arXiv:2305.04767v1 [cs.CC] 8 May 2023

依靠 CFI 图证明 #P-困难性*

Radu Curticapean

哥本哈根信息技术大学，丹麦

摘要

给定图 H 和 G（可能带有顶点颜色），同态 是一个函数 $f\colon V(H) \to V(G)$，它保持颜色和边。许多有趣的计数问题都是来自固定图 H的同态计数的有限线性组合$p(\cdot) = \sum_H \alpha_H \hom(H, \cdot)$。已知，在标准复杂性假设下，如果存在一个树宽较大的图 S，满足 $\alpha_S \neq 0$，那么求值这类固定线性组合是困难的。这可以分两步证明：第一步，证明对于树宽较大的多彩图（即颜色一一对应的图） S，问题 $\hom(S, \cdot)$ 是困难的。第二步，证明可以将从多彩图 S 到图 G 的同态计数，归约为求值包含 S的无着色版本 S° 的同态计数有限线性组合。第二步可以通过容斥法在 $2^{|E(S)|}\text{poly}(n, s)$ 时间内完成，其中 n 是G 的大小， s 是线性组合中图的最大顶点数。当 S 和 s 相较于 n较小时，这一运行时间可以接受；以往研究考虑的正是这种情形。

在本文中，我们证明第二步甚至可以在 $4^{\Delta(S)}\text{poly}(n, s)$ 时间内完成，其中 $\Delta(S)$ 是 S 的最大度。我们的归约基于与 Cai–Fürer–Immerman 图的图乘积，这是一项很可能具有独立研究价值的新技术。如果 $\Delta(S)$ 为常数，且 s 关于 n 是多项式级的，那么即使 S 是输入的一部分，该技术也能将 $\hom(S, \cdot)$ 多项式时间归约为涉及 S° 的同态计数的线性组合。在某些条件下，只需目标线性组合中包含 S° 的一个超图 T 即可；这很有用，因为可以通过最大度为 3 的子图见证较大的树宽。

借助这一新归约，我们为一些问题得到了 #P 困难性结果。此前，这些问题只能在参数化复杂性假设下进行研究，而这些假设先验上强于“经典”假设。对于满足自然的多项式时间可枚举性条件的固定图类 $\mathcal{H}$，这包括 #Hom($\mathcal{H}$)、#Sub($\mathcal{H}$) 和 #Ind($\mathcal{H}$) 这些问题：给定一个图 $H \in \mathcal{H}$ 和一个一般图 G，分别计数从 H 到 G 的同态，以及 H 在 G 中的子图副本和诱导子图副本。总的来说，这一新归约为将参数化计数复杂性中的技术迁移到“经典”的非参数化计数复杂性中开辟了可能性。

*由欧盟（欧洲研究委员会，CountHom，101077083）资助。但文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行局的观点和意见。欧盟和资助机构均不对其承担责任。作者同时也是 BARC 的成员，该机构由 VILLUM 基金会资助（资助编号 16582）。

1 引言

在本文中，图 G 是无向的，且可以是顶点着色的，即可以附带一个着色c： $V(G) \to C$，其中集合 C 由上下文指定。若两个图 G 和 G'之间存在保色同构，我们记作 $G \simeq G'$。无色图可以视为只有一种颜色的带色图。

图参数是一个函数 p，它将图映射到 $\mathbb{Q}$，并且对于同构图 $G \simeq G'$，满足 $p(G) = p(G')$。图参数在数乘和逐点加法下构成一个向量空间，其典范基函数由针对固定无标号图 H 的图参数 e_H 给出；这些函数满足 $e_H(G) = 1$（当 $G \simeq H$ 时），否则满足 $e_H(G) = 0$。注意，对于 e_H，输入中只有 G 是图的一部分。图参数的其他例子包括这样的函数：将图 G 映射到其最大度、最大团大小、完美匹配数，或者映射到 Tutte 多项式 $T(G; x, y)$ 在固定 $x, y \in \mathbb{Q}$ 时的取值；该取值是对 G 的子图进行加权求和。在本文中，我们关注那些可直观解释为对图中对象进行加权计数的图参数，例如最后两个例子。

1.1 图模体参数

许多有趣的计数型图参数都是同态计数或其有限线性组合。从图 H 到图 G 的同态是一个函数 $f\colon V(H) \to V(G)$，满足：若 $uv \in E(H)$，则 $f(u)f(v) \in E(G)$。如果 H和 G带有颜色，那么对于所有 $v \in V(H)$，v和 $f(v)$的颜色必须一致。对于任意固定的图 H，令 $\hom(H, \cdot)$ 表示这样一个图参数：它将图 G映射为从 H 到 G的同态数量 $\hom(H, G)$。与上文函数 e_H 的定义一样，只有 G 是输入的一部分。

函数 $\hom(H, \cdot)$ 已知是线性无关的 [33, 命题 5.43]：如果全零图参数可以表示为这些函数的有限线性组合，且图两两非同构，那么这个线性组合必定是平凡的。因此，函数 $\hom(H, \cdot)$ 的任意两个不同有限线性组合都不会产生相同的图参数。由此得到以下定义：

定义 1（见 [14]）。图模体参数 p 是一个图参数

$$p(\cdot) = \sum_{H \in \mathcal{H}} \alpha_H \hom(H, \cdot) \tag{1}$$

适用于有限个两两非同构图 $\mathcal{H}$ 及其系数 $\alpha_H \in \mathbb{Q}$（对应 $H \in \mathcal{H}$）。我们将式 (1) 的右侧称为 p的同态展开。给定一个图 H，若 $H \in \mathcal{H}$ 且 $\alpha_H \neq 0$，则记作 $H \lhd p$。

除了固定图 H对应的函数 $\hom(H, \cdot)$ 外，图模体参数的其他例子还有函数 $\mathrm{sub}(H, \cdot)$，它们用于计数与固定图 H同构的子图：

事实 2. 对于任意图 H，函数 $\mathrm{sub}(H, \cdot)$ 是一个图模体参数，见 [33, (5.18)]。我们有$F \lhd \mathrm{sub}(H, \cdot)$ 当且仅当 F 是 H的商图，也就是说，如果通过反复合并同一颜色的顶点，可以从 H 得到 F。$\mathrm{sub}(H, \cdot)$ 的同态展开中系数 α_F的符号等于 $(-1)^{|V(H)|-|V(F)|}$。

对于计算与 H 同构的诱导子图数量的函数 $\mathrm{ind}(H, \cdot)$，也有类似的结论。

事实 3. 对于任意图 H，函数 $\mathrm{ind}(H, \cdot)$ 是一个图模体参数，见 [33, (5.20)]。此外，任意满足 $|V(F)| \leq |V(H)|$ 的图 $F \lhd \mathrm{ind}(H, \cdot)$ 都有此性质。满足 $F \lhd \mathrm{ind}(H, \cdot)$ 和 $|V(F)| = |V(H)|$ 的图 F，恰好是通过向 H 添加边得到的图。

许多与小型模式相关的计数问题都可以自然地表示为（诱导）子图计数的线性组合，因此，事实 2 和事实 3 表明，它们都是图模体参数。例如，诱导出某个固定有限图集 $\mathcal{P}$ [40, 39, 29, 28, 30] 中某个图的顶点子集的数量，或者仅对具有固定边数的子图求和的 Tutte 多项式的变体 [41]。

.

1.2 已知的复杂性单调性

任何固定的图模体参数 p 都可以在多项式时间内对 n 个顶点的输入图求值：首先，我们可以通过暴力枚举，在时间 $O(n^s)$ 内计算所有图 $H \triangleleft p$ 的 $\hom(H, G)$，其中 s 是图 $H \triangleleft p$ 中$|V(H)|$ 的最大值；然后，我们可以通过有限次算术运算计算所需的有限线性组合。[1] 偏离多项式时间可解性之后，我们可能会希望确定多项式运行时间中的精确指数，或研究一个更为"粗粒度"的问题：给定某个指标集 I 对应的图模体参数无限族 $\{p_i\}_{i\in I}$，我们能否在多项式时间内对输入 $i \in I$ 和 G 求值 $p_i(G)$? 这个问题涵盖了诸如固定图类 $\mathcal{H}$ 的 $\#\mathrm{Sub}(\mathcal{H})$ 这类研究充分的计数问题；该问题要求统计一般图 G 中输入图 $H \in \mathcal{H}$ 的出现次数。

先前的研究提出了一种通过同态展开 [14] 研究图模体参数复杂度的方法。这种方法被称为复杂度单调性框架，并成功应用于各种计数问题 [38, 40, 41, 39, 22, 36, 14, 4]。该框架利用了一个显著事实：计算任意固定的同态计数线性组合，其渐近难度与计算其中最难的项一样高。该结论中的上界显然成立，而下界则来自一项归约：它借助针对 $p(\cdot)$ 的预言机，为图 $S \triangleleft p$ 和 G 计算 $\hom(S, G)$。该归约的运行时间关于 $|V(G)|$ 以及图 $H \triangleleft p$ 的最大规模为多项式，但关于 S 的规模为指数级。

<*escape*>**定理 4** （变体见 [14, 8]）。 存在一个用于解决以下问题的算法：给定输入，输出$\hom(S, G)$ 的值。<*/escape*>

- 以数字 $s \in \mathbb{N}$、图 S 和 G 作为输入，以及
- 图模体参数 p 的预言机访问，具有 最大值$_{H\triangleleft p}|V(H)| \leq s$ 和 $S \triangleleft p$。

算法的运行时间上界为 $2^{|E(S)|} \cdot \mathrm{poly}(|V(G)|, s)$，且预言机仅针对具有 $\leq s \cdot |V(G)|$ 个顶点的图调用。

我们注意到，图模式参数的其他自然基并不具备如此有利的性质。例如，计数 k-团是"困难的" [34, 9], ，但所有 k-顶点图的诱导子图计数之和可以轻易求值。

对单个图模体参数的推论

定理 4 将关于图模体参数 p 的复杂性理论问题归约为关于图 $H \triangleleft p$ 的同态计数 $\hom(H, \cdot)$ 的问题。在各种计算模型 [31] 以及复杂性理论假设下，这些问题都已得到相当充分的研究；这类假设包括计数指数时间假设 #ETH [27, 20], ，该假设认为，对含有 n 个变量的布尔公式计数满足赋值需要 $\exp(\Omega(n))$ 时间。在这一假设下，已知同态计数的复杂度基本由树宽 树宽 $\mathrm{tw}(H)$ 决定。树宽是一种图宽度度量，与满足以下条件的最大 $r \in \mathbb{N}$ 多项式相关： H 包含一个 $r \times r$ 网格图子式 [17, 7]。

定理 5 ([18, 34, 14])。 对于任意一个树宽为 t 的图 H，图参数 $\hom(H, \cdot)$ 可以在 n 个顶点图上用 $O(n^{t+1})$ 时间求值。假设 #ETH，存在常数 $c > 0$，使得对于任意一个树宽为 t 的图H，图参数 $\hom(H, \cdot)$ 无法在 $O(n^{ct/\log t})$时间内求值。

