arXiv:2305.04787v1 [math.PR] 8 May 2023

关于单调子序列以及具有宏观数量不动点的不变随机置换的 RS 像的札记

Mohamed Slim Kammoun*

IMT，图卢兹大学

2023年5月9日

摘要

关于Vershik和Kerov [1977], Logan和Shepp [1977] 的研究表明，在俄罗斯记号下，由 Plancherel 测度确定的缩放随机杨图的形状收敛于一个确定性形状。本文聚焦于不动点数量可观的情形。我们提供了证据表明，在总循环数满足特定要求的条件下，极限形状是 Vershik-Kerov-Logan-Shepp极限形状的缩放版本。此外，我们确定了某些类似于Chapuy、Louf 和 Walsh [2022] 中情形的极限状态。此外，我们改进了关于单调子序列的 Tracy-Widom 普适性类的现有结果，适用于 $\beta \in 1, 2, 4$ 。

1 主要结果

令 $\mathfrak{S}_n$ 为 $\{1,\dots,n\}$的排列群。本文将使用对称群 $\mathfrak{S}_n$ 上取值于 $\mathbb{Y}_n$ 的著名映射，称为排列 σ经 Robinson–Schensted对应（RS） [de B.Robinson、1938、Schensted、 1961] 或 Robinson–Schensted–Knuth 对应[Knuth， 1970]。我们将其记为

$$\lambda(\sigma) = \{\lambda_i(\sigma)\}_{i\geq 1}.$$

这里不再介绍算法细节。若想进一步阅读，我们推荐 [Sagan，2001年，第 3]以及 [Romik， 2015]。RS形状的一个显著特点是，它完全由单调子序列决定。事实上，若我们记

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1(\sigma) &:= \{s \subset \{1,2,\dots,n\};\ \forall i,j \in s,\ (i-j)(\sigma(i)-\sigma(j)) \geq 0\},\\
\mathfrak{D}_1(\sigma) &:= \{s \subset \{1,2,\dots,n\};\ \forall i,j \in s,\ (i-j)(\sigma(i)-\sigma(j)) \leq 0\},\\
\mathfrak{I}_{k+1}(\sigma) &:= \{s \cup s',\ s \in \mathfrak{I}_k,\ s' \in \mathfrak{I}_1\},\\
\mathfrak{D}_{k+1}(\sigma) &:= \{s \cup s',\ s \in \mathfrak{D}_k,\ s' \in \mathfrak{D}_1\},
\end{aligned}$$

我们有如下结论。

命题 1. *[Greene， 1974]* 对于任意排列 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\max_{s\in\mathfrak{I}_i(\sigma)} |s| = \sum_{k=1}^{i} \lambda_k(\sigma), \qquad \max_{s\in\mathfrak{D}_i(\sigma)} |s| = \sum_{k=1}^{i} \lambda'_k(\sigma).$$

特别地， $\lambda_1(\sigma)$ 是最长递增子序列的长度，而 $\lambda'_1(\sigma) = \ell(\lambda(\sigma))$ 是最长递减子序列的长度。

