arXiv:2305.04770v1 [math.SG] 8 May 2023

条形码 EN 具有刘维尔填充的接触流形上的 Reeb 流的熵 S

ELIJAH FENDER、SANGJIN LEE 和 BEOMJUN SOHN

摘要。我们研究具有 Liouville 填充的接触流形上的 Reeb 流的拓扑熵。借助持久模理论，我们从填充的辛同调定义 SH条形码熵。我们证明，SH条形码熵与填充的选择无关，且条形码熵为 Reeb流的拓扑熵提供了一个下界。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识：持久模 4 3. 两种条形码熵 10 4. 条形码熵的比较 24 5. 辛同调条形码熵与 Reeb 流的拓扑熵 36 参考文献 47

1. 引言

持久模最初源于拓扑数据分析研究 [ZC05], , 后来由 Polterovich 和 Shelukhin 引入哈密顿动力学研究 [PS16]。此后，持久模已广泛应用于辛拓扑和接触拓扑。例如， [UZ16, Ste18, Zha19, CM21, KS21, All22, Kaw22, She22a, All23, Die23] 利用由各种弗洛尔同调构造的持久模，研究辛流形上的哈密顿动力学。在 [SZ21, She22c, She22b],中，作者研究了由 Liouville 域的辛同调构造的持久模及其应用。此外， [BHS21, Jan21, Jol21, LRSV21] 通过为曲面上的哈密顿同胚定义持久模，研究了C^0-辛拓扑。

本文将研究源自 Liouville 域过滤辛同调的持久模，以考察其接触边界上 Reeb 流的拓扑熵。在陈述我们的结果之前，我们先简要介绍本研究的背景与动机。

多项研究给出了这样的接触结构实例：对其中每一种结构，每个 Reeb 流都具有正的拓扑熵。例如，Frauenfelder 和 Schlenk [FS06] 以及 Macarini 和 Schlenk [MS11] 证明，对于某个黎曼流形的单位余切丛上的标准接触结构，其每个 Reeb 流都具有正的拓扑熵；更确切地说，该流形在 [MS11], 的意义下是能量双曲的。回顾一下，支撑单位余切丛上标准接触结构的每个接触形式，都可以实现为余切丛中一个沿纤维星形区域边界上的标准接触形式。在此背景下，作者研究了沿纤维星形区域上过滤包裹弗洛尔同调的某种指数增长率，以便给出 Reeb 流拓扑熵的下界。他们证明，如果这一指数增长率对一个 Reeb 流

为正，那么对每个 Reeb 流也都成立。利用这一观察，他们证明了能量双曲流形的单位余切丛上标准接触结构的每个 Reeb 流都具有正的拓扑熵。类似或相关的研究还见于 [Alv16a, Alv16b, Mei18, AM19, Alv19, ACH19, Dah20, Dah21, AP22]。

近年来，为了研究哈密顿微分同胚的拓扑熵，Çineli、Ginzburg 和 Gürel [CGG21] 从持久同调和拉格朗日Floer理论的视角引入了一种Floer理论熵，称为条形码熵。随后，[CGG21] 证明，条形码熵不超过哈密顿微分同胚的拓扑熵。在这一方法的基础上，Ginzburg、Gürel 和 Mazzucchelli [GGM22] 利用自由环空间上能量泛函的Morse同调，定义了黎曼流形单位切丛上测地流的条形码熵。随后，[GGM22] 证明，条形码熵是测地流拓扑熵的下界。

存在一些接触结构允许具有零拓扑熵的 Reeb 流，例如，S^2 的单位余切丛。对于这类接触结构，由 [FS06, MS11]，给出的 Reeb 流拓扑熵下界（即过滤包裹Floer同调的指数增长率）应当为零。然而，已知每个接触结构都允许存在具有正拓扑熵的 Reeb 流。这意味着，[FS06, MS11] 中所考虑的指数增长率可能无法充分检测此类 Reeb 流的拓扑熵。

另一方面，对于S^2, 的情形，已知存在具有正条形码熵的测地流，见 [GGM22，第 C 定理]。我们注意到，黎曼流形的测地流是其单位余切丛上的 Reeb 流。在这个例子中，[GGM22] 中的条形码熵或许能够揭示此类 Reeb 流拓扑熵的更多信息。这个例子促使我们将条形码熵的概念推广到 Reeb 流。

本文通过推广 [CGG21、GGM22]中的条形码熵，定义了 Reeb 流的条形码熵。更准确地说，我们将持久模理论应用于过滤辛同调，从而定义 Liouville可填充接触流形的 Floer理论熵。我们将 Floer理论熵称为辛同调条形码熵，或简称 SH-条形码熵。利用 SH条形码熵，我们证明以下结果：

- 接触流形的 SH条形码熵与填充的选择无关。
- SH条形码熵为 Reeb流的拓扑熵提供了一个下界。

更详细的结果将在下一小节中给出。

1.1. **结果**。 设 (Y,α) 是一个闭非退化接触流形。本文中，我们始终假设 $(Y,\ \alpha)$ 可实现为一个第一陈类消失的 Liouville 区域 (W,λ) 的边界。我们从 (W,λ) 的过滤辛同调构造一个持久模。然后，根据持久模理论中的著名结果结构定理，我们将这个持久模转化为一个条形码，即区间的多重集。条形码中的每个区间元素称为一条。我们用$B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda)$ 表示从 (W,λ) 的过滤辛同调构造的条形码。我们将辛同调条形码熵，或简称 SH-条形码熵，定义为在作用量过滤水平下，该条形码中长度不太短的条的数量的指数增长率。

由于其定义，SH条形码熵似乎取决于填充的选择。当一个接触流形存在两个不同的、第一陈类消失的 Liouville 填充时，相应的两个辛同调可能存在很大差异。例如，二维圆盘的辛同调消失，而具有单个边界的高亏格曲面的辛同调则是无限维的。即使两个不同的 Liouville 填充具有相同的辛同调，相应的条形码也可能存在相当大的差异。尽管如此，我们证明，SH条形码熵仅取决于接触流形（Y,α）。更准确地说，

定理 1.1 (= 定理 4.2)**.** 设(Y,α) 为一个具有 *Liouville* 填充(W_1,λ_1) 和(W_2,λ_2) 的闭非退化接触流形，且其第一陈类均为零。那么，由(W_1,λ_1) 和(W_2,λ_2) 的辛同调分别定义的(Y,α) 的SH-条形码熵彼此相等。

证明的关键在于存在一个常数 $C = C(Y,\alpha)>0$，使得

$$B_{\mathrm{SH}}(W_1,\lambda_1)_+^{\leq C} = B_{\mathrm{SH}}(W_2,\lambda_2)_+^{\leq C},$$

其中，$B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda)_+^{\leq C}$表示从 Liouville 域 (W,λ) 的辛同调构造的条形码中，长度不超过C 且左端点为正的条的多重集。常数$C(Y,\alpha)$仅取决于接触边界，与填充无关。利用这一观察，我们将证明两个条形码$B_{\mathrm{SH}}(W1,\lambda_1)$和$B_{\mathrm{SH}}(W2,\lambda_2)$的指数增长率相同。完整证明见第 4.2 节。

由于 SH条形码熵的定义受到 [CGG21, GGM22], 的启发，因此自然可以预期，这些论文中得到的结果能够推广到 SH条形码熵的情形。在此，我们证明以下定理，它是 [CGG21, 定理 A] 以及 [GGM22, 定理 A] 的类似结果。

定理 1.2 (=定理 5.1)。 设$(Y,\ \alpha)$ 是一个闭非退化接触流形，并且存在某个第一陈类消失的李乌维尔填充。则SH条形码熵$(Y,\ \alpha)$ 小于或等于$(Y,\ \alpha)$的 *Reeb* 流的拓扑熵。

本文中定理 1.2 的证明遵循与 [CGG21, GGM22] 相同的思路。回顾一下，辛同调可以表示为一列哈密顿函数 $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 对应的 Hamilton Floer 同调的直接极限。我们将H_i 的哈密顿弗洛尔同调的生成元理解为两个拉格朗日子流形的交点,

$$\text{对角线 } \Delta_W := \{(p,\ p) \in W \times W \,|\, p \in W\} \text{ 和图 } \Gamma_{H_i} := \left\{\left(p,\ \phi_{H_i}(p)\right) \,|\, p \in W\right\},$$

在乘积空间$W \times W$中，其中 ϕ_{H_i} 是由哈密顿函数 H_i 生成的 Hamilton 微分同胚。

利用 [CGG21 中的拉格朗日断层成像 概念，CGG22], 结合克罗夫顿不等式，我们将长度不太短的条的数量与图 Γ_{H_i} 的体积联系起来。最后，借助 Yomdin 定理 [Yom87], , 我们证明H_i 的图的体积增长率至多为拓扑熵。由此完成定理 1.2 的证明。详情参见第 5 节。

1.2. **进一步方向**。 本小节简要介绍一些可能的未来研究方向。

一个可能的后续研究方向是，为 SH条形码熵给出一个下界，作为 [CGG21、GGM22] 中定理 B 的对应结果。更确切地说，作者证明，对于哈密顿微分同胚和测地流，条形码熵分别不小于流限制在紧致不变双曲集上的拓扑熵。证明依赖于交叉能量定理[GG18，定理 6.1] 以及 [GGM22，命题 6.6]。如果能够证明 Reeb 版本的交叉能量定理，就可以证明给定 Reeb流的条形码熵不小于流限制在紧致不变双曲集上的拓扑熵。

另一个可能的研究方向是考察 SH条形码熵的（半）连续性性质。对于拓扑熵，Newhouse [New89] 证明了它在光滑流空间上关于C^∞-拓扑是上半连续的。这一结果直接蕴含了 Reeb 流的拓扑熵关于C^∞-拓扑的上半连续性。然而，对于条形码熵，甚至尚不清楚它在接触形式空间上关于C^∞-拓扑是否上半连续。

最后，可以问一下，在接触体积为一的接触形式空间上，SH条形码熵是否无界。在 [AASS21], Abbondandolo、Alves、Sa˘glam 和 Schlenk 证明，对于任意正实数 r，都存在一个接触形式，使得相应的拓扑熵

Reeb流为 r，且接触体积为 1。结合定理 1.2，即使体积固定，条形码熵仍然可以任意小。然而，条形码熵是否也可以任意大，目前尚不清楚。

1.3. **致谢**。 我们感谢 Viktor Ginzburg 在研讨会报告和一次私人交谈中为我们讲解了 [CGG21] 的核心思想。第二和第三位作者感谢 Jungsoo Kang 和 Otto van Koert 对初稿提出建议并给予宝贵意见。第三位作者感谢 Matthias Meiwes 的深入讨论和鼓励。

在这项工作期间，第一和第二位作者获得了基础科学研究院的资助（IBS-R003-D1）。第三位作者的研究获得了 Samsung Science and Technology Foundation（SSTF-BA1801-01）、韩国国家研究基金会项目（NRF-2020R1A5A1016126）以及 RS-2023-00211186 的资助。

2. 预备知识：持久模

本节回顾持久模的基本定义和事实。我们将回顾本文后续部分所需的内容，不过读者也可以从许多参考文献中找到更详细的介绍。例如，参见 [BL15、BV18、PRSZ20、UZ16、PSS17], 等。

2.1. **非阿基米德赋范向量空间**。

在第2.1节中，我们聚焦于非阿基米德向量空间 的概念，并介绍其基本概念与性质。有关详细说明，请参阅 [UZ16，第2节和 3]。

在第2节中，我们固定一个域 $\mathbb{k}$，并考虑 $\mathbb{k}$上的向量空间。

定义 2.1。

(1) 域 $\mathbb{k}$ 上的赋值 ν 是一个函数 $\nu\colon \mathbb{k}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，满足：*(V1)* $\nu(a)=\infty$ 当且仅当 $a=0$；*(V2)* 对任意 $a,b\in\mathbb{k}$，$\nu(ab)=\nu(a)+\nu(b)$；*(V3)* 对任意 $a,b\in\mathbb{k}$，$\nu(a+b)\geq \min\{\nu(a),\nu(b)\}$。*(2)* 若对所有非零 $a\in\mathbb{k}$ 均有 $\nu(a)=0$，则称赋值 ν 为平凡赋值。*(3)* 设域 $\mathbb{k}$ 配备了赋值 ν。域 $\mathbb{k}$ 上的非阿基米德赋范向量空间是一个二元组 $(V,\ell\colon V\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\})$，其中 V 是一个 $\mathbb{k}$-向量空间，ℓ 是定义在 V 上的函数，并满足：*(F1)* $\ell(x)=\infty$ 当且仅当 $x=0$；*(F2)* 对任意 $a\in\mathbb{k}$ 和 $x\in V$，$\ell(ax)=\ell(x)-\nu(a)$；*(F3)* 对任意 $x,y\in V$，$\ell(x+y)\leq \max\{\ell(x),\ell(y)\}$。

注 2.2. 本文中，除非另行指定其他赋值，否则我们假设每个域都赋有平凡赋值。

现在，我们来定义非阿基米德向量空间上的正交性这一概念。

定义 2.3. 设 (V,ℓ) 是 $\mathbb{k}$ 上的非阿基米德向量空间。

(1) 若有限有序集 $(v_1,\dots,v_r)$ 中的元素属于 V，且对所有 $a_1,\dots,a_r\in\mathbb{k}$，下式成立，则称该集**正交**：

$$\ell\left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i\right)=\max\{\ell(a_i v_i)\mid i=1,\dots,r\}.$$

(2) 一个**可正交化空间** (V,ℓ) 是定义在 $\mathbb{k}$ 上的有限维非阿基米德赋范向量空间 (V,ℓ)，且存在 V 的一个正交基。

我们将在后续章节中用到引理 2.4 和 2.5。第一次阅读时，可以先跳过引理 2.4、2.5 及其证明，等需要时再回来看。

引理 2.4 ([UZ16])。 设(C,ℓ_C)和(D,ℓ_D)是可正交化的 $\mathbb{k}$-空间，并设 $A:C\to D$ 是秩为 r 的线性映射。那么，C（分别为 D）存在一个正交基$\{v_1,\ldots,v_n\}$（分别为$\{y_1,\ldots,y_m\}$），使得

(1) $\{v_{r+1},\ldots,v_n\}$是$\ker A$ 的正交基，*(2)* $\{w_1,\ldots,w_r\}$是 $\mathrm{Im}A$ 的正交基，*(3)* 对所有 $i=1,\ldots,r$，$Av_i=w_i$，并且 *(4)* $\ell_C(v_1)-\ell_D(w_1)\le\cdots\le\ell_C(v_r)-\ell_D(w_r)$。

证明。 参见 [UZ16, 定理 3.4] 的证明。证明从略。 □

引理 2.5. 设 (V,ℓ) 是一个具有两个不同正交基的有限维非阿基米德赋范向量空间

$$\{v_1,\ldots,v_n\}\ and\ \{w_1,\ldots,w_n\}.$$

若 $\ell(v_1)\le\ell(v_2)\le\cdots\le\ell(v_n)$ 且 $\ell(w_1)\le\ell(w_2)\le\cdots\le\ell(w_n)$，则

$$\ell(v_i)=\ell(w_i),$$

对所有 $i\in$ 自然数集，$\ldots$，n。特别地，存在一个一一映射，将两个基对应起来并保持非阿基米德范数。

证明。 令$V_{<r}$为V的一个子空间，定义如下：

$$V_{<r}:=\{v\in V|\ell(v)<r\}.$$

由于 V是有限维的，因此存在唯一的实数有限序列（$r_0<r_1<\cdots<r_k$），使得

- $0=V_{<r_0}\subsetneq V_{<r_1}\subsetneq\cdots\subsetneq V_{<r_k}=V$，且
- 对于任意 $r\in[ri,\ ri+1)$，$V_{<r_i}=V_{<r}$。

我们注意到 t 该序列（$r_0,\ldots,r_k$）是（$V,\ \ell$）的一个不变量，不依赖于基的选择。 .

由于该序列决定了 $\ell(v_i)$ 和 $\ell(w_i)$，引理 2.5 成立。 □

2.2. **持久模**。 假设我们有一个有限维、可正交化的非阿基米德赋范向量空间（V,ℓ），并配备一个线性映射 $\partial:V\to V$，满足：

- $\partial\circ\partial=0$，并
- 对于所有 $v\in V$，$\ell(\partial v)\le\ell(v)$。

第一个条件意味着 ∂ 可以被视为微分映射。换句话说，(V,∂) 的同调向量空间，记作$H(V,\partial)$，定义为

$$H(V,\partial):=\ker(\partial)/\mathrm{Im}(\partial).$$

此外，由于V具有非阿基米德向量空间结构，且 ∂ 满足第二个条件，$H(V,\partial)$ 具有一种有趣的结构。这种有趣的结构称为持久模 结构，其定义如下：

定义 2.6. 一个**持久模**是一个二元组(V,π)，其中 V 是由向量空间组成的集合$\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，而 π 是由线性映射组成的集合$\{\pi_{s,t}:V_s\to V_t\}_{s\le t\in\mathbb{R}}$，满足以下条件：

(1) 对于任意 $s\le t\le r$，都有 $\pi_{s,\,r}=\pi_{t,\,r}\circ\pi_{s,\,t}$；

(2) 对所有 $t\in\mathbb{R},\pi_{t,\,t}:\ V_t\to V_t$是恒等映射。

在论文正文中，我们将把辛同调和哈密顿弗洛尔同调视为持久模，并研究它们的性质。为准备正文部分，我们将在第2节余下部分简要介绍与持久模概念相关的定义和性质。有关更多信息，请参阅 [BV18, PRSZ 20] 。

首先，我们给出一些持久模的例子。

例2.7.

(1) 第一个例子就是本小节开头提到的例子。假设给定的三元组 (V,ℓ,∂) 满足上述条件。令 $V^{<a}$ 为 V 的子空间，它由所有满足 $\ell(v) < a$ 的向量 v 组成。那么，关于 ∂ 的第二个条件表明，∂ 在 $V^{<a}$ 上的限制可以看作是一个从 $V^{<a}$ 到其自身的线性映射。因此，下述 $H^{<a}$ 是良定义的：

$$H^{<a} := \ker(\partial|_{V^{<a}})/\mathrm{Im}(\partial|_{V^{<a}}).$$

此外，对于任意的 $a \le b$，都存在一个包含映射 $\pi_{a,\,b}\colon\ V^{<a} \to V^{<b}$。容易观察到，$\pi_{a,\,b}$是一个链映射，并且诱导出一个从 $H^{<a}$到 $H^{<b}$ 的线性映射。再次记 $\pi_{a,\,b}$为 H^a 上的诱导映射。现在，以下是一个持久模：

$$H(V) := \left(\{H^{<a}\}_{a\in\mathbb{R}}, \{\pi_{a,b}\}_{a\le b\in\mathbb{R}}\right).$$

(2) 最简单的持久模是区间模。每个非空区间 $I \subset \mathbb{R}$ 定义如下一个持久模 $\Bbbk I$:

$$\Bbbk I_t := \begin{cases} \Bbbk \ if\, t \in I, \\ 0 \ otherwise. \end{cases} \qquad \pi_{s,t} := \begin{cases} id_{\Bbbk} \ if\, s,t \in I, \\ 0 \ otherwise. \end{cases}$$

(3) 设 $\{I_i | i \in$ 是指标集 $J\}$ 对应的一族区间 $I_i \subset \mathbb{R}$。设 $\{(\pi_i)_{s,t}\}_{s\le t}$是对所有 $i \in J$ 的区间持久模 $\Bbbk I_i$所对应的线性映射族。那么，这个族定义了如下持久模$\bigoplus_{i\in J} \Bbbk I_i$:

$$\left(\bigoplus_{i\in J} \Bbbk I_i\right)_t := \bigoplus_{i\in J} (\Bbbk I_i)_t, \pi_{s,t} := \bigoplus_{i\in J} (\pi_i)_{s,t}.$$

继续之前，我们先定义一类特殊的持久模。

定义2.8。 逐点有限维持久模，或简称**逐点有限维** 持久模，是指满足以下条件的持久模(V,π) ： 对于任意 $t \in \mathbb{R}$，V_t均为有限维，

我们注意到，逐点有限维持久模之所以特殊，是因为结构定理。结构定理证明，每个逐点有限维持久模都等价于区间模的直和。我们在定理 2.10 中陈述结构定理。在陈述定理之前，我们先定义持久模之间的等价这一概念。

定义2.9。 设(V,π) 和$(V\prime,\pi')$ 是两个持久模。

(1) 从**态射** $A : (V,\pi) \to (V\prime,\pi')$ 是一个线性映射族

$$\{A_t : V_t \to V'_t\}_{t\in\mathbb{R}},$$

使得对于所有 $s \le t$，下图都交换：

$$\begin{array}{ccc} V_s & \xrightarrow{\pi_{s,t}} & V_t \\ {\scriptstyle A_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A_t} \\ V'_s & \xrightarrow{\pi'_{s,t}} & V'_t \end{array}$$

(2) 若存在态射 $B : (V', \pi') \to (V, \pi)$，使得 $A \circ B$ 和 $B \circ A$ 分别是相应持久模上的恒等态射，则称态射 $A : (V, \pi) \to (V', \pi')$ 为同构。*(3)* 若存在同构 $A : (V, \pi) \to (V', \pi')$，则称两个持久模 (V, π) 和 (V', π') 同构。

我们注意到，态射的复合以及恒等态射都是自然定义的，因此我们在定义2.9中使用了它们，却没有对它们进行定义。

现在，我们可以陈述结构定理。Gabriel [Gab72] 证明了一个特殊情形，而 Crawley-Boevey [CB15] 证明了一般情形。更多细节请参见 [BV18，定理 2.7] 。

定理 2.10 (结构定理)。设（V，π）为一个持久模。若（V，π）是一个逐点有限维持久模，即对于每个 $t \in \mathbb{R}$，V_t 都是有限维的，那么（V，π）同构于若干区间模的直和。

根据定理 2.10，我们可以作如下定义：

定义 2.11。一个逐点有限维持久模（V，π）是

- 一个**有限型**持久模，如果 (V, π) 等价于有限个区间模的直和。等价地，除有限多个点 $t \in \mathbb{R}$ 外，存在 t 的一个邻域 U，使得 $\pi_{s,r}$ 在 $s < r$ 属于 U 时是一个同构。
- 一个持久模称为**局部有限型**，如果 (V, π) 同构于可数个区间模的直和，且这些区间的实端点构成 $\mathbb{R}$ 中的一个闭离散子集。等价地，除 $\mathbb{R}$ 中一个闭离散子集外，对所有 $t \in \mathbb{R}$，存在 t 的一个邻域 U，使得 $\pi_{s,r}$ 是同构，只要 $s < r$ 属于 U。

特殊的持久模类别，即逐点有限维持久模和（局部）有限型持久模，在本文中发挥着重要作用。下面的注记对其作用作了粗略说明：

注记 2.12。如前所述，我们将把辛同调和哈密顿弗洛尔同调视为持久模。根据辛几何可以证明，这些同调是（局部）有限型的持久模。这使我们能够统计满足某些条件的区间数量。我们的主要研究对象之一——条形码熵——定义为给定一列哈密顿弗洛尔同调时，弗洛尔同调中不太短的 区间数量的指数增长率。正式定义将在第 *3* 节给出。

我们注意到，持久模还有许多其他类别。参见 [BV18，第 3 节。1]。我们介绍另外两类，将在引理 2.17 中使用。

定义 2.13。

(1) 一个**可数区间可分解**的，或简称为**cid** 持久模，是一个等价于可数个区间模的直和的持久模。我们用 (cid) 表示 *cid* 持久模的集合。*(2)* 一个**q-tame** 持久模 (V, π) 是指满足对于任意 $a < b$，$\pi_{a,b}$ 具有有限秩的持久模。我们用 $(qtame)$ 表示 *q-tame* 持久模的集合。

我们以定义两种从一个持久模生成另一个持久模的运算来结束第2.2节。

定义2.14.