结合定理 4，我们得到以下推论。

推论6 ([14])。 设 p 为图模体参数，且令 $q = \max^{H\triangleleft p} \mathrm{tw}(H)$。那么 p 可以在 $O(n^{q+1})$时间内求值。假设 #ETH，则存在一个与 p无关的常数 $c > 0$，使得 p 无法在 $O(n^{cq/\log q})$时间内求值。

[1]通过类似的论证，图模体参数的实际输出值被 $O(n^s)$ 所界定。这意味着，例如，图中的完美匹配数或哈密顿回路数并不是图模体参数。

这个推论使我们能够通过确定 p的同态展开中图 $H \triangleleft p$ 的最大树宽，来研究图模体参数 p 的复杂度。

例7. 接下来 [14], 我们来研究固定 H 时，sub(H，·) 的复杂度。根据事实 2，我们有$F \triangleleft$ sub(H，·) 当且仅当 F 是 H 的商图，因此只需确定 H的商图所能达到的最大树宽 q 。在相差常数因子的意义下， q 等于 H中匹配的最大大小 k：

- 任何具有 k 条边的图 Q 都是具有 k 条边的匹配的商图。因此，对于任何具有 k 条边的图 Q， H 的某个商图都包含 Q 作为子图。由于我们可以选择 Q 为一个具有 k 条边且树宽为 Ω(k) 的扩展图，由此可得 $q \geq$Ω(k)。

- 由于 H 没有大小为 $k+1$的匹配，因此它有一个大小为 $\leq 2k$的点覆盖。取商图不会增加图的点覆盖数，因此 H 的任何商图也都有一个大小为 $\leq 2k$的点覆盖。由此可得 $q \leq O(k)$，因为任何图的树宽都不超过其点覆盖数。

这两个事实共同意味着 $q = \Theta(k)$。根据推论6可知，sub(H, ·) 可以在 $n^{O(k)}$ 时间内求值，并且假设 #ETH 成立，则无法在 $n^{o(k/\log k)}$ 时间内完成求值。

类似地可以证明，在 #ETH 假设下，无法在 $n^{o(k)}$ 时间内求解 ind(H，·)，其中 $|V(H)| = k$：我们利用完全图 K_k 满足 $K_k \triangleleft$ ind(H，·)，这由事实 3 得出；并且在 #ETH 假设下，无法在 $n^{o(k)}$ 时间内求解 hom(K_k，·)，参见 [9]。对于其他与受限类型的同态 [38], 、诱导单调性质的顶点诱导子图 [40, 39, 22],、满足图子式封闭性质的边诱导子图 [36, 41]，以及 Tutte 多项式的一种变体 [41] 相关的图模体参数，也已知类似结果。

图模体参数族的含义

与其关注单个图模体参数，也可以研究图模体参数的族 [18, 11, 15], ，这正是本文的关注重点。在以往的研究中，这类问题是在参数化复杂性理论 [17, 25, 23] 的框架下处理的：计算问题的输入形式为 (x, k)，其中包含传统输入 x 以及参数值 k ，后者用于衡量 x 中某种复杂性。参数通常实际上是某个图参数的取值，例如树宽。参数化问题通常可以在 $n^{g(k)}$ 时间内求解，其中 g 是某个函数；如果它们甚至可以在 $f(k)$ $n^{O(1)}$ 时间内求解，其中 f 是某个可计算函数，则称其为固定参数可解。

图模体参数的求值自然导出一个参数化问题 [14]：给定系数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{Q}$、图 $H_1, \ldots, H_t$以及另一个图 G作为输入，任务是求值$p(G) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \, \mathsf{hom}(H_i, G)$。该问题中的参数为 $\max_i |V(H_i)|$。这个一般问题涵盖了在图中计数 k-团的问题；这是复杂性类 #W[1], 的典型困难问题，而 #W 是 NP 的参数化类比。更一般地，如果计数k-团的问题可通过适用于参数化问题的图灵归约变体归约到某个参数化问题，则称该问题为 #W[1]-困难。

上述图模体参数的求值问题可以通过一种更精细的方式来研究：固定一个递归可枚举的图模体参数族 $\mathcal{A}$ （以系数和图的列表表示），并考虑在承诺 $p \in \mathcal{A}$ 的条件下的求值问题。一个具体例子是针对递归可枚举图类 $\mathcal{H}$ 的问题 #Hom($\mathcal{H}$)：输入 $H \in \mathcal{H}$ 和 G，确定 hom(H，G)，其参数化为 $|V(H)|$。已知，当 $\mathcal{H}$ 中图的最大树宽可以由一个常数界定时，该问题是多项式时间可解的；否则，该问题是 #W[1]-难的 [18]。结合定理 4，可得图模体参数求值问题的如下分类：

定理 8 （[14]）。设 $\mathcal{A}$ 是一个递归可枚举的图模体参数族。若对于 $p \in \mathcal{A}$， $F \triangleleft p$ 中图的最大树宽无界，则在输入 $p \in \mathcal{A}$ 和 G 上求值 p（G） 是 #W[1]-难的。否则，该问题是固定参数可解的。

例如，考虑固定递归可枚举图类 $\mathcal{H}$ 上的问题 #Sub($\mathcal{H}$)，其定义与 #Hom($\mathcal{H}$) 类似。结合定理 8 和事实 2，若 $\mathcal{H}$ 中图的点覆盖

数无界，则该问题是 #W[1]-难的。否则，该问题是固定参数可解的，实际上甚至是多项式时间可解的 [45, 15]。同样，若 $\mathcal{H}$ 无限，则问题 #Ind($\mathcal{H}$) 是 #W[1]-难的；否则为多项式时间可解。尽管在复杂度单调性框架引入之前，人们已对这些问题进行了分类 [18, 11, 15], ，但该框架使证明大为简化，能够抽象掉问题的大部分具体细节，并推动了对更多问题的研究 [38, 40, 41, 39, 22, 36, 14]。

1.3 通过多项式时间归约实现复杂性单调性

本文的主要技术成果是定理 4 的多项式时间变体，即复杂度单调性框架的核心归约。与定理 4 一样，我们得到了一种图灵归约：利用一个具有 $S \triangleleft p$ 的图模体参数 p 的预言机，计算图 S 的 hom(S, ·)；但当 S 具有有界度时，我们的新归约可在多项式时间内运行。此外，新归约还允许我们将彩色 图的同态计数归约为无色 图参数的求值。这非常有用，因为计数彩色同态的 #P-困难性可以相对直接地证明，而此前尚未知晓无色图所需的 #P-困难性证明。

在下文中，我们称一个带色图 H 为多彩图，若其着色是双射。除非另有说明，我们假设多彩图的颜色集 H 为 V(H)，且着色为恒等函数。我们还将 H° 写作以 H为基础的无色图，并注意到一般而言，hom(H, G) $\neq$ hom(H°, G°)。

定理 9. *Th* 存在一种用于解决以下问题的算法：给定 S、G，输出 $\hom(S, G)$ 的值。

- 作为输入，一个数字 $s \in \mathbb{N}$、彩色图 S 和 T （带有 $S \subseteq T$）、一个带色图 G，以及
- 图模体参数 p的预言机访问，其 最大值$_{H \triangleleft p} |V(H)| \leq s$满足 $T^\circ \triangleleft p$，且满足以下条件之一：***(a)*** $S = T$；***(b)*** p 的同态展开中，所有具有 $|V(T)|$ 个顶点的图具有相同的符号；或 ***(c)*** p的同态展开中不包含 T° 的任何真边子图。

该算法的运行时间上界为 $4^{\Delta(S)} \cdot \mathrm{poly}(|V(G)|, s)$。

让我们详细阐述已知归约与我们提出的新变体之间的差异。最重要的是，定理 9 中所述运行时间对最大度的指数依赖仅取决于最大度Δ(S)，而非 $|E(S)|$。特别地，如果 S 具有有界最大度，那么即使 S 和 G 的规模相当，该归约仍可在多项式时间内运行。还需注意，我们从 S 进行归约，但只要求一个满足 $T^\circ \triangleleft p$的超图 $T \supseteq S$，并且该超图需满足定理中的三个技术条件之一。这一点非常有用，因为任何具有较大树宽的图 T 都包含一个较大的墙，它是一个具有较大树宽且最大度为 3 的子图 $S \subseteq T$。随后，我们可以从 S 进行归约，并将 T 的其余部分视为“虚拟”顶点和边，从而即使 Δ(T) 很大，也能避免指数级运行时间。

更微妙的是，请注意，我们将彩色图 S 上的 hom(S, ·) 归约为评估一个无色图参数 p。当 $p = \hom(S^\circ, \cdot)$ 计算从 S°出发的无色同态时，这一点已经很有趣，因为此前已知的归约需要 $2^{|E(S)|}n^{O(1)}$ 时间。因此，使用先前的技术，无法针对 #Hom($\mathcal{H}$) 按多项式时间类和 #P 困难类 $\mathcal{H}$ 进行全面分类。相比之下，将 hom(S, ·) 归约为 hom(R, ·) 要稍微容易一些，其中后者针对从 S导出的无色图 R，例如通过向 S 添加能够识别颜色 [5]的构件来构造。在同样的精神下，判断彩色图中是否存在多彩图 $k + k$ 二部完全图和 $k \times k$ 网格有初等的困难性证明，但对于这些问题的无色 版本，已知的困难性结果需要大量技术工作 [10, 32]。

图模体参数族的影响

我们的新定理 9 推出了若干重要图模体参数族的 #P-困难性结果。这表明，为复杂度单调性框架开发的技术也能导出多项式时间归约和 #P-困难性结果，而非 #W[1]-困难性结果。

第一个应用涉及上文提到的问题 #Hom($\mathcal{H}$)。这些问题最初的复杂性分类是参数化复杂性和数据库理论中的一项高被引成果；该成果证明，对于树宽无界的递归可枚举图类 $\mathcal{H}$ ，这些问题具有 #W[1]-困难性。结合针对树宽有界图类的一个简单的多项式时间算法（而不仅仅是固定参数可解算法），在假设 FPT $\neq$# W[1], 且满足 $\mathcal{H}$ 可递归枚举的条件下，这就刻画了 #Hom($\mathcal{H}$)的多项式时间可解情形。我们的新定理对 $\mathcal{H}$ 施加了一个自然的多项式时间可枚举性条件，并在较弱的假设 FP $\neq$ #P 下刻画了 #Hom($\mathcal{H}$)的多项式时间可解情形。为陈述这一判据，我们将 $r \times r$ 墙定义为这样一种图：从 $r \times r$ 方形网格中删除偶数编号列里的偶数编号边以及奇数编号列里的奇数编号边，然后对边进行任意次数的细分所得到的图。任何树宽为 t 的图都包含一个 $r \times r$ 墙子图 S，其规模为 $r \in \Omega(t^{1/100})$；该子图可以通过随机化[2]多项式时间算法 [7]找到。我们的可枚举性条件以墙为基础。

定理 10。 如果一个图类 $\mathcal{H}$ 存在一个多项式时间算法，能在输入一元表示的 $t \in \mathbb{N}$ 时输出一个树宽为 $\geq t$ 的图 $H \in \mathcal{H}$ ，那么 $\#\mathrm{Hom}(\mathcal{H})$ 在随机化多项式时间归约下是 $\#$P-完全的。
如果该算法甚至输出 H 以及一个 $t \times t$ 墙子图，那么 $\#\mathrm{Hom}(\mathcal{H})$ 在确定性多项式时间归约下是$\#$P-完全的。