*mkammoun@math.univ-图卢兹.fr

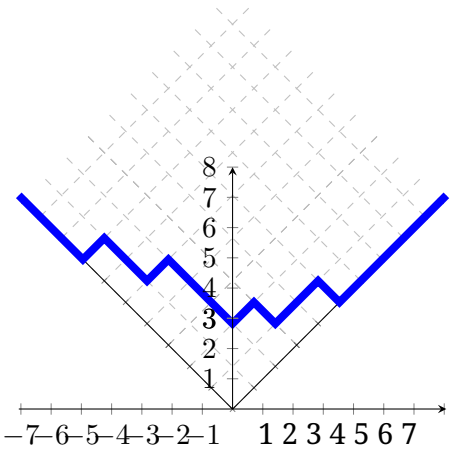


图1：$L_{(7,5,2,1,1,\underline{0})}$

这一结果最早由 Greene 证明 [1974]（另见 [Sagan，2001年，定理 3.7。3]）。现在，设 $L_{\lambda(\sigma)}$ 为将 $\lambda(\sigma)$ 旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 后，再通过函数 $x \mapsto |x|$ 进行延拓所得到的高度函数，从而获得一个定义在 $\mathbb{R}$上的函数。例如，若 $\lambda(\sigma) = (7, 5, 2, 1, 1, 0)$，则相应的函数 $L_{\lambda(\sigma)}$ 由图1表示。为了介绍我们的主要结果，我们需要引入一些额外的记号。给定 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，我们用 $\#(\sigma)$ 表示 σ 的循环数，并用 $\#_1(\sigma)$ 表示其不动点总数。例如，对于排列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$\#(\sigma) = 3$ 和 $\#_1(\sigma) = 1$。在我们的研究中，我们关注共轭不变排列 σ_n，也就是说，对于任意排列 $\rho \in \mathfrak{S}_n$，$\rho\sigma_n\rho^{-1}$ 与 σ_n具有相同的分布。我们的主要结果如下。

定理2。 假设对于任意 n， σ_n 是一个大小为 n 的共轭不变随机排列，并且

$$\frac{\min\left(n - \#_1(\sigma_n^2)\,;\, \#(\sigma_n) - \#_1(\sigma_n)\right)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{1}$$

Then

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\sqrt{n}} L_{\lambda(\sigma_n)}\left(2s\sqrt{n}\right) - \sqrt{1 - \frac{\#_1(\sigma_n)}{n}}\,\Omega\left(s\sqrt{1 - \frac{\#_1(\sigma_n)}{n}}\right) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{2}$$

其中

$$\Omega(s) := \begin{cases} \frac{2}{\pi}(s\arcsin(s) + \sqrt{1-s^2}) & \text{if } |s| < 1 \\ |s| & \text{if } |s| \geq 1 \end{cases}.$$

我们的主要结果可以看作对若干先前研究的推广。当排列均匀分布（分别为均匀对合）时，其典型形状曾由 Logan和Shepp [1977]和 Vershik和Kerov [1977]（分别由 Méliot [2011]）进行研究。在先前的一篇论文 [Kammoun， 2018], 我们研究了循环数为微观尺度的情形。对于最长单调子序列，我们有如下结果。

定理 3。 假设对于任意 n， σ_n 是大小为 n 的共轭不变随机排列，且 $n - \#_1(\sigma) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \infty$

- *if*

$$\frac{\#(\sigma_n) - \#_1(\sigma_n)}{n^{\frac{1}{6}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{3}$$

Then

$$\frac{\ell(\lambda(\sigma_n)) - 2\sqrt{n - \#_1(\sigma_n)}}{(n - \#_1(\sigma_n))^{\frac{1}{6}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} TW_2. \tag{4}$$

- *if*

$$\frac{n - \#_1(\sigma_n^2)}{n^{\frac{1}{6}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{5}$$

Then

$$\frac{\ell(\lambda(\sigma_n)) - 2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} TW_1. \tag{6}$$

- *if*

$$\frac{n - 2\#_2(\sigma_n)}{n^{\frac{1}{6}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{7}$$

Then

$$\frac{\lambda_1(\sigma_n) - 2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} TW_4. \tag{8}$$

- *if*

$$\frac{\min\left(n - \#_1(\sigma_n^2)\,;\, \#(\sigma_n) - \#_1(\sigma_n)\right)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{9}$$

Then

$$\frac{\ell(\lambda(\sigma_n))}{\sqrt{n - \#_1(\sigma_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 2 \tag{10}$$

当 $\#_1(\sigma_n) = (\theta n/\log(n))(1 + o(1))$ 时，我们得到一个与以下结果相似的情形：通过直接应用定理 Chapuy、Louf 和 Walsh [2022] 定理 2 和定理 3。