(1) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个严格递增函数。设 (V, π) 是一个持久模。**相对于 f 的 V 作用重参数化**，记为 $\mathrm{act}(V, f)$，是按如下方式定义的持久模：

$$\mathrm{act}(V, f) := \left(\{\mathrm{act}(V, f)_t := V_{f(t)}\}_{t \in \mathbb{R}}, \{f(\pi)_{a,b} = \pi_{f(a), f(b)}\}_{a \le b \in R}\right).$$

(2) 设 V_1 和 V_2 是两个条形码。我们称 $\boldsymbol{V_2}$ **与** $\boldsymbol{V_1}$ **在（作用量）重新参数化后相同**，如果存在一个严格递增函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得

$$V_1 = \mathrm{act}(V_2, f).$$

(3) 设(V,π) 为一个持久模，且 T 为实数。则$\mathbf{V}$ **在** $\boldsymbol{T}$ **处的**截断，记作$\mathrm{tru}(\boldsymbol{V,T})$，是一个持久模。

$$\mathrm{tru}(V,T) := \left(\{\mathrm{tru}(V,T)_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\mathrm{tru}(\pi,T)_{a,b}\}_{a\le b\in\mathbb{R}}\right),$$

定义如下：

$$\mathrm{tru}(V,T)_t = \begin{cases} V_t \ if\, t < T \\ 0 \ otherwise \end{cases}, \mathrm{tru}(\pi,T)_{a,b} = \begin{cases} \pi_{a,b} \ if\, b < T \\ 0 \ otherwise \end{cases}.$$

2.3. **交错距离**。 在第2节第2.2小节中，我们介绍了持久模及相关概念的定义。在本小节中，我们讨论两个持久模之间的距离。

在文献中，存在一种称为交错距离的距离函数。为了定义交错距离，我们需要以下定义：

定义 2.15. 设(V,π) 是一个持久模，且设 $\delta\in\mathbb{R}$。

(1) 我们将 $\boldsymbol{\delta}$**-平移** 定义为 (V,π) 的持久模 $(V\ [\delta],\pi[\delta])$，定义如下：

$$(V[\delta])_t := V_{t+\delta}, (\pi[\delta])_{s,t} = \pi_{s+\delta,t+\delta}.$$

(2) 对于 $\delta > 0$，我们将 $\boldsymbol{\delta}$**-平移态射** 定义为以下态射：

$$\Phi^{\delta}_{(V,\pi)} : (V,\pi)\to(V[\delta],\pi[\delta]), \left(\Phi^{\delta}_{(V,\pi)}\right)_t = \pi_{t,t+\delta}.$$

(3) 设 $F : (V,\pi) \to (V\prime,\pi')$ 是两个持久模之间的一个态射。那么，对于 $\delta > 0$，我们将使以下图表交换的态射记为 $\boldsymbol{F[\delta]}$:

$$\begin{array}{ccc} (V,\pi) & \xrightarrow{F} & (V',\pi') \\ {\scriptstyle \Phi^{\delta}_{(V,\pi)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{\delta}_{(V',\pi')}} \\ (V[\delta],\pi[\delta]) & \xrightarrow{F[\delta]} & (V'[\delta],\pi'[\delta]) \end{array}$$

利用持久模的δ-平移，我们按以下方式定义两个持久模之间的距离：

定义 2.16。

(1) 设 $\delta > 0$。若存在两个态射 $F : (V,\pi)\to(V\prime\ [\delta],\pi'[\delta])$ 和 $G : (V\prime,\pi')\to(V\ [\delta],\pi[\delta])$，使得以下图表交换，则称两个持久模 (V,π) 和$(V\prime,\pi')$ 是 $\boldsymbol{\delta}$**-交错的** :

$$(V,\pi) \xrightarrow{F} (V'[\delta],\pi'[\delta]) \xrightarrow{G[\delta]} (V[2\delta],\pi[2\delta]) \quad (V',\pi') \xrightarrow{G} (V[\delta],\pi[\delta]) \xrightarrow{F[\delta]} (V'[2\delta],\pi'[2\delta])$$

$$\Phi^{2\delta}_{(V,\pi)} \qquad\qquad \Phi^{2\delta}_{(V',\pi')}$$

(2) 两个持久模之间的交错 **距离** 定义如下：两个持久模（V，π）和（$V\prime$，π'）之间的 *s:*

$$d_{int}\left((V,\pi),(V',\pi')\right) := \inf\{\delta > 0 | (V,\pi)\ and\ (V',\pi')\ are\ \delta\text{-}interleaved.\}.$$

我们注意到，交错距离在持久模集合上定义的是一种伪度量结构，而非度量结构。换言之，可以找到两个持久模V和W，使得V与W不同构，但$d_{int}(V,W) = 0$。最简单的例子是一对区间模 $\Bbbk[0,1]$和 $\Bbbk(0,1)$。它们之间的交错距离为零，但它们不同构。

为得到度量结构，我们考虑等价关系$V \sim W$若$d_{int}(V,W) = 0$所确定的等价类集合。于是，交错距离函数在（等价类意义下的）持久模集合上赋予了度量结构。关于交错距离所诱导的（伪）度量结构的更多细节，请参阅 [BV18，第2节.4]。

对于 cid 持久模的等价类，存在唯一一个满足下半连续性的元素：对于每个 $t \in \mathbb{R}$,

$$V_t = \varinjlim_{s<t} V_s,$$

其中，直接系统由实数 $s < r < t$上的持久映射 $\pi_{s,r}$ 给出。这是等价类中唯一的一个元素，且它等价于由形如 $(a, b], (-\infty, b]$, 和 (a,∞) 的区间模的直和，其中 $a < b$ 为某些实数。我们用 （下） 表示具有下半连续性性质的持久模集合。

我们注意到，由 Floer 理论构造的每个持久模都将是具有下半连续性性质的可数区间可分解 q-tame 持久模。对于这一类持久模，交错距离赋予其度量结构。因此，我们可以考虑一个持久模的柯西序列。引理 2.17 关注的是持久模的柯西序列。

引理 2.17 (定理 4.25，见 [BV18])。 在 $(cid) \cap (qtame) \cap (lower)$ 中的每个柯西序列都有唯一的极限点。换言之，空间 $(cid) \cap (qtame) \cap (lower)$ 是完备的。

证明。 参见 [BV18，定理 4.25] 及其证明。 □

2.4. **条形码与瓶颈距离**。 我们回顾一下，根据结构定理（定理 2.10），每个逐点有限维持久模都同构于若干区间模的直和。由于我们考虑的是持久模的等价类，而不是持久模本身，因此每个逐点有限维持久模类型都同构于如下定义的条形码：

定义 2.18。

(1) 条形码 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 中区间的集合，即它是一个集合

$$B = \{ \text{an interval } I_i \subset \mathbb{R} | i \in \text{ an index set } J\}.$$

(2) 条形码中的区间称为该条形码的**条**。

为方便起见，我们将条形码 $B = \{I_i | i \in J\}$ 与一个持久模相对应。

$$\bigoplus_{i \in J} \mathbb{k} I_i.$$

引入条形码的目的是在 pfd 持久模的集合上定义另一种距离函数。更准确地说，我们在条形码集合上定义一种瓶颈距离。在本小节的后半部分，我们将陈述等距定理，该定理指出交错距离与瓶颈距离相同。然而，尽管这两种距离函数相同，但它们提供了衡量持久模之间距离的不同方式，而本文将同时采用这两种度量方式。

为了定义瓶颈距离，我们需要做如下准备：

- 给定一个区间 I 和一个正数 δ，令 $I^{-\delta}$ 表示将区间 I 向外扩展 δ后得到的区间。例如，若 $I = [a,b],$，则

$$I^{-\delta} = [a - \delta, b + \delta].$$

- 对于条形码B和正数 ϵ，令B_ϵ 表示B中所有长度大于 ϵ的条。

- 两个条形码 $B_1 = \{I_i \mid i \in J_1\}$、$B_2 = \left\{I'_j \mid j \in J_2\right\}$ 之间的匹配是一个双射 $\mu : \bigsqcup_{i \in J'_1} I_i \to \bigsqcup_{j \in J'_2} I'_j$，其中 $J'_1 \subset J_1$、$J'_2 \subset J_2$，并且 $\bigsqcup$ 表示不交并。在这种情况下，$\bigsqcup_{i \in J'_1} I_i$，或等价地，条形码 $B'_1 := \{I_i \mid i \in J'_1\}$，是 μ 的余像；而 $\bigsqcup_{j \in J'_2} I'_j$，或等价地，条形码 $B'_2 := \{I'_j \mid j \in J'_2\}$，是 μ 的像。

定义 2.19。

(1) 两个可数条形码 B 和 C 之间的 **δ-匹配**是一个匹配 $\mu : B \to C$，满足

- μ 的余像包含 $B_{2\delta}$，
- μ 的像包含 $C_{2\delta}$，并且
- 若 B 中的条 I 和 C 中的条 J 满足 $\mu(I) = J$，则 $I \subset J^{-\delta}, J \subset I^{-\delta}$。

(2) 两个可数的正规条形码 B 和 C 之间的**瓶颈距离**，记作 $b_{bot}(B, C)$，定义为所有满足存在 B 与 C 之间的 δ-匹配的 δ 的下确界。

现在，我们陈述等距定理，该定理指出，对于有限条形码，交错距离与瓶颈距离相同。

定理2.20 (等距定理)。 设 V 和 W 是两个逐点有限维持久模，且 $B(V)$ 和 $B(W)$ 是条形码，使得 V 与 $B(V)$（分别地，W 与 $B(W)$）作为持久模彼此同构。那么，

$$d_{int}(V, W) = d_{bot}(B(V), B(W)).$$

证明。 等距定理见 [BL15]。另见 [BL15，第 3 节和定理 3.5] 的证明及其中的参考文献。□

3. 双条形码熵

本文的主要思路是将持久模理论应用于辛同调。换言之，我们希望从辛同调构造持久模，并研究所构造的持久模。

在第 3 节中，我们重点讨论持久模的构造。我们首先简要回顾辛同调，并说明哪些持久模与辛同调相关。最后，我们定义本文的主要研究对象，称为条形码熵。

3.1. 设定与记号。

本小节将介绍我们关注的情形，以及该情形下使用的记号。

令 W 为一个 Liouville 域。换言之，W 是一个带边界流形，并配备一个 1-形式 λ，使得 $d\lambda$ 是 W 上的辛 2-形式。于是，边界 ∂W 是一个接触流形，且 λ 在 ∂W 上的限制是一个接触 1-形式。为简便起见，令 $\alpha := \lambda|_{\partial W}$。我们还假设 α 是一个非退化接触 1-形式。为后续使用，令 R_α 表示与 α 对应的 Reeb 向量场。全文中，我们进一步假设 W 的第一陈类为零。

令 $\widehat{W}$ 为 Liouville 域 W 的完备化。这意味着

- 作为集合，$\widehat{W} = W \cup (\partial W \times [1, \infty)_r)$（下标 r 表示 $[1, \infty)$-因子由 r 坐标化）其中 ∂W 与 $\partial W \times \{1\}$ 通过平凡识别对应，
- Liouville 一形式 λ 延拓为 W 上的 Liouville 一形式，为方便起见仍记作 λ，并且
- 在 $\partial W \times [1, \infty)$，$\lambda = r\,\alpha$.

为便于后续使用，我们在第 3.1 节余下部分中设定一些记号。

令$t > 1$为一个固定实数。那么，$\boldsymbol{W_t}$是W $\widehat{}$的一个紧子集，定义如下：

$$W_t := W \cup (\partial W \times [1, t]).$$

为了定义 $\widehat{}W$的辛同调，我们需要考虑光滑的 1-周期哈密顿函数族。换言之，我们考虑一个（依赖时间的）哈密顿函数$H : S^1 \times \widehat{}W \to \mathbb{R}$，其中$S^1$与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$等同。由于 $\widehat{}W$是一个辛流形，存在一个对应于H的哈密顿向量场。令$\boldsymbol{X_H}$表示该哈密顿向量场，即：

$$d\lambda(X_H, Y) = -dH(Y) \text{ for all vector field } Y \text{ on } \widehat{W}.$$

我们还为X_H在时间t处的映射规定一种记法。令 $\boldsymbol{\phi^t_H}$表示X_H在时间t处的映射。为方便起见，有时我们令 $\boldsymbol{\phi_H}$表示X_H在时间 1 处的映射，即 $\phi^1{}_H$。

出于技术原因，我们将考虑具有某些良好性质的哈密顿函数，定义如下：

定义 3.1. 设 H 是 $\widehat{}W$ 上的一个（随时间变化的）哈密顿函数。

(1) 如果存在两个实数 $r_0 > 1$ 和 T，使得 H 是**无穷远处线性**的，则称 H 为无穷远处线性。

- T 不是$(\partial W,\alpha)$的任何闭 *Reeb* 轨道的周期，并且
- 对于任意 $(t, r, x) \in S^1 \times (\partial W \times [r_0, \infty))$，$H(t, r, x) = $迹 $-C$，其中 C 为某个常数 $\in \mathbb{R}$。满足上述两个条件的常数 T 称为 **H 的斜率**。*(2)* 若 H 的每个不动点的线性化庞加莱回归映射都不以1 为特征值，则称 H 为**非退化**。

3.2. **哈密顿弗洛尔同调及相应的持久模**。我们通过回顾 Liouville 域上的哈密顿弗洛尔同调概念来开始第 3 节的主体部分。有关更多细节，请参阅 [Sal99、Sei08、AD14]。

设 $H : S^1 \times \widehat{}W \to \mathbb{R}$ 是一个时变哈密顿量，且 H 非退化并在无穷远处线性。我们用 $\mathscr{P}_1(H)$ 表示 H 的哈密顿流的 1-周期轨道集合。由于 H 在无穷远处线性，1-周期轨道，或等价地说，ϕ_H 的不动点，都是 W 中的点。由 H 的非退化性可知，不动点集合是孤立的。因此，我们得出 $\mathscr{P}_1(H)$ 是有限集。于是，可以如下定义一个有限维向量空间，以及由 H 所确定的该向量空间上的作用泛函：

定义 3.2.

(1) 设 $\mathbf{CF}(\boldsymbol{H})$ 表示如下定义的向量空间

$$\mathrm{CF}(H) := \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{P}_1(H)} \mathbb{Z}_2 \langle \gamma \rangle.$$

(2) $\mathbf{CF}(\boldsymbol{H})$ 上的作用泛函记为 $\mathscr{A}_{\boldsymbol{H}}$，定义如下：

- *for any* $\gamma \in \mathscr{P}(H)$,
$$\mathscr{A}_H(\gamma) = \int_\gamma \lambda - \int_0^1 H\big(t, \gamma(t)\big)\, dt,$$
- *for any* $a_i \in \mathbb{Z}_2$ *and* $\gamma_i \in \mathscr{P}(H)$ *such that* $\gamma_i \neq \gamma_j$ *for all* $i \neq j$,
$$\mathscr{A}_H\left(\sum_i a_i \gamma_i\right) := \max_i \{\mathscr{A}_H(\gamma_i) | a_i \neq 0\}.$$

(3) 对任意 $a \in \mathbb{R}$，我们定义子空间 $\mathrm{CF}^{<a}(H) \subset \mathrm{CF}(H)$ 为

$$\mathrm{CF}^{<a}(H) = \{x \in \mathrm{CF}(H) | \mathscr{A}_H(x) < a\}.$$

注记 3.3. 根据 *(2)* 的第二条，$(\mathrm{CF}(H), \mathscr{A}_H)$ 是一个可正交化的非阿基米德赋范向量空间。

现在，我们引入一个微分映射 $\partial : \mathrm{CF}(H) \to \mathrm{CF}(H)$，即满足 $\partial \circ \partial = 0$ 的线性映射。为了引入该映射，我们需要讨论几乎复结构的一种选择。

设 J 是（$d\lambda$）相容几乎复结构的光滑 S^1族。我们进一步假设，对于某个常数 $r_0 > 1$，J 在 $r \geq r_0$ 上是 SFT 型。换言之，J 在 $r \geq r_0$ 上满足以下条件：

- $J(\xi) = \xi$ 对于接触结构 $\xi = \ker(\alpha) \subset T(\partial W \times \{r\})$。
- $J^* \lambda = dr$，即 $J(\partial_r) = R$。
- J 在自然数集的 $\mathbb{R}$ 平移作用下是不变量。

We 记 $\mathscr{J}\mathrm{SFT}_{r_0}$ 为 $d\lambda$-相容的几乎复结构的集合，这些结构在 $r \geq r$ 中为 SFT 型 $_0$.

对于 x、$y \in \mathscr{P}_1(H)$，我们用 $\mathscr{M}(x, y; H, J)$ 表示从 x 到 y 的 Floer 圆柱模空间，或者等价地，表示下述方程的光滑解 u：$\mathbb{R} \times S^1 \to \widehat{W}$ 构成的模空间：

$$\partial_s u + J(t,u)(\partial_t u + X_H(t,u)) = 0, \lim_{s \to -\infty} u(s,\cdot) = x, \lim_{s \to +\infty} u(s,\cdot) = y,$$

其中 $(s, t) \in \mathbb{R} \times S^1$。我们回顾一下，$X_H(t, p)$ 在第 3.1 节中定义为 H_t 在点 p 处的哈密顿向量场。按照我们的约定，Floer 方程是哈密顿作用泛函 $\mathscr{A}_H$ 的梯度流线。

注意，若 $x \neq y$，则 $\mathscr{M}(x, y; H, J)$ 具有一个自由的 $\mathbb{R}$-作用。该 $\mathbb{R}$-作用由沿 s 坐标的 $\mathbb{R}$-平移定义。考虑商集 $\mathscr{M}(x, y; H, J)/\mathbb{R}$。

对于 x、$y \in \mathscr{P}_1(H)$，我们如下定义 $n(x, y) \in \mathbb{Z}_2$：若 $x \neq y$，且商集 $\mathscr{M}(x, y; H, J)/\mathbb{R}$ 是有限集，则 $n(x, y)$ 定义为集合 $\mathscr{M}(x, y; H, J)/\mathbb{R}$ 中元素个数的奇偶性。若上述条件任一不成立，则 $n(x, y) = 0$。于是，可以定义一个线性映射 $\partial = \partial_{H,J} : \mathrm{CF}(H) \to \mathrm{CF}(H)$，满足

$$\partial y := \sum_{x \in \mathscr{P}_1(H;\beta)} n(x,y)x \text{ for all } y \in \mathscr{P}(H).$$

对于 $J \in \mathscr{J}\mathrm{SFT}_{r \geq r_0}$，$\partial \circ \partial = 0$ 的一般选取，更多解释请参见 [Sal99, 第 3 节.2]。我们称这样的 J 是 H –正则的，或简称**正则**。因此，对于这样的 J，偶对 $(\mathrm{CF}(H), \partial_{H,J})$ 构成一个链复形。对于该链复形及其同调，我们记作：

定义 3.4。

(1) 若一对 (H, J) 满足以下条件，则称其为 *Liouville* 流形 $(\widehat{W}, \lambda)$ 上的 *Floer* 数据：
- $H : S^1 \times \widehat{W} \to \mathbb{R}$ 是一个非退化的（依赖时间的）哈密顿函数，且在无穷远处线性。
- J 是某个 $r_0 > 1$ 下 $\mathscr{J}SFTr_0$ 中的几乎复结构。

(2) 对于 *Floer* 数据 (H, J)，有序对 $(\mathrm{CF}(H), \partial_{H,J})$ 简记为 $\mathbf{CF(H,J)}$。*(3)* $\mathrm{CF}(H, J)$ 的同调记作 $\mathbf{HF(H,J)}$，即

$$\mathrm{HF}(H,J) := \ker \partial_{H,J} / \mathrm{Im} \partial_{H,J}.$$

由于对于 $u \in \mathscr{M}(x, y; H, J)$，有 $0 \leq E(u) = \int \|\partial_s u\|^2 = \mathscr{A}_H(x) - \mathscr{A}_H(y)$，因此若 $\mathscr{A}_H(x) < \mathscr{A}_H(y)$，则不存在从 x 到 y 的 Floer 圆柱。这意味着，将 ∂ 限制在子空间 $\mathrm{CF}^{<a}(H)$ 上，会对任意 $a \in \mathbb{R}$ 给出 $\mathrm{CF}^{<a}(H)$ 的线性自同构。因此，下面的定义是合理的：

定义 3.5。 对于任意 $a \in \mathbb{R}$，$\mathbf{HF^{<a}(H, J)}$ 定义为 $(\mathrm{CF}^{<a}(H), \partial|_{\mathrm{CF}^{<a}(H)})$ 的同调，即 ，

$$\mathrm{HF}^{<a}(H,J) := \ker\left(\partial|_{\mathrm{CF}^{<a}(H)} : \mathrm{CF}^{<a}(H) \to \mathrm{CF}^{<a}(H)\right) \Big/ \mathrm{Im}\left(\partial|_{\mathrm{CF}^{<a}(H)} : \mathrm{CF}^{<a}(H) \to \mathrm{CF}^{<a}(H)\right).$$

现在，我们想讨论这样一个事实：$\mathrm{HF}(H,\ J)$ 和 $\mathrm{HF}^{<a}(H,\ J)$ 与 J 的选择无关。更确切地说，对于满足上述条件的两对 $(H,\ J_1)$ 和 $(H,\ J_2)$，我们将证明 $\mathrm{HF}(H,\ J_1)$ 与 $\mathrm{HF}(H,\ J_2)$ 之间存在线性同构。（分别地，对于任意 $a \in \mathbb{R}$，$\mathrm{HF}^{<a}(H,\ J_1)$ 和 $\mathrm{HF}^{<a}(H,\ J_2)$ 之间也存在线性同构。）

为证明这一点，设我们有两对 $(H^{\pm}, J^{\pm})$，满足上述条件，因此对所有 $a \in \mathbb{R}$，$\mathrm{HF}^{<a}(H^{\pm}, J^{\pm})$ 都有定义。此外，假设对所有 $t \in S^1$ 和 $p \in \widehat{W}$，$H^{+}(t, p) \leq H^{-}(t, p)$。根据这一假设，可以选取一族哈密顿量的光滑同伦 $\{H_s\}_{s\in\mathbb{R}}$，使得

$$H_s = H^{-} \text{ for } \forall s \leq -1,\ H_s = H^{+} \text{ for } \forall s \geq 1,\ \partial_s H_s \leq 0 \text{ for } \forall s \in \mathbb{R}.$$

类似地，设 $\{J_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ 是一族依赖于时间的几乎复结构的光滑同伦，使得

$$J_s = J^{-} \text{ for } \forall s \leq -1, J_s = J^{+}, \text{ for } \forall s \geq 1, \text{ for } \forall s \in \mathbb{R}, J_s \text{ is SFT-like on } r \geq r_s \text{ for some } r_s > 1.$$

光滑族 $\{J_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ 存在，因为 $\mathscr{J}^{\mathrm{SFT}_{r\geq r_0}}$ 的空间是可缩的。

设 $x^{\pm} \in \mathscr{P}_1(H^{\pm})$。我们将考虑从 x^{-} 到 x^{+} 的 Floer 圆柱模空间，或者等价地，考虑满足以下条件的光滑解模空间 $u\colon \mathbb{R}\times S^1 \to \widehat{W}$

$$\partial_s u + J_s(t,u)(\partial_t u - X_{H_s}(t,u)) = 0,\ \lim_{s\to-\infty} u(s,\cdot) = x^{-},\ \lim_{s\to+\infty} u(s,\cdot) = x^{+}. \tag{3.1}$$

我们将模空间记为 $\mathscr{M}(x^{-}, x^{+}; \{H_s\}, \{J_s\})$。

现在，我们可以如下定义 $\mathrm{m}(\mathrm{x}^{-}, \mathrm{x}^{+})$：若 $\mathscr{M}(\mathrm{x}^{-}, \mathrm{x}^{+}; \{\mathrm{H}_s\}, \{\mathrm{J}_s\})$ 是有限集，则将 $\mathrm{m}(\mathrm{x}^{-}, \mathrm{x}^{+})$ 定义为 $\mathscr{M}(\mathrm{x}^{-}, \mathrm{x}^{+}; \{\mathrm{H}_s\}, \{\mathrm{J}_s\})$ 中元素个数的奇偶性。若 $\mathscr{M}(\mathrm{x}^{-}, \mathrm{x}^{+}; \{\mathrm{H}_s\}, \{\mathrm{J}_s\})$ 不是有限集，则将 $\mathrm{m}(\mathrm{x}^{-}, \mathrm{x}^{+})$ 定义为零。

于是，延拓同态 $\Phi_{(H^{+}J^{+}),(H^{-},J^{-})} : \mathrm{CF}(H^{+}, J^{+}) \to \mathrm{CF}(H^{-}, J^{-})$ 定义为满足下式的线性映射

$$\Phi_{(H^{+},J^{+}),(H-+,J^{-})}(x^{+}) := \sum_{x^{-}\in\mathscr{P}_1(H^{-})} m(x^{-}, x^{+})x^{-}.$$

同样，对于 $\{J_s\}$ 的一般性选取，$\Phi_{(H^{+}J^{+}),(H-+,J^{-})}$ 是一个链映射。因此，$\Phi_{(H^{+},J^{+}),(H-+,J^{-})}$ 在 $\mathrm{HF}(H^{+}, J^{+})$ 与 $\mathrm{HF}(H^{-}, J^{-})$ 之间诱导出一个线性映射。此外，利用同伦的同伦论证，$\Phi_{(H^{+}J^{+}),(H-+,J^{-})}$ 在同调层面上不依赖于 $\{H_s\}$ 和 $\{J_s\}$ 的选取；更多说明见 [Sal99, 引理 3.12]。

对于解 3.1 的 $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^1 \to \widehat{\mathrm{W}}$：

$$E(u) = \mathscr{A}_{H^{+}}(x^{+}) - \mathscr{A}_{H^{-}}(x^{-}) + \int \partial_s H_s(t, u(s,t)). \tag{3.2}$$

由于 $\partial_s \mathrm{H}_s$ 在每一点都非正，对于所有的 $\mathscr{A}_{H^{+}}(\mathrm{x}^{+}) < \mathscr{A}_{H^{-}}(\mathrm{x}^{-})$，$\mathrm{m}(\mathrm{x}^{-}, \mathrm{x}^{+}) = 0$。于是，$\Phi_{(H^{+},\mathrm{J}^{+}),(\mathrm{H}-+,\mathrm{J}^{-})}$ 在 $\mathrm{HF}^{<a}(\mathrm{H}^{+}, \mathrm{J}^{+})$ 上的限制诱导出一个线性映射

$$\Phi^{<a}_{(H^{+},J^{+}),(H^{-},J^{-})} : \mathrm{HF}^{<a}(H^{+}, J^{+}) \to \mathrm{HF}^{<a}(H^{-}, J^{-}).$$

现在，我们考虑以下三个对 $(\mathrm{H}_i, \mathrm{J}_i)$，其中 $\mathrm{i} = 1$ 为 2、3，使得

- $\mathrm{H\,i}$ 是一个无穷远处线性的 1-周期非退化哈密顿函数，
- $\mathrm{J\,i}$ 是 $\mathrm{H\,i}$-正则的、与 $(\mathrm{d}\lambda)$ 兼容的 SFT 型几乎复结构，其中 $\mathrm{r} \geq \mathrm{r\,i}$ 对某个 $\mathrm{r\,i} > 1$ 成立，并且
- 对所有 $(\mathrm{t} \leq \mathrm{H1(t,\ p)} \leq \mathrm{H2(t,\ p)} \in \mathrm{H3(t,\ p)}\ (\mathrm{t} \in \mathrm{p})$ 均有 $\mathrm{S}^1 \times \widehat{\mathrm{W}}$。

然后，通过在 H_i 与 H_{i+1} 之间选取一族恰当的光滑函数 $\{H_s\}$，并选取一族恰当的几乎复结构 $\{J_s\}$，可以证明

$$\Phi_{(H_1,J_1),(H_3,J_3)} = \Phi_{(H_2,J_2),(H_3,J_3)} \circ \Phi_{(H_1,J_1),(H_2,J_2)}$$

在同调层面。

最后，我们令 $H_1 = H_2 = H_3 = H$ 和 $J_1 = J_3 \neq J_2$。然后，通过选择平凡选择，$\Phi_{(H_1,J_1),(H_3,J_3)}$ 在同调层面上是恒等态射。这证明了 $\Phi_{(H_1,J_1),(H_2,J_2)}$ 和 $\Phi_{(H_2,J_2),(H_3,J_3)}$ 是线性同构，即 $HF(H, J_1)$ 和 $HF(H, J_2)$ 是同一个向量空间。我们注意到，以上论证对 $HF^{<a}(H, J)$ 也成立。

现在，如果H是一个无穷远处线性且非退化的哈密顿量函数，我们就可以定义H的哈密顿弗洛尔同调，而无需提及特定的几乎复结构J。此外，我们还可以定义延拓同态，而无需提及特定的几乎复结构J_1, J_2.$\Phi_{H^-,H^+}: HF(H^-) \to HF(H^+)$，也无需提及特定的几乎复结构$J^-, J^+$。

定义 3.6。

(1) 设 H 是一个无穷远处线性且非退化的哈密顿函数。**H 的哈密顿弗洛尔同调$HF(H)$**（相应地，**H 的过滤哈密顿弗洛尔同调$HF^{<a}(H)$ 在 $a \in \mathbb{R}$**）是向量空间$HF(H)$（相应地，$HF^{<a}(H)$），定义如下：

$$HF(H) := HF(H, J), \quad HF^{<a}(H) := HF^{<a}(H, J)$$

对于任意 (H)-正则几乎复结构 (J)。

(2) 设 H_1, H_2 为无穷远处线性的非退化哈密顿函数。我们进一步假设，对于所有 $t \in S^1$ 和 $p \in \widehat{W}$，均有 $H_1(t, p) \leq H_2(t, p)$。从 H_1 到 H_2 的延拓同态（分别地，在 $\in \mathbb{R}$ 处从 H_1 到 H_2 的延拓同态）是如下定义的线性映射 $\Phi_{H_1,H_2}: HF(H_1) \to HF(H_2)$（分别为 $\Phi^{<a}: HF^{<a}(H_1) \to HF^{<a}(H_2)$）：

$$\Phi_{H_1,H_2} := \Phi_{(H_1,J_1),(H_2,J_2)}, \quad \Phi^{<a}_{H_1,H_2} := \Phi^{<a}_{(H_1,J_1),(H_2,J_2)}$$