该定理通过将我们新提出的定理 9 与一个关于从彩色墙进行同态计数的标准 #P-困难性证明相结合而得以证明。需要注意的是，鉴于诸如 $\mathcal{P} = \{K_k \cup K_{2^k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ 这类“病态填充”的类，某种多项式时间可构造性条件是必需的：任何针对 #Hom($\mathcal{P}$) 的多项式时间算法都会使 k-团问题成为固定参数可解问题，从而推出 FPT =#W[1], ，进而推翻 #ETH。与此同时，问题 #Hom($\mathcal{P}$) 不太可能是 #P-困难的：由于它可以在准多项式时间内求解，因此若它具有 #P-困难性，就会推翻 #ETH 以及其他复杂性理论假设。需要注意的是，$\mathcal{P}$ 不满足该定理的条件。

类似于定理 10 的分类也可以针对计数子图给出。原始的复杂性分类 [15, 14] 证明了对于点覆盖数无界的递归可枚举图类 $\mathcal{H}$ ，该问题是 #W[1]-困难的。如例7所述，如果 H 有一个由 t 条边组成的匹配，那么每个有 t 条边的图 S 都包含在 H的某个商图 T 中，而且可以高效地找到该商图 T 及其子图 S 。根据事实 2，我们有 $T \triangleleft p$。特别地，我们可以令 S 为一个大型无细分彩色墙。由此，我们得到关于 #P-困难性的以下自然类比：

定理 11. 如果图类 $\mathcal{H}$ 存在一个多项式时间算法，在输入一元表示的 $t \in \mathbb{N}$ 时输出一个点覆盖数为 $\geq t$ 的图 $H \in \mathcal{H}$ ，那么$\#\mathrm{Sub}(\mathcal{H})$ </style}是#P-完全的。

该定理的证明同样从计数彩色墙的 #P-困难性出发，并调用定理 9 将此问题归约为 #Sub($\mathcal{H}$)。与定理 10 不同， H 的商图中的相关墙可以在多项式时间内确定性地找到，因为例7所述的过程适合采用确定性多项式时间算法。

最后，通过与定理 10 和 11 类似的证明，我们也可以对诱导子图计数问题进行分类。对于这些问题，我们依靠多项式时间算法，在平均度较大的图中寻找大的团图子式，从而在 $H \in \mathcal{H}$ 或 H的补图中找到大的墙。

定理 12。 如果图类 $\mathcal{H}$ 允许一个多项式时间算法，该算法在输入一元编码的 $t \in \mathbb{N}$ 时，输出一个包含 $\geq t$ 个顶点的图 $H \in \mathcal{H}$ ，那么 $\#\mathrm{Ind}(\mathcal{H})$ 是 $\#$P- 完全的。

[2]要找到墙子图，似乎并非必然需要随机化，但据我们所知，目前尚无确定性多项式时间算法。因此，我们的一些 #P 完全性结果需要采用随机归约，而非确定性归约。

需要指出的是，主要的技术工作在于证明定理 9，而定理 10–12 利用已知技术便可较为直接地推出。还要指出，定理 10–12 中的 #P-困难性结果，与相关图参数（树宽、点覆盖数、大小）在图类 $\mathcal{H}$ 中有界时可直接得到的多项式时间算法相辅相成。

1.4 证明概要

定理 9 的证明围绕若干过滤器 展开，使我们能够逐步缩小 p 的同态展开，直至得到所需的图 S。事实上，先前已知的定理 4 也可以沿着这一思路证明。我们先概述这样的证明，然后介绍由此得到新定理 9 的修改。以下过滤器将发挥作用：

1. 基数过滤器 使我们能够将 p 的同态展开限制为具有所需顶点数的图。这种过滤器可以通过计数复杂性中常见的多项式插值论证来构造。2. 在基数限制的条件下，颜色满射过滤器 会进一步将同态展开限制为包含 S 作为子图的图。这类过滤器可以利用容斥原理实现，但会带来 $2^{|E(S)|}$ 的运行时间开销。本文的主要贡献是基于*Cai-Fürer-Immerman* 图的一种高效且可能出人意料的构造；这类图最初应用于图同构和有限模型论领域 [6]。

在本节余下部分，我们首先更形式化地引入过滤器的一般概念。接着，我们详细介绍上文所述的两种具体过滤器，并概述此前已知的相应构造。最后，我们介绍基于 CFI 图的颜色满射过滤器这一新贡献。本节已涵盖第 4 节中证明的很大一部分，因此也引入了后续各节将使用的一些概念和记号。

关于过滤器的一般事实

过滤器被实现为量子图，由 Lovász [33] 在图代数的背景下引入。它们在概念和计算层面都可以像图一样处理。更准确地说，量子图 是一个形式线性组合

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \, G_i$$

带有 系数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{Q}$ 和 组成图 $G_1, \ldots, G_t$，这些图要么全部未着色，要么全部着色。我们假设这些组成图两两不同构，否则我们可以将同构图合并，并用一个单独的图来表示，其系数为合并后的各图系数之和。图参数 p 通过以下方式线性扩展到量子图：

$$p(\mathbf{G}) := \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \, p(G_i).$$

根据这些定义，过滤器是具有如下性质的量子图$\mathbf{F}$ ： 对于某个“可过滤”图集合 $\mathcal{F}$，到$\mathbf{F}$ 的同态计数能够识别其中的“良好”图 $\mathcal{G}$ 。

定义 13. 量子图 $\mathbf{F}$ 过滤器从一组图 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ 中筛选出一组图 $\mathcal{G}$，如果对于所有 $H \in \mathcal{F}$，

$$\hom(H, \mathbf{F}) = \begin{cases} 1 & H \in \mathcal{G}, \\ 0 & H \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}. \end{cases}$$

注意，并未对图 $H \notin \mathcal{F}$ 作出任何陈述。

例1 **4.** 量子图 $\mathbf{F} = \frac{1}{24}K_4 - \frac{1}{6}K_3$ 从 $\mathcal{F} = \{K_3, K_4\}$ 中过滤出 $\mathcal{G} = \{K_4\}$，因为

$$\hom(K_4, \mathbf{F}) = \frac{1}{24}24 - \frac{1}{6}0 = 1,$$
$$\hom(K_3, \mathbf{F}) = \frac{1}{24}24 - \frac{1}{6}6 = 0.$$

对于图 $H \notin \mathcal{F}$，不作任何保证。例如，我们有 $K_2 \notin \mathcal{F}$ and

$$\hom(K_2, \mathbf{F}) = \frac{1}{24}12 - \frac{1}{6}6 = -\frac{1}{2}.$$

给定一个支撑集为 $\mathcal{F}$ 的图模体参数 p，以及一个能从 $\mathcal{F}$ 中筛选出某个集合 $\mathcal{G}$ 的量子图 $\mathbf{F}$，与 $\mathbf{F}$ 作图乘积后，我们就能将 p 的同态展开限制在 $\mathcal{G}$ 上。其定义如下，另见 [33, 第 3 章。3] 其中一种变体使用 无色图，而不是（可能带色的）量子图。

定义15. 给定一个带有着色 c 的图 G： $V(G) \to C$ 和 $i \in C$，用 $V_i(G)$ 表示 G 中颜色为 i 的顶点。对于具有颜色 C 的图 G 和 X，其 张量积 $G \otimes X$ 是一个颜色集为 C 的图，其顶点为

- 顶点集 $V_i(G \otimes X) = V_i(G) \times V_i(X)$ 对每种颜色 $i \in C$ 都成立，并且
- 当且仅当 $u_G v_G \in E(G)$ 和 $u_X v_X \in E(X)$ 时，(u_G, u_X) 与 (v_G, v_X) 之间存在一条边。

对于量子图 $\mathbf{G} = \sum_i \alpha_i G_i$ 和 $\mathbf{X} = \sum_j \beta_j X_j$，我们定义 $\mathbf{G} \otimes \mathbf{X} = \sum_{i,j} (\alpha_i \beta_j)(G_i \otimes X_j)$。

同态计数与张量积之间存在一个非常有用的代数关系；无色图的情形见 [33,(5.30)] 。

事实16。 给定一个图 F 以及量子图 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{X}$，它们要么全是带色图，要么全是无色图，则有

$$\hom(F, \mathbf{G} \otimes \mathbf{X}) = \hom(F, \mathbf{G}) \cdot \hom(F, \mathbf{X}).$$

证明。 我们首先对图 G 和 X 证明该命题。任意同态 $f\colon V(F) \to V(G \otimes X)$ 都会诱导出一对唯一的同态 (f_G, f_X)，它们从 F 映射到 G 和 X；其中 f_G 和 f_X 分别是将所有像顶点 $f(v)$（对 $v \in V(F)$）投影到第一或第二个分量所得到的。反过来，任意这样的一对 (f_G, f_X) 都会通过将所有 $v \in V(F)$ 对应的像顶点 $f_G(v)$ 和 $f_X(v)$ 配对，诱导出一个从 F 到 $G \otimes X$ 的唯一同态。量子图的情形则由分配律得出。 □

作为事实16的直接推论，我们可以使用带过滤器的张量积，将图模体参数的同态展开从集合 $\mathcal{F}$ 限制到所需的集合 $\mathcal{G}$。以下推论概括了多次应用事实16的结果。

推论 17. 设 $p(\cdot) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \alpha_F \hom(F, \cdot)$ 是定义在有限集 $\mathcal{F}$ 上的图模体参数，并设 $F_1, \ldots, F_q$ 是量子图，它们有 $k_1, \ldots, k_q$ 个组成图，大小分别为 $s_1, \ldots, s_q$，且从 $\mathcal{F}$ 中筛选出筛选集 $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_q$。那么 $G \mapsto p(G \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_q)$ 满足 $q(\cdot) = \sum_{F \in \mathcal{G}} \alpha_F \hom(F, \cdot)$，对于 $\mathcal{G} = \bigcap_{i=1}^{q} \mathcal{G}_i$，并且可以通过对具有 $n \prod_{i=1}^{q} s_i$ 个顶点的图进行 p 次预言机调用，在具有 n 个顶点的图上求值。

我们指出，Lovász [33] 此前曾在收缩器 和连接器的背景下使用量子图来实现理想但无法获得的图功能；Xia 与作者 [16, 12] 在研究使用组合匹配门计算永久值的复杂度时也采用了这一思想；Dvorák [24]则利用该思想刻画了同态计数的表达能力。

通过过滤器证明定理 4

作为热身，我们通过结合不同的过滤器来证明已知的定理 4。下文中，令 p为一个图模体参数。首先，基数过滤器允许我们从其同态展开中过滤出恰好具有 $k \in \mathbb{N}$个顶点的图，但条件是该过滤器只能应用于至多具有 $s \in \mathbb{N}$ 个顶点的图。我们将在第 4 节中证明更一般过滤器的存在性。

