]，所有偶部为 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 的 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的博雷尔子代数。

注意到，当且仅当 $\lambda_1 = n$ 时，$\mathfrak{b}(\lambda, +) = \mathfrak{b}(\lambda, -)$，因为我们需要 y 的第 m 行为零，而 z_1 的第 m 行可以任意取值。在这种情况下，我们也将所得的博雷尔子代数记为 $\mathfrak{b}(\lambda, \pm)$。

例 3.3. 设 $m = n = 2$。由分拆 $\lambda = (1, 1)$ 和 $\mu = (2, 1)$，我们得到以下 $\mathfrak{osp}(4|4)$ 的博雷尔子代数：$\mathfrak{b}(\lambda, +)$、$\mathfrak{b}(\lambda, -)$ 和 $\mathfrak{b}(\mu, \pm)$。这里，$\mathfrak{b}(\lambda, -)$ 是通过按图示交换行和列，由 $\mathfrak{b}(\lambda, +)$ 得到的。

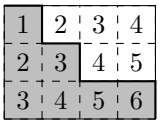


$\mathfrak{b}(\lambda, +)$ $\mathfrak{b}(\lambda, -)$ $\mathfrak{b}(\mu, \pm)$

我们在命题 A.5 中描述相应的有序根基和嘉当数据，此处同样使用交错排列而非分拆。为了将其与上述 Borel 子代数的描述联系起来，注意，若交错排列 σ 根据引理 A.1 中的双射对应于分拆 λ，那么 $\sigma(m+n) = m$ 当且仅当 $\lambda_1 = n$。

注 3.4. 如 [Mus12, §3.3] 所述，$\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 面临的额外困难源于 $\mathfrak{o}(2m)$ 存在一个外自同构，该自同构在 $\mathfrak{h}^*$ 上交换 ε_m 和 $\varepsilon_{-m} = -\varepsilon_m$。这恰好对应于从 $\mathfrak{b}(\lambda, +)$ 构造 Borel 子代数 $\mathfrak{b}(\lambda, -)$ 时交换行的操作。

3.4. 用分拆描述奇反射。 对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，我们可以如下用分拆描述奇反射。考虑 $m\times n$ 矩形，并按每行、每列递增的顺序为方格编号，从左上角的 1 开始，如下例所示。



设 $\lambda \in \mathrm{P}_{m\times n}$，并令 $\mathfrak{b}(\lambda)$ 为由 λ 构造的 $\mathfrak{sl}(m|n)$ 或 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 的博雷尔子代数。注意，可以从 λ 中移除或添加、且使结果仍为分拆 $\lambda' \in \mathrm{P}_{m\times n}$ 的方格，其编号恰好是 $\mathfrak{b}(\lambda)$ 的奇各向同性简单根的指标。特别地，这样的方格（若存在）是唯一的。通过在简单根 α_i 处进行奇反射，从 $\mathfrak{b}(\lambda)$ 得到的博雷尔子代数为 $\mathfrak{b}(\lambda')$；其中 $\lambda' \in \mathrm{P}_{m\times n}$ 是由 λ 添加或移除编号为 i 的方格得到的。

不出所料，由于 Borel 子代数有不同的系列，$\mathfrak{osp}(2m|2m)$ 的奇反射描述稍微复杂一些。在这种情况下，按照以下规则（采用隐含约定 $\varepsilon' = \pm$ if $\lambda'_1 = n$），在 α_i 处进行奇反射会将 $\mathfrak{b}(\lambda,\ \varepsilon)$ 变为 $\mathfrak{b}(\lambda',\ \varepsilon')$：

- 如果 $\lambda_1 < n$ 且 $\varepsilon = +$，那么 $\varepsilon\prime = +$ 和 $\lambda\prime$ 由 λ 通过添加或移除编号为 i 的方框得到（注意，此时 $\alpha_{m+n} = 2\varepsilon_{m+n}$ 为偶数）。
- 如果 $\lambda_1 < n$ 且 $\varepsilon = -$，那么 $\varepsilon\prime = -$ 和 $\lambda\prime$ 由 λ 得到：对于 $i < m+n-1$，添加或移除编号为 i 的方框；对于 $i = m+n$，添加编号为 $m+n-1$ 的方框（注意，$\alpha_{m+n-1} = 2\varepsilon_{m+n}$ 为偶数）。
- 如果 $\lambda_1 = n$，那么 $\varepsilon = \pm$。
  - 若 $i < m+n-1$，则通过添加或移除一个编号为 i 的方框，从 λ 得到 $\varepsilon\prime = \pm$ 和 $\lambda\prime$。
  - 如果 $i = m+n-1$，那么通过从 λ 中移除编号为 $m+n-1$的方框，即可得到 $\varepsilon\prime = +$ 和 $\lambda\prime$。
  - 如果 $i = m+n$，那么从 λ 中移除编号为 $m+n-1$ 的方框后，即可得到 $\varepsilon\prime = -$ 和 $\lambda\prime$。

4. $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的魏尔群胚

在本节中，我们将详细描述 $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的 Cartan 图及 Weyl 群胚。我们首先描述 Cartan 图的底层图结构，然后列出 Serre 矩阵。最后，我们确定 Weyl 群胚的生成元之间的 Coxeter 型关系。