推论 4. 假设对于任意 n， σ_n 都是一个大小为 n 的共轭不变随机排列。此外，假设 $\frac{\#_1(\sigma)\log(n)}{\theta n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1$) 并且

$$\frac{\#(\sigma_n) - \#_1(\sigma_n)}{n^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

因此，我们有：

- $$\frac{\ell(\lambda(\sigma_n))}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 2,$$
- $$\frac{\lambda_1(\sigma_n)\log(n)}{\theta n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1,$$
- $$\sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{2n}} L_{\lambda(\sigma_n)}\left(s\sqrt{2n}\right) - \Omega(s) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

我们猜想 λ_2 具有与 [Chapuy 等人相同的行为， 2022] 即

$$\frac{\lambda_2(\sigma_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 2,$$

但我们只能证明以下结论。

引理 5. 在与推论 4 相同的假设下，对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(2-\varepsilon < \frac{\lambda_2(\sigma_n)}{\sqrt{n}} < 4+\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

近期，Borga 等人 [2023] 和 Dubach [2023] 指出了最长递增子序列 $\lambda_1(\sigma_n)$ 表现得像 n^β 的非平凡情形。在我们的情形中，出于与之前相同的原因，也会出现类似的情形：当

$$\frac{\#_1(\sigma)}{n^\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c$$

and

$$\frac{\#(\sigma)-\#_1(\sigma)}{n^\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

对于一般的共轭不变排列，我们确实猜想普适现象对任意共轭不变排列都成立。具体而言，我们猜想

猜想 6. 假设 对于任意 n, σ_n 是一个大小为 n 的共轭不变随机排列。 n

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2\sqrt{n}}L_{\lambda(\sigma_n)}\left(2s\sqrt{n}\right)-\sqrt{1-\frac{\#_1(\sigma_n)}{n}}\Omega\left(s\sqrt{1-\frac{\#_1(\sigma_n)}{n}}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{11}$$

猜想 6 等价于以下猜想。

猜想 7。 假设对于任意的 n， σ_n 是一个大小为 n 的共轭不变随机排列。假设

$$\#_1(\sigma_n) \overset{a.s}{=} 0. \tag{12}$$

Then

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2\sqrt{n}}L_{\lambda(\sigma_n)}\left(2s\sqrt{n}\right)-\Omega\left(s\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{13}$$

致谢： 作者谨向 Guillaume Chapuy、Victor Dubach、Valentin Féray、Baptiste Louf、Pierre-Loïc Méliot 和 Harriet Walsh 致谢，感谢他们进行的非常有益的讨论。本研究得到 Labex CIMI (ANR-11-LABX-0040) 的支持。

2 组合控制

本节旨在确立两个组合引理，即引理 8 和引理 10，它们为 RS 形状提供控制。

引理 8。 令 $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = (\lambda_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{Y}_n$, $\mu = (\mu_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{Y}_m$. 那么，

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}|L_\lambda(s)-L_\mu(s)| \leq \min_{l\geq 0} 2\sqrt{\max_{m\geq l+1}\left|\sum_{k=l+1}^{m}(\lambda_k-\mu_k)\right|}+\sqrt{2}l. \tag{14}$$

引理 8 可视为 [Kammoun, 2018年, 引理 34] 的推广。在给出证明之前，我们先引入一些记号。设 $(O,\vec{x},\vec{y})$ 为欧几里得平面的标准坐标系，且 $\vec{u}:=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{x}+\vec{y})$,$\vec{v}:=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{y}-\vec{x})$。令 $\lambda\in\mathbb{Y}_n$。按照约定 $\lambda_0=\infty$，令 $\mathscr{C}_\lambda$ 为通过连接坐标轴系 $(O,\vec{u},\vec{v})$ 中坐标为 $(0,\lambda_0),(0,\lambda_1),(1,\lambda_1),(1,\lambda_2)\ldots,(i,\lambda_i),(i,\lambda_{i+1})\ldots$ 的点而得到的曲线，如图 2 所示。