事实 18。 给定整数 k、$s \in \mathbb{N}$，存在一个量子图，它有 $s+1$ 个组成图，每个组成图包含 $\leq s$ 个顶点，能够从包含 $\leq s$ 个顶点的图中筛选出恰好包含 k 个顶点的图。这些组成图及其系数（来自 $\mathbb{Q}$）都可以在多项式时间内计算。

另一种直接的构造可以让我们从所有图中筛选出 S彩色图：给定一个多彩图 S，若存在从 H 到 S的同态，则图 H 是 S着色的 。任何多彩图 S本身都能从所有图中筛选出 S着色图。不那么直接的是，我们还将筛选出包含由 S的顶点着色所诱导的所有边颜色的图：

定义 19。 对于多彩图 S，若对于每条边$ij \in E(S)$，在 H中颜色为 i 和 j 的顶点之间至少有一条边，则 S着色图 H 称为满射 S着色的 。我们用 $E_{ij}(H)$表示 H 中颜色为 i 和 j 的顶点之间的边集，并称 $E_{ij}(H)$为 H的一个边颜色类。

除了 S 本身之外，任何通过从 S 反复拆分边得到的图都是满射 S-着色的：我们可以反复移除颜色为 i，j 的任意边 $uv \in E_{ij}(S)$，并在颜色为 i 和 j 的新顶点 u^* 和 v^*之间添加一条边，从而得到一个 S-着色图。这个过程可以重复进行，直到剩下一个有 $2|E(S)|$ 个顶点的顶点着色匹配。对于恰有 $|V(S)|$ 个顶点的满射 S-着色图 H，无法进行这样的拆分，因此我们得到：

事实 20。 设 S 是一个没有孤立顶点的多彩图。任何满足 $S \simeq H$的满射 S-着色图 H，其$|V(S)| = |V(H)|$。

这条事实说明了为什么我们希望像事实 18 那样筛选出具有给定顶点数的图。要实现对满射 S-着色图的筛选，我们可以使用容斥原理。

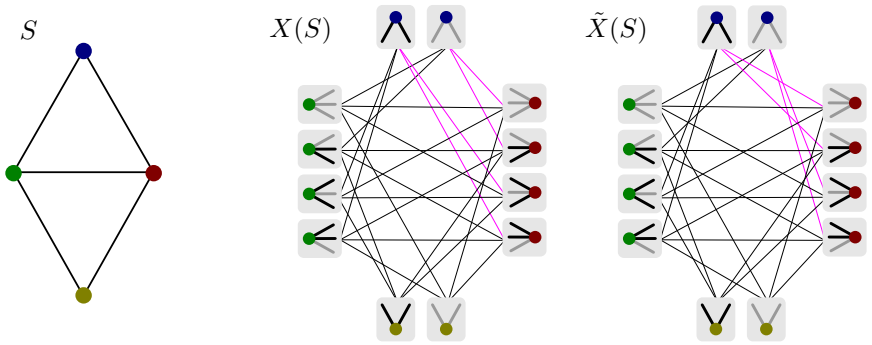
事实 21. 对于每个多彩图 S，量子图 $\mathbf{I} = \sum_{F \subseteq S} (-1)^{|E(S)|-|E(F)|} F$（其中 F 遍历 S 的边子图）会从所有图的集合中筛选出由 S 满射着色的图。

证明. 若 H 是由 S 满射着色的，则 $\hom(H,\mathbf{I}) = 1$，因为 H 到 S 恰有一个同态，而到真子图没有同态。若 H 不是由 S 满射着色的，我们证明 $\hom(H,\mathbf{I}) = 0$：任取一条边 $ij \in E(S)$，满足 $E_{ij}(H) = \emptyset$。从 H 到一个满足 $ij \notin E(F)$ 的图 $F \subseteq S$ 的任何同态，也是从 H 到 $F + ij$ 的同态，反之亦然。由于 F 和 $F + ij$ 在 $\mathbf{I}$ 中的符号相反，它们对 $\hom(H, \mathbf{I})$ 的贡献相互抵消，因此最终得到 $\hom(H,\mathbf{I}) = 0$。 □

最后，我们将这些过滤器结合起来：设 S 是一个多彩图，G 是一个输入图，p 是一个图模体参数，其中包含 S，除此之外只包含具有 $\leq s$ 个顶点的图。利用基数过滤器（事实 18）和颜色 S 满射的带色图过滤器（事实 21），根据推论 17，我们得到一个图模体参数 q，它可以通过 $2^{|E(S)|}\text{poly}(s)$ 次调用来求值。根据事实 20，我们有 $q(\cdot) = \hom(S, \cdot)$，因此借助 p 的预言机，我们可以在 n 顶点图 G 上，在 $2^{|E(S)|}\text{poly}(n, s)$ 时间内计算 $\hom(S, G)$。通过第 4 节中明确描述的简单归约，即使 p 定义在无色图上，并且其同态展开中包含的是无着色版本 S°，而非 S 本身，上述过程也仍可执行。

利用 CFI 图构造高效的颜色满射过滤器

本文的主要技术贡献，是为满射着色图构造了一种新的过滤器。这些新过滤器基于约 30 年前由 Cai、Fürer 和 Immerman 引入的图 [6]，他们借此展示了*Weisfeiler-Lehman* 方法 [44, 43]，（一种用于图同构的启发式方法）的局限性。



˜图1：一个多彩图 S 以及 CFI 图 X（S）和 X（S）。如图所示，对于每个 $i \in V$（S），X（S）和 $\tilde{X}$（S）中的 i 颜色顶点表示 $\{0,1\}^{I(i)}$ 中的偶赋值。对于每条边 $ij \in E$（S），如果 X（S）中的两个赋值在 ij 上的取值相同，则它们之间存在一条边。对于 X（S），情况同样适用˜，但由蓝色顶点和红色顶点之间的边组成的粉色边颜色类被˜取补。X（S）的特殊自同构群意味着，选择要˜取补的边颜色类是无关的：对于所有 $ij \in E$（S），对 E_{ij}（X（S））取补所得的图 X（S）在同构意义下都相同。

这种方法最简单的实例是所谓的颜色细化 算法，它比较两个图的迭代度序列。同构图的这一序列相同，但即使是非常简单的非同构图，也可能具有相同的迭代度序列。用于 $k \in \mathbb{N}$ 的 k维 Weisfeiler-Lehman（k-WL）算法是颜色细化的高维变体，它比较由 k个顶点组成的元组的迭代邻域。这些算法也与同态计数 [19, 24] 相关联，并在群论、代数和范畴论背景下得到研究 [3, 1, 21]。

Cai、Fürer 和 Immerman [6] 证明，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在两个无法被 k-WL 区分的非同构图。由此可知，k-WL 算法层级中的任何固定层级都无法解决图同构问题。通过对原始 CFI 构造进行已知的轻微修改 [37, 35]，˜ ˜，我们可以将任意连通彩色图 S 转换为两个 S 颜色图 $X = X$（S）和 $X = X$（S），如图1所示。这些图的每个颜色类均有 $2^{\Delta(S)-1}$ 个顶点，并且具有一个显著的˜性质：对于任意边 $ij \in E$（S），删除颜色 i 与 j 之间的所有边后，X 和 X 同构。˜直观地说，这意味着只有检查它们的全部边颜色类，才能区分 X 和 X。因此，如果图 H中缺少 S 的某个边颜色类，那么来自 H 的同态就无法˜区分 X和 X，因为它们无法检查这个边颜色类；于是有 $\hom(H, X) = \hom(H, X)$，从而 $\hom(H, X - \tilde{X}) = 0$。[3] 然而，对于 surjectively S-colored graph S 本身，可以证明 $\hom(S, X - \tilde{X}) = 2^{|E(S)|-|V(S)|+1}$。因此，我们可以用这个数进行归一化，得到：

引理 22。给定一个连通且没有孤立顶点的多彩图 S，存在一个具有两个组成图的量子图 $\mathbf{X}$，每个组成图的每个颜色类至多包含 $2^{\Delta(S)-1}$ 个顶点，并且该量子图可将 $\{S\}$ 从$\{S\} \cup \mathcal{N}(S)$中过滤出来，其中 $\mathcal{N}(S)$ 是未进行满射 S- 着色的图的集合。$\mathbf{X}$ 的组成图和系数可在 $O(4^{\Delta(S)}|V(S)|)$ 时间内计算得到。

注意，$\mathbf{X}$ 实际上并不是针对满射 S-着色图的过滤器，因为它只能将 $\{S\}$ 从$\{S\} \cup \mathcal{N}(S)$中过滤出来。不过，如果我们用引理 22 中基于 CFI 图的新过滤器替代事实 21 中基于容斥的过滤器，这就足以沿着事实 18 和 21 的思路证明定理 9。

最后，为了得到完整的定理 9，我们需要从针对彩色 S 的 $\hom(S, \cdot)$ 归约到满足 $T^\circ \triangleleft p$ 的图模体参数 p，其中 $T \supseteq S$是某个超图。这需要添加“虚拟边”，由此带来一些技术细节，因此定理中要求满足条件 (a)–(c)，以避免不必要的抵消。

[3] Roberson [37]在无颜色设定下研究奇同态 时，也观察到了 CFI 图的类似特征。

1.5 论文结构

定理 9 的一般证明概要已在引言中给出。本文其余部分分为五节：第 2 节汇总图宽度度量的预备知识，以及关于彩色图的同态计数的已知困难性结果。第 3 节介绍 CFI 图构造并证明引理 22。定理 9 的完整证明见第 4 节；第 5 节则运用该定理证明定理 10–12。第 6 节总结全文，并展望未来的研究方向。

致谢

作者感谢 Anuj Dawar、Pengming Wang 和 David E. Roberson 在过去五年中就 CFI 图进行的交流。

2 预备知识

在本文中，计数问题 是一个函数 $g\colon \{0,1\}^* \to \mathbb{Q}$。计数问题 #SAT 要求：给定布尔公式 φ 的二进制编码作为输入，计算 φ 的满足赋值数量。我们称计数问题 g 为 #P 困难，如果存在从 #SAT 到 g 的多项式时间图灵归约，即一种多项式时间算法：当获得对 g 的预言机访问时，计算输入公式 φ 的满足赋值数量。正如 Valiant [42], 所示，计算输入图 G 中完美匹配数量的问题是 #P 困难。

树宽与墙

图 G 均为无向图，可以包含自环，但不含平行边。如引言所述，图也可以是顶点着色的。给定顶点 $v \in V(G)$，我们用 $I(v)$ 表示与 v 相 incident 的边集，假设根据上下文可以唯一确定 G。G 的最大度记为 $\Delta(G)$。G 的树宽 tw(G) 是衡量其“树状性”的一种指标，本文无需正式定义。定义见 [17, 第 7]章。

$r \in \mathbb{N}$ 的初等 $r \times r$ 墙 是从一个 $r \times r$ 方形网格中删除每个奇数编号列中的所有奇数编号边，以及每个偶数编号列中的所有偶数编号边后得到的子图。$r \times r$ 墙 是对某个初等 $r \times r$ 墙的若干条边进行细分后得到的任意图；注意，其最大度不超过 3。图 G 的墙阶 wall(G) 是使得 G 包含一个 $r \times r$ 墙子图的最大 $r \in \mathbb{N}$。根据 Chekuri 和 Chuzhoy 的一项极其深刻的结果，G 的树宽 tw(G) 与使得 G 包含一个 $s \times s$方形网格子式的最大数目 $s \in \mathbb{N}$ 多项式等价，而该数目 s 又与墙阶线性等价。