这些魏尔群胚也出现在 [AA17]，中，在那里它们是从 Nichols 代数的角度进行研究的。然而，我们的组合学建立在用分拆描述博雷尔子代数的图示方法之上。这直接反映了李超代数的结构理论，因此可以非常容易地在魏尔群胚与李超代数之间转换。我们这种描述的另一个优势是，可以非常容易地写出具体例子中的魏尔群胚。

4.1. Cartan 图的形状。

在第 3.1 至 3.3 节中，我们详细描述了具有固定偶部的 $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的（有限多个）博雷尔子代数。如上所述，这些子代数代表了所有博雷尔子代数的共轭类。因此，根据注 2.17，它们的 Cartan 图分裂为若干个彼此相同、相互之间没有边的子图。所以我们只需考虑其中一个子图，即对应于上述博雷尔子代数的子图。这些子图的数量等于 Weyl 群的阶，即对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$ 为 $m!n!$，对于 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 为 $2^{m+n}m!n!$，对于 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 为 $2^{m+n-1}m!n!$。

此外，根据注记 2.18，上述每个子图又会分裂成若干个相同的连通分量（边颜色经过置换后相同），这些分量之间没有边，对应于单根的各种可能重排。注意，命题 A.3 至 A.5 中单根的排序在奇反射下保持一致。因此，我们只描述对应于

这一排序的分量，并为方便起见也称其为 Cartan 图。由于 $m+n-1$ 对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$ 的单根数为 $m+n$，而 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和$\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的单根数为 $m+n-1$，由此可知，它们的 Cartan 图总共由 $(m)!n!\ 2^{m+n}m!$（分别为 $n!m+n!(\ 2^{m+n-1}n)!$、$m!$ $m+n!()!$）个这样的分量构成。根据3] Mus12，定理 3.1，偶部相同的任意两个 Borel 子代数都可以通过一系列奇反射连接起来，因此这些分量实际上也是连通的。

在第3.1节至第3.3节中，我们使用分拆来描述博雷尔子代数，并使用相应的交错排列来描述单根。还请回顾第3.4节，在这种描述中，奇反射对应于添加或移除单个方格。由这些观察，我们得到：

命题4.1。 $\mathfrak{sl}(m|n)$（分别地，$\mathfrak{gl}(n|n)$）、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$的 *Cartan* 图具有以下底层图：

1) 对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$（分别对于 $\mathfrak{gl}(n|n)$），顶点集合是能够放入一个 $m\times n$-矩形中的分拆集合$\mathcal{P}_{m\times n}$。边由$\{1,\dots,m+n-1\}$着色。如果 λ' 可以通过向 λ 添加一个编号为i的方格得到（编号方式采用第*3.4*节中的编号），则存在边 $\lambda \overset{i}{\longleftrightarrow} \lambda'$；如果无法向 λ添加编号为 i 的方格，则存在环 $\lambda \overset{i}{\longleftrightarrow} \lambda$。*2)* 对于 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$，顶点集合为$\mathcal{P}_{m\times n}$。边由$\{1,\dots,m+n\}$着色。如果 λ' 可以通过向 λ添加一个编号为 i的方格得到，则存在边 $\lambda \overset{i}{\longleftrightarrow} \lambda'$；如果无法向$\lambda$添加编号为 i 的方格，则存在环 $\lambda \overset{i}{\longleftrightarrow} \lambda$。特别地，每个顶点处都存在颜色为 $m+n$ 的环。

3) 对于 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，顶点集为

$$\{(\lambda,\varepsilon)\mid \lambda\in\mathcal{P}_{m\times n},\lambda_1<n,\varepsilon\in\{+,-\}\}\cup\{(\lambda,\pm)\mid\lambda\in\mathcal{P}_{m\times n},\lambda_1=n\}.$$

边以$\{1,\dots,m+n\}$着色，非环边如下：

- $(\lambda,\varepsilon)\overset{i}{\longleftrightarrow}(\lambda\varepsilon)$ 对于 $\lambda_1<n$ 和 $\lambda\prime$，它们由 λ 通过添加一个编号为 i 的方框得到，其中 $1\le i\le m+n-2$。
- $(\lambda,+)\overset{m+n-1}{\longleftrightarrow}(\lambda\pm)$ 对于 $\lambda_1=n-1$ 和 $\lambda\prime$，它们是通过在 λ 中添加编号为 $m+n-1$ 的方格得到的。
- $(\lambda,-)\overset{m+n}{\longleftrightarrow}(\lambda\pm)$ 对于 $\lambda_1=n-1$ 和 $\lambda\prime$，它们是通过在 λ 中添加编号为 $m+n-1$ 的方格得到的。
- $(\lambda,\pm)\overset{i}{\longleftrightarrow}(\lambda\pm)$ 对于 $\lambda_1=n$ 和 $\lambda\prime$，由 λ 添加一个编号为 i 的方框得到，其中 $1\le i\le m+n-2$。

因此，$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 的 Cartan 图的连通分支与 $\mathfrak{sl}(m|n)$ 的几乎相同，唯一的区别是对于 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$，每个顶点都额外有一个颜色为 $m+n$ 的环。具体的小例子见第4.5节

4.2. **Serre 矩阵**。

命题4.2. $\mathfrak{sl}(m|n)$（分别为 $\mathfrak{gl}(n|n)$）、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$的 *Serre* 矩阵具有以下形式：

