arXiv:2305.04781v1 [math.NT] 8 May 2023

舒尔不可约性结果的推广

ANKITA JINDAL* 和 SUDESH KAUR KHANDUJA†‡

（谨以此文献给 André Leroy教授，祝他 65th 生日快乐）

摘要

设 $n \geq 2$ 为一个整数。设 $\phi(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$ ，是一个首一多项式，并且模所有小于或等于 n 的素数均不可约。设 $a_0(x)$ $a_1(x) \ldots, a_{n-1}(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$ ，是一些次数均小于 deg $\phi(x)$ 的多项式，并设 a_n 为一个整数。假设 a_n 与 $a_0(x)$ 的内容均与 $n!$ 互素。本文证明，多项式 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\frac{\phi(x)^i}{i!} + a_n{}^{\phi}{}_{(x^n)!}$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约。这推广了 Schur 的一个著名结果，该结果指出，当每个 $a_i \in \mathbb{Z}$ 和 $|a_0| = |a_n| = 1$ 时，对于所有 $n \geq 1$ ，多项式 $\sum_{i}^{n} a_i \frac{x^i}{i!}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。本文还推广了 Filaseta 的一项结果，从而推广了经典 Schönemann 不可约判别法。

关键词： 不可约多项式、截断指数级数。

2020年数学主题分类： 11C08,11R04.

*统计数学单元，ISI班加罗尔中心，班加罗尔，印度。电子邮箱：ankitajindal1203@gmail.com

†通讯作者

‡印度科学教育与研究学院莫哈利分校，印度 SAS Nagar，以及印度昌迪加尔旁遮普大学数学系。电子邮箱：skhanduja@iisermohali.ac.in

1 引言

Schur 的一个著名定理 [17] 指出，多项式 $\sum^{n} a_i \frac{x^i}{i}!\ _{i=0}$对于所有 $n \geq 1$，在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上均不可约，其中每个 $a_i \in \mathbb{Z}$ 且 $|a_0| = |a_n| = 1$。当 $|a_i| = 1$ 且 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ 时，Coleman 利用关于素数的牛顿多边形给出了这一结果的另一种证明（参见 [3]）。本文将利用本节定义的 ϕ-牛顿多边形，从不同方向推广 Schur 和 Coleman 的结果，并证明以下结论。

定理 1.1。设 $n \geq 2$ 为整数。设 $\phi(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$，是一个模所有小于或等于 n的素数均不可约的首一多项式。设 $a_0(x)$ $a_1(x)..., a_{n-1}(x)$属于 $\mathbb{Z}[x]$，且都是次数小于 次数 $\phi(x)$ 的多项式，并且 a_n 为整数。假设 a_n 与 $a_0(x)$ 的内容[1] 均与 $n!$互素。那么多项式

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\frac{\phi(x)^i}{i!} + a_n\frac{\phi(x)^n}{n!}$$

在 $\mathbb{Q}$上不可约。

需要指出的是，在上述定理中，假设“a_n 和$a_0(x)$的内容与 n互素！”是不可省略的。例如，考虑多项式$\phi(x) = x^2 + x + 1$，它模 2 不可约。多项式 $F(x) = {}^{\phi}{}_{(x^2)!} + \phi(x) - 4 = {}_{12}(\phi(x)+4)(\phi(x)-2)$在 $\mathbb{Q}$.上可约。同样，多项式 $G(x) = 12^{\phi}{}_{(x^2)!} - \phi(x) - 1 = (3\phi(x) + 1)$ $(2\phi(x) - 1)$在 $\mathbb{Q}$.上也可约。

下面我们还给出一个例子，说明若将 a_n 替换为一个次数小于 $\deg \phi(x)$、系数为整数的（首一）多项式 $a_n(x)$，定理 1.1 可能不成立。考虑 $\phi(x) = x^2 + x + 1$、 $a_2(x) = x + 1$、 $a_1(x) = x + 2$ 和 $a_0(x) = 4x + 3$。那么

$$a_2(x)\frac{\phi(x)^2}{2!} + a_1(x)\phi(x) + a_0(x)$$

以 -1 为根。

在定理 1.1 中对 $\phi(x)$ 施加较弱的条件后，我们还利用 Ore因式分解定理（参见 [13, 定理 1.1] 和 [14]）证明了以下结果。

定理 1.2。设 $n \geq 2$ 为一个整数。设 $\phi(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$，且是一个模所有整除 n 的素数都不可约的首一多项式。设 $a_0(x)$ $a_1(x) \ldots, a_{n-1}(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$，且都是次数小于 次 ϕ 的多项式。假设该多项式的内容