定理 23 ([7])。对于任意树宽为 $t \in \mathbb{N}$ 的图 G，我们有 $\mathrm{wall}(G) \in \Omega(t^{1/100})$，且 $\mathrm{wall}(G) \in O(t)$。此外，存在一个随机化多项式时间算法，给定一个树宽为 t 的图 G 作为输入，输出一个 $r \times r$ 阶的墙子图，该子图属于 G，且满足 $r \in \Omega(t^{1/100})$。

彩色同态的困难性

给定一个彩色图类 $\mathcal{H}$，令 #ColHom($\mathcal{H}$) 表示在输入图 $H \in \mathcal{H}$ 和 G 上计算 hom(H, G) 的问题。注意，hom(H, G) 指的是从 H 到 G 的保颜色同态数量。对于树宽无界的递归可枚举图类 $\mathcal{H}$，已知问题 #ColHom($\mathcal{H}$) 在参数 $|V(H)|$ 下是 #W[1]-困难的，例如，该结果由作者和 Marx [15], 给出；他们将这个问题称为 #PartitionedSub($\mathcal{H}$)。该问题要求统计保颜色的子图副本，但对于彩色图 H，这些副本与保颜色同态一一对应。

#ColHom($\mathcal{H}$) 的 #W[1]-困难性分两步得以证明，这些步骤可以改编来证明该问题的 #P-困难性。首先，令 $\mathcal{G}$ 表示彩色方形网格类。[15] 中定理 3.2 的证明

展示了通过从计数 k-团进行参数化归约，得到 #ColHom($\mathcal{G}$) 的 #W[1]-困难性。计数k-团实际上是 #P 困难的，因为从布尔可满足性问题出发的标准 NP 困难性归约保留了解的数量。从计数 k-团到 #ColHom($\mathcal{G}$) 的直接归约在 [15] 中定理 3.2 的证明里以多项式时间运行，因此我们得到：

定理 24。 对于由 $\mathcal{G}$ 个彩色方形网格组成的类，问题 $\#\mathrm{ColHom}(\mathcal{G})$ 是 #P-困难的。

根据定理 23，树宽较大的图包含较大的方形网格作为图子式。这可用于将 #ColHom($\mathcal{G}$) 规约为 #ColHom($\mathcal{H}$)，其中 $\mathcal{H}$ 是树宽较大的图类：图B 中图 A 的图子式模型是一族两两不交的连通子集 $S_v \subseteq V$（B），每个子集对应一个 $v \in V$（A），且对于每条边 $uv \in E$（A），S_u 与 S_v 之间至少有一条边相连。

引理 25 （参见 [15] 中引理 3.1 的证明）。存在一种多项式时间算法，可将输入图 G 和多彩图 B 中一个多彩图 A 的图子式模型转换为一个具有 $|V(G)| \cdot |V(B)|$ 个顶点的图 G'，使得 $\hom(A, G) = \hom(B, G')$。

我们指出，证明同态计数的多彩图版本具有困难性，比证明无色问题具有困难性要容易一些。正如引言中所述，已知的去除颜色的技术在 H 中需要指数级运行时间。

3 构造颜色满射过滤器

本节中的构造和论证基本源自 Cai、Fürer 和 Immerman [6]，仅做了少许修改；这些修改也已在先前的工作 [37, 35] 中出现。概览见图1。本节构造的图是约束满足问题（约束满足问题）的编码，而这些问题又由一个图 S 推导而来。对于我们的目的，给定一个固定的多彩图 S，一个约束满足问题 是一个二元组$\Gamma = (\{A_v\}_{v \in V(S)}\ \{R_{uv}\}_{uv \in E(S)})$，由以下内容组成：

- a set of assignments $A_v \subseteq \{0,1\}^{I(v)}$ for each $v \in V(S)$, and
- 一个关系 $R_{uv} \subseteq A_u \times A_v$，对应每个 $uv \in E(S)$。

Γ 的解 是一个赋值族 $\{a_v\}_{v \in V(S)}$，满足对所有 $uv \in E(S)$，都有 $(a_u, a_v) \in R_{uv}$。稍微滥用一下记号，我们也将 Γ 视为一个带有 $V_v(\Gamma) = A_v$（对 $v \in V(S)$）以及 $E_{uv}(\Gamma) = R_{uv}$（对 $uv \in E(S)$）的 S-颜色图，并忽略关系中的边方向。根据同态的定义，以下结论显然成立。

事实 26。 Γ 的解的数量等于$\hom(S, \Gamma)$。

CFI 图由特定的约束满足问题构造而成，其中 A_v 对于 $v \in V(S)$ 是$\{0,1\}^{I(v)}$中的偶 赋值，即其中 1 的个数为偶数的赋值。给定一个“荷函数” $c\colon E(S) \to \{0,1\}$，我们通过对所有 $uv \in E(S)$ 设定以下条件，来定义 $\Gamma(S, c)$：

$$R^c_{uv} = \{(a_u, a_v) \in A_u \times A_v \mid a_u(uv) \equiv_2 a_v(uv) + c(uv)\},$$

按模 2 等价。换句话说，如果 $c(uv) = 0$，那么 R^c_{uv} 要求赋值 a_u 和 a_v 在 uv上的取值相同。如果 $c(uv) = 1$，那么 R^c_{uv} 要求它们在该取值上不同。给定一组边$F \subseteq E(S)$，我们引入记号 $\chi_F \in \{0,1\}^{E(S)}$ 来表示在 F 上取值为 1、其他地方取值为 0 的赋值。我们也将 χ_F 简写为 χ_e，并在 $|F| \leq 2$时将 $\chi_{e,e'}$ 简写为相应形式。然后，我们任取一条边 $e^* \in E(S)$，并定义量子图

$$\mathbf{X}(S) = \frac{\Gamma(S, \chi_\emptyset) - \Gamma(S, \chi_{e^*})}{2^{|E(S)|-|V(S)|+1}}. \tag{2}$$

约束满足问题的整数 这种解释使我们能够明确确定到$\mathbf{X}(S)$ 的同态数量 ly.

引理 27。 对于任意连通图 S，我们有 $\hom(S,\mathbf{X}(S)) = 1$。

证明。 根据事实 26，值 $\hom(S,\mathbf{X}(S))$ 等于两个组成图 $\Gamma(S,\chi_\emptyset)$ 和 $\Gamma(S,\chi_{e^*})$ 的解的数量之差，并需除以 $2^{|E(S)|-|V_{(S)}|+1}$ 进行归一化。我们来确定这些解的数量：

$\Gamma(S,\ \chi_\emptyset)$：该 CSP 的解与 S 的偶生成子图 一一对应，即与满足以下条件的边子集 $B \subseteq E(S)$ 一一对应：每个顶点 $v \in V(S)$ 在 B 中的度均为偶数。由于 S 连通，这样的边子集恰有 $2^{|E(S)|-|V(S)|+1}$ 个，因为它们构成 S的环空间，这是 $\mathbb{Z}_2^{E(S)}$ 的一个子空间，其维数为 $|E(S)| - |V(S)| + 1$。

$\Gamma(S,\chi_{e^*})$：我们证明这个约束满足问题没有解。任意选取 e^* 的一个端点作为 u。$\Gamma(S,\chi_{e^*})$ 的解与边子集 $B \subseteq E(S)$ 一一对应，其中每个顶点$v \in V(S)$ 在 B 中的度为偶数，只有 u 的度为奇数。根据图握手引理，不存在这样的 B，因为它会导出一个恰有一个奇度顶点的图。

综合以上内容，根据 $\mathbf{X}(S)$ 的定义，该引理得证。 □

给定函数 c 和 c'，其值域为 $\{0,1\}$，令 $c \oplus c'$ 为它们的逐点模 2 和。当 c 和 c' 的定义域 D 和 D' 不一致时，我们也记作 $c \oplus c'$，并将 $c \oplus c'$ 的定义域定义为 $D \cap D'$。如果两个约束满足问题作为带色图同构，则称它们同构。下面的引理展示了 CFI 图的一个极其有用的性质：给定荷函数 $c \in \{0,1\}^{E(S)}$ 和两条关联边$vu,\ vw \in E(S)$，我们可以在 vu 处翻转 c，并在 vw 处得到新的荷函数 c'，从而得到一个同构的 CFI 图。

引理 28。 对于所有 $c \in \{0,1\}^{E(S)}$和 $vu,\ vw \in E(S)$，我们有 $\Gamma(S,\ c) \simeq \Gamma(S,\ c \oplus \chi_{vu,\ vw})$。

证明。 我们通过令.....来定义从 $\Gamma(S,\ c)$ 到 $\Gamma(S,\ c \oplus \chi_{vu,\ vw})$ 的一个同构 f

$$f(a) = \begin{cases} a \oplus \chi_{vu,vw} & a \in A_v, \\ a & a \in A_z \text{ with } z \neq v. \end{cases}$$

由于任意一个 $a \in A_z$（针对 $z \in V(S)$）都是偶数，且其像 $f(a)$ 是通过翻转两个（若 $z = v$）或零个（若 $z \neq v$）条目得到的，因此该像也是偶数，故包含于 A_z 中。因此，函数 f 定义良好。

为检查 f是否保持边关系，令我们将所有 $a \in V(\Gamma)$ 的 $c' = c \oplus \chi_{vu,\ vw}$ 和 $a' = f(a)$ 简记为.....。那么，对于 $z \in \{v,w\}$，有 $(a_u,\ a_z) \in R^c_{uz}$ 当且仅当 $(a'_u,\ a'_z) \in R^{c'}_{uz}$。这是因为 $a_u(uz) = a_z(uz)$ 当且仅当$a'_u(uz) \neq a'_z(uz)$，而其他所有关系都显然保持不变。这表明 f 确实是从 $\Gamma(S,\ c)$ 到 $\Gamma(S,\ c \oplus \chi_{vu,\ vw})$ 的一个同构。

□

利用这一点，我们可以将电荷从任意一条边“推”到同一连通分量中的另一条边上。

引理 29。 设 $e, e' \in E(S)$。若 S 是连通的，则 $\Gamma(S,\chi_e) \simeq \Gamma(S,\chi_{e'})$。

证明。 设 $P = (e,\ldots,e')$ 是 S中的一列边，其中相邻的边共享一个端点；这样的序列存在，因为 S 是连通的。所需的同构可通过沿着 P中的相邻边反复应用引理 28 得出。

□

我们可以利用这个引理说明，在 CFI 构造中“每种边颜色都计数”，也就是说，删除任意两个顶点颜色类之间的边后，$\mathbf{X}(S)$ 的组成图彼此同构。给定一个 S-带色图 F 以及多彩图 S的一个真子图 $S' \subseteq S$，注意到张量积 $F \otimes S'$ 与从 F 中删除对应于 $E(S) \setminus E(S')$中边的边颜色类后得到的图自然同构。稍微滥用一下记号，我们将 $F \otimes S'$ 视为 F的一个实际子图。