对任意 H_i-正则几乎复结构 J_i，对于 $i = 1,2$。

在讨论辛同调的定义之前，我们想指出，H 的过滤 Hamilton Floer 同调可以视为一个持久模。回顾一下，持久模由两个族构成：一个是向量空间族，另一个是线性映射族。由于 $\{HF(H)^{<a}\}_{a\in\mathbb{R}}$ 给出了一个向量空间族，因此只需给出过滤 Hamilton Floer 同调之间的线性映射族。

注意，若 $a < b$，则根据定义，$CF^{<a}(H, J) \subset CF^{<b}(H, J)$。包含映射诱导出一个线性映射 $\iota^{a,b}_H: HF^{<a}(H) \to HF^{<b}(H)$。于是，数对 $\left(\{HF^{<a}(H)\}_{a\in\mathbb{R}}, \{\iota^{a,b}_H\}_{a\leq b\in\mathbb{R}}\right)$ 满足定义 2.6 中的条件。因此，可以定义如下：

定义 3.7. 设 H 是一个在无穷远处线性的非退化哈密顿函数。H 的**持久模**记为$\boldsymbol{B(H)}$，定义为由以下对象组成的持久模：

- 一个向量空间族 $\{B(H)_a := HF^{<a}(H)\}_{a\in\mathbb{R}}$，以及
- 一个线性映射族 $\left\{\iota_{a,b}^H : B(H)_a \to B(H)_b\right\}_{a\leq b\in\mathbb{R}}$。

引理 3.8. 设 $H: \widehat{W} \to \mathbb{R}$ 是一个非退化哈密顿函数，且 H 在无穷远处线性。那么，$B(H)$ 是一个具有下半连续性、有限型的持久模。

证明。 由于H非退化，$\mathcal{P}(H)$是有限集。换言之，$CF(H)$是有限维向量空间。只需证明$B(H)$是有限型持久模。下半连续性也可由链级的下半连续性推出。□

根据结构定理（定理 2.10），$B(H)$ 等价于由有限多个条组成的条形码。

我们通过证明引理 3.9 和 3.10 来结束第 3.2 节，后文将会用到这两个引理。

L引理 3.9. 设 $F,G : S^1 \times \widehat{W} \to \mathbb{R}$ 是非退化哈密顿函数，使得 t

- F 和 G 在无穷远处线性，且
- $F(t,\ p) \le G(t,\ p)$ 对所有 $(t,\ p) \in S^1 \times \widehat{W}$ 均成立。

那么，一族线性映射

$$\left\{\Phi_{F,G}^{<a} : B(F)_a = \mathrm{HF}^{<a}(F) \to B(G)_a = \mathrm{HF}^{<a}(G)\right\}_{a\in\mathbb{R}}$$

是 $B(F)$ 与 $B(G)$之间的态射。

证明。 注意到 $\Phi^{<a}{}_{F,G}$ 定义为 $\Phi_{F,G}$ 的限制。我们还注意到， $\iota^{a}{}_{,b\,F}$ 和 $\iota^{a}{}_{,b\,G}$ 由包含映射诱导。由于包含映射与延拓同态在链级交换，故有以下等式：

$$\Phi_{F,G}^{<b} \circ \iota_F^{a,b} = \iota_G^{a,b} \circ \Phi_{F,G}^{<a}. \tag{3.3}$$

这就完成了证明。 □

引理3.10。

(1) 设 $F : S^1 \times \widehat{W} \to \mathbb{R}$ 为一个在无穷远处线性的非退化哈密顿函数。对于任意常数 $c \in \mathbb{R}$，$B(F + c)$ 是 $B(H)$ 的 c-平移，即 $B(F + c)_a = (B(F)[c])_a$对所有 $a \in \mathbb{R}$均成立。*(2)* 设 $F,G : S^1 \times \widehat{W} \to \mathbb{R}$ 为具有相同斜率的非退化哈密顿函数，且 F 和 G 在无穷远处线性，特别是在 W_{r_0}之外，对于相同的 $r_0 > 1$均如此。那么，$B(F)$ 和 $B(G)$ 是$\|F - G\|_{\sup,W_{r_0}}$-交错的，其中

$$\|H\|_{\sup,W_{r_0}} := \sup\left\{|H(t,x)|\,\middle|\,(t,x) \in S^1 \times W_{r_0}\right\}.$$

证明。 对于第一项，我们想指出的是，F和$F + c$的链复形由相同的生成元生成，即 $\mathscr{P}_1(F) = \mathscr{P}_1(F + c)$。此外，很容易观察到，如果$J$是一个满足所有必要条件的几乎复结构，那么$CF(F)$和$CF(F + c)$上诱导的微分映射是相同的。

根据定义 3.2，对于任意 $\mathrm{v} \in \mathrm{CF}(\mathrm{F}) = \mathrm{CF}(\mathrm{F} + \mathrm{c})$，$\mathscr{A}_F(\mathrm{v}) = \mathscr{A}_{F+c}(\mathrm{v}) + \mathrm{c}$。因此，对于任意 $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$，$\mathrm{CF}^{<\mathrm{a}}(\mathrm{F} + \mathrm{c}) = \mathrm{CF}^{<\mathrm{a}+\mathrm{c}}(\mathrm{F})$。由此可得 $\mathrm{HF}^{<\mathrm{a}}(\mathrm{F} + \mathrm{c}) = \mathrm{HF}^{\mathrm{a}+\mathrm{c}}(\mathrm{F})$，即对于所有 $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$，$\mathrm{B}(\mathrm{F} + \mathrm{c})_a = (\mathrm{B}(\mathrm{F})[\mathrm{c}])_a$。

对于第二项，为方便起见，令 δ 为 $F - G$ 在 W_{r_0} 上的上确界范数，即，

$$\delta := \|F - G\|_{\sup,W_{r_0}}.$$

然后，很容易观察到

$$G(t,x) \le F(t,x) + \delta, F(t,x) \le G(t,x) + \delta \text{ for all } (t,x) \in S^1 \times \widehat{W}.$$

得益于引理 3.9，存在持久模之间的态射。

$$\Phi_{F,G+\delta} : B(F) \to B(G+\delta), \Phi_{G,F+\delta} : B(G) \to B(F+\delta).$$

此外，由于 $\delta \ge 0$，很容易观察到

$$\Phi_{F,F+2\delta}^{<a} = \iota_F^{a,a+2\delta}, \Phi_{G,G+2\delta}^{<a} = \iota_G^{a,a+2\delta} \text{ for all } a \in \mathbb{R}.$$

最后，我们看到以下图表。

$$B(F)_a \xrightarrow{\Phi^{<a}_{F,G+\delta}} B(G+\delta)_a \xrightarrow{\Phi^{<a}_{G+\delta,F+2\delta}} B(F+2\delta)_a \ ,\quad B(G)_a \xrightarrow{\Phi^{<a}_{G,F+\delta}} B(F+\delta)_a \xrightarrow{\Phi^{<a}_{F+\delta,G+2\delta}} B(G+2\delta)_a \ ,$$

$$\iota_F^{a,a+2\delta} \qquad\qquad \iota_G^{a,a+2\delta}$$

对于所有 $a \in \mathbb{R}$。

现在，第一项和方程（3.3）完成了第二项的证明。 □

注记 3.11. 更确切地说，两个持久模 $B(F)$ 和 $B(G)$ 通过延拓同态是 $\|F-G\|_{Hofer}$-交错的。证明使用不等式 (3.2)，与闭辛流形的情形完全相同。不过，对于本文中的论述，引理*3.10* 已经足够。

3.3. **由辛同调得到的条形码熵**。 在本小节中，我们简要回顾辛同调的定义。然后，我们定义由辛同调得到的条形码熵。关于辛同调的更多细节，请读者参阅 [FH94, Vit99, Sei08]。由于我们还研究非可缩轨道的辛同调，强烈建议读者也参阅[BPS03, Web06]。

如 [Vit99], 所述，$(\widehat{W},\lambda)$的辛同调定义为一个直接系统的直接极限。我们首先定义该直接系统。

我们考虑以下集合：

$$\mathscr{D} := \left\{\text{a nondegenerate Hamiltonian } H | H(t,p) < 0 \text{ for all } (t,p) \in S^1 \times W\right\}.$$

然后，可以在 $\mathscr{D}$ 上定义如下偏序：

$$H_1 \prec H_2 \iff H_1(t,x) \le H_2(t,x) \text{ for all } (t,x) \in S^1 \times \widehat{W}.$$

注意，若$H_1 \prec H_2$,，则存在一个从H_1 到H_2的延拓同态：

$$\Phi_{H_1,H_2} : \mathrm{HF}(H_1) \to \mathrm{HF}(H_2) \text{ and } \Phi^{<a}_{H_1,H_2} : \mathrm{HF}^{<a}(H_1) \to \mathrm{HF}^{<a}(H_2) \text{ for all } a \in \mathbb{R}.$$

然后，我们定义如下内容：

定义3.12。

(1) （W, λ）的辛同调，记为 *SH(W, λ)*，定义为以下直接极限：

$$\mathrm{SH}(W,\lambda) = \varinjlim_{(\mathscr{D},\prec)} \mathrm{HF}(H).$$

(2) （W, λ）在 $a \in \mathbb{R}$ 处的过滤辛同调，记为 *$SH^{<a}$(W, λ)*，定义为以下直接极限：

$$\mathrm{SH}^{<a}(W,\lambda) = \varinjlim_{(\mathscr{D},\prec)} \mathrm{HF}^{<a}(H).$$

由方程（3.3）和直接极限的泛性质，对于任意 a <b $\in \mathbb{R}$，$\{\iota^{a,b}_H\}^{(H,J)\in\mathscr{D}}$ 诱导映射

$$\iota^{a,b} : \mathrm{SH}^{<a}(W,\lambda) \to \mathrm{SH}^{<b}(W),$$

使得对于任意 H，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HF}^{<a}(H) & \xrightarrow{\iota^{a,b}_H} & \mathrm{HF}^{<b}(H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{SH}^{<a}(W,\lambda) & \xrightarrow{\iota^{a,b}} & \mathrm{SH}^{<b}(W,\lambda). \end{array}$$

注释 *3.13.* 辛同调 *SH(W, λ)* 可以计算为以下直接系统的直接极限

$$\left(\left\{\mathrm{SH}^{<a}(W,\lambda)\right\}_{a\in\mathbb{R}}, \left\{\iota^{a,b}\right\}_{a<b\in\mathbb{R}}\right),$$

i.e. SH(W, λ）$=\lim\longrightarrow_{a\in\mathbb{R}}\mathrm{SH}^{<a}$（$W$, λ）。这可以由直接极限的交换性证明，

$$\mathrm{SH}(W,\lambda) := \varinjlim_{H\in\mathscr{D}} \mathrm{HF}(H) = \varinjlim_{H\in\mathscr{D}} \varinjlim_{a\in\mathbb{R}} \mathrm{HF}^{<a}(H) = \varinjlim_{a\in\mathbb{R}} \varinjlim_{H\in\mathscr{D}} \mathrm{HF}^{<a}(H) =: \varinjlim_{a\in\mathbb{R}} \mathrm{SH}^{<a}(W,\lambda).$$

对于实数 $b \in \mathbb{R}$，在 $a < b$ 中取直接极限，直接极限的交换性还表明了每个 b 的下半连续性。

类似于定义 3.7，我们定义一个与 $\mathrm{SH}(W,\lambda)$ 对应的持久模。

定义 3.14。 $\mathrm{SH}(W,\lambda)$ 的持久模，记作 $B_{SH}(W,\lambda)$，定义为由以下内容组成的持久模，其中包括

- 一个向量空间族 $\{BSH(W,\lambda)a := \mathrm{SH}^{<a}(H)\}_{a\in\mathbb{R}}$，以及
- 一个线性映射族 $\{\iota a,\ b :\ BSH(W,\ \lambda)a \to BSH(W,\ \lambda)b\}_{a<b\in\mathbb{R}}$。

现在，我们可以证明引理 3.15。

引理 3.15. $\mathrm{SH}(W,\lambda)$ 对应的持久模是直接系统$\{B(H)|(H,J) \in (\mathscr{D},\prec)\}$的直接极限，即

$$B_{SH}(W,\lambda) = \varinjlim_{(\mathscr{D},\prec)} B(H).$$

证明思路。 可以直接证明$B_{SH}(W,\lambda)$满足泛性质，因为对所有$a \in \mathbb{R}$，$B_{SH}(W,\lambda)_a$都定义为一个直接极限。细节从略。□

我们想指出以下几点：假设(Y,α)满足非退化性，$B_{SH}(W,\lambda)$是一个逐点有限维持久模，即对所有$a \in \mathbb{R}$，$B_{SH}(W,\lambda)_a = \mathrm{SH}^{<a}(W,\lambda)$都是有限维的。因此，应用结构定理（定理 2.10），可以假设$B_{SH}(W,\lambda)$等价于一个条形码。现在，我们可以定义本文的一个主要对象。

定义 3.16.

(1) 设 B 为一个条形码。对于任意正实数 ϵ，$n_\epsilon(B)$ 定义为

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \ni n_\epsilon(B) := B \text{ 中长度大于 } \epsilon \text{的条形数量。}$$

(2) **ϵ-辛同调条形码熵（W,λ）**记作 $\hbar_\epsilon^{\mathrm{SH}}(W,\lambda)$，定义为

$$\hbar_\epsilon^{\mathrm{SH}}(W,\lambda) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\log\Big(n_\epsilon\big(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda),T)\big)\Big).$$

(3) **（W,λ）的辛同调条形码熵**记作 $\hbar^{\mathrm{SH}}(W,\lambda)$，定义为

$$\hbar^{\mathrm{SH}}(W,\lambda) := \lim_{\epsilon\searrow 0} \hbar_\epsilon^{\mathrm{SH}}(W,\lambda).$$

(ϵ-)辛同调条形码熵，其定义本身并不能明确判断是否有限，但由于它被接触边界上 Reeb 流的拓扑熵从上方所界，因此它是有限的，参见定理 5.1。回顾一下，对于光滑流，拓扑熵始终是有限的。此外，辛同调条形码熵不是零函数，参见注记3.18。

然而，(ϵ-)辛同调条形码熵被定义为 Liouville 域的熵。稍后，在第 4.2 节中，我们将证明当接触边界相同时，这两种辛同调条形码熵相等。此后，我们可以定义具有 Liouville 填充的接触流形 (Y,α) 的辛同调条形码熵，或简称为 (Y,α) 的 SH条形码熵。

注记3.17 (替代定义)。 为与 [GGM22], 一致，我们为$\hbar_\epsilon^{\mathrm{SH}}(W,\ \lambda)$引入另一个定义。令 $b_\epsilon(B_{\mathrm{SH}}(W,\ \lambda),\ T)$ 表示 B 中长度超过 ϵ 且左端点不超过 T 的条形数量。于是，根据截断的定义，

$$b_\varepsilon(B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda),T-\varepsilon) \leq n_\varepsilon(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda),T) \leq b_\varepsilon(B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda),T).$$

因此，$b_\varepsilon(B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda),T)$ 和 $n_\epsilon\big(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda),T)\big)$ 在 T 作用下的指数增长率相同。

注记3.18（无限长条）。 在 [Mei18], *Meiwes* 研究了 $\Gamma(\mathrm{SH}(W,\lambda))$ 的正性，即过滤辛同调的指数增长率，参见 [Mei18，定义4。2]。从条形码的角度来看，这个数可以解释为：左端点不超过 T 的无限长条数量关于 T 的指数增长率。这个数可以小于任意一个（ε-）辛同调条形码熵。不过，在以下意义上，这个不变量比条形码熵更“刚性”。

给定一个 *Liouville* 域$(W,\ \lambda)$，并令$(Wf,\ \lambda)$ 为由下式定义的 *Liouville* 域

$$W_f = \widehat{W} \setminus \{(r,x) | r > f(x), x \in \partial W\}, \lambda_f = \lambda|_{W_f}.$$

注意，Wf的接触边界为$(Y,\ f\ \alpha)$。于是，根据 [Mei18, Corollary 9.3]，$\Gamma(\mathrm{SH}(W,\ \lambda))$ 为正，当且仅当 $\Gamma(\mathrm{SH}(Wf,\ \lambda_f))$ 为正。基于这一事实，作者找到了正的 $\Gamma(\mathrm{SH}(W,\ \lambda))$的 *Liouville* 域实例，参见 [Mei18, Chapter12] 中的实例，包括具有奇异 *Weinstein* 结构的 $2n$ 维球。这些实例也确保了存在 *Liouville* 可填充的接触结构，使得每个接触形式都具有正的条形码熵。

3.4. **退化哈密顿函数的 Hamilton Floer 同调**。在第 3.4 节中，我们只考虑了非退化哈密顿函数。本小节中，为了在第 3.5 节定义另一种条形码熵，我们将介绍当哈密顿函数在无穷远处线性时，退化哈密顿函数的 Hamilton Floer 同调。

在本小节及接下来的小节中，设 $H\colon S^1 \times \widehat{W} \to \mathbb{R}$ 为一个哈密顿函数，且H在无穷远处是线性的，特别是在某个$r_0 > 1$对应的W_{r_0}之外。需要指出的是，在本小节及接下来的小节中，H不必是非退化的。现在，我们仿照定义3.12来定义H的哈密顿弗洛尔同调。

回顾一下，在定义3.12中，$\mathrm{SH}(W,\lambda)$被定义为一个直接极限。同样，我们将H的哈密顿弗洛尔同调定义为一个直接极限。为此，我们首先需要固定一个直接系统。

考虑以下集合：

$$\mathscr{D}_{\mathscr{H}} := \left\{\text{a nondegenerate Hamiltonian } G | G(t,p) < H(t,p) \text{ for all } (t,p) \in S^1 \times W\right\}.$$

于是，可以在 $\mathscr{D}$ 上定义如下偏序：

$$H_1 \prec H_2 \iff G_1(t,x) \le H_2(t,x) \text{ for all } (t,x) \in S^1 \times \widehat{W}.$$

注意，若$H_1 \prec H_2$,，则存在一个从H_1 到H_2的延拓同态：

$$\Phi_{H_1,H_2} : \mathrm{HF}(H_1) \to \mathrm{HF}(H_2) \text{ and } \Phi^{<a}_{H_1,H_2} : \mathrm{HF}^{<a}(H_1) \to \mathrm{HF}^{<a}(H_2) \text{ for all } a \in \mathbb{R}.$$

现在，我们 即使H是退化的，也可以按如下方式定义H的哈密顿弗洛尔同调 s:

定义 3.19。

(1) **哈密顿量H的 Floer 同调**，记作**HF(H)**，定义为以下直接极限：

$$\mathrm{HF}(H) := \varinjlim_{(\mathscr{D}_H,\prec)} \mathrm{HF}(F).$$

(2) **H的过滤哈密顿弗洛尔同调H在 a** $\in \mathbb{R}$处，记作**HF$^{<a}$(H)**，定义为以下直接极限：

$$\mathrm{HF}^{<a}(H) := \varinjlim_{(\mathscr{D}_H,\prec)} \mathrm{HF}^{<a}(F).$$

我们注意到，如果H是非退化的，那么H是 $\mathscr{D}_H$的唯一极大元。因此，对于非退化H，定义 3.6 和 3.19 给出的哈密顿弗洛尔同调相同。

与 SH(W,λ) 的情形类似，容易看出，方程（3.3）结合直接极限的泛性质，诱导出线性映射族 $\left\{\iota^{a,b}_{H}\right\}_{a\le b\in\mathbb{R}}$，使得对于每个 $(F,J)\in\mathscr{D}_H$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HF}^{<a}(F) & \xrightarrow{\iota_F^{a,b}} & \mathrm{HF}^{<b}(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{HF}^{<a}(H) & \xrightarrow{\iota_H^{a,b}} & \mathrm{HF}^{<b}(H). \end{array}$$

按照惯例，我们定义相应的持久模：

定义 3.20. H 的**持久模**，记为$\boldsymbol{B(H)}$，定义为一个由以下部分组成的持久模。

- 一个向量空间族 $\{B(H)a:=\mathrm{HF}^{<a}(H)\}_{a\in\mathbb{R}}$，以及
- 一族线性映射 $\left\{\iota_{a,\,b}H:\ B\ (H)\ a\ \to B\ (H)\ b\right\}_{a\le b\in\mathbb{R}}$。

与引理 3.15 类似，下面的引理很容易证明：

引理 3.21。持　久模 H 是直接系统 $\{B\,(F)|(F,\ J)\in(\mathscr{D}_H,\ \prec)\}$ 的直接极限，即　　，

$$B(H)=\varinjlim_{(\mathscr{D}_H,\prec)} B(F).$$

我们注意到，由于有限维向量空间的直接极限可能是无限维向量空间，因此不能断言 $B(H)$ 是逐点有限维持久模。因此，我们不能应用结构定理来证明 $B(H)$ 等价于一个条形码。在第 3.4 节的其余部分中，我们将利用引理 2.17 证明$B(H)$ 等价于一个条形码。注意，由于直接极限的交换性，$B(H)$ 再次具有下半连续性。

为了证明这一点，我们需要选择一个共尾序列 $\{H_i\in\mathscr{D}_H\}_{i\in\mathbb{N}}$。不失一般性地假设，所选共尾序列满足以下条件：

(i) 对所有 $i\in\mathbb{N}$，$H_i\prec H_{i+1}$；(ii) 对所有 $i\in\mathbb{N}$，H_i 与 H 在 $\widehat{W\backslash W_{r_0}}$ 上彼此重合；以及 (iii) 对所有 $i\in\mathbb{N}$，$\|H-H_i\|_{\sup,W_{r_0}}\le\frac{1}{2^i}$。

现在，可以证明引理 3.22。

引理 3.22. 设$\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 $\mathscr{D}_H$中满足 *(i)–(iii)* 的共尾序列。那么，$B(H)$ 是持久模序列$\{B(H_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$关于交错距离的极限。

证明。我们希望证明，对于任意 $\varepsilon>0$，存在自然数集$_\varepsilon\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $i\ge$自然数集$_\varepsilon$，都有 $d_{int}(B(H),B(H_i))<\epsilon$；或者等价地，$B(H)$ 和 $B(H_i)$ 是 ϵ-交错的。换言之，我们希望证明，对于所有 $i\ge$自然数集$_\varepsilon$，存在态射 $\Psi_{\infty,i},\Phi_{i,\infty}$，使得以下图表交换。

$$(3.4)\qquad B(H_i)\xrightarrow{\Phi_{i,\infty}}B(H)[\varepsilon]\xrightarrow{\Psi_{\infty,i}[\varepsilon]}B(H)[2\varepsilon]\ ,\ B(H)\xrightarrow{\Psi_{\infty,i}}B(H_i)[\varepsilon]\xrightarrow{\Phi_{i,\infty}[\varepsilon]}B(H)[2\varepsilon]\ ,$$

其中，$S^{\delta}{}_H$和 $S^{\delta}{}_{H_i}$是$B(H)$和$B(H_i)$上的 δ-平移态射，其定义见定义 2.15。

对于 $\varepsilon>0$，由于 (iii)，存在一个自然数集N_ε，使得 $\|H^j-H^i\|_{\infty,W_{r_0}}<\varepsilon$对所有$j>i>N_\varepsilon$均成立。于是，对于这样的$i$、$j$，$H_j\prec H_i+\varepsilon$属于 $\mathscr{D}$。

I为了定义 Ψ_{∞}、$_i$，我们注意到存在一个延拓同态

$$\Phi_{H_j,H_i+\varepsilon} : B(H_j) \to B(H_i+\varepsilon) = B(H_i)[\varepsilon].$$

此外，对于所有满足i、j、k且$k \geq j \geq i \geq$自然数集ε的情形，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} B(H_j) & \xrightarrow{\Phi_{H_j,H_i+\varepsilon}} & B(H_i+\varepsilon) = B(H_i)[\varepsilon] \\ {\scriptstyle \Phi_{H_j,H_k}}\downarrow & \nearrow_{\Phi_{H_k,H_i+\varepsilon}} & \\ B(H_k) & & \end{array} .$$

于是，由直接极限$B(H)$的泛性质，存在一个态射$\Psi_{\infty,i}$: $B(H) \to B(H_i)[\varepsilon]$，这正是我们希望构造的。

为了定义$\Phi_{i,\infty}$，我们注意到，由于$B(H)$是一个直接极限，因此存在一个态射

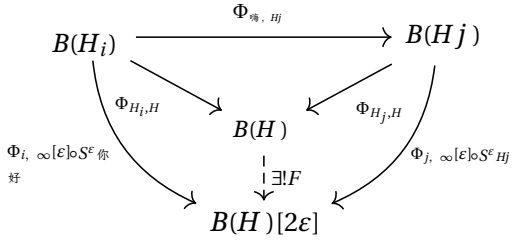
$$\Phi_{H_i,H} : B(H_i) \to B(H).$$

令$\Phi_{i,\infty} := S^{\varepsilon}{}_H \circ \Phi_{H_i,H}$。

那么，(3.4)中的第一个图表是交换的，这是因为有如下观察:

$$\begin{aligned} \Psi_{\infty,i}[\varepsilon] \circ \Phi_{i,\infty} &= \Psi_{i,\infty}[\varepsilon] \circ S^{\varepsilon}_H \circ \Phi_{H_i,H} \left(\because S^{\varepsilon}_H \circ \Phi_{H_i,H}\right) \\ &= S^{\varepsilon}_{H_i[\varepsilon]} \circ \Psi_{\infty,i} \circ \Phi_{H_i,H} \left(\because \text{Definition 2.15 (3)}\right) \\ &= S^{P}_{H_i[\varepsilon]}\varepsilon \circ S^{\varepsilon}_{H_i} \left(\because \text{the universal property of the direct limit } B(H)\right) \\ &= S^{2\varepsilon}_{H_i}. \end{aligned}$$

To 为证明 (3.4) 中的第二个图表交换，我们考虑以下图表 :



注意到，根据$\Psi_{\infty,i}$所满足的泛性质，可以看出$F = S^{e\varepsilon}{}_H$和$F = \Phi_{i,\infty}[\varepsilon] \circ \Psi_{\infty,i}$都使图表交换。由于$F$的唯一性，这证明了 (3.4) 中的第二个图表交换。□

推论 3.23 由引理 2.17、3.8 和 3.22 得出。

推论 3.23。对于满足第 *3.4* 节中条件的哈密顿量 H，$B(H)$ 等价于一个条码。

证明。引理 3.22 给出了一列持久模 $B(H_i)$，其收敛于 $B(H)$。此外，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，$H_i \in \mathscr{D}$。得益于引理 3.8，对于所有 i，$B(H_i)$ 是有限型的。于是，$B(H_i)$ 是一个 cid 且 q-tame 持久模。因此，引理 2.17 保证 $B(H)$ 是一个 cid 持久模。换言之，$B(H)$ 等价于由可数多个区间组成的条形码。该条形码还满足以下条件：对于每个区间 I，B 中包含 I 作为子集的条有有限多个。□