[1]系数属于整数环 $\mathbb{Z}$ 的多项式的内容，是其系数的最大公约数。

$_{n-1}$多项式 $\prod a_i(x)$ 与 n 互素。那么多项式$_{i=0}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\frac{\phi(x)^i}{i!} + \frac{\phi(x)^n}{n!}$$

在 $\mathbb{Q}$上不可约。

我们想指出，定理 1.1 和定理 1.2 的类似结论对 n =1 并不成立，因为如果 $\phi(x)$ $\in \mathbb{Z}[x]$ 是一个次数为 $m \geq 2$的首一多项式，那么多项式$\phi(x) - (\phi(x) - x^m)$ 在 $\mathbb{Q}$上是可约的。

在定理 1.1 的证明中，定理 1.3 起着关键作用，它推广了 Filaseta [6, 引理 2]中的一个著名结果。为了陈述这个定理，我们先引入相对于某个素数的 ϕ-Newton 多边形这一概念；模该素数时， $\phi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 不可约。

对于素数 p， v_p 表示 $\mathbb{Q}$ 的 p-进赋值；对任意非零整数c ，它定义为整除 c的 p的最高次幂。我们用 v_p^x 表示延拓 v_p 的高斯赋值，它定义在多项式环 $\mathbb{Z}[x]$ 上，定义如下：

$$v_p^x(\sum_i c_i x^i) = \min_i\{v_p(c_i)\},\ c_i \in \mathbb{Z}.$$

若 $\phi(x)$ 是一个系数属于 $\mathbb{Z}$ 的固定首一多项式，则任意 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 都可唯一写成有限和 $\sum f_i(x)\phi(x)^i$，其中对每个 i，deg $f_i(x)$ $<$deg $\phi(x)$；此$_i$展开称为 $f(x)$ 的 ϕ-展开。

设 $\phi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个首一多项式，它模给定素数$_n$$p$不可约。设属于 $\mathbb{Z}[x]$ 的多项式 $f(x)$ 的 ϕ-展开为 $\sum f_i(x)\phi(x)^i$，其中$_{i=0}$$f_0(x)f_n(x) \neq 0$。令 P_i 表示平面上坐标为 $(i, v_p^x(f_{n-i}(x)))$ 的点，其中 $f_{n-i}(x) \neq 0, 0 \leq i \leq n$。若 $f_{n-i}(x)f_{n-j}(x) \neq 0$，令 μ_{ij} 表示连接点 P_i 和P_j 的直线的斜率。令 i_1 为满足以下条件的最大指标 $0 < i_1 \leq n$

$$\mu_{0i_1} = \min\{\mu_{0j} \mid 0 < j \leq n,\ f_{n-j}(x) \neq 0\}.$$

若 $i_1 < n$，令 i_2 为满足条件的最大指标 $i_1 < i_2 \leq n$

$$\mu_{i_1i_2} = \min\{\mu_{i_1j} \mid i_1 < j \leq n,\ f_{n-j}(x) \neq 0\}$$

等等。相对于 p， $f(x)$的 ϕ-Newton 多边形是由线段 $P_0P_{i_1}$、 $P_{i_1}P_{i_2}$、……、 $P_{i_{k-1}}P_{i_k}$组成的折线路径，其中 $i_k = n$。这些线段称为 ϕ-Newton 多边形的边，其斜率从左到右构成严格递增的序列。相对于 p 的 ϕ-Newton 多边形减去水平部分（如果有的话）后称为

其主部。

沿用上述记号，我们证明以下定理。Filaseta[6, 在 1995年的引理 2] 中证明了该定理在 $\phi(x) = x$这一特殊情形下成立；这里给出的证明与他给出的证明类似。