Co论 30。 对于 S 的任意真子图 S'，都有 $\Gamma(S,\ \chi_{e^*}) \otimes S' \simeq \Gamma(S,\ \chi_\emptyset) \otimes S'$。

证明。设 $e \in E(S) \setminus E(S')$，其中有 $e = uv$。根据引理 29，我们可以将电荷从 e^* “推”到 e，即有 $\Gamma(S, \chi_{e^*}) \simeq \Gamma(S, \chi_e) \otimes S'$，因为从两个同构的带色图中删除整个顶点颜色类和边颜色类会保持其同构性。另一方面，根据平凡的恒等同构，我们有 $\Gamma(S, \chi_e) \otimes S' \simeq \Gamma(S, \chi_\emptyset) \otimes S'$，因为 $\Gamma(S, \chi_e)$ 和 $\Gamma(S, \chi_\emptyset)$ 仅在 R_{uv} 中的边上有所不同。复合这两个同构即得结论。□

最后，我们汇总本节中证明的事实，以证明引理 22。

引理 *22* 的证明。给定一个连通图 S，按式 (2) 定义量子图 $\mathbf{X}(S)$。将其视为S-带色图时，约束满足问题 $\Gamma(S, \chi_\emptyset)$ 和 $\Gamma(S, \chi_{e^*})$ 满足对颜色类大小的要求，并且可以在所需时间内计算得出。请注意，列出这两个图中给定边颜色类的所有边，最多可能需要 $O(4^{\Delta(S)})$ 时间。

引理 27 表明 $\hom(S, \mathbf{X}) = 1$。为了证明对于非满射S-着色的图 H，$\hom(H, \mathbf{X}) = 0$，取一个这样的图 H。我们可以假设 H 是 S-着色的，否则 $\hom(H, \mathbf{X}) = 0$，因为 $\mathbf{X}$ 的组成图是 S-着色的。因此，对于 $S' \subsetneq S$，H 是 S'-着色的，于是得到

$$\hom(T, \mathbf{X}(S)) = \hom(T, \mathbf{X}(S) \otimes S') = 0,$$

其中，第一个等式成立是因为，在 $\mathbf{X}(S)$ 的任意一个组成图 X 中，T 的像都包含于 $X \otimes S'$；第二个等式成立是因为 $\mathbf{X}(S) \otimes S'$ 的两个组成图根据推论 30 同构。这就证明了该引理。

□

4 线性组合的筛选

在本节中，我们按照引言第 1.4 节所述的纲要证明定理 9：给定一组两两不同构的无色图 $\mathcal{H}$，并可访问一个图参数

$$p(\cdot) = \sum_{H \in \mathcal{H}} \alpha_H \hom(H, \cdot),$$

我们希望 确定带色图 S 和带色图 G 在颜色集 C 上的 $\hom(S, G)$.

首先，我们需要处理从带色图到无色图的转换：回顾一下，我们将通过忽略颜色从 G 获得的无色图记为 G°。我们将通过逐个图算子成分应用此算子得到的量子图记为 $\mathbf{G}^\circ$。此外，我们将通过将 c 应用于 H 作为着色得到的带色图记为 H^c。

引理 31。设 C 是一个颜色集合，令 p_{col} 表示通过以下方式从无色图参数 p 得到的带色图上的图模体参数

$$p_{\mathrm{col}}(\cdot) = \sum_{H \in \mathcal{H}} \alpha_H \sum_{c: V(H) \to C} \hom(H^c, \cdot). \tag{3}$$

给定一个带色图 G，我们有 $p(G^\circ) = p_{\mathrm{col}}(G)$。合并同构项后，$p_{\mathrm{col}}$ 中任意多彩图 F 的系数等于 $\alpha_{F^\circ} |\mathrm{aut}(F^\circ)|$。

注意，(3) 的右侧可能包含未按恒等函数着色的彩色图。

证明。我们首先证明，当 $p(\cdot) = \hom(H, \cdot)$ 时，对于无色图 H，$p(G^\circ) = p_{\mathrm{col}}(G)$。一般结论由线性性推出。给定一个以 C 为颜色的图 G，我们有 $\hom(H, G^\circ) = \sum_{c: V(H) \to C} \hom(H^c, G)$，因为任意从 H 到 G° 的同态 f，都会通过其像唯一地诱导出 H 的一种着色 c_f：对于 $v \in V(H)$，令 $c_f(H)$ 为 $f(v) \in V(G)$ 的颜色。从 H 到 G° 的同态集合可以划分为】【，

对于这些着色，以及诱导给定着色 $c: V(H) \to C$ 的同态，恰好是从 H^c 到 G的同态。

对于第二个陈述，设 F 是一个多彩图。每一对 (F°, c)，其中 $F \simeq (F^\circ)^c$，都通过双射 $c: V(F^\circ) \to C$ 诱导出 F° 的一个自同构。 □

我们的证明依赖于引言中讨论的基数过滤器的一般版本。

定义 32。考虑颜色集 C 的一个划分，将其分为 $r \in \mathbb{N}$ 个部分 $C_1, \ldots, C_r$，并分别标注数字 $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$。我们称 $\eta = (C_1, \ldots, C_r, k_1, \ldots, k_r)$ 为 C 的一个颜色粗化，其有 r 个部分；若对所有 $i \in [r]$，H 均满足 η-粗化 $\sum_{j \in C_i} |V_j(H)| = k_i$，则称 H 是 η-粗化的。

也就是说，若 H 是 η-粗化的，则对每个 $i \in [r]$，H 中恰有 k_i 个顶点的颜色来自 C_i。特别地，颜色集为 C 的图 H 有 $k \in \mathbb{N}$ 个顶点，当且仅当它是 (C, k)-粗化的。

引理 33. 设 η 是一个具有 $r \in \mathbb{N}$ 个部分的颜色集 C 的颜色粗化。对于所有 $s \in \mathbb{N}$，都存在一个量子图 $\mathbf{N}$，它可以从具有 $\leq s$ 个顶点的图中过滤出 η-粗化图。$\mathbf{N}$ 的系数和组成图可在输入 η 上用 $s^{O(r)}$ 时间计算。

证明。令 $\eta = (C_1, \ldots, C_r, k_1, \ldots, k_r)$。给定 $a = (a_1, \ldots, a_r) \in [s+1]^r$，定义一个图 N_a：对于 $i \in [r]$，该图恰好包含 a_i 个颜色为 j 的顶点，其中颜色遍历所有 $j \in C_i$。N_a 中的所有顶点都有自环，并且与所有其他顶点相连。给定一个颜色为 C 的带色图 H，记 $n_i(H) = \sum_{j \in C_i} |V_j(H)|$ 为 $i \in [r]$。对于所有$a \in [s+1]^r$，我们有

$$\hom(H, N_a) = \prod_{i \in [r]} a_i^{n_i(H)}. \tag{4}$$

对于任意固定的图 H，右侧可视为一个多项式 $p_H \in \mathbb{Q}[a_1, \ldots, a_r]$，其最大度为 s。该多项式恰好有一个单项式，即当且仅当 H 是 η-粗化时，该单项式为 $a_1^{k_1} \ldots a_r^{k_r}$。因此，$p_H$ 中 $a_1^{k_1} \ldots a_r^{k_r}$ 的系数 $c_{k_1,\ldots,k_r}$ 在 H 是 η-粗化时为 1，否则为 0。根据多项式插值，存在系数 β_a，使得对于 $a \in [s+1]^r$

$$c_{k_1,\ldots,k_r} = \sum_{a \in [s+1]^r} \beta_a p_H(a) = \sum_{a \in [s+1]^r} \beta_a \hom(H, N_a),$$

其中，系数 β_a 可通过在 $(s+1)^r$ 个不定元上建立满秩线性方程组，关联 p_H 的取值与系数，从而在多项式时间内计算得到。由此可知，$\mathbf{N} := \sum_{a \in [s+1]^r} \beta_a N_a$ 满足引理的要求。 □

为证明定理 9，我们将引理 22（见第 3 节）与关于 $r \leq 2$ 和 $s = \max_{H \lhd p} |V(H)|$ 的引理 33 一并使用。仅选择 $r = 1$ 并不足够，因为在证明的某些部分，我们可能需要区分“有意义的”顶点和“虚设的”顶点。

定理 *9* 的证明。我们可以假设 S 是连通的：如果 S 有连通分量 S_1、……、S_q，其颜色集分别为 C_1、……、C_q，对应于 $q \geq 2$，那么我们有 $\hom(S, G) = \prod_{i=1}^{q} \hom(S_i, G_i)$，其中 G_i 是 G 在颜色为 C_i 的顶点上的限制，因此只需计算 $\hom(S_i, G_i)$，其中 $i \in [q]$。于是，假设 S 是连通的，令 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(S)$ 为引理 22 中的量子图。它在 $\leq 2^{\Delta(S)}|V(S)|$ 个顶点上的两个组成图及其系数可在 $O(4^{\Delta(S)}|V(S)|)$ 时间内计算出来。

我们首先描述情形 (a) 中的归约。引理 33 给出一个量子图 N，它能从具有 $\leq s$ 个顶点的图中筛出 $(C, |V(S)|)$-粗化图。N 的 poly(s) 个组成图及其系数可在 poly(s) 时间内求得。$(C, |V(S)|)$-粗化图恰好是颜色集为 C 且有 $|V(S)|$ 个顶点的图。根据事实 20，其中满射 S-着色的图与 S 同构。将推论 17 应用于 p_{col} 上的 X 和 N，我们便可通过 $2^{\Delta(S)}$poly(s) 次形如 $p_{\mathrm{col}}(R) = p(R^\circ)$ 的预言机调用，对 $\alpha_{S^\circ}|\mathsf{aut}(S^\circ)| \cdot \hom(S, G)$ 求值。此外，由于 $\hom(S, S) = 1$，我们还可以通过使用 $G = S$ 调用上述步骤来计算 $\alpha_{S^\circ}|\mathsf{aut}(S^\circ)| \neq 0$。由此即可计算 $\hom(S, G)$。

在情形（b）中，我们采用类似的方法，但会在宿主图中添加“填充”部分，以涵盖 $T \supseteq S$ 中多出的边。也就是说，对于任意 S-带色图 G，我们从 G 出发，按如下方式定义图 G_{pad}：

1. 对于每个顶点 $v \in V(T) \setminus V(S)$，向 G_{pa} 中添加一个与 v 颜色相同的顶点 $\quad$ d.
2. 对于每条边 $ij \in E(T) \setminus E(S)$，在 G_{pa} 中添加颜色 i 和 j 之间的所有边 uv $\quad$ d.