1) 对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$（分别为 $\mathfrak{gl}(n|n)$），*Serre* 矩阵处处为 A_{m+n-1}。*2)* 对于 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$，*Serre* 矩阵处处为 B_{m+n}。*3)* 设 $\lambda\in\mathcal{P}_{m\times n}$ 和 $\varepsilon\in\{+,-\}$。那么，$\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的 *Cartan* 图中顶点 (λ,ε) 处的 *Serre* 矩阵为：

- C_{m+n} 若 $\lambda_1<n-1$ 且 $\varepsilon=+$,
- C_{m+n}（通过交换 C_{m+n} 的最后两行和最后两列得到）如果 $\lambda_1<n-1$ 且 $\varepsilon=-$,

- A_{m+n} 如果 $\lambda_1 = n-1$ 且 $\varepsilon = +$,
- A_{m+n} （通过交换 A_{m+n} 的最后两行和两列得到），如果 $\lambda_1 = n-1$ 和 $\varepsilon = -$,
- D_{m+n} 如果 $\lambda_2 = n$ 和 $\varepsilon = \pm$,
- 广义卡当矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & \cdots & 0 & -1 & -1 & 2 & \end{pmatrix}$ 如果 $\lambda_2 < \lambda_1 = n$ 和 $\varepsilon = \pm$。

证明。 在所有情况下，Serre 矩阵均根据定义 2.7 中的规则，由命题 A.3 至 A.5 所确定的嘉当数据得到。□

注 4.3。 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{sl}(m|n)$（或 $\mathfrak{gl}(n|n)$）、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 或 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，并设 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ 为 Cartan 图 $\mathcal{G}$的顶点 x 所对应的博雷尔子代数。注意， x 处的 Serre 矩阵是将 $\mathfrak{b}$ 视为 Dynkin 图时对应的广义卡当矩阵，参见 [Mus12, §3.43]中的列表。

4.3. 考克斯特关系。根据 [HS20, 定理 9.48]，Cartan 图 $\mathcal{G} = (I, X, r, A)$ 的 Weyl 群胚是一个考克斯特群胚，也就是说，生成元 s_i 仅受形如 $\mathrm{id}_x (s_i s_j)^{m(x)_{ij}} \mathrm{id}_x = \mathrm{id}_x$ 的关系约束，其中 $(m(x)_{ij})$ 是某些对称矩阵，且 $m(x)_{ii} = 1$（其中 i、$j \in I$ 和 $x \in X$，并隐含假设：除非 $m(x)_{ij} = \infty$，否则 $(r_i r_j)^{m(x)_{ij}}(x) = x$）。事实上， $m(x)_{ij} = |\Delta_x^{\mathrm{real}} \cap (\mathbb{N}_0 \alpha_i^x + \mathbb{N}_0 \alpha_j^x)|$。因此，要得到一个以生成元和关系表示的表示式，我们只需从 Cartan 图的所有顶点出发，确定 $s_i s_j$的阶。

命题 4.4。 对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$（分别对于 $\mathfrak{gl}(n|n)$），$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，$m(x)_{ij}$ 由 ***Serre*** 矩阵按照与半单李代数相同的规则确定。具体而言，

$$\begin{aligned} A(x)_{ij} A(x)_{ji} = 0 &\implies m(x)_{ij} = 2, \\ A(x)_{ij} A(x)_{ji} = 1 &\implies m(x)_{ij} = 3, \\ A(x)_{ij} A(x)_{ji} = 2 &\implies m(x)_{ij} = 4. \end{aligned}$$

证明。 由命题4.2可知，对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$（分别对于 $\mathfrak{gl}(n|n)$）以及 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$，我们的 Cartan 图中每个顶点处都有相同的 Serre 矩阵。由于所有顶点处的 Serre 矩阵都相同，对应于 Weyl 群胚生成元的线性映射 $s_i \colon \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ cor- 与顶点无关。由此可得 $(s_i s_j)^{m(x)_{ij}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^*}$，且 $m(x)_{ij}$ 是满足这一条件的最小数。因此，我们只需检查 Cartan 图中的诱导路径是否终止于起始顶点。根据分拆的显式描述，这一点很容易得出。

对于 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，情况稍微繁琐一些。我们需要计算两个单根的线性张成空间与 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的根集的交集。根据命题 A.5 中对单根的明确描述，这相当直接。我们只讨论有意思的情形，即当 $i,\ j \in \{n+m-2,\ n+m-1,\ n+m\}$ 时，因为其余情形类似（且更简单）。

- 对于 $x = (\lambda, +)$ 且 $\lambda_1 \leq m-2$ 的情况，最后三个单根为 $\varepsilon_i - \varepsilon_{m+n-1}, \varepsilon_{m+n-1} - \varepsilon_{m+n}$, $2\varepsilon_{m+n}$，其中 i 或为 m，或为 $m+n-2$。因此我们得到所声称的 $m(x)_{ij}$。

- 对于 $x = (\lambda, +)$，其中 $\lambda_1 = m-1$，最后三个单根是 $\varepsilon_i - \varepsilon_m, \varepsilon_m - \varepsilon_{m+n}, 2\varepsilon_{m+n}$，其中 i 要么是 $m-1$，要么是 $m+n-1$。由于 $2\varepsilon_m$ 不是 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的根，我们得到 A 型关系。