定理 *1.3.* 设 n、k 和 ℓ 为整数，且$0 \le \ell < k \le \frac{n}{2}$， p 为素数。设$\phi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 为一个模.....不可约的首一多项式。设 $f(x)$ 属于$_n\mathbb{Z}[x]$ ，是一个不能被 $\phi(x)$ 整除、具有 ϕ-展开式 $\sum f_i(x)\phi(x)^i$ 的首一多项式，其中$_{i=0}f_n(x) \neq 0$。假设对于 $0 \le i \le n-\ell-1$， $v_p^x(f_i(x)) > 0$，并且 $f(x)$ 关于 p的ϕ-牛顿多边形的最右边斜率小于 $\frac{1}{k}$。设 $a_0(x)$ $a_1(x)\ldots,$ $a_n(x)$为 $\mathbb{Z}$ 上的多项式，满足以下条件。

(i) $a_i(x)$ 的次数 $<$ $\phi(x)$ 的次数 $-$ $f_i(x)$ 的次数 对于 $0 \le i \le n$,

(ii) $v_p^x(a_0(x)) = 0$，即 $a_0(x)$ 的内容不能被 p 整除,

(iii) $a_n(x)$ 的首项系数不能被 p 整除。

$_n$则多项式 $\sum a_i(x)f_i(x)\phi(x)^i$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中没有次数落在区间 $_{i=0}$ $[(\ell+1)\deg\phi,\ (k+1)\deg\phi)$。

下面将从上述定理迅速推导出经典 Schönemann 不可约判别法（参见 [16], [15, 第 3 章，定理 D]）。

推论 *1.4*（经典 *Schönemann* 不可约判别法）。设 $\phi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个首一多项式，且模给定素数 p 不可约。设属于 $\mathbb{Z}[x]$ 的 $f(x)$ 具有形式 $f(x) = \phi(x)^n + pM(x)$，其中 $M(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 的次数小于 $n\deg\phi$。如果 $\phi(x)$ 与 $M(x)$ 模 p 互素，那么 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

2 定理 1.2 的证明

以 下这个简单结果众所周知（见 [2,第 122], [3] 页）。证明从略。

引理 2.1. 设 p 为素数， m 为正整数。若 $m = a_0 + a_1p + \cdots + a_rp^r$，其中对每个 i，都有 $0 \le a_i < p$，则

$$v_p(m!) = \frac{m - (a_0 + a_1 + \cdots + a_r)}{p-1}.$$

定理 *1.2* 的证明。 令 $a_n(x) = 1$，并考虑由下式定义的首一多项式 $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} a_i(x)\phi(x)^i.$$

我们将证明 $F(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。设 p 是一个整除 n 的素数。根据假设，对于 $0 \le i \le n-1$， $a_i(x)$ 的内容与 p 互素，即 $v_p^x(a_i(x)) = 0$，其中 $0 \le i \le n-1$。回忆 $a_n(x) = 1$。因此，关于 p 的 ϕ-牛顿多边形，是由集合 S 中各点凸包上的下边所组成的折线路径，其中该集合定义如下:

$$S = \{(i, v_p(n!/(n-i)!)) \mid 0 \le i \le n\}.$$

设

$$n = c_1 p^{m_1} + c_2 p^{m_2} + \cdots + c_s p^{m_s},$$

其中，对每个 i， $0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_s$, $0 < c_i < p$。令 $z_0 = 0$，并

$$z_i = c_1 p^{m_1} + \cdots + c_i p^{m_i}$$

对于 $1 \le i \le s$。如 [3], 中那样，利用引理 2.1，可以很容易证明，集合 S 中各点下凸包上的折线路径由 s 条边组成。从左至右的第 i^{th} 条边是连接以下两点的线段

$$(z_{i-1}, v_p(n!/(n-z_{i-1})!)),\ (z_i, v_p(n!/(n-z_i)!)).$$

再次利用引理 2.1，可知 ϕ-Newton 多边形的第 i^{th} 条边的斜率 λ_i （x）为

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \frac{-v_p((n-z_i)!) + v_p((n-z_{i-1})!)}{z_i - z_{i-1}} \\ &= \frac{z_i + (c_{i+1} + \cdots + c_s) - z_{i-1} - (c_i + \cdots + c_s)}{(z_i - z_{i-1})(p-1)}.\end{aligned}$$