注意， G_{pad} 是 T-带色的。对于任意 T-带色图 H，考虑其对来自 S的顶点颜色和边颜色的限制 $H \otimes S$。从 H 到 G_{pad} 的任意同态，都可以通过删除不包含在 G中的像顶点和像边，限制为从 $H \otimes S$到 G 的同态。此外，存在一个与 G无关的数 $c_H \neq 0$，使得从 $H \otimes S$ 到 G 的任意同态 f，恰好有 c_H 个从H 到 G_{pad} 的同态限制为 f。也就是说，

$$\hom(H, G_{\mathrm{pad}}) = c_H \cdot \hom(H \otimes S, G). \tag{5}$$

令 $C_S \subseteq C_T$表示 S和 T的颜色。我们定义 $\eta = (C_S,\ C_T \setminus C_S,\ |V(S)|,\ |V(T)| - |V(S)|)$，并用 $\mathcal{C}$表示满足 $H \in \mathcal{H}$和 c的 T-带色、 η-粗化图 H^c的集合： $V(H) \to C$使得 $H^c \otimes S$是满射式 S-带色的。注意， $\mathcal{C}$可能包含同构图对。事实上，由于对于所有 $H \in \mathcal{C}$， $|V(H \otimes S)| = |V(S)|$，由事实 20 可得

$$H \otimes S \simeq S \quad \text{for all } H \in \mathcal{C}. \tag{6}$$

利用推论 17，在 p^{col} 上使用 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{N}$ ，因此我们可以使用 $2^{\Delta(S)}\mathrm{poly}(s)$ 次预言机调用来求值

$$\sum_{H \in \mathcal{C}} \alpha_{H^\circ} \hom(H, G_{\mathrm{pad}}) \ = \ \sum_{H \in \mathcal{C}} c_H \alpha_{H^\circ} \hom(H \otimes S, G) \ = \ \sum_{H \in \mathcal{C}} c_H \alpha_{H^\circ} \hom(S, G),$$

其中等式由 (5) 和 (6) 得出。注意，最后一个求和的范围是 $H \in \mathcal{C}$ ，但只涉及来自 S 的同态计数。由于所有图 $H \in \mathcal{C}$ 都恰好有 $|V(T)|$ 个顶点，根据情形（b）的假设，它们的系数 α_{H° 的符号都相同，因此可得 $q_{\mathcal{C}} := \sum_{H \in \mathcal{C}} c_H \alpha_{H^\circ} \neq 0$。与情形 (a) 一样，我们随后可以通过设置 $G = S$ ，利用额外的预言机调用确定 $q_{\mathcal{C}}$ ，最后计算 $\hom(S, G)$。

情形 (c) 可类似于情形（b）证明：我们构造 G_{pad}，定义 $\mathcal{C}$，并按照上述方法求值 $\sum_{H \in \mathcal{C}} c_H \alpha_{H^\circ} \hom(S, G)$。$\mathcal{C}$ 中的所有图都是 T-着色的，并且恰好有 $|V(T)|$ 个顶点，因此它们是 T 的边子图。根据情形 (c) 的假设，这只剩下 $\mathcal{C}$ 中 T 的重新着色版本，因此 $q_{\mathcal{C}} = \sum_{H \in \mathcal{C}} c_H \alpha_{H^\circ} \neq 0$，我们可以像情形（b）中那样继续计算 $\hom(S, G)$。 □

5 主归约的应用

在本节中，我们将展示定理 10 和定理 11 是定理 9 的应用。首先介绍关于 #Hom($\mathcal{H}$) 的结果，这是一个问题：计算从固定模式类 $\mathcal{H}$ 出发的无色同态计数。我们的新定理将 Dalmau 和 Jonsson [18] 在参数化复杂性中得到的一个基础性 #W[1]-困难性结果转化为一个 #P-困难性结果。

*定理 10 的证明。*我们通过从 #ColHom($\mathcal{G}$) 归约，证明 #Hom($\mathcal{H}$) 的 #P-困难性；对于多彩图网格类，该问题由定理 24 可知是 #P-困难的。作为 #ColHom($\mathcal{G}$) 的输入，设 $H \in \mathcal{G}$ 是一个多彩图网格， G 是一个带色图。根据定理的假设，我们可以在 poly($|V(H)|$) 时间内计算出一个多彩图 T ，使得 $T^\circ \in \mathcal{H}$ ，其中 S 是一面足够大的墙，能够将 H 包含为图子式。我们可以使用定理 23 在随机多项式时间内找到 S ，也可以使用确定性算法找到它。

利用引理 25，我们随后可以在多项式时间内计算一个图 G'，使其满足 $\hom(H, G) = \hom(S, G')$。利用定理 9，我们随后可以借助 $\hom(T^\circ, \cdot)$ 的预言机，在多项式时间内确定 $\hom(S, G')$：事实上，我们有 $\Delta(S) \leq 3$，并且 T°是 $\hom(T^\circ, \cdot)$ 的同态展开中唯一出现的图，因此，定理 9 中情形（b）的符号条件显然得到满足，从而得到了所需的到 #Hom($\mathcal{H}$) 的归约。 □

我们继续讨论子图计数问题 #Sub($\mathcal{H}$)。Marx 和作者 [15], 在原论文中为 #Sub($\mathcal{H}$) 证明 #W[1]-困难性，付出了大量技术努力；而后续工作 [14] 中发展出的工具也未能表明，普遍的 #P 困难性结果是触手可及的。

*定理 11 的证明。*由定理 24 和引理 25 可知，对于彩色墙这一类，问题 #ColHom($\mathcal{W}$) 是 #P 困难。我们将其归约到 #Sub($\mathcal{H}$)。设输入为 $S \in \mathcal{W}$ 和一个图 G，用于求解 #ColHom($\mathcal{W}$)。根据定理的假设，我们可以在多项式时间内找到一个图 $H \in \mathcal{H}$ 和其中的一个匹配 M，满足 $|E(S)|$ 条边。通过在 M中合并边的端点，可以在多项式时间内找到任意含有 $|E(S)|$ 条边的图，使其成为 H的某个商图的子图。特别地，存在一个多彩图 $T \supseteq S$，使得T° 是 H的商图。图 T 以及 T 中 S 的子图副本都可以在多项式时间内计算出来。

我们使用定理 9，通过一个用于计算 $\mathsf{sub}(H, \cdot)$ 的预言机，在多项式时间内计算 $\mathsf{hom}(S, G)$：注意，$\Delta(S) \leq 3$，并且所有图 $F \triangleleft \mathsf{sub}(H, \cdot)$ 的顶点数至多为 $|V(H)|$。由事实 2 可知，$T^\circ \triangleleft \mathsf{sub}(H, \cdot)$，因为 T°是 H的商图，而且所有满足 $|V(R)| = |V(T)|$的图 R在同态展开中具有相同的符号。应用情形（b）下的定理 9，即可得到从 #ColHom($\mathcal{W}$) 到 #Sub($\mathcal{H}$) 的所需归约。 □

我们最后给出关于诱导子图计数问题 #Ind($\mathcal{H}$) 的证明。

定理 12 的证明。 对于所有 $t \in \mathbb{N}$，我们都可以在多项式时间内计算出一个满足 $|V(H_t)| \geq t$ 的图 H_t。H_t 或其补图至少有一个的平均度为 $\Omega(t)$，不妨假设 H_t 具有这一性质；否则，我们可以对 H_t 和宿主图取补图，而不改变诱导子图计数。利用已知算法 [2, 事实 7], ，我们便可以在多项式时间内找到 H_t 中的一个 K_q 图子式模型，其中 $q \in$ 为 $\Omega(t/\sqrt{\log t})$。根据这个图子式模型，我们可以在 H_t 中找到一个墙子图 S，满足 $q' \in$ 为 $\overline{\Omega(t^{1/2-\epsilon})}$。

根据定理 24 和引理 25，对于彩色初等墙类 $\mathcal{E}$，问题 #ColHom($\mathcal{E}$) 是 #P 困难的。设 $W \in \mathcal{E}$，并令 G 为一个图。与上一段一样，我们可以找到一个图 $H_t \in \mathcal{H}$，使得对于 W 的一个细分 S，有 $S^\circ \subseteq H_t$。引理 25 使我们能够构造一个图 G'，使得 $\mathsf{hom}(W, G) = \mathsf{hom}(S, G')$。根据事实 3，图 $F \triangleleft \mathsf{ind}(H_t, \cdot)$ 至多有 $|V(H_t)|$ 个顶点；在这些图中，对于同态展开中满足 $|V(F)| = |V(H_t)|$的 F，图 H_t 本身是边极小的。因此，我们可以在情形 (c) 中调用定理 9，借助预言机在多项式时间内计算 $\mathsf{hom}(W', G')$，其中预言机用于计算 $\mathsf{ind}(H_t, \cdot)$。

□

6 结论与未来工作

我们证明了某些图参数族的 #P-困难性（p_t），其中每个参数 p 都是一个线性组合

$$p(\cdot) = \sum_F \alpha_F \,\mathsf{hom}(F, \cdot)$$

含有有限个项，并且展开包含可在多项式时间内构造的、树宽为多项式的图。首先，我们证明了从同态展开中出现的高树宽图计算彩色同态数量是 #P 困难的。随后，我们利用与量子图的张量积，将 p 的同态展开缩减为某个高树宽图 S的 $\mathsf{hom}(S, \cdot)$。结合刻画图 $S \triangleleft p$的已知组合学结果，这一归约得出了所需的 #P 困难性结果。

后续工作可能会有许多有趣的方向：最重要的是，定理 9 中的要求很可能可以弱化。除了对其他图的系数施加额外要求之外，我们能否仅要求对于某个超图 $T \supseteq S$满足 $T^\circ \triangleleft p$，并尽可能接近这一条件？甚至可能不必将 T 作为输入提供，因为或许可以利用 p这一预言机找到 T。

在关于复杂度单调性框架的初始论文之后，研究者运用代数和群论中的技术，找到了具有 $S \triangleleft p$、适用于有趣图模体参数的大树宽图 S p [38, 40, 41, 39, 22, 36]。这些技术能否也用于在多项式时间内构造这些图？此外，当这些技术确实能找到具体的大树宽图 $T \triangleleft p$（例如完全图）时，我们能否也找到有界度图 $T' \triangleleft p$，使定理 9 适用？

其他后续研究还包括基于指数时间假设 #ETH 的下界，这需要将 Marx 关于彩色同态的一项著名下界推广到“宏观”版本 [34]。在某些情况下，也有可能从主要证明中移除基数过滤器。这样便能得到只需调用预言机两次的归约，从而有望将其用于 C$_=$P 完全性结果 [13, 26]。此外，移除基数过滤器也可能使这些技术适用于模计数问题：按目前的形式，基数过滤器通过其系数引入了无法控制的除法，而用于满射 S-带色图的基于 CFI 的过滤器只需除以 2 的幂。