3.5. **凸径向哈密顿量的条形码熵**。 现在，我们定义另一种条形码熵，它不同于定义 3.16。为此，我们考虑下文定义的凸径向哈密顿函数。

定义 3.24。 若存在凸函数 $h:[1,\infty)\to[0,\infty)$，则称自治哈密顿量 $H:\widehat{W}\to\mathbb{R}$ 为斜率为 T 的**凸径向**函数。

- $H|_W\equiv 0$ 以及 $H(r,\ p)=h(r)$ 对于所有 $(r,\ p)\in[1,\infty)\times\partial W$,
- 存在常数 $r_0>1, C>0, T>0$，满足 $h(r)=$ 迹 $-C$，对所有 $r\geq r_0$,
- $h''(r)>0$ 当 $r\in[1,\infty)$ 满足 $h'(r)\in\{0\}\cup$ 谱(R_α),
- 且常数 T 不是 $(\partial W,\alpha)$ 的任何闭 *Reeb* 轨道的周期。

若无歧义，我们将哈密顿量简记为$H=h(r)$。对于凸径向哈密顿量$H=h(r)$，哈密顿向量场X_H在 $[1,\infty)\times Y$上由 $h'(r)R_\alpha$ 给出，在 W上则为零。因此，将 H限制在每个超曲面 $\{r\}\times\partial W$上的哈密顿 1- 映射，就是在(Y,α)上生成的 Reeb 流从时刻 0 到时刻t的映射，而在内部则为恒等映射。基于此，我们考虑凸径向哈密顿量来模拟 Reeb 流。稍后在 4.1 节中，我们将证明条形码$B(H)$同样模拟条形码$B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda)$。

直接计算可知，X_H 的 1-周期轨道要么是W 上的常值解，要么是$(1,r_0]\times Y$上的非常值解，其形式为 $\{r_\gamma\}\times\gamma$。这里，γ 表示某个闭Reeb轨道，而r_γ 是满足$h'(r_\gamma)=T_\gamma$的唯一实数，γ表示该轨道的周期。该 1-周期轨道的哈密顿作用量对于常值解为零；对于非常值解则为$r_\gamma\cdot h'(r_\gamma)-h(r_\gamma)$。注意，作用量仅取决于相应闭Reeb轨道的周期。基于这一观察，我们定义重参数化函数s_h：$[0,T]\to[0,C]$，将周期转换为哈密顿作用量。

引理 3.25。 对于斜率为 T 的凸径向函数 $H=h(r)$，定义*reparametrization func- tion* s_h为满足以下条件的函数：对于 $t\in[0,T]$, $s_h(t)=r\,h'(r)-h(r)$ *for* $h'(r)=t$。于是，重参数化函数是良定义的，并且是从 $[0,T]$到 $[0,C]$的单调递增双射。

证明。对于 $1\leq r_1<r_2$，满足

$$[r\,h'(r)-h(r)]_{r_1}^{r_2}=\int_{r_1}^{r_2}(r\,h'(r)-h(r))'\,dr=\int_{r_1}^{r_2}r\,h''(r)\,dr$$

由h的凸性，我们得到

$$(h'(r_2)-h'(r_1))\leq[r\,h'(r)-h(r)]_{r_1}^{r_2}\leq r_0(h'(r_2)-h'(r_1)) \tag{3.5}$$

当 $h'(r_1)=h'(r_2)$ 时，该方程意味着 $r_1h'(r_1)-h(r_1)=r_2h'(r_2)-h(r_2)$。因此，重参数化函数 s_h 是良定义的。根据该方程，该函数还是严格递增的连续函数。通过验证 $s_h(0)=1\cdot 0-0=0$ 以及 $s_h(T)=r_0T-h(r_0)=C$，我们得出重参数化函数 s_h是从 $[0,T]$到 $[0,C]$的单调递增双射。□

为了计算凸径向哈密顿量 $B(H)H=h(r)$的条形码，我们将使用具有受控行为的精确扰动。将 $\mathscr{P}_\alpha^{<T}$ Reeb$\widehat{}$向量场 R_α 的周期小于 T的闭 Reeb 轨道集合记为该集合。设 $f\colon W\to\mathbb{R}$ 是某个 Morse 函数 $f_0\colon W\to[-1,0]$ 的一个延拓，该函数支撑在小邻域 W_{1+r_h}内，其中 $h'(r_h)<T_{\min}$，这里 $T_{\min}$ 是最短闭 Reeb 轨道的周期。我们进一步假设在 $r_0\in(1/4,1+r_h)$内不存在临界点。接下来，设 g为一个满足以下条件的 1-周期哈密顿量：

- $g_t=g(t,-):\widehat{W}\to[-1,0]$ supported in
$$V_h=\coprod_{\gamma\in\mathscr{P}_\alpha^{<T}}V_{h,\gamma},$$
其中，$V_{h,\gamma}$是 $\{r_\gamma\}\times\mathrm{Im}(\gamma)$ 的一个小闭邻域，其中 $V_{h,\gamma}\subset(1+r_h,r_0)\times Y$

- 对于充分 足够小的 $\delta > 0$ 时，$X^{H+\delta g}$ 在（$1 + r_h$，r_0）$\times Y$中的 1-周期轨道恰好是

$$\{\hat{\gamma}, \check{\gamma} : \gamma \text{ is a closed Reeb orbit with period less than } T\}$$

其中 $\mathrm{Im}(\hat{\gamma}) = \mathrm{Im}(\check{\gamma}) = \{r_\gamma\} \times \mathrm{Im}(\gamma)$ 对于 $r\gamma$，且 $h'(r\gamma) = T\gamma$ 是 γ 的周期，并且

$$\mathcal{A}_{H+\delta g}(\hat{\gamma}) = \mathcal{A}_H\left(\{r_\gamma\} \times \gamma\right) + \delta = s_h(T_\gamma) + \delta, \quad \mathcal{A}_{H+\delta g}(\check{\gamma}) = \mathcal{A}_H\left(\{r_\gamma\} \times \gamma\right) = s_h(T_\gamma),$$

- 1-周期轨道 $\hat{\gamma}$ 和 $\check{\gamma}$ 是非退化的，
- 对于任意 $J \in \mathcal{J}^{\mathrm{SFT}_m}$，$\mathcal{M}(\check{\gamma}, \hat{\gamma}; H + \delta g, J)$ 由两个 Floer 圆柱组成，并且
- 这两个 Floer 圆柱在 $\mathcal{M}(\check{\gamma}, \hat{\gamma}; H + \delta g, J)$ 中始终位于支撑集 $(1 + r_h, r_0) \times Y$ 内。

这样的g 可以通过在X_H的每条周期轨道上定义某个 Morse 函数来构造，详见[CFHW96，命题 2.2。]

定义 3.26。 如果三元组(h, f, g)满足上述条件，我们称其为带有 *Morse* 扰动数据(f, g)的**凸函数** h。

对于三元组 (f, g, h)，存在 $\delta_0 = \delta_0(f, g, h)$，使得对于每个 $0 < \delta < \delta_0$，$X_{H+\delta(f+g)}$ 的 1-周期轨道要么是对应于$f|_W$的临界点的常值解，要么是来自每条 Reeb 轨道 γ 的非常值解 $\hat{\gamma}$、$\check{\gamma}$。常值解的作用量介于 $[0, \delta]$ 之间。对于三元组 (f, g, h)，能量极小的 Floer 圆柱也是可控的。

引理 3.27。 设$\{J_\delta\}_{\delta<\delta_0}$是 $\mathcal{J}^{SFT}_{r_0}$ 的子集，使得

- J_δ是$H + \delta(g + f)$-正则的，即 $\partial_\delta := \partial^{H+\delta(f+g)} J_\delta$是良定义的，且 $\partial_\delta \circ \partial_\delta = 0$和
- 极限$\lim_{\delta\to 0} J_\delta = J_0$对某个 $J_0 \in \mathcal{J}^{SFT}{}_{r_0}$在 C^∞-拓扑下成立。

于是，存在一个常数 $\delta_1 = \delta_1(f, g, h, \{J_\delta\})$使得，对每个 $\delta < \delta_1$，$\langle \partial_\delta x_\delta, y_\delta \rangle = 0$对与具有相同周期的 *Reeb* 轨道相对应的 x_δ、y_δ都成立。

证明。 证明过程遵循 [CFHW96, 第 3 章。]。对于 x_δ、$y_\delta \in \{\hat{\gamma}、\check{\gamma}\}$，在 $\mathcal{M}(\check{\gamma}, \hat{\gamma}; H + \delta(g + f), J_\delta)$ 中恰有两个 Floer 圆柱，其余模空间均为空集。因此，对于 $\delta < \delta_0$，$\langle \partial_\delta x_\delta、y_\delta \rangle = 0$始终成立。

假设存在一个趋于零的正实数序列 $\{\delta_i\}_{i\in N}$，使得对于某些x^{δ_i}、y^{δ_i}，有$\langle \partial_{\delta_i} \rangle = 1$，其中$x^{\delta_i}$、$y^{\delta_i}$分别对应于具有相同周期的 Reeb 轨道 $\gamma^x_{\delta_i}, \gamma^y_{\delta_i}$。根据上述讨论，$\gamma^x_{\delta_i} \neq \gamma^y_{\delta_i}$。由于周期小于$T$的 Reeb 轨道数量有限，取一个子序列后，我们可以假设 $\gamma^x_{\delta_i}, \gamma^y_{\delta_i}$不依赖于 δ_i。

根据 ∂_δ 的定义，存在一个 Floer 圆柱 u_i，其属于 $\mathcal{M}(\mathrm{x}^{\delta_i}, \mathrm{y}^{\delta_i}; \mathrm{H} + \delta_i(\mathrm{g} + \mathrm{f}), \mathrm{J}^{\delta_i})$。此类圆柱的作用量恰好为 δ_i。由于 γ^x 和 γ^y 不同，经过平移后，我们假设 $\mathrm{u}_i(0,)$ 与 $[1+\mathrm{r}_h$ 相交，其中 $\mathrm{r}_1] \times \mathrm{Y} \setminus \mathrm{V}$，且 $\mathrm{Y} \setminus \mathrm{V}$ 是 g 的支撑集。根据 Gromov-Floer紧性，取一个子序列，u 在 $\mathrm{C}^\infty\mathrm{loc}$ 中收敛到某个 u_0。由于 $\mathrm{u}_i(0,)$ 收敛于 u(0,)，因此环路 u(0,) 也与 $[1 + \mathrm{r}_h$ 相交，其中 $\mathrm{r}_1] \times \mathrm{Y} \setminus \mathrm{V}$。

由于 $\mathrm{E}(\mathrm{u}_i) = \delta_i \to 0$，u 的能量为零。根据定义，$|\partial_s \mathrm{u}| = 0$对所有点均成立，且 u 与 s 无关，因此 $\mathrm{u}(\mathrm{s}, -) : \mathrm{S}^1 \to \widehat{\mathrm{W}}$ 必须是 H 的 1-周期解。然而，由于环路 u(0,) 与 $[1 + \mathrm{r}_h$，$\mathrm{r}_1] \times \mathrm{Y} \setminus \mathrm{V}$ 相交，u(0, –) 不是一个 1-周期轨道，这就产生了矛盾。因此，存在一个常数 $\delta_1 = \delta_1(\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}, \{\mathrm{J}_\delta\})$，使得对于每个 $\delta < \delta_1$，对于对应于具有相同周期的 Reeb 轨道的 x_δ、y_δ，均有$\langle \partial_\delta \mathrm{x}_\delta, \mathrm{y}_\delta \rangle = 0$。□

借助于 引理 3.27，我们可以刻画凸径向哈密顿量的条形码。在此之前。

引理 3.28. 设(W, λ)是一个 *Liouville* 域，且 $H = h(r)$是斜率为 T 的凸径向哈密顿量。那么，持久模 $B(H)$是一个下半连续的有限型持久模，其中

- 维数 $H^*(W)$ 个条的左端点为零，且
- 2×（周期为 t 的闭*Reeb*轨道数量）个条，其端点为 sh（t），其中 $t \in$谱$^{<T}$（$R\alpha$）。

证明。对于带有 Morse 扰动数据（f，g）的凸函数h，考虑一族哈密顿量$\{H_\delta := H + \delta\ (f+g)\}_{\delta<\delta_0}$）以及 $\{J_\delta\}_{\delta<\delta_0} \subset \mathscr{J}\mathrm{SFT}_{r_0}$ 中的一族 1-周期几乎复结构，使得每个J_δ 都是H_δ-正则的，并且存在J_0，使得J_δ 在J_0 中按C^∞拓扑收敛。

注意，$\{H_\delta\}$给出 $\mathscr{D}_H$的共尾序列。对于每个 $\delta < \delta_1$，其中 $\delta_1 = \delta_1$（f，g，h，$\{J_s\}$）来自引理 3.27，链复形 $\mathrm{CF}(H_\delta)$ 由以下内容组成

- （f的临界点数量）个生成元，其作用量介于 $[0,\delta]$之间，
- （周期小于t的闭 Reeb 轨道的数量）个作用量为$sh(t)$的生成元，并且
- (周期小于t的闭Reeb轨道数量) 个作用量为$sh(t)$ 的生成元 $+\delta$。

我们首先证明$B(H)$是有限型持久模。对于每个$a \in \mathbb{R}$，$\dim \mathrm{HF}^{<a}(H_\delta)$一致地有上界，即（$f$的临界点数）$+2\cdot$（周期小于$T$的闭Reeb轨道数）。特别地，当$a \le 0$时，$\mathrm{HF}^{<a}(H_\delta) = 0$。对每个$a$取直接极限后，我们得出，对于每个$a \in \mathbb{R}$，$\mathrm{HF}^{<a}(H)$都是有限维向量空间；特别地，当$a \le 0$时为0。

对于任意满足 $\mathrm{a} \le \mathrm{b}$ 且 $[\mathrm{a},\mathrm{b}) \cap \mathrm{s}_h\left(\{0\} \cup \text{谱}^{<T}(\mathrm{R}_\lambda)\right) = \phi$, $\iota^{a,b}\mathrm{H}_\delta$ 在充分小时是一个同构，因为 $\mathrm{CF}^{<a}(\mathrm{H}_\delta) = \mathrm{CF}^{<b}(\mathrm{H}_\delta)$。取直接极限可知，$\iota^{a,b}\mathrm{H}_\delta$ 也是一个同构。因此，下半连续性对所有 $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$ 均成立，而连续性除有限集 $\mathrm{s}_h\left(\{0\} \cup \text{谱}^{<T}(\mathrm{R}_\lambda)\right)$ 外均成立。因此，持久模 B (H) 是一个具有有限型的下半连续持久模。

因此，$B(H)$ 是有限型条形码，其条的形式为 $(a,b]$ 或 (a,∞)。注意，$B(H)$ 中各条的端点是集合 $s_h\left(\{0\} \cup \text{谱}^{<T}(R_\lambda)\right)$ 的元素。由于

$$\|H - H_\delta\|_{\sup} = \delta \cdot \left\|f+g\right\|_{\sup} \le \delta,$$

存在从 $B(H_\delta)$ 到 $B(H)$ 的 δ-匹配。假设 $3\times\delta$ 小于集合 $s_h\left(\{0\} \cup \text{谱}^{<T}(R_\lambda)\right)$ 中元素之间的最小差值，则 $B(H)$ 中的每条都长于 3δ。因此，从 $B(H_\delta)$ 到 $B(H)$ 的 δ-匹配是一个满射。

现在证明，具有零作为左端点的条有 $\dim(\mathrm{H}^*(\mathrm{W}))$ 个。由于 f 是 W 上的 Morse 函数，对于 $\delta < \mathrm{a} < \mathrm{s}_h(\mathrm{T}_{\min})$，$\mathrm{HF}^{<a}(\mathrm{H}_\delta) = \mathrm{H}^*(\mathrm{W})$。由于不存在作用量介于 $(\delta, \mathrm{s}_h(\mathrm{T}_{\min}))$ 之间的生成元，$\iota^{a,b}\mathrm{H}_\delta = \mathrm{id}$ 对任意 $\mathrm{a},\mathrm{b} \in (\delta, \mathrm{s}_h(\mathrm{T}_{\min})]$ 均成立。因此，对于 B (H_δ)，恰有 $\dim(\mathrm{H}^*(\mathrm{W}))$ 条包含 $(\delta, \mathrm{s}_h(\mathrm{T}_{\min})]$。根据 δ-匹配，对于 B (H)，恰有 $\dim(\mathrm{H}^*(\mathrm{W}))$ 条包含 $(2\delta, \mathrm{s}_h(\mathrm{T}_{\min}) - \delta]$。由于这些条可能的左端点只有 0，且形式为 $(0, \mathrm{a}]$ 或 $(0,\infty)$ 的条必须包含 $(2\delta, \mathrm{s}_h(\mathrm{T}_{\min}) - \delta]$，因此恰有 $\dim(\mathrm{H}^*(\mathrm{W}))$ 条的左端点为 0。

回顾一下，具有作用量 \(s\{v1\}(t)\) 和 \(s\{v2\}(t)\{v3\}\) 的生成元的数量恰好等于（周期为 \(t\) 的闭 Reeb 轨道的数量）。因此，恰好有（周期为 \(t\) 的闭 Reeb 轨道的数量）条以 \(s\{v4\}(t)\{v5\}\) 和 \(s\{v6\}(t)\) 分别为端点的条形。根据引理 3.27，\(B (H\{v10\})\) 中不存在 \((s\{v7\}(t), s\{v8\}(t)\{v9\}\)。因此，任何端点大于 \(\{v11\}\) 的条形，其长度都大于 \(\{v12\}\)。通过 \(\{v13\}\) 匹配，这些条形对应于 \(B (H)\) 中的某些条形，而端点 \(s\{v14\}(t)\) 和 \(s\{v15\}(t)\{v16\}\) 只能对应于 \(s\{v17\}(t)\)。反过来，这些是唯一能够与某个以 \(s\{v18\}(t)\) 为端点之一的条形相匹配的条形。因此，\(B (H)\) 中恰好有（周期为 \(t\) 的闭 Reeb 轨道的数量）条以 \(s\{v20\}(t)\) 为端点的条形。 \(\{v21\}\)

我们如下定义另一种条形码熵：设H是一个斜率为T的给定凸径向哈密顿量H。由于H是凸径向哈密顿量，存在常数$r_0 > 1$和C，使得在W_{r_0}之外，$H = Tr - C$。现在，我们选取一个满足以下条件的序列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

- a_i satisfies that $\left(i - \frac{1}{2^i}\right) < a_i < \left(i + \frac{1}{2^i}\right)$, and

- a_iT不是任何闭Reeb轨道的周期，且该闭Reeb轨道属于 α。

由于第二个条件，$H_i := a_iH$是一个凸径向哈密顿函数。

由引理 3.28 可知，对于所有$i \in \mathbb{N}$，$B(H_i)$都是有限型持久模。因此，以下定义是合理的：

定义 3.29。 设$\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是上述构造的哈密顿函数序列。

(1) 序列 **ϵ-条形码熵**$\{\boldsymbol{H_i}\}$，记作 $\hbar_\epsilon(\{\boldsymbol{H_i}\})$，定义为

$$\hbar_\epsilon(\{H_i\}) := \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{a_i T} \log n_\epsilon\left(\mathrm{tru}(B(H_i), a_i C)\right).$$

(2) 序列**的条形码熵**$\{H_i\}$，记作$\hbar(\{\boldsymbol{H_i}\})$，定义为

$$\hbar(\{H_i\}) := \lim_{\epsilon\searrow 0} \hbar_\epsilon(\{H_i\}).$$

我们注意到，tru 在定义2.14中定义，而n_ϵ在定义 3.16 (1) 中定义。

注3.30。

(1) 我们注意到，根据定义 *3.29*，$\hbar(\{H_i\})$似乎取决于$\{H_i\}$的选择。然而，我们将在下一节证明$\hbar(\{H_i\})$与$\{H_i\}$的选择无关，因为$\hbar(\{H_i\}) = \hbar^{SH}(W,\lambda)$。*(2)* 我们还注意到，对于任意条形码 B，若$\mathrm{tru}(B,T)$中的条 b 长度为 $> \epsilon$，则 b 的左端点应小于或等于 $T - \epsilon$。

4. 条形码熵的比较

我们在第 3 节中定义了两种不同的条形码熵概念。在第 4.1 节中，我们比较了这两种不同的条形码熵，并证明它们相同。我们将在第 4.1 节中证明这种等价性，并将其称为辛同调的条形码熵。此外，我们还将在第 4.2 节中证明，辛同调的条形码熵是边界接触流形的不变量。在最后一个小节中，我们将比较辛同调的条形码熵与 Liouville 域的其他条形码熵；后者是通过将类似的思路应用于正辛同调和 Rabinowitz Floer 同调而定义的。

4.1. 两个条形码熵的等价。

在本小节中，我们证明定义3.16和3.29中的两个条形码熵彼此相同。

换言之，我们证明如下结论：

定理 4.1。 在第 *3.1* 节的设定下，对于任意定义$\hbar(\{H_i\})$的凸径向哈密顿函数序列$\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，

$$\hbar(\{H_i\}) = \hbar^{SH}(W,\lambda).$$

证明。 设$H = h(r)$是一个凸径向函数，其线性部分为$Tr - C$。证明定理 4.1 的策略是证明

$$n_{r_0\epsilon}\left(\mathrm{tru}(B(H),C)\right) \le n_\epsilon\left(\mathrm{tru}(B_{SH}(W,\lambda),T)\right) \le n_\epsilon\left(\mathrm{tru}(B(H),C)\right). \tag{4.1}$$

如果 (4.1) 中的不等式对任意 H 都成立，那么可以对序列 $\{H_i := a_i H_1\}$ 的每个元素应用这些不等式（关于 $\{H_i\}$ 的构造和记号，见第 3.5 节）。于是有

$$n_{r_0\epsilon}\left(\mathrm{tru}(B(H_i),a_iC)\right) \le n_\epsilon\left(\mathrm{tru}(B_{SH}(W,\lambda),T)\right) \le n_\epsilon\left(\mathrm{tru}(B(H),a_iC)\right).$$

通过测量上述各项随 i 增大时的指数增长率，可以得到

$$\hbar_{r_0\epsilon}(\{H_i\}) \le \hbar_\epsilon^{SH}(W,\lambda) \le \hbar_\epsilon(\{H_i\}).$$

并且，当令 ϵg 0 时，可以证明定理 4.1。

注意，(4.1) 比较了条形码 $B(H)$ 和 $B_{SH}(W,\lambda)$（及其截断）中的条形数量。由于直接比较 $B(H)$ 和 $B_{SH}(W,\lambda)$ 并不容易，因此在证明 (4.1) 时，我们采用四步论证。第一步，固定一个充分大的 K，然后比较 $B_{SH}(W,\lambda)$ 和 $B(KH)$，而不是比较 $B_{SH}(W,\lambda)$ 和 $B(H)$。第二步，选取另一个凸径向函数 G，使其在 W_{r_0} 上的作用如同 H，而在 W_{r_0+1} 之外的作用如同 KH。然后比较 $B(KH)$ 和 $B(G)$。第三步比较 $B(G)$ 和 $B(H)$，最后一步则利用前三步证明 (4.1)。

步骤 *1.* 首先，我们回顾一下，由于 α 是非退化的接触 1-形式，因此存在有限多个周期 $< T$ 的闭 Reeb 轨道。设周期 $< T$ 的 Reeb 轨道的周期为 $\ell_1 < \cdots < \ell_m$，并设 ℓ_{m+1} 是闭 Reeb 轨道的最小周期 $> T$。

根据引理 3.25，每个凸径向哈密顿量 H = h(r) 都对应一个单调递增双射函数 s_h：[0,T] → [0,C]。对于每个 i ∈ ℕ，我们通过定义 $s_i(x) = x$（对所有 $x < 0$）以及 $s_i(x) = x + a_i(C - T)$，将 a_iH 的重参数化函数 s_{a_i}h：$[0, a_i T] \to [0, a_i C]$，扩展为一个严格递增双射函数 s_i：ℝ → ℝ。根据 h 的凸性，我们得到以下结论：

- $s_i(t)$ 随着 i 的增加而减小，并
- 极限 $\lim_{i\to\infty} s_i(t) = t$.

因此，对于任意充分大的 k，我们有

$$0 < \ell_1 < s_k(\ell_1) < \ell_2 < \cdots < \ell_m < s_k(\ell_m) < T.$$

此外，对于任意满足上述条件的 k，可以观察到以下结论：

- 如果 $\ell_i < a \le b \le \ell_{i+1}$（分别地，$sk(\ell_i) < a \le b \le sk(\ell_{i+1})$，）$\iota_{a,b}$（分别地，$\iota_{a,b}$ Hk）是一个同构。换言之，tru(BSH (W, λ), t)（分别地，tru(B (Hk), sk(t))）满足 PRSZ20，定义 1.1] 意义下的下半连续性。

- 对于任意 $a > 0$，$SH^{<a}(W, \lambda) = \lim_{k\to\infty} HF^{<a}(H_k)$，其中极限表示直接极限。此外，根据引理 3.28，如果对于某个 i，$s_k(\ell_i) < t < \ell_{i+1}$，则 $SH^{<t}(W, \lambda) = HF^{<t}(H_k)$。
- 对于满足 t_i 使 $t_0 < 0 < t_1 < \ell_1 < t_2 < \ell_2 < \cdots < t_{m+1} < \ell_{m+1}$ 的任意 t_i，下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} HF^{<s_k(t_0)}(H_k) & \xrightarrow{\iota_{H_k}^{t_0,t_1}} & HF^{<s_k(t_1)}(H_k) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & HF^{<s_k(t_m)}(H_k) & \xrightarrow{\cong} & HF^{<s_k(T)}(H_k) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ SH^{<t_0}(W,\lambda) & \xrightarrow{\iota_{SH}^{t_0,t_1}} & SH^{<t_1}(W,\lambda) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & SH^{<t_m}(W,\lambda) & \xrightarrow{\cong} & SH^{<T}(W,\lambda) \end{array} \tag{4.2}$$

现在，我们固定一个充分大的 K。上述观察和引理 3.28 说明了当 $t < T$ 增大时，$tru(B(H_K), s_K(t))$ 和 $tru(B_{SH}(W,\lambda), t)$ 如何变化。此外，有

(A) $\operatorname{act}\left(\operatorname{tru}\left(B(H_K), s_K(T)\right), (s_K)^{-1}\right) = \operatorname{tru}(B_{SH}(W,\lambda), T)$.