So

$$\lambda_i = \frac{c_i p^{m_i} - c_i}{c_i p^{m_i}(p-1)} = \frac{p^{m_i} - 1}{p^{m_i}(p-1)}. \tag{1}$$

由于 $0 < m_1 < \cdots < m_s$，由 (1) 可立即得出， p^{m_1} 整除关于 p 的 F（x）的 ϕ-Newton 多边形每条边斜率的分母。因此，根据 Ore 因子分解定理 [13, 定理 1.1(ii)], p^{m_1} deg ϕ 整除 $\mathbb{Q}_p$ 中 p-进数域上 F（x）每个因子的次数。注意到 p^{m_1} 是整除 n 的任意素数 p 的精确幂，上述证明的断言意味着， ϕ deg 整除 $\mathbb{Q}$ 上 F（x）每个不可约因子的次数。因此，次数为 n deg ϕ 的 F（x）在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

□

例 2.2. 考虑 $\phi(x) = x^3 - x^2 + 1$ 或 $x^4 - x - 1$。容易验证，在这两种情况下， $\phi(x)$ 都模 2 不可约，也模 3 不可约。设 $a_0(x)$ $a_1(x) \ldots, a_5(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$ ，它们是次数小于 deg ϕ 且内容与 6 互素的多项式

根据定理 1.2，该多项式

$$F(x) = \phi(x)^6 + \frac{6!}{5!}a_5(x)\phi(x)^5 + \frac{6!}{4!}a_4(x)\phi(x)^4 + \frac{6!}{3!}a_3(x)\phi(x)^3 + \frac{6!}{2!}a_2(x)\phi(x)^2 + 6!a_1(x)\phi(x) + 6!a_0(x)$$

在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

3 定理 1.3 的证明

我们将使用以下引理，其第一个断言已在 [13, 引理 2.4] 中证明。

引理 3.A. 设 $\phi(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$，是一个模给定素数 p 不可约的首一多项式。设 $g(x)$ $h(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$，是不能被 $\phi(x)$ 整除的多项式，其首项系数与 p 互素。则有以下结论。

(i) 关于 p 的 ϕ-牛顿多边形中 $g(x)h(x)$ 的主部，可通过构造一条折线路径得到：该路径从 x 轴非负一侧上的一点开始，并按斜率递增的顺序，依次使用 ϕ-牛顿多边形中 $g(x)$ $h(x)$ 主部各边的平移。

(ii) 关于 p 的 ϕ-牛顿多边形中 $g(x)h(x)$ 斜率为零的边长，要么等于关于 p 的 ϕ-牛顿多边形中 $g(x)$、$h(x)$ 斜率为零的边长之和，要么比该和大一。

证明。我们只证明断言 (ii)。对于任意 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$，令 $f(x)$ 表示将 $f(x)$ 的每个系数模 p 取余后得到的多项式。令 $g(x) = \sum g_i(x)\phi(x)^i$ 和 $h(x) = \sum h_i(x)\phi(x)^i$ 分别表示 $g(x)$ $h(x)$ 关于 $g_t(x)h_u(x) \neq 0$ 的 ϕ-进展开。令 $r \geq 0$, $s \geq 0$ 分别表示相对于 p, $g(x)$ $h(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形中斜率为零的边的边长。那么

$$v_p^x(g_{t-r}(x)) = 0,\ v_p^x(g_{t-i}(x)) > 0 \text{ for } i \in \{r+1, \ldots, t\}$$

and

$$v_p^x(h_{u-s}(x)) = 0,\ v_p^x(h_{u-i}(x)) > 0 \text{ for } i \in \{s+1, \ldots, u\}.$$

因此，$\phi(x)$分别整除 $\bar{g}(x)$、$h(x)$ 的最高次幂为 $t-r$和 $u-s$。于是，$\phi(x)$整除 $\bar{g}(x)h(x)$ 的最高次幂为 $t+u-r-s$。注意，如果我们将 $g(x)h(x)$ 的 ϕ-$_k$ 展开式写成 $\sum d_i(x)\phi(x)^i$，其中 $d_k(x) \neq 0$，且 $\deg d_i(x) < \deg \phi(x)$，那么或者