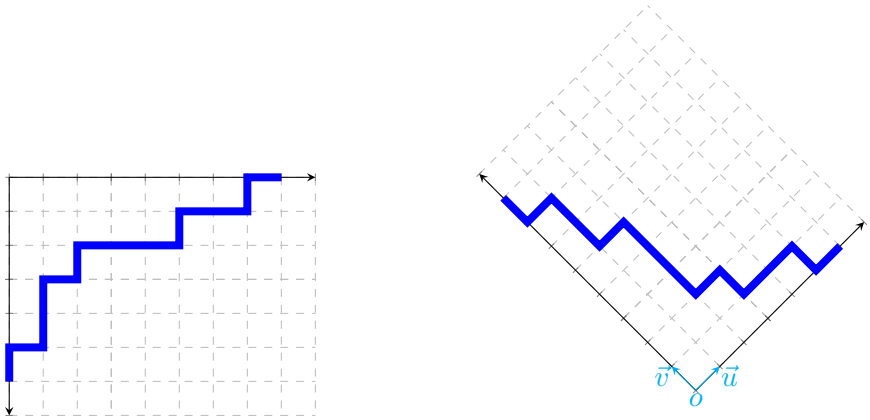


图 2: $\mathscr{C}_\lambda$ 对于 $\lambda=(7,5,2,1,1,0)$

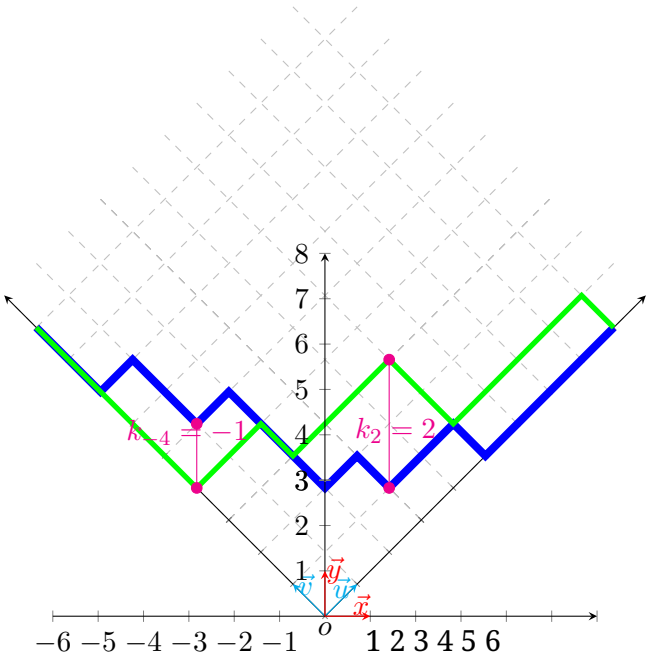
根据构造，$\mathscr{C}_\lambda$ 是 L_λ的曲线。这得出以下两个引理 .

引理 9. *[Kammoun，2018年，引理 33]* 设 α，$\beta\in\mathbb{N}$ 且 A 这个点使得 $\overrightarrow{OA}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$。若$A\in\mathscr{C}_\lambda$，则

$$\lambda_{\alpha+1}\leq\beta\leq\lambda_\alpha. \tag{15}$$

此外，对于所有 $i\in\mathbb{Z}$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}L_\lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\pm\frac{i}{2}\in\mathbb{N}. \tag{16}$$