• 对于 $x = (\lambda, -)$，我们可以应用上述相同的论证，因为在这种情况下，只有最后两个单根互换。
• 对于 $x = (\lambda, \pm)$ 且 $\lambda_1 = m > \lambda_2$，对应的最后三个单根为 $\varepsilon_i - \varepsilon_{m+n}, \varepsilon_{m+n} - \varepsilon_m$, $\varepsilon_{m+n} + \varepsilon_m$，其中 i 要么是 $m-1$，要么是$m+n-1$。由于 $2\varepsilon_{m+n}$ 是一个根，我们直接得到 $m(x)_{ij} = 3$。
• 最后，假设 $x = (\lambda, \pm)$，其中 $\lambda_1 = \lambda_2 = m$。此时，单根为 $\varepsilon_i - \varepsilon_{m-1}$、$\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m$、$\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m$，其中 i 或者是 $m+n$，或者是$m-2$。现在，$2\varepsilon_{m-1}$ 不是 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的根，因此，$\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m$ 与 $\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m$ 的线性张成空间仅包含两个根。此外，$\varepsilon_i \pm \varepsilon_m$确实是根，因此我们得到了所声称的 D 型现象。□

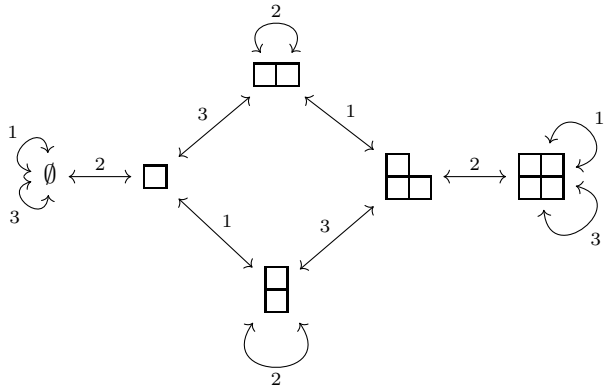
4.4. **自同构**。对于 $\mathfrak{sl}(m|n)$（分别地，$\mathfrak{gl}(n|n)$），$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，命题 2.15 给出了 Weyl 群胚中一个对象的自同构群的以下显式描述。

推论 4.5。若 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{sl}(m|n)$（分别为 $\mathfrak{gl}(n|n)$），$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 或 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，且 $\mathfrak{g}$ 的 *Cartan* 图的任意顶点为 x，则 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{W}}(x)$ 同构于 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的 *Weyl* 群。

证明。我们只需证明任意偶根都是主根，这可由命题 A.3 至 A.5 中的显式描述轻易推出。□

4.5. **一些小例子**。我们将在几个例子中具体描述 $\mathfrak{sl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的 Weyl 群胚。

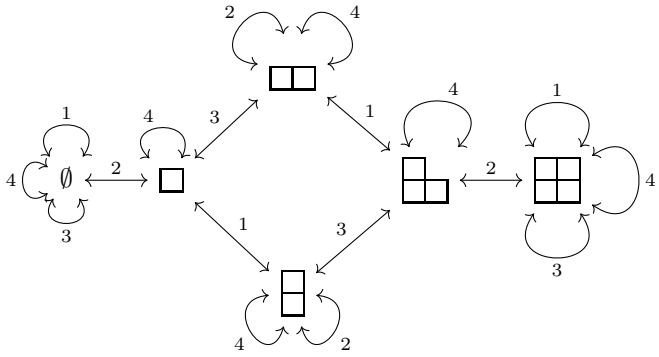
例4.6. 余伴随李超代数 $\mathfrak{gl}(2|2)$ 有三对 Chevalley 生成元，因此相应的 Weyl 群胚有三个生成元 s_1、s_2和 s_3。根据第 3.1 节，我们可以用包含在一个 2×2-矩形内的分拆来标记 Borel 子代数（具有固定的偶部），而根据命题4.2，Serre 矩阵在所有位置均为 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。由第3.4节中对奇反射的描述可知，W 的生成元可以绘制成如下图示。



根据命题 4.4，唯一的关系就是熟知的辫群关系 $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$, $s_2s_3s_2 = s_3s_2s_3$ 和 $s_1s_3 = s_3s_1$（对于 Cartan 图的所有顶点）。

例 4.7。对于李超代数 $\mathfrak{osp}(5|4)$，其底层图与例 4.6 中的相同，但其嘉当子代数为 4 维，而不是 3 维。

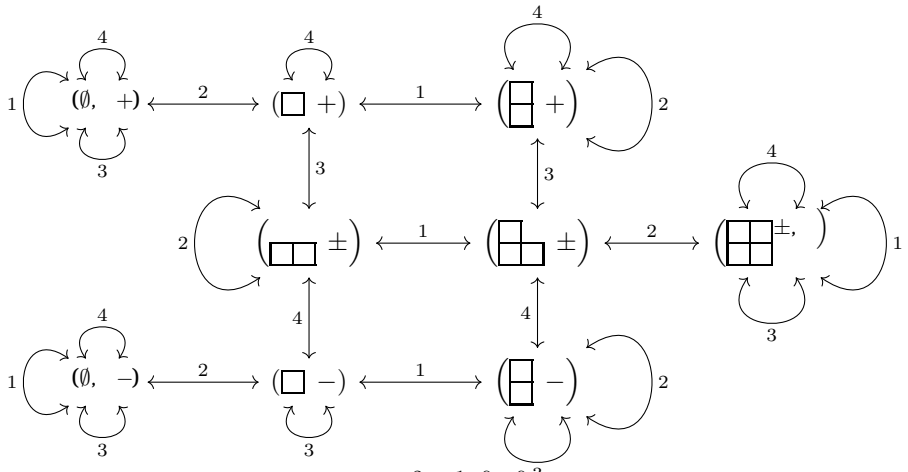
因此，每个顶点都会额外得到一个索引为 4 的环。



在这种情况下，Serre 矩阵处处为 $B_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。生成元满足通常的“类型 B 辫群关系”，即例 4.6 中的关系，以及 $s_3s_4s_3s_4 = s_4s_3s_4s_3$ 和 $s_is_4 = s_4s_i$（适用于 $i \in \{1,2\}$）。