$k = t + u$ 或者 $k = t + u + 1$。因此，在 $g(x)h(x)$ 的 ϕ-Newton 多边形中，斜率为零的边长为 $r + s$ 或 $r + s + 1$；这就证明了该引理的断言 (ii)。

□

定理 *1.3* 的证明。设

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) f_i(x) \phi(x)^i.$$

我们先考虑这样的情形：对所有 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$，$a_i(x) = 1$，从而 $F(x) = f(x)$。回忆一下，$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是首一多项式。反设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上有一个因子，其次数落在区间 $[(\ell + 1) \deg \phi, (k + 1) \deg \phi)$ 内。那么存在首一多项式 $g(x)\ h(x) \in \mathbb{Z}[x]$，使得 $f(x) = g(x)h(x)$，并且

$$(\ell + 1) \deg \phi \le \deg g < (k + 1) \deg \phi. \tag{2}$$

设 $\sum g_i(x)\phi(x)^i$ 是 $g(x)$ 的 ϕ-展开，其中 $g_r(x) \neq 0$。注意，r 是 $g(x)$ 关于 p 的 ϕ- 牛顿多边形所有边的水平投影长度之和。我们有

$$r \deg \phi \le \deg g = \deg g_r + r \deg \phi \le (r + 1) \deg \phi - 1. \tag{3}$$

上述不等式与 (2) 一起推出

$$r + 1 \ge \frac{\deg g + 1}{\deg \phi} \ge \frac{(\ell + 1) \deg \phi + 1}{\deg \phi} = \ell + 1 + \frac{1}{\deg \phi},$$

这表明

$$r \ge \ell + \frac{1}{\deg \phi} > \ell. \tag{4}$$

现在我们考虑 $f(x)$ 的 ϕ-Newton 多边形（关于 p）。根据假设，该 Newton 多边形的每条边的斜率都位于区间 $[0, \frac{1}{k})$ 内。暂时考虑 $f(x)$ 的 ϕ-Newton 多边形中一条斜率为正的边。设 (a, b) 和 (c, d) 是该边上具有整数坐标的两个点。则连接这两点的直线的斜率就是该边的斜率，因此

$$\frac{1}{|c - a|} \le \frac{|d - b|}{|c - a|} < \frac{1}{k}.$$

因此，$|c - a| > k$。所以，在 $f(x)$ 的 ϕ-Newton 多边形中具有正斜率的边上，任意两个这样的点的 x-坐标之间的距离都严格大于 k。

注意到，根据（3）和（2），我们有

$$r \leq \frac{\deg g}{\deg \phi} < k+1.$$

上述不等式表明， r（即 $g(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形所有边的水平投影长度之和）小于 $k+1$。因此，根据上一段已证明的结论， $g(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形各边的平移不可能落在 $f(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形斜率为正的边上。因此，根据引理 3.A， $f(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形最左边的边的斜率必为零，且其长度大于或等于 r。鉴于假设

$$v_p^x(f_{n-i}(x)) > 0 \text{ for } i \in \{\ell+1, \ldots, n\},$$

我们可知， $f(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形中斜率为零的边的长度小于或等于 ℓ。回想起根据 (4)， $\ell < r$ ，结合引理 3.A，便得到矛盾，因此当所有 $a_i(x)$ 均为 1 时，定理得证。

接下来，我们考虑一般情形，即

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) f_i(x) \phi(x)^i,$$

其中，多项式 $a_i(x)$ 满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)。显然， $F(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形的最左端点和最右端点，与 $f(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形的最左端点和最右端点相同。回顾一下，

$$v_p^x(a_i(x)f_i(x)) \geq v_p^x(f_i(x)) > 0 \qquad \text{for } i \in \{0, 1, \ldots, n-\ell-1\},$$

and

$$v_p^x(a_i(x)f_i(x)) \geq v_p^x(f_i(x)) \geq 0 \qquad \text{for } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