步骤 2。现在，我们希望比较 $B(H)$ 和 $B(H_K)$，其中 K 是在第一步中固定的。为了进行比较-¯ ¯，我们选择另一个凸径向哈密顿函数 $H = h(r)$，使得

- $\bar{H} \equiv H$ 在 W_{r_0+1}/2,-
- $H(r, p) = H_K(r, p) - C$ 在 $r \ge r_0 + 1$ 上，对于某个常数 $C > 0$，并且
- ¯$H \le H_K$ 对 ⌢W 上的任意点均成立。

设 $H_t := (1-t)H + H_k$，其中 $t \in [0,1]$。那么，$H_t \equiv (1-t)h + ta_K$ h在 $\partial W \times [1,\infty)_r$上成立，并且可以观察到如下结论：

(i) 根据引理 3.28，可以找到一个足够小的正数 δ_0，使得 $B(H_t)$ 中的每个条的长度$> 2\delta_0$。注意，δ_0取决于H_t的斜率，即目前的$a_K T$。(ii) 存在 $\delta > 0$，使得若 $|t_1 - t_2| < \delta$，则

$$\| H_{t_1} - H_{t_2} \|_{\infty, W_{r_0+1}} < \delta_0.$$

(iii) 对任意t_1, t_2,

$$d_{bot}\left(B(H_{t_1}), B(H_{t_2})\right) = d_{int}\left(B(H_{t_1}), B(H_{t_2})\right) \le \| H_{t_1} - H_{t_2} \|_{\infty, W_{r_0+1}}.$$

第一个等式由等距定理（定理2.20）得出，不等式则由引理3.10得出。注意，引理3.10是针对非退化哈密顿函数证明的。不过，将引理3.10推广到凸径向哈密顿函数并不困难。

(iv) 若$d_{bot}\left(B(H_{t_1}), B(H_{t_2})\right) < \delta_0$，则存在从$B(H_{t_1})$到$B(H_{t_2})$的$\delta_0$-匹配。换言之，存在从$B(H_{t_1})_{2\delta_0}$到$B(H_{t_2})_{2\delta_0}$的匹配。注意，根据(i)，对于$i = 1$，有$B(H_{t_i})_{2\delta_0} = B(H_{t_i})$，2。此外，

$$\operatorname{act}\left(B(H_{t_1}), (s_{t_1})^{-1}\right) = \operatorname{act}\left(B(H_{t_2}), (s_{t_2})^{-1}\right),$$

其中 s_{t_i}是重参数化函数的延拓，用于 $(1-t_1)h + t_1 Kh$和 $(1-t_2)h + t_2 Kh$。

我们选择 自然数集 $\in \mathbb{N}$使得 $\frac{1}{\text{自然数集}} < \delta$。然后，我们比较 H_i和 H_{i+1}，其中 $i = 0, \ldots,$ 自然数集 $- 1$。因此，我们自然数集 自然数集</style}有

(B) $\operatorname{act}\left(B(H), s_g^{-1}\right) = \operatorname{act}\left(B(H_k), s_k^{-1}\right)$.

步骤 *3*。 我们比较 $B(H)$ 和 $B(H)$。为此，我们严格控制 Morse扰动（f，g）和（f，g），以及几乎复结构的子集 $\{U_\delta\}$、$\{J_\delta\}$，使其满足以下条件：

- $f = f$属于 W，$g - g$的支撑集包含于 $(r_0 + 1/2,\, r_0 + 1) \times Y$，$J_\delta = J_\delta$属于 $S^1 \times W_{r_0+1/2}$,
- J_δ是H_δ-相容的，(H_δ, J_δ)-正则的关于C^∞是拓扑上具有δ-的极限。(H_δ, J_δ)-正则的，并且

根据Morse扰动的性质，对于充分小的 δ，Floer链复形 $\mathrm{CF}(H_\delta)$ 与子复形 $\mathrm{CF}^{<s_h}(T)$（H_δ）相同，后者由作用量小于$s_h(T) = s_h(T)$的1-周期轨道组成。由于H关于$r \ge r_0$, 是线性的，最大值原理意味着，对于Floer数据（H_δ, J_δ），Floer 圆柱不与超曲面$r = r_0$相交。

反过来，我们断言，对于充分小的 δ，Floer数据（$\mathrm{H}_\delta, \mathrm{J}_\delta$）对应的Floer 圆柱不会与超曲面 $\mathrm{r} = \mathrm{r}_0$ 相交。假设存在一个收敛于零的实数序列$\{\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，以及一个Floer 圆柱序列$\{\mathrm{u}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，其中每个$\mathrm{u}_i$都与 $\mathrm{r} = \mathrm{r}_0$相交。经过平移，我们可假设$\mathrm{u}_i(0,-)$也与 $\mathrm{r} = \mathrm{r}_0$相交。根据Gromov-Floer紧性，$\mathrm{u}_i$在$\mathrm{C}^\infty$loc-拓扑中收敛于某个Floer 圆柱u，该圆柱满足关于（H , J ）的Floer方程。由于我们假设对于每个i，$\mathrm{u}_i(0,-)$都与 $\mathrm{r} = \mathrm{r}_0$相交，因此u(0,–)也与 $\mathrm{r} = \mathrm{r}_0$相交。

由于 H 是一个径向函数，因此最大值原理对 u 成立，并且存在一个序列 $\{\mathrm{s}_k\}$，其中 $\mathrm{s}_k \to \infty$ 满足 $\mathrm{u}(\mathrm{s}_k, \mathrm{t}_k)$ 的 r-坐标至少为 r_0。注意，$\mathcal{A}_H(\mathrm{u}(\mathrm{s}_k, -)) = \lim \mathcal{A}_H(\mathrm{u}_i(\mathrm{s}_k, -)) < \mathrm{s}_h(\mathrm{T})$。根据 [AD14，命题 6.5.7，], $\mathrm{u}(\mathrm{s}_k, -)$ 在 C ∞ 拓扑下收敛到 X -H 的某个 1-周期轨道。根据极限，该周期轨道的作用量也至多为 s -h(T)，因此包含在 $\mathrm{r} < \mathrm{r}_0$ 中。这与 $\mathrm{u}(\mathrm{s}_k, -)$ 对所有 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ 均不包含在 $\mathrm{r} < \mathrm{r}_0$ 中相矛盾，因此当 δ 足够小时，Floer 圆柱始终保持在 $\mathrm{r} \le \mathrm{r}_0$ 中。

¯ ¯由于两组 Floer数据（H_δ，J_δ）和（H_δ，J_δ）的 Floer 方程在 $r \le r_0$，上一致，因此，当 δ 充分小时，$\mathrm{CF}(H_\delta, J_\delta)$ 和 $\mathrm{CF}^{<s_h(T)}(\bar{H}_\delta, \bar{J}_\delta)$ 的微分一致。取极限后，我们得出结论。

(C) $\mathrm{tru}(B(H), s_h(T)) = \mathrm{tru}\big(B(\bar{H}), s_{\bar{h}}(T)\big)$.

¯我们注意到，在 W_0 上有 $H \equiv \bar{H}$。

步骤 *4.* 由 (A)–(C)，我们得到如下结论：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tru}(B_{SH}(W,\lambda), T) =& \mathrm{act}\big(\mathrm{tru}\big(B(H_K), s_K(T)\big), (s_K)^{-1}\big) \ (\because \text{(A)})\\
=& \mathrm{tru}\big(\mathrm{act}\big(B(H_K), (s_K)^{-1}\big), T\big) \ \text{(By Definition 2.14)}\\
=& \mathrm{tru}\big(\mathrm{act}\big(B(\bar{H}), (s_{\bar{h}})^{-1}\big), T\big) \ (\because \text{(B)})\\
=& \mathrm{act}\Big(\mathrm{tru}\big(B(\bar{H}), s_{\bar{h}}(T)\big), s_{\bar{h}}^{-1}\Big) \ \text{(By Definition 2.14)}\\
=& \mathrm{act}\big(\mathrm{tru}\big(B(H), s_h(T), s_h^{-1}\big)\big) \ (\because \text{(C)})\\
=& \mathrm{tru}\big(\mathrm{act}\big(B(H), s_h^{-1}\big), T\big) \ (\because s_{\bar{h}} = s_h \text{ on } [0,T])\\
=& \mathrm{act}\big(\mathrm{tru}\big(B(H), s_h(T) = C\big), s_h^{-1}\big) \ \text{(By Definition 2.14)}.
\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{tru}\big(B(H),C\big)$中的条与 $\mathrm{tru}(B_{SH}(W,\lambda), T)$中的条一一对应。此外，$\mathrm{tru}\big(B(H),C\big)$中某条的长度与 $\mathrm{tru}(B_{SH}(W,\lambda), T)$中相应条的长度相差 $s^{-1}h$。

我们注意到，正如在第一步中所观察到的，$\mathrm{tru}(B_{SH}(W,\lambda), T)$ 中的每一条条，其端点均位于 0、∞ 或某个闭 Reeb轨道的周期处。假设存在 $\mathrm{tru}(B_{SH}(W,\lambda), T)$ 中的一条条，其右端点为 ℓ_j，左端点为 ℓ_i。那么，与之对应的 $\mathrm{tru}\big(B(H),C\big)$ 中的条，其两个端点分别为 $s_h(\ell_j)$ 和 $s_h(\ell_i)$。根据 (3.5) 中的不等式，条 $(s_h(\ell_i),s_h(\ell_i)]$ 的长度满足

$$\ell_j - \ell_i \le s_h(\ell_j) - s_h(\ell_i) \le r_0(\ell_j - \ell_i).$$

由此完成了对 (4.1) 的证明。 □

由定理 4.1 可知，哈密顿函数序列的条形码熵 $\hbar(\{H_i\})$ 与序列的选取无关。在本文余下部分，我们统一用 SH-条形码熵 一词来表示 $\hbar^{SH}(W,\lambda)$ 或 $\hbar(\{H_i\})$。

4.2. 不同填充的 SH-**条形码熵**。 SH条形码熵 $\hbar^{SH}(W,\lambda)$ 定义为 Liouville 域 (W,λ) 的一个不变量。在本小节中，我们证明 $\hbar^{SH}(W,\lambda)$ 是边界接触流形及其非退化接触 1-形式 $\alpha := \lambda|_{\partial W}$的不变量。更准确地说，我们证明定理 4.2。

定理 4.2。 设 (Y,α) 是一个非退化接触流形，具有 *Liouville* 填充 (W_1,λ_1)和 (W_2,λ_2)，且其第一陈类均为零。那么，由 (W_1,λ_1) 的辛同调定义的 (Y,α) 的 *SH*-条形码熵与由 (W_2,λ_2) 定义的熵相同，即，

$$\hbar^{\mathrm{SH}}(W_1,\lambda_1) = \hbar^{\mathrm{SH}}(W_2,\lambda_2).$$

此外，存在一个依赖于(Y,α) 的常数 $C(Y,\alpha)$，使得对于任意 $\epsilon \le C(Y)$，以下结论成立：

$$\hbar_\epsilon^{\mathrm{SH}}(W_1,\lambda_1) = \hbar_\epsilon^{\mathrm{SH}}(W_2,\lambda_2).$$

注记 4.3。 我们注意到，对于 (Y,α)的一个填充 (W,λ)，可以找到 ∂W 的一个（闭）领域邻域 $N(\partial W)$，使得

$$\big(N(\partial W), \lambda|_{N(\partial W)}\big) \simeq \big([\tfrac{1}{2},1]_r \times Y, r\alpha\big).$$

照常，$[\frac{1}{2},1]_r$中的下标 r 表示因子的坐标。更多细节请参阅 [CE12，第 11]章。在本小节余下部分，我们将把 ∂W 的领域邻域与$\big([\frac{1}{2},1]_r \times Y, r\ \alpha\big)$视为同一对象。

定理 4.2 是命题 4.5 的推论，我们将在下文陈述并证明该命题。为了陈述命题 4.5，我们先定义以下记号。

定义 4.4。 设 C 是一个正实数。对于一个条形码 B，令 $\boldsymbol{B}_+^{<C}$表示 B 中满足以下条件的条的集合：

- 条的长度至多为 C，且
- 条的左端点大于0。

命题 **命题 4.5**。 在定理 *4.2* 的设定下，可以找到一个常数 $C(Y,\ \alpha)>0$使得 t

$$B_{\mathrm{SH}}(W_1,\lambda_1)_+^{<C(Y,\alpha)} = B_{\mathrm{SH}}(W_2,\lambda_2)_+^{<C(Y,\alpha)}.$$

在证明 Po 之前　我们注意到，命题 4.5 中的常数 $C(Y,\ \alpha)$ 将定义为

$$C(Y,\alpha) := \sup_{J\in\mathscr{J}(Y,\alpha)} C(J),$$

其中，$\mathscr{J}(Y,\ \alpha)$ 表示 $\ker\alpha$ 上的（$d\alpha$）-相容几乎复结构的集合，而 $C(J)$ 由以下引理给出：

引理 4.6 （ 的引理 106]）。 对于任意 $J\in\mathscr{J}(Y,\ \alpha)$，存在一个常数 $C(J)>0$使得：若 u 是一个^J-全纯曲线，且其边界分支分别位于 $\{12\}\times Y$ 和 $\{1\}\times Y$ 上，则 $E(u)\geq C$。 –

我们注意到，允许 $C(Y,\ \alpha)$ 为无穷大。在这种情况下，命题 4.5 表示 $B_{\mathrm{SH}}(W1,\ \lambda_1) = B_{\mathrm{SH}}(W2,\ \lambda_2)$。

命题 *4.5* 的证明概要。我们在此概述命题 4.5 的证明。详细证明将在引理 4.7–4.8 证明之后给出。

首先，我们将证明命题 4.5 的哈密顿弗洛尔同调版本。更确切地说，对于一对斜率为 Hi：$\widehat{\ }W\to\mathbb{R}$ 的凸径向哈密顿函数 T，使得

$$H_1|_{[1,\infty)\times\partial W_1} \equiv H_2|_{[1,\infty)\times\partial W_2} = h(r),$$

作为定义在.....上的函数

$$[1,\infty)\times\partial W_1 \simeq [1,\infty)\times Y \simeq [1,\infty)\times\partial W_2,$$

我们将证明，

$$B(H_1)_+^{<C(Y,\alpha)} = B(H_2)_+^{<C(Y,\alpha)}. \tag{4.3}$$

在证明了其哈密顿弗洛尔同调版本后，我们可以像在第 4.1 节中那样，以类似的方式证明命题 4.5。□

如上文概述所述，我们首先考虑一对凸径向函数 $\mathrm{H}i$：$\widehat{\ }\mathrm{W}_j\to\mathbb{R}$，它们在柱形端部分 $[1,\infty)\times$Y 上相互一致。为了处理它们的哈密顿弗洛尔同调，我们按如下方式选取它们的 Morse 扰动数据 $(\mathrm{f}\,\mathrm{j}, \mathrm{g}\,\mathrm{j})$，其中 $\mathrm{j}=1,2$：选取 $(\mathrm{f}\,\mathrm{j}, \mathrm{g}\,\mathrm{j})$，使得 $\mathrm{f}_1\equiv\mathrm{f}_2$，且 $\mathrm{g}_1\equiv\mathrm{g}_2$ 在 $[\frac{1}{2},\infty)\times\mathrm{Y}$ 上成立。于是，对于所有充分小的 $\delta>0$，哈密顿量 $\mathrm{H}_1+\delta(\mathrm{f}_1+\mathrm{g}_1)$ 和 $\mathrm{H}_2+\delta(\mathrm{f}_2+\mathrm{g}_2)$ 的哈密顿向量场的非恒定周期轨道集合之间存在一一对应关系。此外，通过上述一一对应关系相互对应的一对周期轨道的作用量值应当相同。

令我们固定一个正实数序列 $\{\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得当 $i\to\infty$ 时，δ_i 收敛于 0。我们还固定两个几乎复结构序列

$$\{J_{1,i}\in\mathscr{J}^{\mathrm{SFT}}_{r_0}(W_1,d\lambda_1)\}_{i\in\mathbb{N}},\{J_{2,i}\in\mathscr{J}^{\mathrm{SFT}}_{r_0}(W_2,d\lambda_2)\}_{i\in\mathbb{N}},$$

使得

- 对于每个$i\in\mathbb{N}$，数对 $\left(H_j+\delta_i(f_j+g_j)、J_{j,i}\right)$都是正则的，
- $J1,_i=J2,_i$属于 $S^1\times[1/2,\infty)\times Y$对每个 $i\in\mathbb{N}$，并且
- 存在 $J_{j,\infty}\in\mathscr{J}\mathrm{SFT}_m(W_j,d\lambda_j)$，使得 $\{J_{j,i}\}_{i\in N}$收敛到 $J_{j,\infty}$，并且 $J_{j,\infty}(t,r,p)\equiv\hat{}J0(r,p)$ 若$r\geq\frac{1}{2}$。

结合上述选定的选择，我们陈述并证明引理 4.7。

引理 4.7. 对于满足上述条件的任意选定数据，存在一个自然数自然数集 N 和一个常数 $C(J_0)>0$，满足以下条件：如果 $i>N$，则每个满足以下条件的 *Floer* 圆柱 u 都满足：

- u 连接 $Hj+\delta i$ （$fj+gj$） 的非恒定周期轨道，并且
- u 与 $\{12\}\times Y$ 相交，

能量应大于或等于 $C(J_0)$，即，

$$E(u)>C(J_0).$$

证明。 假设存在无穷多个$i\in\mathbb{N}$，使得存在一个 Floer 圆柱u_i 满足

- u_i连接了 $H_j+\delta_i(f_j+g_j$的非恒定周期轨道),
- u_i与 $\{1\,2\}\times Y$相交，并且
- $E(u_i)\leq C(J0)$.

经过适当平移，不失一般性，可以假设 $u_i(0,S^1)$ 与 $\{1\,2\}\times Y$相交。由 Gromov-Floer紧性，存在 u_i 的一个子序列收敛到 Floer 圆柱 $u_\infty\in\mathcal{M}(x,y;H,J_\infty)$。于是可以验证，$u_\infty(0,S^1)$ 与 $\{1\,2\}\times Y$相交。

注意，u_∞ 是一条 J_∞-全纯曲线。在区域 $[\frac{1}{2},1)\times Y$ 上，几乎复结构 J_∞ （S^1-族）与 $\hat{}J_0$ 一致。因此，u_∞ 在该区域上是 $\hat{}J_0$-全纯曲线。换言之，$u_\infty|_{u_\infty^{-1}([1/2,1]\times Y)}$ 是一条满足引理 4.6 条件的 $\hat{}J_0$-全纯曲线。于是，由引理 4.6，$E(u|_{u^{-1}([1/2,1]\times Y)})>C(\hat{}J_0)$，这与 $E(u)=\lim_{i\to\infty}E(u_i)\leq C(\hat{}J_0)$ 矛盾。证明完毕。□

在 $[1/2,\infty)\times Y$ 中，$(H_1+\delta_i(f_1+g_1),J1,_i)$ 的 Floer方程与 $(H_2+\delta_i(f_2+g_2),J2,_i)$ 的 Floer方程相同。因此，根据引理 4.7，对于任意充分大的 i，如果x 与y 之间的哈密顿作用量差小于$C=C(J_0)$，则两个 Floer 边界映射的 $\langle\partial_{j,i}x,y\rangle$ 与j 无关。

引理 4.8。 设 $(V_1,\ell_1),(V_2,\ell_2),(W,\ell_W)$ 是可正交化的 $\mathbb{k}$-空间。考虑赋予线性映射 $\partial_C:C\to C$（分别为 $\partial_D:D\to D$）的 $(C=V_1\oplus W,\ell_C=\ell_1\oplus\ell_W)$（分别为 $(D=V_2\oplus W,\ell_D=\ell_2\oplus\ell_W)$），使得$\partial^2C=0$（分别为 $\partial^2D=0$）以及 ∂_C（分别为 ∂_D）降低作用量，其中

$$\ell_i\oplus\ell_W(a,b)=\max\{\ell_i(a),\ell_W(b),\,for\,all\,i=1,2.\}$$

假设存在常数 $\eta>0$ 和 $E>0$，使得

(1) $\ell_j(vj)\leq E<\ell_W(w)\in W$，$vj\in Vj$对所有 $w\in W$，$vj\in Vj$对 $j=1,2$*(2)*，且 $\ell_W(\pi_W(\partial_C w)-\pi_W(\partial_D w))<\ell_W(w)-\eta$对所有 $w\in W$。（W 被视为 $V_i\oplus W$ 的子空间，且 π_W表示从 $V_i\oplus W$ 到 W 的自然投影。）

记 $\mathbb{B}_C = \{x_1^C, \cdots, x_{m_1}^C, y_1^C, \cdots y_{n_1}^C, z_1^C, \cdots, z_{n_1}^C\}$ 为 C 的正交基，使得 $\partial_C x^C i = 0, \partial_C z^C j = y^C j$。令 $C^{<\eta}E$ 为由区间 $(\ell_C(y^C j), \ell_C(z^C j)]$ 构成的区间多重集，其中 $\ell_C(z^C j) - \ell_C(y^C j) < \eta$ 且 $E < \ell_C(y^C j)$。以相同方式定义区间多重集 $D^{<\eta}E$。则 $C^{<\eta}E = D^{<\eta}E$。

证明。设 $\mathrm{j} = \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \cdots, \mathrm{i}_k$ 为满足 $\ell_C(\mathrm{z}^C\mathrm{j}) - \ell_C(\mathrm{y}^C\mathrm{j}) < \eta$ 且 $\mathrm{E} < \ell_C(\mathrm{y}^C\mathrm{j})$ 的条。对于每个 $\mathrm{z}^C\mathrm{j}$ 和 $\mathrm{y}^C\mathrm{j}$，令 $\mathrm{z}^W\mathrm{j}$ 和 $\mathrm{y}^W\mathrm{j}$ 为其在 W 上的投影。根据正交性和假设 (1)，向量空间 V_1 由 $\mathbb{B}_C$ 中赋值小于 E 的元素生成。经过某种基变换，我们现在假设 $\mathrm{z}^C\mathrm{j}$ 是 W 中的向量，并且仍有 $\partial_C \mathrm{z}^C\mathrm{j} = \mathrm{y}^C\mathrm{j}$，其中 $\ell_C(\mathrm{z}^C\mathrm{j}) - \ell_C(\mathrm{y}^C\mathrm{j}) < \eta$，对于 $\mathrm{j} = \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \cdots, \mathrm{i}_k$。

令 $\mathrm{z}^D\mathrm{j} := \mathrm{z}^C\mathrm{j}$ 为 $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}_2 \oplus \mathrm{W}$ 中的一个元素，并令 $\mathrm{y}^D\mathrm{j} := \partial_D \mathrm{z}^D\mathrm{j}$。由于 $\mathrm{z}^D\mathrm{j}$ 是 W 中的一个元素，$\ell_D(\mathrm{z}^D\mathrm{j}) = \ell_W(\mathrm{z}^D\mathrm{j}) = \ell_C(\mathrm{z}^C\mathrm{j})$。我们还断言，$\ell_D(\mathrm{y}^D\mathrm{j}) = \ell_C(\mathrm{y}^C\mathrm{j})$。更一般地，考虑 $\mathrm{w} \in \langle \mathrm{z}^C\mathrm{i}_1, \mathrm{z}^C\mathrm{i}_2, \cdots, \mathrm{z}^C\mathrm{i}_k \rangle \subset \mathrm{W}$。那么 $\partial_C(\mathrm{w})$ 是 $\mathrm{y}^C\mathrm{j}$ 的线性组合，其中 $\mathrm{j} = \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \cdots, \mathrm{i}_k$。根据正交性以及关于 $\mathrm{z}^C\mathrm{j}$ 的假设，$\ell_C(\partial_C(\mathrm{w})) > \ell_C(\mathrm{w}) - \eta$。根据假设 (1)，$\ell_C(\partial_C(\mathrm{w})) = \ell_W(\pi_W \circ (\partial_C \mathrm{w}))$。根据假设 (2) 和正交性，$\ell_C(\partial_C(\mathrm{w})) = \ell_D(\partial_D(\mathrm{w}))$，其大于 E。特别地，$\ell_D(\mathrm{y}^D\mathrm{j}) = \ell_C(\mathrm{y}^C\mathrm{j}) > \mathrm{E}$。

由于 $\langle \mathrm{y}^D\mathrm{i}_1, \mathrm{y}^D\mathrm{i}_2, \cdots, \mathrm{y}^D\mathrm{i}_k \rangle$ 是 $\ker \partial_D$ 的子空间，因此只需证明 $\left\{\mathrm{z}^D\mathrm{j}, \mathrm{y}^D\mathrm{j} = \partial \mathrm{z}^D\mathrm{j} : \mathrm{j} = \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \cdots, \mathrm{i}_k\right\}$ 关于 ℓ_D 正交。扩充这个正交集，我们可以找到 D 的一个正交基，其中包含每个 $\mathrm{x}^D\mathrm{i}_j$、$\mathrm{y}^D\mathrm{i}_j$。因此，D 的陈述中的条形数量至少为 k。将此结果从 D 应用于 C，可得这两个数相等。

$\left\{\mathrm{z}^D\mathrm{j}, \mathrm{y}^D\mathrm{j} = \partial \mathrm{z}^D\mathrm{j} : \mathrm{j} = \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \cdots, \mathrm{i}_k\right\}$ 关于 ℓ_D 的正交性：由这组向量张成的子空间中的每个向量都具有 $\mathrm{w}_1 + \partial_D(\mathrm{w}_2)$ 的形式，其中 w_i 是 W 中由集合 $\left\{\mathrm{z}^D\mathrm{j} : \mathrm{j} = \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \cdots, \mathrm{i}_k\right\}$ 张成的子空间中的向量。要证明正交性，只需证明以下等式：

$$\ell_D(w_1 + \partial_D(w_2)) = \max(\ell_D(w_1), \ell_D(\partial_D(w_2))). \tag{4.4}$$

若等式 4.4 成立，则对于$v = \sum_{n \in I} a_n \cdot z^D{}_{i_n} + \sum_{m \in J} b_m \cdot y^D{}_{i_m}$，其中$a_n$和$b_m$均非零，

$$\begin{aligned}
\ell_D(v) &= \max\left(\ell_D\left(\sum_{n\in I} a_n \cdot z^D_{i_n}\right), \ell_D\left(\partial_D \sum_{m\in J} b_m \cdot z^D_{i_m}\right)\right) \\
&= \max\left(\ell_C\left(\sum_{n\in I} a_n \cdot z^C_{i_n}\right), \ell_C\left(\partial_C \sum_{m\in J} b_m \cdot z^C_{i_m}\right)\right) \\
&= \max\left(\ell_C\left(\sum_{n\in I} a_n \cdot z^C_{i_n}\right), \ell_C\left(\sum_{m\in J} b_m \cdot y^C_{i_m}\right)\right) \\
&= \max\left(\max_{n\in I}\left\{\ell_C(z^C_{i_n})\right\}, \max_{m\in J}\left\{\ell_C(y^C_{i_n})\right\}\right) \\
&= \max\left(\max_{n\in I}\left\{\ell_D(z^D_{i_n})\right\}, \max_{m\in J}\left\{\ell_D(y^D_{i_n})\right\}\right).
\end{aligned}$$

当 $\ell_D(w_1) \neq \ell_D(\partial_D w_2)$ 时，方程 4.4 来自 D可正交化这一假设。如果存在w_1, w_2，使得 $\ell_D(w_1) = \ell_D(\partial_D w_2) = e$且 $\ell_D(w_1 + \partial_D(w_2)) < e$,

$$\ell_W(\pi_W \circ (w_1 + \partial_D w_2)) \leq \ell_D(w_1 + \partial_D(w_2)) < e.$$