例 4.6 和例 4.7 的共同点是，所有顶点处的 Serre 矩阵都相同。然而，对于 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，情况并非如此：

例 4.8。 $\mathfrak{osp}(4|4)$ 的 Cartan 图为



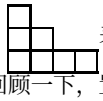
左上角的 Serre 矩阵类型为 $C_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$。第一行中的另外两个 Serre 矩阵类型为 $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。底行的 Serre 矩阵与第一行相同，只是将第三行和第四行以及第三列和第四列互换，即左下角为 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，另外两个为 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。在 $\left(\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}, \pm\right)$ 处，我们有 $D_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。其余两个 Serre 矩阵由 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 给出，特别是它们不属于 Dynkin 类型。

W 的生成元满足由 Serre 矩阵规定的辫群关系（包括类型为 $C = B$ 的关系）。

附录 A. 嘉当数据的计算

在本附录中，我们明确描述 $\mathfrak{sl}(m|n)$、 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 和 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的单根与嘉当数据。为此，使用置换而非分拆进行处理会更加方便，因此我们首先需要建立一些组合学基础，以便在这两个概念之间转换。

A.1. **组合学：交错排列与分拆**。 令 $\mathrm{P}_{m\times n}$ 为其杨图可容纳于一个 $m \times n$矩形内的分拆集合。我们采用一种略显特殊的约定，即最长的一行位于最底部，因此，例如，该图示.....

gram  表示分拆 $\lambda = (4,\ 2,\ 1)$。

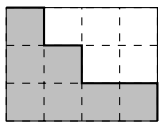
回顾一下，置换 $\sigma \in S_{m+n}$ 是一个（$m,\ n$）-交错排列，当且仅当对所有满足 $i,\ j \leq m$ 或 $i,\ j > m$ 的配对 $i < j$，都有 $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$。我们用 $\mathrm{Shff}(m,\ n)$ 表示（$m,\ n$）-交错排列的集合。等价地，$\mathrm{Shff}(m,\ n)$ 可定义为抛物商 $(S_m \times S_n)\backslash S_{m+n}$ 的最短陪集代表元集合。注意，若 σ 是一个（$m,\ n$）-交错排列，则要么 $\sigma(m+n) = m$，要么 $\sigma(m+n) = m+n$。

我们将如下把交错排列与分拆对应起来：

引理 A.1. m、 $n)$ 的集合与落在 $m \times n$矩形内的杨图（分拆）之间存在如下双射：对于一个$(m$、 $n)$-洗牌 σ，我们在 $m \times n$矩形内画一条路径，其中在第 i 步，如果 $\sigma(i) \leq m$，则向下走；如果 $\sigma(i) > m$，则向右走。然后，分拆 λ 由路径下方的方格组成。

最好通过一个例子来说明这种双射。

例 A.2。 设 $m = 3$、 $n = 4$ 和 $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,4\,1\,5\,2\,6\,7\,3) \in \mathrm{Shff}(3,\ 4)$。根据引理 A.1 σ 编码了边界路径 $rdrdrrd$ （其中 r 表示“向右”，而 d 表示“向下”）：



(A.1)

对应于 σ 的置换是 $\lambda = (4,\ 2,\ 1)$。

A.2. $\mathfrak{sl}$ **的嘉当数据**$(m|n)$。

命题 A.3. 设 $\sigma \in \mathrm{Shff}(m, n)$。与 $\mathfrak{sl}(m|n)$ 的博雷尔子代数 $\mathfrak{b}(\sigma)$ 对应的单根为

$$\Pi(\sigma) = \{\alpha_i = \varepsilon_{\sigma(i)} - \varepsilon_{\sigma(i+1)} \mid 1 \leq i \leq m+n-1\}.$$

对于相应的 ***Cartan*** 数据(B, τ)，当 $\sigma(i)\ \sigma(i+1) \leq m$ 或 $\sigma(i)\ \sigma(i+1) > m$ 时，$\tau_i = \bar{0}$；否则为 $\tau_i = 1$。矩阵 B 的第 i 行为

$$(b_{i,1}, \ldots, b_{i,m+n-1}) = \begin{cases} (0, \ldots, 0, -1, 2, -1, 0, \ldots, 0) & \text{if } |e_i| = \bar{0}, \\ (0, \ldots, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots, 0) & \text{if } |e_i| = \bar{1}, \end{cases}$$