因此， $F(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形的所有边都位于包含 $f(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形最右边的直线之上或其上。由于 $F(x)$ 和 $f(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形的最右端点相同，我们推得 $F(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形最右边的斜率小于或等于 $f(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形最右边的斜率，因此前者也小于$\frac{1}{k}$ 。回想一下，根据假设， $a_n(x)$ 的首项系数与 p 互素。因此，借助证明的第一部分并应用引理 3.A，定理 1.3 得证。

□

注记 3.1。 需要指出的是，定理 1.3 的证明可以逐字照搬

当多项式 $f(x)$、 $a_0(x)$、……、 $a_n(x)$ 的系数属于离散赋值 v 的赋值环 R_v，且其值群为 $\mathbb{Z}$ 时。请注意，上述证明中用到的引理 3.A 对系数属于离散赋值环 R_v 且首项系数是 R_v 中的单位的多项式也仍然成立。事实上，引理 3.A 的断言 (i) 已在 [13, 引理 2.4]，中对这类多项式证明，而此处给出的断言 (ii) 的证明对于这类多项式也可原封不动地沿用。

$_n$推论 1.4 的证明。令 $f(x) = \sum f_i(x)\phi(x)^i$ 为 $f(x)$ 的 ϕ-展开。根据$_{i=0}$假设，有 $f_n(x) = 1$, $v_p^x(f_i(x)) > 0$，对 $0 \le i \le n-1$ 成立，且 $v_p^x(f_0(x)) = 1$。因此，关于 p 的 $f(x)$ 的ϕ-牛顿多边形只有一条边，连接点 (0, 0) 和 $(n, 1)$，其斜率为 $\frac{1}{n}$。取 $\ell = 0$ 和 k 为不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数。应用定理 1.3，可得 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中没有次数落在区间 [deg ϕ, ($k+1$) deg ϕ) 内的因子。

反设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约。那么 $f(x) = g(x)h(x)$，其中 $g(x)$,$h(x)$ 是属于 $\mathbb{Z}[x]$ 的正次数首一多项式。因此，将其映射到 $\bar{\mathbb{Z}}/p\bar{\mathbb{Z}}$后，有 $f(x) = \bar{g}(x)h(x)$。根据假设， $f(x) = \phi(x)^n$。由于 $\phi(x)$ 在 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上不可约，可知对于某些正整数 d 和 e, 有 $\bar{g}(x) = \bar{\phi}(x)^d$，且 $\bar{h}(x) = \bar{\phi}(x)^e$。特别地， $g(x)$ 和 $h(x)$ 的次数都大于或等于 $\phi(x)$ 的次数。由于 $g(x)$ 或 $h(x)$ 中有一个的次数严格小于 $(k+1)$ deg ϕ，结合上文已证结论，便得到矛盾。 □

4 定理 1.1 的证明

下面将在后文中使用的结果由 Sylvester [19] 和 Schur [18]独立证明。Erdős 于 1934 年重新证明了这一结果（参见 [5]）。

定理 4.A。 设 m 和 k 为满足 $m \ge k$的正整数。则存在一个素数 $p \ge k+1$，它整除整数 $m+1$、 $m+2$、……、 $m+k$ 中的一个。

$_{n-1}$定理 1.1 的证明。考虑多项式 $F(x) = \sum {}^{n}!\,_{i}!\ a_i(x)\phi(x)^i + a_n\phi(x)^n$，其系数属于 $\mathbb{Z}$。根据假设， $a_0(x)$ 非零。因此， $F(x)$ 不被 $\phi(x)$ 整除。由于对于每个 i，都有 deg $a_i(x) <$ deg $\phi(x)$，所以 $F(x)$ 的首项系数为 a_n，而根据假设，该系数与 $n!$ 互素。因此，多项式 $F(x)$ 的内容 c （设为此值）与 $n!$ 互素。只需证明 $^{F}(_x)\,_c$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约。我们将定理的证明分为两个步骤。

步骤 I. 在这一步中，我们证明 $^{F}{}_{(x)}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上没有次数小于 deg $\phi(x)$ 的非常数因子。反设 $^{F}{}_{(x)\,c} = g(x)h(x)$，其中 $g(x)$ $h(x)$ 是系数属于 $\mathbb{Z}$ 的非常数多项式，且 deg $g(x) <$ deg $\phi(x)$。取一个整除 n 的素数q。那么，如上所述， $F(x)$ 的首项系数以及相应的那些