因此，由于 W 的正交性，

$$\begin{aligned} e &= \max(\ell_W(\pi_W \circ (w_1 + \partial_D w_2)), \ell_W(\pi_W \circ (w_1 + \partial_C w_2))) \\ &= \ell_W(\pi_W(w_1 + \partial_D w_2) - \pi_W(w_1 + \partial_C w_2)) \\ &= \ell_W(\pi_W(\partial_D w_2) - \pi_W(\partial_C w_2)) < \ell_W(w_2) - \eta \quad (\because \text{Assumption (2)}) \\ &< \ell_C(\partial_C(w_2)) = \ell_D(\partial_D(w_2)) = e, \end{aligned}$$

于是我们得到矛盾，并且集合 $\left\{z^D{}_j、\ y^D{}_j = \partial z^D{}_j :\ j = i_1, i_2, \cdots,\ i_k\right\}$ 关于 ℓ_D 是正交的。□

现在我们证明命题 4.5。

命题 *4.5* 的证明。如证明概要中所述，我们从一对斜率相同的凸径向哈密顿函数 $H_j :\ \widehat{\ } W_j \to \mathbb{R}$ 开始，其中斜率为 T，且 $j = 1,\ 2$。换句话说，我们首先证明方程 (4.3)。

我们总结一下第 3.5 节中的以下事实：由引理 3.28 及其证明可知，对于任意充分大的 i，条形码 $B\left(H_j + \delta_i(f_j + g_j)\right)$ 满足

- 每个条都呈（a,b] 或（a,∞）的形式，
- 若某个条的端点大于 δ_i，则该端点应包含在

$$s_h\left(\mathrm{Spec}^{<T}(R_\alpha)\right) \cup \left(s_h\left(\mathrm{Spec}^{<T}(R_\alpha)\right) + \delta\right),$$

- 恰有 $\dim(H^*(W))$ 条包含 $(\delta_i,\ s_h(T\min)]$。
- 对于任意 $t \in$ 谱$^{<T}(R\alpha)$，以 $s_h(t)$ 为端点的条数与周期为 t 的 Reeb轨道数相同，

- 对于任意 $t \in$ 谱$^{<T}(R\alpha)$，以 $s_h(t) + \delta_i$ 为端点的条数与周期为 t 的 Reeb轨道数相同，

- (引理 3.27) 不存在形式为 $(s_h(t),\ s_h(t) + \delta_i\ ]$，的条，并且
- 包含在 $(0, \delta_i\ ]$ 中的条数与

$$\left(\text{the number of critical points of } f - \dim(H^*(W))\right)/2.$$

我们还证明了条形码 $B(H_j)$ 具有类似的性质，因为 $B(H_j)$ 被定义为 $B\left(H_j + \delta_i(f_j + g_j)\right)$ 关于 $i \to \infty$ 的直接极限。更准确地说，$B(H_j)$ 满足如下性质。

- 每个条都采用以下形式之一：$(a,b]$ 或 (a,∞)，其中

$$a, b \in s_h(\{0\} \cup \mathrm{Spec}^{<T}(R_\alpha)),$$

- 左端点为 0 的条形数量与 $\dim(H^*(W))$ 相同，并且
- 对于任意 $t \in$ 谱$^{<T}(R\alpha)$，以 $s_h(t)$ 为端点的条形数量相同 as

$$2 \cdot (\text{周期小于 } t \text{ 的 Reeb轨道数量})$$

我们还注意到，通过选择足够小的 f$_j$ 和 g j（就 k $\cdot$ k$_{\infty, W_{r_0}}$-范数而言），不失一般性，可以假设 δ_ik f j + g j k $_{\sup, W_{r_0}} \le \delta_i$。在此假设下，可以找到一个 s a δ_i-匹配 $\mu_{j,i}$: B (H j) $\to$B $\left(\text{H j } + \delta_i(\text{f j } + \text{g j })\right)$。令 i 足够大，使得 $2\delta_i$ 小于 B (H j) 中最短的条。我们注意到，B (H j) 只有有限条条，因此可以找到 B (H j) 中最短的条。因此，μ_i 的像是 B (H j)。此外，假设 $3\delta_i$ 小于

$$\min\{|s_h(t_1) - s_h(t_2)|, s_h(T_{\min}) | t_1, t_2 \in \mathrm{Spec}^{<T}(R_\alpha)\}.$$

那么，$B(H_j)$ 中形如（$s_h(t_1)$，$s_h(t_2)$]（分别为（$s_h(t)$，∞））的每一条均与以下某一项匹配

(s$_h$(t$_1$), s$_h$(t$_2$)], (s$_h$(t$_1$), s$_h$(t$_2$)+δ_i], (s$_h$(t$_1$)+δ_i, s$_h$(t$_2$)], 或 (s$_h$(t$_1$)+δ_i, s$_h$(t$_2$)+δ_i](分别为 (s$_h$(t), ∞) 或 (s$_h$(t)+δ_i,∞))

在 $B\left(H_j+\delta_i(f_j+g_j)\right)$ 中。上述形式中的每一条都长于 $2\delta_i$，因此所有条都属于 μ_i 的余像。

为了证明方程 (4.3)，我们选取 $B(H_j)^{<C(J_0)}_+$ 中的一条条。上述论证保证，对于任意充分大的 i，在 $B\left(H_j+\delta_i(f_j+g_j)\right)$ 中，都存在一条对应的条。此外，由于根据 δ_i，对应条的长度与 $B(H_j)^{<C(J_0)}_+$ 中原始条的长度不同，因此，对于任意充分大的 i，对应条也比 $C(J_0)$ 短。

现在，我们在以下设置中，对充分大的 i 应用引理 4.8：

- V_j：由 Morse 函数 f_j 的临界点生成的向量空间。
- ℓ_j：$\mathcal{A}_{H_j+\delta_i(f_j+g_j)}$ 的哈密顿作用泛函，对于常值解 $p\in \mathrm{Crit} f_j$，其值为 $\delta_i f(p)$。

- W：由 $H_j+\delta_i(f_j+g_j)$ 的非恒定周期轨道生成的向量空间。
- ℓ_W：$\mathcal{A}_{H_j+\delta_i(f_j+g_j)}$ 的哈密顿作用泛函，其定义为 $\ell_W(\check{\gamma})=sh(t\ \gamma)+\delta$，$\ell_W(\hat{\gamma})=sh(t\ \gamma)$，其中 γ 表示周期为 $t_\gamma<T$ 的 Reeb 轨道。
- $E=\delta_i$ 以及 $\eta=C(J0)$。

注意，由于引理 4.7 以及引理 4.7 之后的论证，引理 4.8 的第二个假设成立。

应用引理 4.8，可以得出结论：

$$B\left(H_1+\delta_i(f_1+g_1)\right)^{<C(J_0)}_{\delta_i}=B\left(H_2+\delta_i(f_2+g_2)\right)^{<C(J_0)}_{\delta_i},$$

其中 $B\left(H_j+\delta_i(f_j+g_j)\right)^{<C(J_0)}_{\delta_i}$ 是 $\mathrm{B}\left(H_j+\delta_i(f_j+g_j)\right)$ 中满足以下条件的条。

- 该条的长度短于 $C(J0)$，且
- 该条的左端点大于或等于 δ_i。

注意到，通过应用 δ_i 匹配 $\mu_{j,i}$ 对于 $j=1,2$，可以得出

$$B(H_j)^{<C(J_0)}_+=\mu_{j,i}\left(B\left(H_j+\delta_i(f_j+g_j)\right)^{<C(J_0)}_{\delta_i}\right).$$

因此，作为区间的多重集，

$$B(H_1)^{<C(J_0)}_+=B(H_2)^{<C(J_0)}_+.$$

至此，我们证明了方程 (4.3)。命题 4.5 可由方程 (4.3) 如下证明：回顾一下，$B_{\mathrm{SH}}(W_j,\lambda_j)^{C(J_0)}_+$ 中的每条均具有 $(t_1,t_2]$ 的形式，其中 $t_1,t_2\in$ 属于谱$(R\alpha)$。对于固定的一对 $t_1,t_2\in$ 属于谱$(R\alpha)$，假设 $B_{\mathrm{SH}}(W_j,\lambda_j)^{C(J_0)}_+$ 含有 n_j 条 $(t_1,t_2]$ 条。注意，由于 α 的非退化性，$n_j<\infty$。

我们选取凸径向哈密顿函数 $H_j\colon \widehat{W}_j\to\mathbb{R}$，对 $j=1,2$ 满足以下条件：

- 斜率 T 大于 $t2$，且不是任何闭 Reeb 轨道的周期。
- H_j 在 W_n 之外是线性的，其中 $r_0<c(Y,\alpha)$ $t_2-t\ 1$。
- H$H1$ 和 $H2$ 这一对满足上述所有条件，因此方程 (4.3) 成立。

我们回顾一下，$C(Y,\alpha)=\sup_{J\in\mathcal{J}(Y,\alpha)}C(J)$。

容易验证，(3.4) 中的图表保证在 $B(H_j)$ 中，恰好存在 n_j 个形如 $(s^{H_j}(t_1),s^{H_j}(t_2)]$ 的条。此外，也容易验证

$$s_{H_j}(t_2)-s_{H_j}(t_1)<r_0(t_2-t_1)<C(Y,\alpha).$$

因此，由方程 4.3 可得，对于任意一对 t_1 和 t_2，有 $n_1=n_2$。证明完毕。 □

现在我们可以证明本小节的主要定理，即定理 4.2。

定理 *4.2* 的证明。首先，我们固定 $\epsilon < C(Y,\alpha)$。对于固定的 ϵ,

$$\begin{aligned}\hbar_\epsilon^{SH}(W_j,\lambda_j) &= \limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\Big(n_\epsilon\big(\mathrm{tru}(B_{SH}(W_j,\lambda_j),T)\big)\Big)\\ &= \limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\Big(n_\epsilon\big(\mathrm{tru}(B_{SH}(W_j,\lambda_j),T+\epsilon)\big)\Big).\end{aligned} \tag{4.5}$$

我们指出，$n_\epsilon\big(\mathrm{tru}(B_{SH}(Wj,\lambda_j),\, T+\epsilon)$ 是满足以下条件的 $B_{\mathrm{SH}}(Wj,\lambda_j)$ 中条的数量：

(a) 条的长度大于或等于 ϵ，且 (b) 条的左端点小于或等于 T。

$B_{\mathrm{SH}}(Wj,\lambda_j)$ 中满足 (b) 的条可以分为以下四种类型：

- 类型 I：长度大于 ϵ 且右端点大于 T 的条,
- 类型 II：长度大于 ϵ 且右端点小于 T 的条,
- 类型 III：长度小于 ϵ 且右端点大于 T 的条,
- 类型 IV：长度小于 ϵ 且右端点小于 T 的条。

Let 记 $n_{j,\epsilon}(X,T)$ 为类型 X 中条的数量。我们注意到以下两个事实 s:

- 由于第 3.5 节中证明的事实,

$n_{j,\epsilon}(\mathrm{I},T)+2\cdot n_{j,\epsilon}(\mathrm{II},\,T)+n_{j,\epsilon}(\mathrm{III},\quad T)+2\cdot n_{j,\epsilon}(\mathrm{IV},T)$ = 维数 $H^*(Wj)+2\cdot$（周期为 <T 的闭 Reeb 轨道数量).

- 根据命题 4.5，自然数集 $_{j,\epsilon}(\mathrm{III},T)$ 和 自然数集 $_{j,\epsilon}(\mathrm{IV},\,T)$ 在 $j=1,2$.

通过结合这 根据上述两个事实，可以定义一个与 $j=1$ 无关的数 $n_\epsilon(Y,T)$，如下所示。 s:

$$\begin{aligned}n_\epsilon(Y,T) &:= n_{j,\epsilon}(\mathrm{I},T)+2\cdot n_{j,\epsilon}(\mathrm{II},T)-\dim H^*(W_j)\\ &= 2\cdot(\text{ the number of closed Reeb orbits with period} < \mathrm{T}) - n_{j,\epsilon}(\mathrm{III},T)-2\cdot n_{j,\epsilon}(\mathrm{IV},T).\end{aligned}$$

我们回顾一下,

$$n_\epsilon\big(\mathrm{tru}(B_{SH}(W_j,\lambda_j),T+\epsilon)\big) = n_{j,\epsilon}(\mathrm{I},T)+n_{j,\epsilon}(\mathrm{II},T). \tag{4.6}$$

并且，可以很容易地验证,

$$\frac{n_\epsilon(Y,T)+\dim H^*(W_j)}{2} \le n_{j,\epsilon}(\mathrm{I},T)+n_{j,\epsilon}(\mathrm{II},T) \le n_\epsilon(Y,T)+\dim H^*(W_j). \tag{4.7}$$

结合方程 (4.5)–(4.7)，可以得出，对于 $j=1,2$,

$$\hbar_\epsilon^{\mathrm{SH}}(W_j,\lambda_1) := \limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log^+ n_\epsilon(Y,T).$$

因此，$\hbar_\epsilon^{\mathrm{SH}}(W1,\lambda_1) = \hbar_\epsilon^{\mathrm{SH}}(W2,\lambda_2)$。此外，根据定义 3.16，我们有 $\hbar^{\mathrm{SH}}(W1,\lambda_1) = \hbar^{\mathrm{SH}}(W2,\lambda_2)$。□

4.3. **SH条形码和RFH条形码**。在本小节中，我们将介绍可为 Liouville 域（$W,d\lambda$）定义的不同持久模。随后，我们将证明其条形码熵与 SH 条形码熵 $\hbar^{\mathrm{SH}}(W,\lambda)$ 相同。

4.3.1. 正辛同调的持久模。设 ε 是一个小于闭 Reeb 轨道最短周期$T_{\min}$的正实数。对于每个$a>\varepsilon$，链复形的恰序列

$$0 \to \mathrm{CF}^{<\varepsilon}(H,J) \xrightarrow{\iota} \mathrm{CF}^{<a}(H,J) \xrightarrow{\pi} \mathrm{CF}^{[\varepsilon,a)}(H,J) \to 0$$

由自然包含映射和投影诱导，从而得到恰三角

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{HF}^{<\varepsilon}(H,J) & \\ {\scriptstyle\delta}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\iota_*} \\ \mathrm{HF}^{[\varepsilon,a)}(H,J) & \xleftarrow[\pi_*]{} & \mathrm{HF}^{<a}(H,J) \end{array} . \tag{4.8}$$

对于两个 Floer 数据（H_1, J_1）、（H_2, J_2），两个恰三角与延拓映射 $\Phi_{(H_1 J_1}$）、（$_{H_2 J_2}$）交换。取直接极限，可得一个恰三角

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{SH}^{<\varepsilon}(W,\lambda) & \\ {\scriptstyle\delta^a}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\iota^a} \\ \mathrm{SH}^{[\varepsilon,a)}(W,\lambda) & \xleftarrow[\pi^a]{} & \mathrm{SH}^{<a}(W,\lambda) \end{array} . \tag{4.9}$$

如前一章所述，$\mathrm{SH}^{<\varepsilon}(W,\lambda)$ 等于 $H^*(W)$，即 W 的奇异上同调。通过适当地选择共尾序列，可以证明 $\mathrm{SH}^{[\varepsilon,a)}(W,\lambda)$ 也与 ε 的选择无关。因此，对于某个 $\varepsilon<a$，我们将 $\mathrm{SH}^{(0,a)}(W,\lambda)$ 定义为 $\mathrm{SH}^{[\varepsilon,a)}(W,\lambda)$。恰三角 4.9 可以改写为

$$\begin{array}{ccc} & H^*(W) & \\ {\scriptstyle\delta^a}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\iota^a} \\ \mathrm{SH}^{(0,a)}(W,\lambda) & \xleftarrow[\pi^a]{} & \mathrm{SH}^{<a}(W,\lambda) \end{array} . \tag{4.10}$$

接下来，我们想要说明，这个恰三角给出了持久模的一个恰三角。对于$0<a\le b$，链级包含映射在 ι^a，$_b\mathrm{SH}^+$ 之间诱导映射：$\mathrm{SH}^{(0,a)}(W,\lambda) \to \mathrm{SH}^{(0,b)}(W,\lambda)$。对于 $a\le 0$，令 $\mathrm{SH}^{(0,a)}(W,\lambda)=0$，并对任意至少为 a 的 b，令 $\iota^a,_b\mathrm{SH}_+=0$。

定义 4.9。$\mathrm{SH}^+(W,\lambda)$ 的持久模，记作 $B_{\mathrm{SH}^+}(W,\lambda)$，定义为由以下部分组成的持久模。

- *a family of vector space* $\left\{B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda)_a := \mathrm{SH}^{(0,a)}(W,\lambda)\right\}_{a\in\mathbb{R}}$, *and*
- *a family of linear maps* $\left\{\iota^{a,b}_{\mathrm{SH}^+} : B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda)_a \to B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda)_b\right\}_{a\le b}$.

接下来，我们用 $H^*(W)$ 补全所需的恰三角。定义 SH^0 的条形码由 $\dim(H^*(W))$ 个形如 $(0,\infty)$ 的条组成。更准确地说，对于 $a>0$，定义 $B_{\mathrm{SH}^0}(W,\lambda)_a = H^*(W)$，其他情况下取零。定义 $\iota^a,_b\mathrm{SH}^0$ 在 $0<a\le b$ 时为恒等映射，其他情况下取零。这些数据再次给出一个持久模，记作 $B_{\mathrm{SH}^0}(W,\lambda)$。

由于关于a、b的恰三角 4.8 与持久映射交换，因此恰三角 4.10 也与持久映射交换。因此，我们得到如下持久模的恰三角：

$$\begin{array}{ccc} & B_{\mathrm{SH}^0}(W,\lambda) & \\ {\scriptstyle\delta}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\iota} \\ B_{\mathrm{SH}^+}(W,\lambda) & \xleftarrow[\pi]{} & B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda) \end{array} , \tag{4.11}$$

w这里，对每个$a>0$，持久映射定义为 δ_i,ι_a,π_a，否则为零映射 e.

当接触边界上的Reeb流非退化时，$B_{SH^+}(W,\lambda)$也是一个局部有限型持久模。因此，我们可以定义 SH^+-条形码熵 $\hbar^{\mathrm{SH}^+}(W,\lambda)$。

注记 4.10. 在 [GGM22]，中，测地流的条形码对任意黎曼度量都有定义（不一定是一般位置度量）。由 *Viterbo* 同构， [Vit99, Web06]，在系数域足够合适的情况下（例如 $\mathbb{Z}_2$），当度量处于一般位置时，过滤辛同调与过滤的环空间同调同构。因此，对于 M 上任意一般位置度量 g，

$$\hbar_{\mathrm{SH}^+}(D_1^* M, \lambda_{can}) = \hbar(M,g).$$

命题 4.11. 对于具有非退化 *Reeb* 流的 *Liouville* 域(W,λ)，SH-条形码熵与SH^+-条形码熵相等，

$$\hbar^{\mathrm{SH}^+}(W,\lambda) = \hbar^{\mathrm{SH}}(W,\lambda).$$

证明。 由于$B_{\mathrm{SH}^0}(W,\lambda)$ 由 $\dim H^*(W)$ 个 $(0,\infty)$ 条组成，$B_{\mathrm{SH}^0}(W,\lambda)$、$B_{\mathrm{SH}^0}(W,\lambda)$ 是有限型持久模。因此，恰三角 4.11 中的所有持久模在 [BPP+22] 的意义下都是适度的。于是，根据 [BPP+22，定理 3.1]，，我们可以比较条形数量$B_{\mathrm{SH}^+}(W,\lambda)$ 与$B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda)$。

定理 4.12。 [BPP+22，定理 3。1] 设 $U \to V \to W$ 是适度持久模的一个恰序列。那么对每个 $\delta>0$，以下不等式成立：

$$b_{2\delta}(V) \le b_\delta(U) + b_\delta(W),$$

其中，$n_\varepsilon(B)$ 表示 B 中长度大于 ε 的条形数量。

证明。 </style}证明见 [BPP+22，第 3]章 □

将定理应用于两个满足 $T>0$ 的恰序列，

$$\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^0}(W,\lambda),T) \xrightarrow{\mathrm{tru}(\iota)} \mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda),T) \xrightarrow{\mathrm{tru}(\pi)} \mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^+}(W,\lambda),T),$$
$$\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}}(W,\lambda),T) \xrightarrow{\mathrm{tru}(\pi)} \mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^+}(W,\lambda),T) \xrightarrow{\mathrm{tru}(\delta)} \mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^0}(W,\lambda),T),$$

我们得到

$$n_{2\varepsilon}(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}},T)) \le n_\varepsilon(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^+},T)) + n_\varepsilon(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^0},T)) \le n_\varepsilon(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^+},T)) + \dim(H^*(W))$$
$$n_{2\varepsilon}(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^+},T)) \le n_\varepsilon(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}},T)) + n_\varepsilon(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^0},T)) \le n_\varepsilon(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}},T)) + \dim(H^*(W)).$$

因此，

$$n_{4\varepsilon}(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}},T)) - \dim(H^*(W)) \le n_{2\varepsilon}(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^+},T)) \le n_\varepsilon(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}},T)) + \dim(H^*(W)),$$
$$n_{4\varepsilon}(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^+},T)) - \dim(H^*(W)) \le n_{2\varepsilon}(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}},T)) \le n_\varepsilon(\mathrm{tru}(B_{\mathrm{SH}^+},T)) + \dim(H^*(W)),$$

and

$$\hbar^{\mathrm{SH}^+}_{4\varepsilon}(W,\lambda) < \hbar^{\mathrm{SH}}_{2\varepsilon}(W,\lambda) \le \hbar^{\mathrm{SH}^+}_{\varepsilon}(W,\lambda), \quad \hbar^{\mathrm{SH}}_{4\varepsilon}(W,\lambda) < \hbar^{\mathrm{SH}^+}_{2\varepsilon}(W,\lambda) \le \hbar^{\mathrm{SH}}_{\varepsilon}(W,\lambda).$$

取 $\varepsilon \to 0$，我们得到 $\hbar^{\mathrm{SH}^+}(W,\lambda) = \hbar^{\mathrm{SH}}(W,\lambda)$。 □

4.3.2. 与 *Rabinowitz Floer* 同调的比较。 Rabinowitz Floer 同调是拉比诺维茨作用泛函 $\mathscr{A}_F$的 Floer 同调：$C^\infty(S^1, \widehat{W}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$定义为

$$\mathscr{A}^F(u,\eta) := \int_0^1 u^*\lambda - \eta \int_0^1 F(u(t))\,dt,$$

其中，F是定义在 $\widehat{W}$上的一个函数，其零水平集为 $F^{-1}(0) = \partial W$。 $\mathscr{A}_F$的临界点恰好是 ∂W 上的常值解以及正/负 Reeb 轨道。随后，Rabinowitz Floer 同调 $\mathrm{RFC}(W,\lambda)$ 是由 $\mathscr{A}_F$的临界点生成的链复形 $\mathrm{RFC}(W,\lambda)$ 的同调，并且

其微分由计数连接临界点的刚性 Rabinowitz Floer 梯度轨迹给出。有关 Rabinowitz Floer 同调的更多详情，请参见 [CF09、AF10、CFO10] 。

由于微分 ∂_{RFH} 会降低作用量，过滤的 Rabinowitz Floer 同调是良定义的。按照 [Mei18，第 10], 章，我们用以下数据定义非负 RFH 持久模 $B_{\mathrm{RFH}^{\geq 0}}(W,\lambda)$。对于 $a>0$，令 $\mathrm{RFH}^{[0,a)}(W,\lambda)$ 为 $(\mathrm{RFC}^{[0,a)}(W,\lambda), \partial_{\mathrm{RFH}})$ 的同调，并令 ι^{a},$_{b}\mathrm{RFH}^{\geq 0}$ 为由链级包含映射诱导的映射。

定义 4.13。$\mathrm{RFH}^{\geq}0(W,\ \lambda)$的持久模，记作 $B_{\mathrm{RFH}^{\geq 0}}(W,\ \lambda)$，定义为由以下部分构成的持久模。

- *a family of vector space* $\left\{B_{\mathrm{RFH}^{\geq 0}}(W,\lambda)_a := \mathrm{RFH}^{(0,a)}(W,\lambda)\right\}_{a\in\mathbb{R}}$ *and*
- *a family of linear maps* $\left\{\iota^{a,b}_{\mathrm{RFH}^{\geq 0}} : B_{\mathrm{RFH}^{\geq 0}}(W,\lambda)_a \to B_{\mathrm{RFH}^{\geq 0}}(W,\lambda)_b\right\}_{a\leq b}$.

定理 4.14。 [CFO10，命题 1.4。] 对于一个 >0，存在一个恰三角

(4.12)
$$\begin{array}{ccc} & H_*(W) & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathrm{RFH}^{[0,a)}(W,\ \lambda) & \longleftarrow & \mathrm{SH}^{<a}(W,\ \lambda) \end{array} .$$

此外，这些恰三角与持久性映射 ι^{a}，$_{b}\mathrm{SH}$、 ι^{a}，$_{b}\mathrm{RFH}^{\geq 0}$ 相容，适用于 $<b$。

事实上，在 [CFO10], 中，恰三角是在某 $=\infty$ 种情形下给出的。然而，正如 [Mei18, Remark 10.5.], 中所述，该定理可直接由证明推出。根据定义 3.16，将 SH 替换为 $\mathrm{RFH}^{\geq 0}$，定义(W,λ)的 $\mathrm{RFH}^{\geq 0}$-条形码熵。应用恰三角 4.12 的定理 4.12，我们得到以下命题。

命题 4.15。 设$(W,\ \lambda)$ 是一个 *Liouville* 域，其接触边界上具有非退化*Reeb*流。那么，SH-条形码熵与 $\mathrm{RFH}^{\geq 0}$-条形码熵对$(W,\ \lambda)$ 相等，

$$\hbar^{\mathrm{SH}}(W,\lambda) = \hbar^{\mathrm{RFH}^{\geq 0}}(W,\lambda).$$

5. Reeb 流的 SH 条形码熵与拓扑熵

对于一个 Liouville 域（$W,\omega = d\lambda$），满足 $\alpha := \lambda|_{\partial W}$ 是 ∂W 上的非退化接触 1-形式，我们在第 3 节中定义了 $\hbar^{SH}(W,\lambda)$。在本小节中，我们将比较 $\hbar^{SH}(W,\lambda)$ 与 α 的 Reeb 流的拓扑熵。

令 R 表示 α 的 Reeb 向量场，并令 μ^t（分别为 μ）表示 R 的时间 t（分别为时间 1）流。我们将在第 5.1 节中定义拓扑熵。令 $h^{top}(\mu)$ 表示 μ 的拓扑熵。采用上述记号，我们将在第 5 节中证明以下定理。

定理 5.1. 在上述设定下，$\mathrm{SH}(W,\lambda)$ 的条形码熵从下方界定 μ 的拓扑熵，即：

$$\hbar^{SH}(W,\lambda) \leq h_{top}(\mu).$$

为了证明定理 5.1，我们在第 5.1 节确定研究设定并引入记号。第 5.2 节将概述定理 5.1 的证明。通过这一概述可以看出，我们需要为证明做一些准备工作，这些工作将在第 5.3–5.4 节完成。在第 5 节的最后一个小节中，我们将给出定理 5.1 的完整证明。

5.1. **第 5 节的记号**。定理 5.1 比较两种熵：一种是 SH(W,λ) 的条形码熵，另一种是 Reeb流的拓扑熵。

更准确地说，我们先定义拓扑熵的概念。对于配备度量和自同构 ϕ 的紧空间 X，其中 $X \to X$, ϕ 的拓扑熵定义如下：

定义5.2。

(1) 我们定义

$$\boldsymbol{\Gamma_k(\phi)} := \left\{\left(x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{k-1}(X)\right) \in X \times X \times \ldots X =: X^k | x \in X\right\}.$$

(2) X k 中的一个 **ϵ-立方体** 是由 X 中半径为 ϵ 的球的乘积构成的。*(3)* 对于集合 $Y \subset X$ k, $\mathrm{Cap}_{\epsilon}(\boldsymbol{Y})$ 表示覆盖 Y 所需的 X k 中 ϵ-立方体的最少数量。*(4)* **ϕ拓扑 ϵ熵 $_{\epsilon}h\phi(\phi)$** 定义为

$$h_\epsilon(\phi) := \limsup_{k\to\infty} \tfrac{1}{k} \log \mathrm{Cap}_\epsilon\left(\Gamma_k(\phi)\right).$$

(5) **ϕ** $h^{top}(\phi)$ 的拓扑熵定义为

$$h_{top}(\phi) := \lim_{\epsilon \searrow 0} h_\epsilon(\phi).$$

注记 5.3. 我们注意到，定义*5.2*中的拓扑熵定义遵循 *Bowen*[Bow71] 和 *Dinaburg* [Din70]的定义。还有一种由 [AKM65], 给出的拓扑熵定义，它不使用度量结构。我们还注意到，定义*5.2*中的拓扑熵定义与紧空间 X 上度量结构的选取无关。

我们回顾一下，根据定理 4.1，$\hbar^{SH}(W,\lambda)$ 可以计算为 $\hbar(\{H_i\})$，其中 $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个满足第 3.5 节所述条件的哈密顿函数序列。出于计算便利，我们在第 5 节中固定一个特定的哈密顿函数序列 $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$。

为简便起见，除非另有说明，我们假设固定序列 $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足以下条件：

($\star$) For any $i \in \mathbb{N}$, $H_i = i \cdot H_1$.