其中，元素2 （相应地，“中间”的0）位于第 i 个位置。

证明。 </style}单根列于 [Mus12，引理 3.4.3]。由于初等矩阵 E_{rs} 的权为 $\varepsilon_r - \varepsilon_s$，我们可以取

$$e_i = E_{\sigma(i),\sigma(i+1)}, \qquad f_i = E_{\sigma(i+1),\sigma(i)}$$

作为 Chevalley 生成元。显然， e_i （以及 f_i）为偶当且仅当 σ（i）和 σ（$i+1$）要么都为 $\leq m$，要么都为 $\geq m+1$。因此 $h_i = [e_i, f_i] = E_{\sigma(i),\,\sigma(i)} - (-1)^{|e_i|}E_{\sigma(i+1),\,\sigma(i+1)}$，于是

$$\alpha_j(h_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq i, i\pm 1, \\ 2 & \text{if } j = i, |e_i| = \bar{0}, \\ 0 & \text{if } j = i, |e_i| = \bar{1}, \\ -1 & \text{if } j = i-1, \\ -(-1)^{\tau_i} & \text{if } j = i+1. \end{cases}$$

这表明矩阵 B 具有所声称的形式。 □

A.3. $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$**的嘉当数据**。

命题 A.4. 设 $\sigma \in \mathrm{Shff}(m,n)$。 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ 的博雷尔子代数$\mathfrak{b}(\sigma)$ 的单根为

$$\Pi(\sigma) = \{\alpha_i = \varepsilon_{\sigma(i)} - \varepsilon_{\sigma(i+1)} \mid 1 \leq i \leq m+n-1\} \cup \{\alpha_{m+n} = \varepsilon_{\sigma(m+n)}\}.$$

相应的 *Cartan* 数据 (B,τ) 可描述如下。对于 $1 \leq i \leq m+n-1$，若 $\sigma(i)\ \sigma(i+1) \leq m$ 或 $\sigma(i)\ \sigma(i+1) > m$，则有 $\tau_i = 0$；且若 $\sigma(m+n) \leq m$，则有 $\tau_{m+n} = 0$；若 $\sigma(m+n) > m$，则有 $\tau_{m+n} = 1$。矩阵 B 的第 i 行为

$$(b_{i,1}, \ldots, b_{i,m+n-1}) = \begin{cases} (0,\ldots,0,-1,2,-1,0,\ldots,0) & \text{if } i < m+n, |e_i| = \bar{0}, \\ (0,\ldots,0,-1,0,1,0,\ldots,0) & \text{if } i < m+n, |e_i| = \bar{1}, \\ (0,\ldots,0,-1,1) & \text{if } i = m+n, \end{cases}$$

其中，数值 2 （“中间”的 0）位于第 i 个位置。

证明。 单根列于 [Mus12, 引理 3.4.3]。根据根空间的显式描述（例如参见 [Mus12, 习题 2.7.4]），可知 Chevalley 生成元的一种可能选取方式（对于 $1 \leq i \leq m+n-1$）为

$$\begin{aligned} e_i &= \begin{cases} E_{\sigma(i),\sigma(i+1)} + E_{-\sigma(i+1),-\sigma(i)} & \text{if } \sigma(i) \leq m, \sigma(i+1) > m, \\ E_{\sigma(i),\sigma(i+1)} - E_{-\sigma(i+1),-\sigma(i)} & \text{otherwise,} \end{cases} \\ e_{m+n} &= E_{\sigma(m+n),0} - E_{0,-\sigma(m+n)} \\ f_i &= \begin{cases} E_{\sigma(i+1),\sigma(i)} + E_{-\sigma(i),-\sigma(i+1)} & \text{if } \sigma(i) > m, \sigma(i+1) \leq m, \\ E_{\sigma(i+1),\sigma(i)} - E_{-\sigma(i),-\sigma(i+1)} & \text{otherwise,} \end{cases} \\ f_{m+n} &= \begin{cases} E_{0,m} - E_{-m,0} & \text{if } \sigma(m+n) = m, \\ E_{0,m+n} + E_{-(m+n),0} & \text{if } \sigma(m+n) = m+n. \end{cases} \end{aligned}$$

因此， e_i （从而 f_i）为偶，当且仅当 σ（i）和 σ（$i+1$）要么都为 $\leq m$，要么都为 $\geq m+1$。由此可得

$$h_i = [e_i, f_i] = E_{\sigma(i),\sigma(i)} - E_{-\sigma(i),-\sigma(i)} - (-1)^{|e_i|}(E_{\sigma(i+1),\sigma(i+1)} - E_{-\sigma(i+1),-\sigma(i+1)})$$

对于 $1 \leq i \leq m+n-1$，且与 $\sigma(m+n)$ 的值无关

$$h_{m+n} = E_{\sigma(m+n),\sigma(m+n)} - E_{-\sigma(m+n),-\sigma(m+n)}.$$

因此，矩阵 B 的各项为

$$b_{ij}=\alpha_j(h_i)=\begin{cases}0 & \text{if } j\neq i,i\pm1,\\ 2 & \text{if } j=i<m+n,\tau_i=\bar{0},\\ 0 & \text{if } j=i<m+n,\tau_i=\bar{1},\\ 1 & \text{if } j=i=m+n,\\ -1 & \text{if } j=i-1,\\ -(-1)^{\tau_i} & \text{if } j=i+1,\end{cases}$$

因此， B 具有所声称的形式。 □

A.4. $\mathfrak{osp}$ **的嘉当数据**$(2m|2n)$**.**

命题 A.5. 设 $\sigma\in$ Shff(m,n) 和 $\varepsilon\in\{+,-\}$。 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 的 ***Borel*** 子代数 $\mathfrak{b}(\sigma,\varepsilon)$ 的单根和嘉当数据(B,τ) 可描述如下：