$g(x)$ 和 $h(x)$ 的首项系数与 q 互素。因此，将其映至 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 后，我们看到 $\bar{g}(x)$ 的次数与 $g(x)$ 的次数相同。于是 deg $\bar{g}(x)$ 为正，且小于 deg $\phi(x)$。这是不可能的，因为 $\bar{g}(x)$ 是 $\bar{F}(x) = \frac{\bar{a}_n}{\bar{c}}\bar{\phi}(x)^n$ 的因子，而 $\bar{\phi}(x)$ 在 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上不可约。这个矛盾证明了步骤 1 的断言。

步骤 II. 在这一步中，我们证明，对于任意整数 $k, 1 \le k \le \frac{n}{2}$， $F(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Z}[x]$ 上不存在次数落在区间 $[k \deg \phi, (k+1) \deg \phi)$ 内的因子。结合步骤 I，这将证明 $F(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性。

反设 $F(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上有一个因子，其次数落在区间$[k \deg \phi, (k+1) \deg \phi)$ 内，其中 $k \le \frac{n}{2}$ 是某个正整数。根据定理 4.A，存在一个素数 $p \ge k+1$，它整除集合中的某个元素

$$\{n-k+1, \ldots, n-1, n\}.$$

取 $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ 使得 $p | (n-\ell)$；这样的整数 ℓ 是唯一的。

定义首一多项式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$，使其满足 $f(x) = \sum c_i \phi(x)^i$，其中 $c_i = \frac{n!}{i!}$。注意，对于 $i \in \{0, 1, \ldots, n-\ell-1\}$，有$p | c_i$。令 λ 表示相对于 p， ϕ-多项式 $f(x)$ 的 Newton 多边形最右边一条边的斜率，其中素数 p 如上所述。我们将证明

$$\lambda < \frac{1}{k}. \tag{5}$$

注意到素数 p 是 $n!$ 的因子，根据假设，它既不整除 $a_0(x)$ 的内容，也不整除 a_n。因此，由 (5) 结合定理 1.3 可立即得到， $F(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中没有次数落在区间$[(\ell+1) \deg \phi, (k+1) \deg \phi)$ 内的因子。由于 $\ell+1 \le k$，这将意味着 $F(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中没有次数落在区间 $[k \deg \phi, (k+1) \deg \phi)$ 内的因子，从而导致矛盾。这个矛盾将完成定理的证明。

只需验证式（5）。根据定义

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{v_p(c_0) - v_p(c_i)}{i} \right\}.$$

注意， $v_p(c_0) - v_p(c_i) = v_p(n!) - v_p(n!/i!) = v_p(i!)$。由引理 2.1 可立即得出，

$$\frac{v_p(i!)}{i} < \frac{1}{p-1};$$

因此， $\lambda < \frac{1}{p-1}$ 鉴于事实 $p \ge k+1$，这就证明了 (5)。 □

例 4.1。 考虑 $\phi(x) = x^3 - x^2 + 1$ 或 $x^4 - x - 1$。容易验证，$\phi(x)$ 模 2 不可约，同时也模 3 不可约。令 $a_0(x)$、 $a_1(x)$、 $a_2(x)$、 $a_3(x)$ 属于

$\mathbb{Z}[x]$ 为次数小于 $\deg \phi$ 的多项式，且 a_4 为整数。假设 a_4 以及 $a_0(x)$ 的内容与 6 互素。根据定理 1.1，多项式

$$F(x) = a_4\phi(x)^4 + \frac{4!}{3!}a_3(x)\phi(x)^3 + \frac{4!}{2!}a_2(x)\phi(x)^2 + 4!a_1(x)\phi(x) + 4!a_0(x)$$

在 $\mathbb{Q}$上不可约。

例4.2。 考虑 $\phi(x) = x^4 - x - 1$。容易验证， $\phi(x)$模2、3和5不可约。设 $a_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是次数均小于4的多项式，其中$0 \leq i \leq 5$ ，且 a_6 是一个整数。假设 a_6 与 $a_0(x)$的内容都与30互素。根据定理 1.1，多项式

$$F(x) = a_6\phi(x)^6 + \frac{6!}{5!}a_5(x)\phi(x)^5 + \frac{6!}{4!}a_4(x)\phi(x)^4 + \frac{6!}{3!}a_3(x)\phi(x)^3 + \frac{6!}{2!}a_2(x)\phi(x)^2 + 6!a_1(x)\phi(x) + 6!a_0(x)$$