容易验证，当且仅当存在一个正数 T，使得对于所有 $i \in \mathbb{N}$，T都不是任何闭Reeb轨道的周期时，假设 ($\star$) 成立。若存在这样的 T，则可以选取一个斜率为 T 的凸径向哈密顿函数 H，然后令 $H_i = i{\cdot}H$。我们注意到，即使假设 ($\star$) 不成立，下面各小节中的论证经过少许修改后也适用于任意序列 $\{H_i\}$。因此，假设 ($\star$) 不会造成任何损失。

对于固定的序列，我们使用以下记号：

- 凸径向哈密顿函数在W_{r_0}之外是线性的，其中$r0$ 是一个常数。
- $H_1 = Tr - C$在 $\widehat{\ }W\backslash W_{r_0}$上，或者更一般地，对于任意$i \in \mathbb{N}$，$H_i = iTr - iC$。

由于我们固定了一个特定的序列，为简洁起见，可以简化定义 3.29 中的记号。因此，我们使用以下记号：

$$\begin{aligned} b_\epsilon(i) &:= n_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(B(H_i), iC\right)\right), \\ \hbar_\epsilon &:= \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{iT} \log b_\epsilon(i) = \hbar_\epsilon(\{H_i\}), \\ \hbar &:= \lim_{\epsilon\searrow 0} \hbar_\epsilon = \hbar(\{H_i\}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

至此，我们引入了新的记号，以简化已有的记号。下面定义此前尚未出现的两个记号。

- 我们将考虑乘积空间 $\widehat{W} \times \widehat{W}$ 以及对角子空间

$$\Delta := \{(x, x) \in \widehat{W} \times \widehat{W} | x \in \widehat{W}\}.$$

- 对于一个（依赖时间的）哈密顿函数 $F\colon S^1 \times \widehat{W} \to \mathbb{R}$，我们如下选取一个拉格朗日子流形 $\widehat{\Gamma}_H$，使其包含于 $W \times W$：首先考虑哈密顿向量场 X_H 及其时间 1 流 ϕ_H。然后，Γ_H 定义为 ϕ_H 的图，即，

$$\Gamma_H := \{(x, \phi_H(x)) | x \in \widehat{W}\}.$$

利用上述记号，引理 5.4 很容易证明。

引理 5.4. 设 H 是 $\widehat{W}$ 上的非退化哈密顿函数。

(1) Δ 与 Γ_H 横截相交。*(2)* 此外，若 H 在无穷远处线性，则存在一一对应

$$O_H : \mathscr{P}_1(H) \xrightarrow{\sim} \Delta \cap \Gamma_H.$$

回顾一下，$\mathscr{P}_1(H)$ 是 X_H 的1-周期轨道集合。

5.2. **证明思路**。在第 5.2 节中，我们将大致说明定理 5.1 的证明策略。需要指出的是，本小节旨在简要描述该策略，因此为求简便，我们对某些术语的使用并不严谨。

首先，我们回顾一下，ϕ_{H_1} 表示$H1$的时间1哈密顿流，μ^t 表示Reeb向量场的时间t流，而T表示H_1的斜率。根据定义，很容易观察到$h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{W_{r_1}}\right) = h_{top}\left(\mu^T\right) = T h_{top}\left(\mu\right)$。我们将 ϕ_{H_1} 限制在W_{r_1} 上，因为在定义5.2中，我们仅对紧空间上的自同构定义拓扑熵。然后，我们比较$\mathfrak{h}^{SH}(W, \lambda) = \mathfrak{h}(\{H_i\})$与$h^{top}(\phi_{H_1})$，而不是$h^{top}(\mu)$。

根据经典结果，例如 [Yom87],，容易看出，当$n \to \infty$时，$h^{top}(\phi_{H_1})$有指数体积增长的下界。因此，我们关注 Γ_{H_n}的体积。为了处理 Γ_{H_n}的体积，我们固定一个正数常数 ϵ，并固定一组拉格朗日子流形。

$$\left\{\Delta^s \subset \widehat{W} \times \widehat{W} | s \in B_\delta^d\right\},$$

满足以下条件：

- $B^d\delta$ 是一个半径为 δ 的闭d维球，
- δ 是一个依赖于 ϵ 的小正数，并且
- 对于任意 $s \in B^d\delta$，Δ^s均由 Δ 经扰动得到。

这个固定的集合称为拉格朗日断层成像。

固定一个拉格朗日断层成像后，利用*Crofton*型 不等式，可以证明

$$\int_{s \in B_\delta^d} \left|\Delta^s \cap \Gamma_{H_n^s}\right| \leq \text{体积的指数增长率。} \tag{5.2}$$

根据 (5.2)，为了证明定理 5.1，只需证明

$$b_\epsilon(n) \leq \left|\Delta \cap \Gamma_{H_n^s}\right|. \tag{5.3}$$

更准确地说，如果 (5.3) 成立，那么可以证明 $b_\epsilon(n)$ 关于 n 的指数增长率小于或等于 Γ_{H_n} 的体积的指数增长率。回顾一下，后者的增长率给$h^{top}(\phi_{H_1})$ 提供了一个下界。因此，我们有

$$T \cdot h(\epsilon) \leq h_{top}(\phi_{H_1}) = T \cdot h_{top}(\mu), \tag{5.4}$$

对于任意 ϵ。可以..... 令 ϵg 0，并对 (5.4) 中的不等式取极限，即完成定理 5.1 的证明。

要给出完整证明，我们需要固定一个拉格朗日断层成像，并证明蕴含（5.3）的 Crofton 型不等式。前者将在第 5.3 节完成，后者将在第 5.4 节完成。

5.3. **拉格朗日断层成像**。让我们先在本小节回顾并设定一些记号 .

- 如前所述，$\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个固定的哈密顿函数序列。
- 对于任意 $n\in\mathbb{N}$，H_n 在无穷远处线性。特别地，在W_{r_0}之外，$H_n\equiv nTr-nC$，其中T和C为固定常数。
- 我们回顾一下，对于任意的$t>1$,

$$W_t=W\cup(\partial W\times[1,t])\subset\widehat{W}.$$

- 我们还使用以下记号:

$$r_1:=r_0+1,\text{ and } d \text{ is a fixed constant such that } d\geq\dim\widehat{W}.$$

- 在整个第 5.3 节中，ϵ 是一个固定的正小数。

我们固定一个依赖于 ϵ 的正实数 δ，使得

$$\delta(r_1+1+3\delta)<\epsilon \text{ and } \delta<\frac{1}{2}. \tag{5.5}$$

现在，我们定义以下记号:

定义 5.5。

(1) 我们固定一组哈密顿量函数

$$\left\{\boldsymbol{g_i}:\widehat{W}\to\mathbb{R}|i=1,\ldots,d\right\},$$

使得

（A）如果 $p\in W_{r_1}$，那么 $\{d^p g_i|i=1,\ldots,d\}$ 生成 T^*

$p\widehat{\ }W$，（B）$g_i\equiv 0\ on\ \widehat{\ }W\setminus W_{r_1+\delta}$，并且（$C$）$g_i$

足够小，特别是，

$$|g_i|<1\ on\ \widehat{W},\left|\frac{\partial g_i}{\partial r}\right|<1,\left|\alpha(X_{g_s})\right|<1\ on\ \partial W\times[1,\infty)_r. \tag{5.6}$$

(2) 对于 $s=(s_1,\ldots,s_d)\in\mathbb{R}^d$，我们定义 $\boldsymbol{g_s}$如下:

$$g_s:=\sum_{i=1}^d s_i g_i.$$

(3) 然后，所需的拉格朗日子流形集合**拉格朗日断层成像**定义为

$$\left\{\Delta^s:=\Gamma_{-g_s}\subset\widehat{W}\times\widehat{W}|s\in B_\delta^d\right\},$$

其中 $B\,d_\delta\subset\mathbb{R}^d$是一个以原点 $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$为中心、半径为 δ的闭球。

注 5.6. 我们指出，构造拉格朗日断层成像的原始想法见于 [CGG21, 第 5.2 节。3], 而定义 *5.5 (3)* 是对原始想法的略微修改。两种构造的区别如下：原始想法使用魏因斯坦邻域定理 [Wei71], ，而定义 *5.5* 使用哈密顿流的图。由于两种构造有所不同， [CGG21, 第 5.2 节。2] 与第 *5.4* 节之间也略有差异。

在第 5.5 节中，我们将联系条形码 $B(H_{sn})$ 与 $\left|\Delta^s\cap\Gamma_{H_n}\right|$，其中 H_{sn}是如下定义的哈密顿函数:

定义 5.7. 我们通过如下设定定义哈密顿函数 H_n^s

$$H_n^s := H_n + g_s \circ \phi_{H_n}^{-t}. \tag{5.7}$$

在本小节余下部分，我们将证明引理 5.8 和引理 5.9，它们描述了H_n^s的性质。

引理 5.8. *H sn* 的哈密顿流是 H_n和 g_s的哈密顿流的复合，即

$$\phi_{H_n^s}^t = \phi_{H_n}^t \circ \phi_{g_s}^t.$$

引理 5.9. 假设满足以下条件：

(1) $s \in \mathbb{R}^d$满足$\|s\| < \delta$。*(2)* H_n^s是一个非退化哈密顿函数，或者等价地， Δ 和 $\Gamma_{H_n^s}$ 横截地相交。*(3)* 一个交点$(x, x) \in \Delta \cap \Gamma_{H_n^s}$满足

$$\mathcal{A}_{H_n^s}\left(O_{H_n^s}^{-1}(x,x)\right) < nC - \delta(r_1 + 1 + 2\delta),$$

那么，$x \in W_{r_1-\delta}$。

注意， $\mathcal{A}_{H_n^s}$ 在定义 3.2 中定义，而$O^{H_n^s}$在引理 5.4 中定义。

引理 5.8 描述了 $\phi^t{}_{H_n^s}$ 的哈密顿流，这是证明引理 5.9 所需要的。本小节的主要引理——引理 5.9——在定理 5.1 的证明中起着关键作用。

引理 *5.8* 的证明。我们证明一个更一般的结论：若F、G：$\widetilde{W} \to \mathbb{R}$是哈密顿函数，且$H$定义为

$$H := F + g \circ \phi_F^{-t},$$

那么 $\phi_H = \phi_F \circ \phi_G$。

只需证明同伦 $\phi^t{}_F \circ \phi^t{}_G$ 的导数与H的哈密顿向量场一致。换言之，我们证明，对于任意$x \in \widetilde{W}$以及t_0，

$$\omega\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\left(\phi_F^t \circ \phi_G^t\right), -\right) = dH(-). \tag{5.8}$$

为了证明等式 (5.8)，首先注意到

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\left(\phi_F^t \circ \phi_G^t\right) = X_F\left(\phi_F^{t_0} \circ \phi_G^{t_0}(x)\right) + (\phi_F^{t_0})_*\left(X_G\left(\phi_G^{t_0}(x)\right)\right).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\omega\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\left(\phi_F^t \circ \phi_G^t\right), -\right) &= \omega\left(X_F\left(\phi_F^{t_0} \circ \phi_G^{t_0}(x)\right), -\right) + \omega\left((\phi_F^{t_0})_*\left(X_G\left(\phi_G^{t_0}(x)\right)\right), -\right) \\
&= dF_{\phi_F^{t_0} \circ \phi_G^{t_0}(x)}(-) + \left((\phi_F^{t_0})^*\omega\right)_{\phi_F^{t_0} \circ \phi_G^{t_0}(x)}\left(X_G\left(\phi_G^{t_0}(x)\right), (\phi_F^{-t_0})_*(-)\right) \\
&= dF_{\phi_F^{t_0} \circ \phi_G^{t_0}(x)}(-) + \omega_{\phi_G^{t_0}(x)}\left(X_G\left(\phi_G^{t_0}(x)\right), (\phi_F^{-t_0})_*(-)\right) \\
&= dF_{\phi_F^{t_0} \circ \phi_G^{t_0}(x)}(-) + dG_{\phi_G^{t_0}(x)}\left((\phi_F^{-t_0})_*(-)\right) \\
&= dF_{\phi_F^{t_0} \circ \phi_G^{t_0}(x)}(-) + \left((\phi_F^{-t_0})^* dG\right)_{\phi_F^{t_0} \circ \phi_G^{t_0}(x)}(-) \\
&= \left(dF + d(G \circ \phi_F^{-t_0})\right)_{\phi_F^{t_0} \circ \phi_G^{t_0}(x)} \\
&= dH.
\end{aligned}$$

□

引理 *5.9* 的证明。 我们用反证法证明引理 5.9，即证明当 $O^{-1}{}_{H_n^s}(x,x)\Big) \geq nC - \delta(r_1 + 1$ 且 $x \notin W_{r_1-\delta}$ 时。

Let

$$p : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \widehat{W}, p(t) := \phi^t_{H_n^s}(x).$$

表示对应于 (x, x) 的 1-周期轨道，即 $O_{H_n^s}\left(p(t)\right) = (x, x)$。我们关注 $p(t)$ 的 r-坐标。注意， $p(t)$ 是哈密顿向量场 $X^{H_n^s}$ 的流。在引理 5.8 的证明中，我们观察到

$$p'(t) = X_{H_n^s} = X_{H_n} + (\phi^t_{H_n})_*(X_{g_s}).$$

在 $\partial W \times [1,\infty)_r$ 上，我们可以看到， $X^{H_n^s}$ 的 ∂r 方向部分由下式给出

$$\begin{aligned} dr\left(X_{H_n^s}\right) &= (dr \wedge \alpha + r d\alpha)\left(-R, X_{H_n^s}\right) \\ &= \omega(-R, X_{H_n^s}) \\ &= -\left(dH_n^s\right)(R) \\ &= -dH_n(R) - dg_s\left((\phi^t_{H_n})_*(R)\right) \\ &= -dg_s(R) \\ &= -dr(X_{g_s}). \end{aligned}$$

因此，对于所有$t \in [0,1]$，我们有 $\left|dr\left(p'(t)\right)\right| < \delta$，于是$r$-坐标$p(t)$ 的$r\left(p(t)\right)$ 满足：

$$r\left(p(t)\right) \in \left[r\left(p(0)\right) - \delta, r\left(p(0)\right) + \delta\right].$$

我们想指出，(5.6)证明了上述倒数第二个不等式。 e.

现在，我们将 (5.9) 中的 $\mathscr{A}_{H_n^s}\left(O^{-1}{}_{H_n^s}(x, x) = p(t)\right)$ 分解为以下三个项：

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{H_n^s}\left(p(t)\right) &= \int_0^1 \lambda\left(p'(t)\right) dt - \int_0^1 H_n^s\left(p(t)\right) dt \left(\because \text{ by definition}\right) \\ &= \int_0^1 r\left(p(t)\right) \alpha\left(X_{H_n} + (\phi^t_{H_n})_*(X_{g_s})\right) dt - \int_0^1 H_n\left(p(t)\right) dt - \int_0^1 g_s\left(\phi^{-t}_{H_n}\left(p(t)\right)\right) dt \\ &= \int_0^1 \left[r\left(p(t)\right) \alpha\left(X_{H_n}\right) - H_n\left(p(t)\right)\right] dt + \int_0^1 r\left(p(t)\right) \alpha\left((\phi^t_{H_n})_*(X_{g_s})\right) dt - \int_0^1 g_s\left(\phi^{-t}_{H_n}\left(p(t)\right)\right) dt. \end{aligned} \tag{5.9}$$

(5.9) 的第一项很容易计算。更准确地说，我们想指出，由于$x \notin W_{r_1-\delta}$，x的r坐标大于$r_1 - \delta$。于是，我们有

$$r_0 < r_1 - 2\delta < r\left(p(t)\right),$$

因为$p(t)$是$X^{H_n^s}$的流，且$p(0) = x$。这意味着对任意$t \in [0,1]$,

$$H_n\left(p(t)\right) = nTr\left(p(t)\right) - nC,$$

因为$H_n = nTr - nC$在 $\partial W \times [r0,\infty)$ 上。

现在，(5.9) 中的第一项变为

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[r\left(p(t)\right) \alpha\left(X_{H_n}\right) - H_n\left(p(t)\right)\right] dt &= \int_0^1 \left[r\left(p(t)\right) \alpha(-nTR) - nTr\left(p(t)\right)\right] dt + nC \\ &= nC. \end{aligned}$$

由于以下原因，(5.9) 的第二项有下界 $-\delta(r_1 + 2\delta)$：首先，我们注意到 $r(x) < r_1 + \delta$。否则，根据定义 5.5 (1) 的条件 (B)，对于所有 t， $Hsn = Hn$在 $p(t)$ 处。因此，

$p(t)$ 是一条周期为 nT 的 Reeb 轨道。由于 nT 不是 Reeb 轨道的周期，这就产生了矛盾。这意味着

$$r\left(p(t)\right) \leq r_1 + \delta + \delta = r_1 + 2\delta.$$

我们还注意到，$\phi^t{}_{H_n}$ 在 $\partial W \times [r0,\infty)_r$ 上保持 α，即 $(\phi^t{}_{H_n})^*(\alpha) = \alpha$。因此，(5.9) 中的第二项满足

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\left(p(t)\right)\alpha\left((\phi^t_{H_n})_*(X_{g_s})\right)dt &= \int_0^1 r\left(p(t)\right)(\phi^t_{H_n})^*\alpha(X_{g_s})dt \\ &= \int_0^1 r\left(p(t)\right)\alpha(X_{g_s}) \\ &\geq -\delta(r_1+2\delta).\end{aligned}$$

最后，(5.9) 中的最后一项满足

$$-\int_0^1 g_s\left(\phi^{-t}_{H_n}\left(p(t)\right)\right)dt \geq -\max\{|g_s|\} > -\|s\| > -\delta.$$

上述关于 (5.9) 中三项的论证给出了如下下界：$\mathscr{A}_{H_n^s}\left(O^{-1}{}_{H_n^s}(x,x)\right)$

$$\mathscr{A}_{H_n^s}\left(O^{-1}_{H_n^s}(x,x)\right) \geq nC - \delta(r_1+2\delta) - \delta = nC - \delta(r_1+1+2\delta).$$

证明完成。 □

5.4. **Crofton 型不等式**。 在本小节中，我们证明 (5.2)，并将其称为*Crofton*型 不等式。我们注意到，正如 [CGG21, 第 5.2 节2] 中所提到的，Crofton 型的主要思想已为专家所熟知。为使本文完整，我们证明 Crofton 型不等式 (5.2)。关于该思想更一般的论证，参见 [CGG21, 第 5.2 节2] 及其中的参考文献。

为了正式陈述我们的 Crofton 型不等式，我们需要做一些准备。首先，固定满足 (5.5) 的正数 ϵ和 δ。然后，我们有一个固定的拉格朗日断层成像 $\{\Delta^s | s \in Bd_\delta\}$。

注意，由于非退化哈密顿函数在哈密顿函数空间中是泛型的，对于几乎所有的 $s \in B^d_\delta$, $\Delta \pitchfork \Gamma_{H_n^s}$。令

$$N_n(s) := \left|\Delta \cap \Gamma_{H_n^s} \cap \left(W_{r_1-\delta} \times W_{r_1-\delta}\right)\right|.$$

于是，对于几乎所有的 $N_n(S)$，$s \in Bd\delta$ 均为有限值，并且 $N_n(S)$ 是 B^d_δ 上的可积函数。

令 Ψ 为如下定义的映射：

$$\Psi : B^d_\delta \times \widehat{W} \to \widehat{W} \times \widehat{W}, (s,x) \mapsto \left(x, \phi_{-g_s}(x)\right).$$

我们还定义

$$E := \Psi^{-1}\left(W_{r_1} \times W_{r_1}\right).$$

注意，$Bd_\delta \subset \mathbb{R}^d$。因此，$\mathbb{R}^d$上的欧几里得度量在 B^d_δ 上诱导出一个体积形式。令 ds表示 B^d_δ 上诱导的体积形式。

我们还注意到，若 $(s,x) \in E$，且 $\|s\|$ 足够小，则 Ψ 在 (s,x) 处是一个淹没映射。更准确地说，我们提及：

$$D\Psi|_{(0,x)}(-\partial s_i, 0) = X_{g_i}(x),$$

其中 X_{g_i} 表示g_i的哈密顿向量场。由于定义 5.5（1）中的条件 (A)，当$x \in W_{r_1}$时，$D\Psi|_{(0,x)}$ 是满射。由于 W_{r_1} 是一个紧集，存在一个 $\delta > 0$，使得

(5.10) if s satisfies $\|s\| < \delta$, then Ψ is a submersion at (s,x) for all $x \in W_{r_1}$.

注 5.10。 证明Ψ 是一个淹没映射时，我们与 [CGG21, 第 5.2 节。2] 及第 *5.4* 节的做法有所不同。这一差异源于我们构造拉格朗日断层成像的方法不同于 [CGG21]中的方法。参见注 *5.6*。

现在，假设 δ 足够小，使得（5.10）成立。那么， $\Psi|_E$ 是一个真淹没映射，且 Ehresmann 纤维化定理 [Ehr51] 证明了 Ψ 是一个局部平凡纤维化。因此，在g_E上存在一个度量，使得对 (x_1, x_2) 中的 Ψ^{-1}的法向空间，$D\Psi$ 到 $(x_1, x_2) \in W_{r_1} \times W_{r_1}$的限制是一个等距映射。

此外，由于 $\widehat{W}$ 是一个辛流形，存在一个与 ω相容的度量g。并且，g 诱导出$W \times W$上的乘积度量。

现在，我们给出 Crofton 型不等式的正式表述。

引理 5.11。 设 ϵ 为给定的正数，并设 δ 为满足（5.5）和（5.10）的数，其中$\widehat{\ }$为给定的 ϵ。那么，存在一个常数 A，该常数仅依赖于 Ψ，ds、W 上的固定度量 g 以及 E_E上的固定度量 g，使得以下不等式成立：

$$\int_{B_\delta^d} N_n(S)\,ds \le A \cdot \mathrm{Vol}\left(\Gamma_{H_n} \cap (W_{r_1} \times W_{r_1})\right),$$

其中，Vol(–) 表示由度量 g 在 $\widehat{W}$ 上诱导的体积。

证明。 对于给定的 $s \in B_\delta^d$，我们设一个哈密顿量同伦 Φ_s: $\widehat{W} \times \widehat{W} \to \widehat{W} \times \widehat{W}$为

$$\Phi_s(x, y) = (\phi_{g_s}(x), y).$$

容易验证， Φ_s 是一个同伦，其对应的哈密顿函数如下：

$$\widehat{W} \times \widehat{W} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto g_s(x).$$

设$x \in \widehat{W}$满足以下条件。

$$(x, x) \in \Delta \cap \Gamma_{H_n^s} \cap \left(W_{r_1-\delta} \times W_{r_1-\delta}\right).$$

证明的第一步是证明：

$$\Phi_s(x, x) \in \Gamma_{-g_s} \cap \Gamma_{H_n} \cap \left(W_{r_1} \times W_{r_1}\right).$$

根据定义， $\Phi_s(x, x) = \left(\phi_{g_s}(x),\ x\right)$。令$y := \phi_{g_s}(x)$。那么，很容易看出，

$$\phi_{-g_s}(y) = \phi_{g_s}^{-1}(y) = x = \phi_{H_n^s}(x) = \left(\phi_{H_n} \circ \phi_{g_s}\right)(x) = \phi_{H_n}(y).$$

根据定义，第一个和第二个等式显然成立；由于 $(x,x) \in \Gamma_{H_n^s}$，第三个等式成立；根据引理 5.8，第四个等式成立；最后一个等式显然成立。因此， $\Phi(x, x) \in \Gamma_{-g_s} \cap \Gamma_{H_n}$。

此外，由于 $\|s\| < \delta$，且根据定义 5.5. (1) 的条件 (A)，

$$r\text{-coordinate of } \phi_{g_s}(x) \le r\text{-coordinate of } x + \delta.$$

由于 $x \in W_{r_1-\delta}$， $y = \phi_{g_s}(x) \in W_{r_1}$。

由于 Φ_s 是一个同伦，我们有

$$N_n(S) \le \left|\Gamma_{-g_s} \cap \Gamma_{H_n} \cap \left(W_{r_1} \times W_{r_1}\right)\right| =: N'(s).$$

现在，只需证明

$$\int_{B_\delta^d} N'(s)\,ds \le A \cdot \mathrm{Vol}\left(\Gamma_{H_n} \cap (W_{r_1} \times W_{r_1})\right). \tag{5.11}$$

我们回顾一下，B^d_δ（分别地，$\widehat{W}$）带有度量。因此，乘积空间 $B_\delta^d \times \widehat{W}$及其子集 E带有乘积度量。注意，乘积度量不必与 g_E相同。

我们考虑映射 $\pi\colon E \to Bd_\delta \times \widehat{W} \to B^d_\delta$，将其投影到第一因子。为简便起见，令 $\Sigma := \Psi^{-1}\left(\Gamma_{H_n} \cap (W_{r_1} \times W_{r_1})\right)$，并令 $\mathrm{Vol}_1(-)$ 表示关于 E 上的乘积度量的体积。那么，我们有

$$\int_{B^d_\delta} N'(s)\,ds = \int_{B^d_\delta} \left|\left(s \times \widehat{W}\right) \cap \Sigma\right| ds = \int_\Sigma \pi^* ds \le \mathrm{Vol}_1(\Sigma). \tag{5.12}$$