1) 对于 $\sigma(m+n)=m+n$ 和 $\mathfrak{b}(\sigma,+)$，简单根为

$$\Pi(\sigma,+)=\{\alpha_i=\varepsilon_{\sigma(i)-\sigma(i+1)}\mid 1\le i\le m+n-1\}\cup\{\alpha_{m+n}=2\varepsilon_{m+n}\}.$$

e_i 和 f_i 的 ***Chevalley*** 生成元对于 $1\le i\le m+n-1$ 是偶的，当且仅当 $\sigma(i)\ \sigma(i+1)\le m$ 或 $\sigma(i)\ \sigma(i+1)>m$成立，而 e_{m+n}和 f_{m+n}是偶的。 i行的 B 为

$$(b_{i,1},\dots,b_{i,m+n})=\begin{cases}(0,\dots,0,-1,2,-1,0,\dots,0) & \textit{if } i\neq m+n-1,|e_i|=\bar{0},\\ (0,\dots,0,-1,0,1,0,\dots,0) & \textit{if } i\neq m+n-1,|e_i|=\bar{1},\\ (0,\dots,0,-1,2,-2) & \textit{if } i=m+n-1,|e_i|=\bar{0},\\ (0,\dots,0,-1,0,2) & \textit{if } i=m+n-1,|e_i|=\bar{1}.\end{cases}$$

同样，第 i 个位置的项为 2 （相应地，“中间”项为 0）。

2）对于 $\sigma(m+n)=m+n$ 和 $\mathfrak{b}(\sigma,-)$，单根 $\Pi(\sigma,-)$ 由 $\Pi(\sigma,+)$ 得到：将每个 ε_m 替换为 $\varepsilon_{-m}=-\varepsilon_m$，并交换第 $m+n-1$ 个与第 $m+n$ 个单根。除矩阵 B 的最后两行和两列互换外，***Cartan*** 数据与上述相同。

3）对于 $\sigma(m+n)=m$ 和 $\mathfrak{b}(\sigma,\pm)$，单根为

$$\Pi(\sigma,\pm)=\{\alpha_i=\varepsilon_{\sigma(i)-\sigma(i+1)}\mid 1\le i\le m+n-1\}\cup\{\alpha_{m+n}=\varepsilon_{\sigma(m+n-1)}+\varepsilon_{\sigma(m+n)}\}.$$

当且仅当以下两种情况之一成立时， $1\le i\le m+n-1$ 的 ***Chevalley*** 生成元 e_i 和 f_i 为偶： $\sigma(i)\ \sigma(i+1)\le m$，或 $\sigma(i)\ \sigma(i+1)>m$；而 e_{m+n}和f_{m+n} 的奇偶性与 e_{m+n-1}相同。矩阵 B 的第 i 行 $(b_{i,1},\dots,b_{i,m+n})$ 由下表给出：

	$\tau_i=\bar{0}$	$\tau_i=\bar{1}$
$i<m+n-2$	$(0,\dots,0,-1,2,-1,0,\dots,0)$	$(0,\dots,0,-1,0,1,0,\dots,0)$
$i=m+n-2$	$(0,\dots,0,-1,2,-1,-1)$	$(0,\dots,0,-1,0,1,1)$
$i=m+n-1$	$(0,\dots,0,-1,2,0)$	$(0,\dots,0,-1,0,2)$
$i=m+n$	$(0,\dots,0,-1,0,2)$	$(0,\dots,0,-1,2,0)$

证明。 单根列于 [Mus12，引理 3.4.3]。与这些单根对应的 Chevalley 生成元 e_i、 f_i 和 $h_i=[e_i,f_i]$ 可选为：

- 对于 $\alpha_i = \varepsilon_{\sigma(i)} - \varepsilon_{\sigma(i+1)}$,

$$e_i = \begin{cases} E_{\sigma(i),\sigma(i+1)} + E_{-\sigma(i+1),-\sigma(i)} & \text{if } \sigma(i) \le m, \sigma(i+1) > m, \\ E_{\sigma(i),\sigma(i+1)} - E_{-\sigma(i+1),-\sigma(i)} & \text{otherwise,} \end{cases}$$
$$f_i = \begin{cases} E_{\sigma(i+1),\sigma(i)} + E_{-\sigma(i),-\sigma(i+1)} & \text{if } \sigma(i) > m, \sigma(i+1) \le m, \\ E_{\sigma(i+1),\sigma(i)} - E_{-\sigma(i),-\sigma(i+1)} & \text{otherwise,} \end{cases}$$
$$h_i = E_{\sigma(i),\sigma(i)} - E_{-\sigma(i),-\sigma(i)} - (-1)^{|e_i|}(E_{\sigma(i+1),\sigma(i+1)} - E_{-\sigma(i+1),-\sigma(i+1)}).$$

- 当 $\alpha_i = \varepsilon_{\sigma(i)} + \varepsilon_m$,

$$e_i = E_{\sigma(i),-m} - E_{m,-\sigma(i)},$$
$$f_i = \begin{cases} E_{-m,\sigma(i)} - E_{-\sigma(i),m} & \text{if } \sigma(i) \le m, \\ E_{-m,\sigma(i)} + E_{-\sigma(i),m} & \text{if } \sigma(i) > m, \end{cases}$$
$$h_i = E_{\sigma(i),\sigma(i)} - E_{-\sigma(i),-\sigma(i)} + (-1)^{|e_i|}(E_{m,m} - E_{-m,-m}).$$