在 $\mathbb{Q}$上不可约。

值得指出的是，例2.2和4.2中的多项式 $F(x)$的不可约性似乎无法由任何已知的不可约性判别准则推出（参见 [1], [7], [8], [9], [10], [11]和 [12]），包括广义 Schönemann 不可约性判别准则[2]。

致谢

第一作者感谢印度原子能部国家高等数学委员会提供博士后奖学金。本研究主要是在第一作者于2023年2月访问 IISER Mohali 期间完成的。她感谢 IISER Mohali 为她提供的便利条件。第二作者感谢印度国家科学院授予其荣誉科学家职位。

参考文献

[1] R.Brown，亨泽尔扩域中广义 *Schönemann* 多项式的根，《印度纯粹与应用数学杂志》，39（2008）403-410。

[2] D. M. Burton，《初等数论》，麦格劳-希尔，第七版，2017年。

[3] R. F. Coleman，关于指数函数泰勒多项式的伽罗瓦群，《数学教学》，33（1987）183-189。

[2]关于 $\mathbb{Z}$ 上多项式的这一判别法断言：如果属于 $\mathbb{Z}[x]$ 的 $\phi(x)$ 是一个首一多项式，并且模固定素数 p 不可约；如果属于 $\mathbb{Z}[x]$ 的多项式 $f(x)$ 的 ϕ- 展开式由 $\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\phi(x)^i$ 给出，并满足 (i) $f_0(x) \neq 0$， $f_n(x) = 1$，(ii) $v_p^x(f_i(x)) \geq v_p^x(f_0(x))$ 对于 $0 \leq i \leq n-1$，(iii) $v_p^x(f_0(x))$ n 互素，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

[4] G. Dumas，关于有理系数多项式不可约的若干情形，《纯粹与应用数学杂志》，2（1906）191-258。[5] P. Erdős，西尔维斯特—舒尔定理，《伦敦数学会杂志》，9（1934）282-288。[6] M. Filaseta，除有限个外贝塞尔多项式的不可约性，《数学学报》，174（1995年）383-397。[7] A. Jakhar，关于多项式的因子，《伦敦数学会通报》，52（2020）158-160。[8] A. Jakhar，关于多项式的不可约因子，《美国数学会会刊》，148（2020）1429-1437。[9]A. Jakhar，关于多项式的不可约因子 *II*，《代数杂志》，556（2020）649–655。[10] A. Jakhar，舒内曼—艾森斯坦不可约性判别准则的一种简单推广，《数学文献》，117（2021）375–378。[11] A. Jakhar 和 N. Sangwan，关于舒内曼不可约性判别法的一种温和推广，《代数通讯》，45 （2017年）1757-1759。[12] B. Jhorar 和S. K. Khanduja，艾森斯坦—杜马—舒内曼不可约性判别法的推广，《爱丁堡数学会会刊》，60（2017年）937-945。[13] S. K. Khanduja 和 S. Kumar，通过牛顿多边形和多项式提升研究赋值延拓，《纯粹与应用代数杂志》，216（2012）2648-2656。[14] Ø. Ore，代数数域理论中的牛顿多边形，《数学年刊》，99（1928）84-117[15] P. Ribenboim，经典赋值理论，施普林格出版社，纽约，1999年。[16] T. Schönemann，关于那些为素数幂的模，《纯粹与应用数学杂志》，32（1846）93-105。[17] I. Schur，关于素数及其在不可约性$\ddot{a}$问题中的应用的若干定理，*I*，柏林普鲁士科学院物理数学班会议报告，14（1929）125-136。[18] I. Schur，关于素数及其在不可约性问题中的应用的若干定理，，柏林普鲁士科学院物理数学班会议报告，23（1929）1-24。[19] J. J. Sylvester，论算术级数，《数学信使》，21（1892）1-19，87-120。