现在，令 $\mathrm{Vol}_2(-)$ 表示集合空间上关于度量g_E的体积函数，其中E。于是，由 Fubini 定理可得

$$\mathrm{Vol}(\Sigma) = \int_{\Gamma_{H_n} \cap (W_{r_1} \times W_{r_1})} \mathrm{Vol}_2\left(\Psi^{-1}(x)\right) dx \le \max_{x \in \psi(E)} \mathrm{Vol}_2\left(\Psi^{-1}(x)\right) \cdot \mathrm{Vol}\left(\Gamma_{H_n} \cap (W_{r_1} \times W_{r_1})\right). \tag{5.13}$$

最后，我们注意到E 是一个紧集。因此，存在一个常数A_0，它仅依赖于g_E 以及E 上的乘积度量，使得

$$\mathrm{Vol}_1(\Sigma) \le A_0 \cdot \mathrm{Vol}_2(\Sigma). \tag{5.14}$$

现在，结合 (5.12)–(5.14)，得到

$$\int_{B^d_\delta} N'(s)\,ds \le \mathrm{Vol}_1(\Sigma) \le A_0 \cdot \mathrm{Vol}_2(\Sigma) \le A_0 \cdot \max_{x \in \psi(E)} \mathrm{Vol}_2\left(\Psi^{-1}(x)\right) \cdot \mathrm{Vol}\left(\Gamma_{H_n} \cap (W_{r_1} \times W_{r_1})\right).$$

这证明了 (5.11)，并完成了证明。 □

5.5. **定理 5.1 的证明**。在本小节中，我们证明定理 1.2，或者等价地，证明定理 5.1。定理 5.1 比较 $\mathfrak{h}^{SH}(W, \lambda)$ 与 $h^{top}(\mu)$，其中 μ 表示时间 1 的 Reeb 流。如第 5.2 节所述，我们的策略是先证明引理 5.12，即$h^{top}(\phi_{H_1}|_{W_1})$ 与$h^{top}(\mu^T)$彼此相等，然后再比较 $\mathfrak{h}^{SH}(W, \lambda)$ 与$h^{top}(\phi_{H_1}|_{W_1})$。

引理 5.12. 在上述设定下，哈密顿流 $\phi_{H_1}|_{W_{r_1}}$ 与 *Reeb*流 μ 具有相同的拓扑熵，即：

$$h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{W_1}\right) = T \cdot h_{top}(\mu).$$

证明。 在开始证明之前，我们想指出，为方便起见，若不存在混淆的可能，$\widehat{\phi_{H_1}}$在W的子集上的每个限制都将记为 ϕ_{H_1}，而不提及限制的定义域。

我们回顾一下，H_1 是凸径向的。因此，我们有

$$H_1 = \begin{cases} 0 \text{ on } W \\ h(r) \text{ on } \partial W \times [1, \infty)_r \end{cases}.$$

因此，$\phi_{H_1}|_W$是恒等映射，而 $\phi_{H_1}|_{[1,\infty)\times\partial W}$是$h'(r)R$的流。

我们指出，以下关于拓扑熵的事实是众所周知的：

- 若 $\phi\colon X_1 \cup X_2 \to X_1 \cup X2$ 满足 $\phi(Xi) \subset Xi$，则
$$h_{top}(\phi) = \max\{h_{top}(X_1), h_{top}(X_2)\}.$$
- 如果 $\phi\colon X \to X$和 $Y \subset X$满足 $\phi(Y)$，那么
$$h_{top}(\phi) \ge h_{top}\left(\phi|_Y\right).$$

更多详情请参见 [Gro87，第 1 节。6]

由上述列出的拓扑熵性质可容易验证 t

$$h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{W_{r_1}}\right) = \max\left\{h_{top}\left(\phi_{H_1}|_W\right), h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{[0,r_1]\times\partial W}\right)\right\}.$$

由于每个恒等映射的拓扑熵都为零，因此我们有

$$h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{W_{r_1}}\right) = h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{[0,r_1]\times\partial W}\right).$$

此外，

$$h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{[0,r_1]\times\partial W}\right) \geq h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{\{r_1\}\times\partial W}\right) = h_{top}\left(\mu^T\right). \tag{5.15}$$

现在，我们回顾 Bow71 中的两个经典结果。

- [Bow71，推论 18]。设X和Y是两个紧子集。对于一对连续映射 $\phi\colon X \to X$和 $\pi\colon X \to Y$，满足 $\pi \circ \phi = \pi$，以下结论成立：
$$h_{top}(\phi) = \sup_{y\in Y} h_{top}\left(\phi|_{\pi^{-1}(y)}\right).$$
- [Bow71，命题 21]。如果 ϕ_t 是紧空间X上赋予度量结构的一个向量场的t时间流，对于任意$t > 0$,
$$h_{top}\left(\phi^t\right) = t h_{top}\left(\phi^1\right).$$

现在，我们考虑映射

$$\pi : [1, r_1] \times \partial W \to [1, r_1].$$

容易验证，对于所有$r \in [1, r_1]$，$\pi \circ \phi_{H_1} = \pi$以及$\phi_{H_1}|_{\pi^{-1}(r)} = \mu^{h'}(r)$。因此，由 [Bow71 的推论 18 和命题 21], 可得

$$h_{top}\left(\phi_{H_1}\right) := \sup_{r\in[1,r_1]} \left\{h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{\{r\}\times\partial Y}\right) = h'(r) h_{top}(\mu) \,|\, r \in [1, r_1]\right\}.$$

□

现在，我们证明定理 5.1

定理 *5.1* 的证明。 我们先指出以下等式是众所周知的：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{Vol}\left(\left\{\left(x, \phi_{H_1}^n(x)\right) \,|\, x \in W_{r_1}\right\}\right) \leq h_{top}\left(\phi_{H_1}|_{W_{r_1}}\right) \tag{5.16}$$

根据Γ_{H_n}的定义，

$$\mathrm{Vol}\left(\left\{\left(x, \phi_{H_1}^n(x)\right) \,|\, x \in W_{r_1}\right\}\right) = \mathrm{Vol}\left(\Gamma_{H_n} \cap (W_{r_1} \times W_{r_1})\right).$$

由引理 5.12，(5.16) 中的不等式变为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{Vol}\left(\Gamma_{H_n} \cap (W_{r_1} \times W_{r_1})\right) \leq T h_{top}(\mu). \tag{5.17}$$

现在，由 (5.16) 和引理 5.11，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nT} \int_{B_\delta^d} N_n(S)\, ds \leq h_{top}(\mu). \tag{5.18}$$

为了证明定理 5.1，我们将 (5.18) 的左侧与 $b\epsilon(n)$、$\hbar\epsilon$ 以及 (5.1) 中定义的 $\hbar$ 联系起来。

设 ϵ 为一个固定的正小实数。接下来，我们将固定一个正实数 δ，使得

(i) (5.5)中的不等式成立，即 $\delta(r_1 + 1 + 3\delta) < \epsilon$和 $\delta < \frac{1}{2}$；(ii) 若 $\|s\| \leq \delta$，则 $\|H_n - H_n^s\|_{\infty, W_{r_1}}$足够小，使得根据引理3.10，$B(H_n)$ 与 $B(H_{sn})$ 之间的交错距离小于 $\frac{\epsilon}{2}$。

注意，由于 δ 足够小，能够满足 (i) 和 (ii)，因此可以应用第5.3节和第5.4节的结果，特别是引理5.9和引理5.11。

正如我们所做的 之前，令 $B_\delta^d \subset \mathbb{R}^d$ 为半径为 δ 的闭球，使得所有 $s \in Bd\delta$ s 都满足 ksk $\leq \delta$.

现在，我们回顾一下，$b_{2\epsilon}(n)$ 定义为满足下述条件 (A-0) 和 (B-0) 的 $B(Hn)$ 中的条形数量。

(A-0) 每条的长度都大于 2ϵ。(B-0) 每条的左端点都小于 $nC - 2\epsilon$。

我们注意到，满足 (A-0) 和 (B-0) 的$B(Hn)$ 中的条形数量等于$b_{2\epsilon}(n)$。关于第二个条件 (B-0)，请参见注3.30（2）。

我们将条件 (A-0) 和 (B-0) 弱化如下：

(A-1) 每条的长度大于 2ϵ。(B-1) 每条的左端点小于 $nC - 2\epsilon + \delta$。

令 b_1 为满足 (A-1) 和 (B-1) 的 $B(Hn)$ 中条形的数量，则

$$b_{2\epsilon}(n) \leq b_1,$$

因为 (A-1) 和 (B-1) 弱于 (A-0) 和 (B-0)。

现在，在假设 $\Delta \pitchfork \Gamma_{H_n^s}$ 的情况下，我们来计算 $B(Hsn)$ 中条形的数量。我们注意到，对于几乎所有 $s \in Bd\delta$，该假设都成立。令 b_2 为满足下述 (A-2) 和 (B-2) 的 $B(Hsn)$ 中条形的数量。

(A-2) 每条的长度大于 ϵ。(B-2) 每条的左端点小于 $nC - 2\epsilon + \delta + \frac{\epsilon}{2}$。

于是，由于 $B(Hn)$ 与 $B(Hsn)$ 是 $\frac{\epsilon}{2}$-交错的，或者等价地，$d_{bot}(B(Hsn),B(Hn)) < \frac{\epsilon}{2}$，我们得到

$$b_{2\epsilon}(n) \leq b_1 \leq b_2.$$

同样，我们可以将条件 (B-2) 弱化如下：

(A-3) 条的长度大于 ϵ。(B-3) 条的左端点小于 $nC - \epsilon + \delta$。

注意到 (A-3) 与 (A-2) 相同。现在，令 b_3 为满足 (A-3) 和 (B-3) 的 $B(Hsn)$ 中条形的数量。由于 (B-2) 强于 (B-3)，

$$b_{2\epsilon}(n) \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3.$$

回顾引理 2.4，微分映射 $\partial\colon \left(CF(Hsn), \mathscr{A}_{H_n^s}\right) \to \left(CF(Hsn), \mathscr{A}_{H_n^s}\right)$ 存在奇异值分解。或者等价地，存在一个正交基

$$\mathbb{B} := \{x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M, z_1, \ldots, z_M\}$$

非阿基米德赋范向量空间 $\left(CF(Hsn)\right.$ 的，$\left.\mathscr{A}_{H_n^s}\right)$ 使得

$$\partial x_i = 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, N, \partial z_j = y_j \text{ for all } j = 1, \ldots, M,$$
$$\mathscr{A}_{H_n^s}(z_1) - \mathscr{A}_{H_n^s}(y_1) \leq \mathscr{A}_{H_n^s}(z_2) - \mathscr{A}_{H_n^s}(y_2) \leq \cdots \leq \mathscr{A}_{H_n^s}(z_M) - \mathscr{A}_{H_n^s}(y_M).$$

我们注意到 x_i（分别地，二元组（y_j，z_j））对应于 B（Hsn）中的一条条，其长度为无穷（分别地，长度为 $\mathscr{A}_{H_n^s}$（z_j）$-\mathscr{A}_{H_n^s}$（y_j））， 且对应条的左端点为 $\mathscr{A}_{H_n^s}$（x_i）（分别地， $\mathscr{A}_{H_n^s}$（y_j）。）因此，b_3 是满足条件（A-3’）和（B-3’）的$i \in \{1, \ldots,$ 自然数集 $\}$和$j \in \{1, \ldots, M\}$的数量。

(A-3') $\mathscr{A}_{H_n^s}(zj) - \mathscr{A}_{H_n^s}(y_j) > \epsilon$. (

B-3') $\mathscr{A}_{H_n^s}(x_i), \mathscr{A}_{H_n^s}(y_j) < nC - \epsilon + \delta$.

接下来，我们忽略条件 (A-3')，并将 (B-3') 弱化如下：由于 $\delta(r_1 + 1 + 3\delta) < \epsilon$，我们有

$$nC - \epsilon + \delta < nC - \delta(r_1 + 1 + 2\delta).$$

因此，下面的 (B-4) 比 (B-3) 弱。

(B-4) $\mathscr{A}_{H_n^s}(x_i), \mathscr{A}_{H_n^s}(y_j) < nC - \delta(r_1 + 1 + 2\delta)$.

设 b_4 为满足 (B-4) 的 $i \in \{1, \dots,$ 自然数集 $\}$ 和 $j \in \{1, \dots, M\}$ 的个数。那么，我们有

$$b_{2\epsilon}(n) \le b_1 \le b_2 \le b_3 \le b_4.$$

现在，我们回忆一下，$CF(Hsn)$ 有一个不同于 $\mathbb{B}$ 的正交基。另一个正交基是$X^{H_n^s}$ 的 1-周期轨道集合，即 $\mathscr{P}_1(H_n^s)$。于是，根据引理 2.5，存在一个在 $\mathbb{B}$ 和 $\mathscr{P}_1(H_n^s)$ 之间保持作用量值的一一映射。

令b_5 表示满足以下条件 (B-5) 的 $\gamma \in \mathscr{P}_1(H_n^s)$ 的数量：

(B-5) $\mathscr{A}_{H_n^s}(\gamma) < nC - \delta(r_1 + 1 + 2\delta)$.

那么，$CF(Hsn)$ 的两个正交基之间的一一映射表明

$$b_{2\epsilon}(n) \le b_1 \le b_2 \le b_3 \le b_4 \le b_5.$$

最后，考虑映射 $O^{H_n^s}$: $\mathscr{P}_1(H_n^s) \to \Delta \cap \Gamma_{H_n^s}$。于是可以观察到，对于任意满足 (B-5) 的 $\gamma \in \mathscr{P}_1(Hsn)$，由引理 5.9，存在 $x \in W_{r_1-\delta}$，使得 $O^{H_n^s}(\gamma) = (x, x) \in \Delta \cap \Gamma_{H_n^s}$。换言之，

$$(x, x) \in \Delta \cap \Gamma_{H_n^s} \cap \left(W_{r_1-\delta} \times W_{r_1-\delta}\right).$$

我们回顾一下，$Nn(S)$ 定义为

$$N_n(S) := \left|\Delta \cap \Gamma_{H_n^s} \cap \left(W_{r_1-\delta} \times W_{r_1-\delta}\right)\right|.$$

因此，

(5.19) $$b_{2\epsilon}(n) \le b_1 \le b_2 \le b_3 \le b_4 \le b_5 \le N_n(S).$$

注意，ϵ 是固定的；根据 ϵ 的选择，δ 也固定了，并且对于任意$n \in \mathbb{N}$，(5.19) 中的不等式都成立。因此，结合 (5.18) 和 (5.19)，对于任意 ϵ，有

$$\hbar_{2\epsilon} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nT} \log b_{2\epsilon}(n) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nT} \int_{B_\delta^d} N_n(S)\, ds \le h_{top}(\mu).$$

此外，对不等式 $\hbar_{2\epsilon} \le h^{top}(\mu)$ 的两边取极限，可得

$$\hbar := \lim_{\epsilon \searrow 0} \hbar_\epsilon \le h_{top}(\mu).$$

换言之，定理 5.1 成立。 □

参考文献

[AASS21] Alberto Abbondandolo、Marcelo RR Alves、Murat Saglam 和 Felix Schlenk，*Reeb* 流与 *Finsler* 流的熵塌缩与熵刚性，arXiv 预印本 arXiv:2103.01144（2021）。[ACH19] Marcelo R. R. Alves、Vincent Colin 和 Ko Honda，通过开书分解研究三维 *Reeb* 向量场的拓扑熵，J. Éc. polytech. Math. **6**（2019），119–148。MR 3915194[AD14] Michèle Audin 和 Mihai Damian，*Morse* 理论与 *Floer* 同调，Universitext，Springer，伦敦；EDP Sciences，Les Ulis，2014，译自 2010 年法文原版，Reinie Erné 译。MR 3155456[AF10] Peter Albers 和 Urs Frauenfelder，叶状交点与 *Rabinowitz Floer* 同调，J. Topol. Anal.**2**（2010），第 1 期，77–98。MR 2646990

[AKM65] R. L. Adler、A. G. Konheim 和 M. H. McAndrew，拓扑熵，Trans. Amer. Math. Soc. 114（1965），309–319。MR 175106[All22] Simon Allais，关于 $\mathbb{C}\mathrm{Pd}$ 上的霍费尔-曾德猜想：生成函数方法，Internat. J. Math. 33（2022），第 10–11 期，论文编号 2250072，58 页。MR 4514295[All23] ———，关于加权射影空间上的霍费尔-曾德猜想，Compos. Math. 159（2023），第 1 期，87–108。MR 4540750[Alv16a] Marcelo R. R. Alves，柱状接触同调与拓扑熵，Geometry & Topology 20（2016），第 6 期，3519–3569。[Alv16b] ———，三维阿诺索夫接触流形上 Reeb 流的正拓扑熵，J. Mod. Dyn. 10（2016），497–509。MR 3570995[Alv19] ———，勒让德接触同调与拓扑熵，J. Topol. Anal. 11（2019），第 1 期，53–108。MR 3918061[AM19] Marcelo R. R. Alves 和 Matthias Meiwes，≥ 7维的动力学异质接触球面，Comment. Math. Helv. 94（2019），第 3 期，569–622。MR 4014780[AP22] Marcelo R. R. Alves 和 Abror Pirnapasov，迫使拓扑熵出现的 Reeb 轨道，Ergodic Theory Dynam. Systems 42（2022），第 10 期，3025–3068。MR 4476096[BHS21] Lev Buhovsky、Vincent Humilière 和 Sobhan Seyfaddini，作用谱与 C^0 辛拓扑，Math. Ann. 380（2021），第 1–2 期，293–316。MR 4263685[BL15] Ulrich Bauer 和 Michael Lesnick，诱导匹配与持久条形码的代数稳定性，J. Comput. Geom. 6（2015），第 2 期，162–191。MR 3333456[Bow71] Rufus Bowen，群自同态与齐性空间的熵，Trans. Amer. Math. Soc. 153（1971），401–414。MR 274707[BPP+22] Lev Buhovsky、Jordan Payette、Iosif Polterovich、Leonid Polterovich、Egor Shelukhin 和 Vukašin Stojisavljevi´c，粗略节点计数与拓扑持久性，arXiv 预印本 arXiv:2206.06347（2022）。[BPS03] Paul Biran、Leonid Polterovich 和 Dietmar Salamon，哈密顿动力学中的传播与相对辛同调，Duke Math. J. 119（2003），第 1 期，65–118。MR 1991647[BV18] Peter Bubenik 和 Tane Vergili，持久模的拓扑空间及其性质，J. Appl. Comput. Topol. 2（2018），第 3–4 期，233–269。MR 3927353[CB15] William Crawley-Boevey，逐点有限维持久模的分解，J. Algebra Appl. 14（2015），第 5 期，1550066，8 页。MR 3323327[CE12] Kai Cieliebak 和 Yakov Eliashberg，从 Stein 到 Weinstein 再返回，美国数学会 Colloquium Publications，第 59 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2012，仿射复流形的辛几何。MR 3012475[CF09] Kai Cieliebak 和 Urs Adrian Frauenfelder，恰当接触嵌入的 Floer 同调，Pacific J. Math. 239（2009），第 2 期，251–316。MR 2461235[CFHW96] K. Cieliebak、A. Floer、H. Hofer 和 K. Wysocki，辛同调的应用。II. 作用谱的稳定性，Math. Z. 223（1996），第 1 期，27–45。MR 1408861[CFO10] Kai Cieliebak、Urs Frauenfelder 和 Alexandru Oancea，Rabinowitz Floer 同调与辛同调，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 43（2010），第 6 期，957–1015。MR 2778453[CGG21] Erman Cineli、Viktor L Ginzburg 和 Basak Z Gurel，哈密顿微分同胚的拓扑熵：持久同调与 Floer 理论视角，arXiv 预印本 arXiv:2111.03983（2021）。[CGG22] ———，拉格朗日体积的下半连续性，arXiv 预印本 arXiv:2210.04357（2022）。[CM21] Arnon Chor 和 Matthias Meiwes，霍费尔几何与拓扑熵，arXiv 预印本 arXiv:2112.04955（2021）。[Dah20] Lucas Dahinden，正接触同胚的正拓扑熵，J. Symplectic Geom. 18（2020），第 3 期，691–732。MR 4142484[Dah21] ———，C^0 接触同胚拓扑熵的稳定性，Commun. Contemp. Math. 23（2021），第 6 期，论文编号 2150015，20 页。MR 4289925[Die23] Patricia Dietzsch，通过条形码界定拉格朗日霍费尔度量，arXiv 预印本 arXiv:2304.05628（2023）。[Din70] E. I. Dinaburg，拓扑熵与度量熵之间的关联，Dokl. Akad. Nauk SSSR 190（1970），19–22。MR 0255765[Ehr51] Charles Ehresmann，可微纤维空间中的无穷小联络，拓扑学讨论会（纤维空间），布鲁塞尔，1950，Georges Thone，列日；Masson & Cie，巴黎，1951，第 29–55 页。MR 0042768[FH94] A. Floer 和 H. Hofer，辛同调。I. Cn 中的开集，Math. Z. 215（1994），第 1 期，37–88。MR 1254813[FS06] Urs Frauenfelder 和 Felix Schlenk，通过拉格朗日交点研究纤维方向体积增长，J. Symplectic Geom. 4（2006），第 2 期，117–148。MR 2275001[Gab72] Peter Gabriel，不可分解表示。I，Manuscripta Math. 6（1972），71–103；勘误，同刊 6（1972），309。MR 332887[GG18] Viktor L. Ginzburg 和 Ba.sak Z. Gürel，射影空间上的哈密顿伪旋转，Invent. Math. 214（2018），第 3 期，1081–1130。MR 3878727

[GGM22] Viktor L Ginzburg、Basak Z Gurel 和 Marco Mazzucchelli，测地流的条形码熵，arXiv 预印本 arXiv:2212.00943（2022）。[Gro87] M. Gromov，熵、同调与半代数几何，第145–146期，1987，Bourbaki 研讨会，1985/86卷，第5篇，225–240页。MR 880035[Jan21] Alexandre Jannaud，Dehn-Seidel 扭转、辛拓扑与条形码，arXiv 预印本 arXiv:2101.07878（2021）。[Jol21] Benoît Joly，曲面哈密顿同胚的条形码，arXiv 预印本 arXiv:2112.03733（2021）。[Kaw22] Yusuke Kawamoto，关于辛非渐近平坦流形上谱范数的 C^0-连续性，《国际数学研究通知》（2022），第21期，17187–17230页。MR 4504915[KS21] Asaf Kislev 和 Egor Shelukhin，谱范数与条形码的界，《几何与拓扑》25（2021），第7期，3257–3350页。MR 4372632[LRSV21] Frédéric Le Roux、Sobhan Seyfaddini 和 Claude Viterbo，条形码与保面积同胚，《几何与拓扑》25（2021），第6期，2713–2825页。MR 4347306[Mei18] Matthias Meiwes，Rabinowitz Floer 同调、叶状交点与拓扑熵，博士论文，2018。[MS11] Leonardo Macarini 和 Felix Schlenk，球化空间上 Reeb 流的正拓扑熵，《剑桥哲学会数学学报》151（2011），第1期，103–128页。MR 2801317[New89] Sheldon E. Newhouse，熵的连续性性质，《数学年刊》（第2辑）129（1989），第2期，215–235页。MR 986792[Oan06] Alexandru Oancea，具有受限接触型边界的流形上 Floer 同调的 Künneth 公式，《数学年刊》334（2006），第1期，65–89页。MR 2208949[PRSZ20] Leonid Polterovich、Daniel Rosen、Karina Samvelyan 和 Jun Zhang，《几何与分析中的拓扑持久性》，大学讲座丛书，第74卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，[2020] ©2020。MR 4249570[PS16] Leonid Polterovich 和 Egor Shelukhin，自治哈密顿流、霍费尔几何与持久模，《Selecta Mathematica》（新系列）22（2016），第1期，227–296页。MR 3437837[PSS17] Leonid Polterovich、Egor Shelukhin 和 Vukašin Stojisavljevi´c，Morse 理论与 Floer 理论中带算子的持久模，《莫斯科数学杂志》17（2017），第4期，757–786页。MR 3734662[Sal99] Dietmar Salamon，Floer 同调讲义，《辛几何与拓扑》（犹他州帕克城，1997），IAS/帕克城数学丛书，第7卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年，第143–229页。MR 1702944[Sei08] Paul Seidel，对辛上同调的一种偏颇看法，《数学当前进展，2006》，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2008年，第211–253页。MR 2459307[She22a] Egor Shelukhin，关于霍费尔-曾德猜想，《数学年刊》（第2辑）195（2022），第3期，775–839页。MR 4413744[She22b] ———，辛上同调与 Viterbo 猜想，《几何与泛函分析》32（2022），第6期，1514–1543页。MR 4536469[She22c] ———, Zoll 对称空间上的 Viterbo 猜想，《发明数学》230（2022），第1期，321–373页。MR 4480149[Ste18] Bret Stevenson，以拟等距方式嵌入带有霍费尔度量的 Hamilton 微分同胚群，《以色列数学杂志》223（2018），第1期，141–195页。MR 3773059[SZ21] Vukašin Stojisavljevi´c 和 Jun Zhang，持久模、辛 Banach–Mazur 距离与黎曼度量，《国际数学杂志》32（2021），第7期，论文编号2150040，共76页。MR 4284596[UZ16] Michael Usher 和 Jun Zhang，持久同调与 Floer-Novikov 理论，《几何与拓扑》20（2016），第6期，3333–3430页。MR 3590354[Vit99] C. Viterbo，Floer 同调中的函子与计算及其应用（一），《几何与泛函分析》9（1999），第5期，985–1033页。MR 1726235[Web06] Joa Weber，余切丛中的非可缩周期轨道与 Floer 同调，《杜克数学杂志》133（2006），第3期，527–568页。MR 2228462[Wei71] Alan Weinstein，辛流形及其拉格朗日子流形，《数学进展》6（1971），329–346页（1971）。MR 0286137[Yom87] Y. Yomdin，体积增长与熵，《以色列数学杂志》57（1987），第3期，285–300页。MR 889979[ZC05] Afra Zomorodian 和 Gunnar Carlsson，持久同调的计算，《离散与计算几何》33（2005），第2期，249–274页。MR 2121296[Zha19] Jun Zhang，p-循环持久同调与霍费尔距离，《辛几何杂志》17（2019），第3期，857–927页。MR 4022215

(Elijah Fender) 几何与物理中心 ，基础科学研究所 （IBS），浦项 37673，韩国电子邮箱： fender@ibs.re.kr

(SangjinLee) 几何与物理中心，基础科学研究院 (IBS)，浦项 37673，韩国电子邮箱： sangjinlee@ibs.re.kr

(BeomjunSohn) 首尔国立大学，数学科学系，数学研究所，08826 首尔，韩国

电子邮箱： bum2220@snu.ac.kr