- 对于 $\alpha_i = -\varepsilon_m - \varepsilon_{\sigma(i+1)}$,

$$e_i = \begin{cases} E_{-m,\sigma(i+1)} - E_{-\sigma(i+1),m} & \text{if } \sigma(i+1) \le m, \\ E_{-m,\sigma(i+1)} + E_{-\sigma(i+1),m} & \text{if } \sigma(i+1) > m, \end{cases}$$
$$f_i = E_{\sigma(i+1),-m} - E_{m,-\sigma(i+1)},$$
$$h_i = E_{-m,-m} - E_{m,m} - (-1)^{|e_i|}(E_{\sigma(i+1),\sigma(i+1)} - E_{-\sigma(i+1),-\sigma(i+1)}).$$

- 对于 $\alpha_i = 2\varepsilon_{m+n}$,

$$e_i = E_{m+n,-(m+n)}, \qquad f_i = E_{-(m+n),m+n},$$
$$h_i = [e_i, f_i] = E_{m+n,m+n} - E_{-(m+n),-(m+n)}.$$

现在我们将 h_i 代入 α_j。为此，我们必须分别考虑三类 Borel 子代数。

情形 I: $\sigma(m+n) = m+n, +$。那么

$$\alpha_j(h_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \ne i, i \pm 1, \\ 2 & \text{if } j = i, \tau_i = \bar{0}, \\ 0 & \text{if } j = i, \tau_i = \bar{1}, \\ -1 & \text{if } j = i-1, \\ -(-1)^{\tau_i} & \text{if } j = i+1 < m+n, \\ -2(-1)^{\tau_i} & \text{if } j = i+1 = m+n, \end{cases}$$

由此可知，矩阵 B 具有所声称的形式。
情形 II: $\sigma(m+n) = m+n, -$。在此情形下，令 $i_0 = \sigma^{-1}(m)$。单根与前一情形相同，但 $\varepsilon_{\sigma(i_0-1)} - \varepsilon_m$ 和 $\varepsilon_m - \varepsilon_{\sigma(i_0+1)}$ 分别替换为 $\varepsilon_{\sigma(i_0-1)} + \varepsilon_m$ 和 $-\varepsilon_m - \varepsilon_{\sigma(i_0+1)}$，且编号有所改变。$\alpha_j(h_i)$ 的取值与前一情形相同，但我们必须单独检查涉及 i_0 的情形。尽管如此，由此可知，矩阵B 与情形 I 中相同，但须交换最后两行和两列，以对应单根重新编号的情况。

情况 III： $\sigma(m+n) = m_\circ$ 与前面的情况类似，我们得到

$$\alpha_j(h_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq i, i \pm 1, i \pm 2, \\ 2 & \text{if } j = i, \tau_i = \bar{0}, \\ 0 & \text{if } j = i, \tau_i = \bar{1}, \\ -1 & \text{if } j = i-1, i < m+n, \\ 1-(-1)^{\tau_i} & \text{if } j = i-1, i = m+n, \\ 0 & \text{if } j = i-2, i < m+n, \\ -1 & \text{if } j = i-2, i = m+n, \\ -(-1)^{\tau_i} & \text{if } j = i+1 < m+n, \\ 1+(-1)^{\tau_i} & \text{if } j = i+1 = m+n, \\ 0 & \text{if } j = i+2 < m+n, \\ -(-1)^{\tau_i} & \text{if } j = i+2 = m+n, \end{cases}$$

正如所声称的。 □

参考文献

[AA17] N. Andruskiewitsch 和 I. Angiono。“关于对角型有限维 Nichols 代数”。载于：《数学科学通报》7（2017）。[CW12] S.-J. Cheng 和 W. Wang。《李超代数的对偶性与表示》。《数学研究生教程》144。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012。[GHS22] M. Gorelik、V. Hinich 和 V. Serganova。《根群胚及相关李超代数》。预印本。2022。arXiv： 2209.06253 [math.RT]。[HS07] C. Hoyt 和 V. Serganova。“有限增长的一般 Kac–Moody 超代数的分类”。载于：《代数通讯》35.3（2007）。[HS20] I. Heckenberger 和 H.-J. Schneider。《*Hopf* 代数与根系》。《数学调查与专著》247。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2020。[HY08] I. Heckenberger 和 H. Yamane。“Coxeter 群、根系和松本定理的推广”。载于：《数学杂志》259.2（2008）。[Kac77] V. G. Kac。“李超代数”。载于：《数学进展》26（1977）。[Mus12] I. M. Musson。《李超代数与包络代数》。《数学研究生教程》131。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012。[PS89] I. B. Penkov 和 V. Serganova。“经典复李超群 G/P 的上同调与某些非典型 G-模的特征”。载于：《傅里叶研究所年刊》39.4（1989）。[Ser11] V. Serganova。“Kac–Moody 超代数与可积性”。载于：《无限维李理论的发展与趋势》。K.-H. Neeb 和 A. Pianzola 编。《数学进展》288。Birkhäuser，2011，第169–218页。[SV11] A. N. Sergeev 和 P. Veselov。“基本经典李超代数的 Grothendieck 环”。载于：《数学年刊》173.2（2011）。

L.B.：德国波恩马克斯·普朗克数学研究所 J.N.：德国波恩马克斯·普朗克数学研究所