参考文献

[1] Samson Abramsky、Anuj Dawar 和 Pengming Wang。有限模型论中的卵石化余单子。载于第 *32* 届 *ACM/IEEE* 计算机逻辑年会，*LICS 2017*，冰岛雷克雅未克，*2017* 年 *6* 月 *20—23* 日，第 1—12 页。IEEE 计算机学会，2017 年。[2] Noga Alon、Andrzej Lingas 和 Martin Wahlen。最大团子式及一些子图同胚问题的近似。理论计算机科学，374(1-3)：149—158，2007 年。[3] Jendrik Brachter 和 Pascal Schweitzer。通过 Weisfeiler-Leman 维数系统研究有限群的同构不变量。载于 Shiri Chechik、Gonzalo Navarro、Eva Rotenberg 和 Grzegorz Herman（编），第 *30* 届欧洲算法年会，*ESA 2022*，*2022* 年 *9* 月 *5—9* 日，德国柏林/波茨坦，第 244 卷，*LIPIcs*，第 27:1—27:14 页。Schloss Dagstuhl—Leibniz 信息学中心，2022 年。[4] Marco Bressan 和 Marc Roth。退化图中的精确与近似模式计数：新算法、困难性结果与复杂性二分。载于第 *62* 届 *IEEE* 计算机科学基础年会，*FOCS 2021*，美国科罗拉多州丹佛，*2022* 年 *2* 月 *7—10* 日，第 276—285 页。IEEE，2021 年。[5] Karl Bringmann 和 Jasper Slusallek。有界树宽子图的检测算法很可能已经达到最优。载于 Nikhil Bansal、Emanuela Merelli 和 James Worrell（编），第 *48* 届国际自动机、语言与编程学术会议，*ICALP 2021*，*2021* 年 *7* 月 *12—16* 日，苏格兰格拉斯哥（线上会议），第 198 卷，*LIPIcs*，第 40:1—40:16 页。Schloss Dagstuhl—Leibniz 信息学中心，2021 年。[6] Jin-Yi Cai、Martin Fürer 和 Neil Immerman。图识别所需变量数量的最优下界。组合学，12(4)：389—410，1992 年。[7] Chandra Chekuri 和 Julia Chuzhoy。网格子式定理的多项式界。*ACM* 期刊，63(5)：40:1—40:65，2016 年。[8] Hubie Chen 和 Stefan Mengel。存在正查询的答案计数：一种复杂性分类。载于 Tova Milo 和 Wang-Chiew Tan（编），第 *35* 届 *ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI* 数据库原理研讨会论文集，*PODS 2016*，美国加利福尼亚州旧金山，*2016* 年 *6* 月 *26* 日—*7* 月 *1* 日，第 315—326 页。ACM，2016 年。[9] Jianer Chen 、 Xiuzhen Huang 、 Iyad A. Kanj 和 Ge Xia。通过参数化复杂性获得强计算下界。计算机与系统科学期刊，72(8)：1346—1367，2006 年。[10] Yijia Chen、Martin Grohe 和 Bingkai Lin。嵌入网格和墙的困难性。载于 Hans L. Bodlaender 和 Gerhard J. Woeginger（编），计算机科学中的图论概念——第 *43* 届国际研讨会，*WG 2017*，荷兰埃因霍温，*2017* 年 *6* 月 *21—23* 日，修订精选论文，第 10520 卷，计算机科学讲义，第 180—192 页。Springer，2017 年。[11] Yijia Chen、Marc Thurley 和 Mark Weyer。理解诱导子图同构的复杂性。载于第 *35* 届国际自动机、语言与编程学术会议论文集（*ICALP*），第 587—596 页，2008 年。[12] Radu Curticapean。简单、微小而缓慢的事物也能计数：论参数化计数复杂性。博士学位论文，萨尔兰大学，2015 年。[13] Radu Curticapean。奇偶分离：一种经过科学验证的永久值减重方法。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Michael Mitzenmacher、Yuval Rabani 和 Davide Sangiorgi（编），第 *43* 届国际自动机、语言与编程学术会议，*ICALP 2016*，*2016* 年 *7* 月 *11—15* 日，意大利罗马，第 55 卷，*LIPIcs*，第 47:1—47:14 页。Schloss Dagstuhl—Leibniz 信息学中心，2016 年。[14] Radu Curticapean、Holger Dell 和 Dániel Marx。同态是小子图计数的良好基础。

载于 Hamed Hatami、Pierre McKenzie 和 Valerie King（编），第 49 届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集，STOC 2017，加拿大魁北克省蒙特利尔，2017 年 6 月 19—23 日，第 210—223 页。ACM，2017 年。[15] Radu Curticapean 和 Dániel Marx。子图计数的复杂性：起作用的只有点覆盖数的有界性。载于第 55 届 IEEE 计算机科学基础年会，FOCS 2014，美国宾夕法尼亚州费城，2014 年 10 月 18—21 日，第 130—139 页。IEEE 计算机学会，2014 年。[16] Radu Curticapean 和 Mingji Xia。参数化永久值：亏格、顶点、图子式、模 2^k 求值。载于 Venkatesan Guruswami（编），IEEE 第 56 届计算机科学基础年会，FOCS 2015，美国加利福尼亚州伯克利，2015 年 10 月 17—20 日，第 994—1009 页。IEEE 计算机学会，2015 年。[17] Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。参数化算法。Springer，2015 年。[18] Víctor Dalmau 和 Peter Jonsson。从另一面看同态计数的复杂性。《理论计算机科学》，329(1)：315—323，2004 年。[19] Holger Dell、Martin Grohe 和 Gaurav Rattan。Lovász 遇见 Weisfeiler 和 Leman。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Christos Kaklamanis、Dániel Marx 和 Donald Sannella（编），第 45 届国际自动机、语言与编程学术会议，ICALP 2018，2018 年 7 月 9—13 日，捷克共和国布拉格，第 107 卷，LIPIcs，第 40:1—40:14 页。Schloss Dagstuhl—Leibniz 信息学中心，2018 年。[20] Holger Dell、Thore Husfeldt、Dániel Marx、Nina Taslaman 和 Martin Wahlén。永久值与 Tutte 多项式的指数时间复杂性。《ACM 算法汇刊》，10(4)：21:1—21:32，2014 年。[21] Harm Derksen。图同构问题与近似范畴。《符号计算期刊》，59 112，2013 81：—。[22] Julian Dörfler、Marc Roth、Johannes Schmitt 和 Philip Wellnitz。诱导子图计数：一种代数方法应对 #W[1]-困难性。载于 Peter Rossmanith、Pinar Heggernes 和 Joost-Pieter Katoen（编），第 44 届国际数学基础计算机科学研讨会，MFCS 2019，2019 年 8 月 26—30 日，德国亚琛，第 138 卷，LIPIcs，第 26:1—26:14 页。Schloss Dagstuhl—Leibniz 信息学中心，2019 年。[23] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。参数化复杂性。计算机科学专著。Springer，1999 年。[24] Zdenek Dvorák。根据同态数量识别图。《图论期刊》，64(4)：330—342，2010 年。[25] Jörg Flum 和 Martin Grohe。参数化复杂性理论。理论计算机科学丛书：EATCS 系列。Springer-Verlag，柏林，2006 年。[26] Lane A. Hemaspaandra 和 Mitsunori Ogihara。复杂性理论指南。Springer，2002 年。[27] Russell Impagliazzo、Ramamohan Paturi 和 Francis Zane。哪些问题具有强指数复杂性？《计算机与系统科学期刊》，63(4)：512—530，2001 年。[28] Mark Jerrum 和 Kitty Meeks。计数连通子图和图模式的参数化复杂性。《计算机与系统科学期刊》，81(4)：702—716，2015 年。[29] Mark Jerrum 和 Kitty Meeks。一些困难的参数化计数问题族。《ACM 计算理论汇刊》，7(3)：11，2015 年。[30] Mark Jerrum 和 Kitty Meeks。计数偶数与奇数诱导子图的参数化复杂性。《组合数学》，第 1—26 页，2016 年。[31] Balagopal Komarath、Anurag Pandey 和 Chengot Sankaramenon Rahul。图同态多项式的单调算术复杂性。载于 Mikolaj Bojanczyk、Emanuela Merelli 和 David P. Woodruff（编），第 49 届国际自动机、语言与编程学术会议，ICALP 2022，2022 年 7 月 4—8 日，法国巴黎，第 229 卷，LIPIcs，第 83:1—83:20 页。Schloss Dagstuhl—Leibniz 信息学中心，2022 年。[32] Bingkai Lin。k-二部团的参数化复杂性。载于第 26 届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集（SODA），第 605—615 页，2015 年。[33] László Lovász。大型网络与图极限，第 60 卷。美国数学学会，普罗维登斯，2012 年。[34] Dániel Marx。你能击败树宽吗？《计算理论》，6(1)：85—112，2010 年。[35] Daniel Neuen。有界树宽图的同态区分闭性。CoRR，abs/2304 07011，2023 年。[36] Norbert Peyerimhoff、Marc Roth、Johannes Schmitt、Jakob Stix 和 Alina Vdovina。参数化（模）

计数与 Cayley 图扩展图。在 Filippo Bonchi 和 Simon J. Puglisi（编者），第 *46* 届数学基础国际研讨会，*MFCS 2021，2021* 年 *8* 月 *23–27* 日，爱沙尼亚塔林，第 202 卷，*LIPIcs*，第 84:1–84:15 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2021 年。[37] David E. Roberson。奇同态与有界度图上的同态不可区分性。*CoRR*，abs/2206.10321，2022 年。[38] Marc Roth。通过拟阵格上的 Möbius 反演计数受限同态。在 Kirk Pruhs 和 Christian Sohler（编者），第 *25* 届欧洲算法年度研讨会，*ESA 2017，2017* 年 *9* 月 *4–6* 日，奥地利维也纳，*LIPIcs*第 87 卷，第 63:1–63:14 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2017 年。[39] Marc Roth 和 Johannes Schmitt。诱导子图计数：一种研究 #W[1]-困难性的拓扑方法。在 Christophe Paul 和 Michal Pilipczuk（编者），第 *13* 届参数化与精确计算国际研讨会，*IPEC 2018，2018* 年 *8* 月 *20–24* 日，芬兰赫尔辛基，*LIPIcs*第 115 卷，第 24:1–24:14 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2018 年。[40] Marc Roth、Johannes Schmitt 和 Philip Wellnitz。计数满足单调性质的小型诱导子图。在 Sandy Irani（编者），第 *61* 届 *IEEE* 计算机科学基础年度研讨会，*FOCS 2020，2020* 年 *11* 月 *16–19* 日，美国北卡罗来纳州达勒姆，第 1356–1367 页。IEEE，2020 年。[41] Marc Roth、Johannes Schmitt 和 Philip Wellnitz。检测和计数小子图，以及计算参数化 Tutte 多项式：通过环面网格和 Cayley 图扩展图得到的下界。在 Nikhil Bansal、Emanuela Merelli 和 James Worrell（编者），第 *48* 届自动机、语言与编程国际学术研讨会，*ICALP 2021，2021* 年 *7* 月 *12–16* 日，苏格兰格拉斯哥（线上会议），*LIPIcs*第 198 卷，第 108:1–108:16 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2021 年。[42] Leslie G. Valiant。计算永久值的复杂性。理论计算机科学，8:189–201，1979 年。[43] B. Weisfeiler 和 A.A. Lehman。将图约化为规范形式，以及在此约化过程中产生的代数。科学技术信息，第 *2* 辑，第 12–16 页，1968 年。[44] Boris Weisfeiler。关于图的构造与识别。《数学讲义》。Springer Berlin, Heidelberg，1976 年。[45] Virginia Vassilevska Williams 和 Ryan Williams。加权子图的查找、最小化与计数。*SIAM* 计算杂志，42(3):831–854，2013 年。