Fi图 3：一个例子，其中 $\lambda = (7,5,2,1,1,0)$ 和 $\mu = (4,4,3,3,3,1,1,1,1,0)$

引理的证明 8。注意，对于任意 $i \in \mathbb{Z}$，$s \mapsto L_\lambda(s)$ 以及 $s \mapsto L_\mu(s)$ 都是定义在 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}i\right.$上的仿射函数，$\left.\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\right]$因此（14）等价于

$$\max_{i\in\mathbb{Z}} \left| L_\lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - L_\mu\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right| \le \min_{l\ge 0} 2\sqrt{\max_{m\ge l+1}\left|\sum_{k=l+1}^{m}(\lambda_k-\mu_k)\right|} + \sqrt{2}l.$$

设 $i \in \mathbb{Z}$。由（16）可知，存在 $k_i \in \mathbb{Z}$ 使得，

$$L_\mu\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - L_\lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = k_i\sqrt{2}.$$

由对称性，我们可以假设 $k_i > 0$。我们记为

$$j := \sqrt{2}L_\lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

令 A 和 B 为满足条件的点，使得

$$\overrightarrow{OA} := \frac{\sqrt{2}}{2}(i\vec{x}+j\vec{y}) = \frac{i+j}{2}\vec{u} + \frac{j-i}{2}\vec{v}, \qquad \overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i\vec{x}+(j+2k_i)\vec{y}) = \frac{i+j+2k_i}{2}\vec{u} + \frac{j-i+2k_i}{2}\vec{v}.$$

显然 $A \in \mathscr{C}_\lambda$ 和 $B \in \mathscr{C}_\mu$。由（16），$\frac{i+j}{2}$，$\frac{j-i}{2} \in \mathbb{N}$。接下来可以应用（15）。当 $k_i > 0$ 时，我们有

$$\lambda_{\frac{i+j}{2}+1} \le \frac{j-i}{2}, \quad \mu_{\frac{i+j}{2}+k_i} \ge \frac{j-i}{2} + k_i.$$

设 $0 \le l < k_i$，利用 $(\lambda_l)_{l\ge 1}$ 和 $(\mu_l)_{l\ge 1}$ 都是递减的这一事实，可得，

$$2 \max_{m\ge l+1} \left| \sum_{k=l+1}^{m} (\lambda_k - \mu_k) \right| \ge \sum_{m=\max(\frac{i+j}{2}+1, l+1)}^{\frac{i+j}{2}+k_i} \mu_m - \lambda_m$$
$$\ge \sum_{m=\max(\frac{i+j}{2}+1, l+1)}^{\frac{i+j}{2}+k_i} \mu_{\frac{i+j}{2}+k_i} - \lambda_{\frac{i+j}{2}+1} \ge k_i(k_i - l) \ge (k_i - l)^2.$$

这就得到

$$2\sqrt{\max_{m\ge l+1} \left| \sum_{k=l+1}^{m} (\lambda_k - \mu_k) \right|} + \sqrt{2}l \ge \max_{i\in\mathbb{Z}} \left(\sqrt{2}k_i \right) = \sup_{s\in\mathbb{R}} |L_\lambda(s) - L_\mu(s)| .$$

□

我们证明中的一个关键观察是，具有大量不动点的排列的 RS像中各块的长度，可以由移除这些不动点后得到的词的长度加以界定。令 σ 表示一个排列，令 $fix(\sigma)$ 表示其不动点集合，并令 τ 表示从 σ 中移除 $fix(\sigma)$ 后得到的排列。在本文余下部分，为简便起见，我们将使用记号 $\sigma = (fix(\sigma)\ \tau)$。

引理 10。令 $\sigma = (fix(\sigma)\ \tau)$

- $$\#_1(\sigma) \le \lambda_1(\sigma) \le \#_1(\sigma) + \lambda_1(\tau) \tag{17}$$
- 对所有 $i \ge 2$,
$$\#_1(\sigma) + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j(\tau) \le \sum_{j=1}^{i} \lambda_j(\sigma) \le \#_1(\sigma) + \sum_{j=1}^{i} \lambda_j(\tau) \tag{18}$$
- $$\max_{m\ge 2} \left| \sum_{k=2}^{m} (\lambda_k(\sigma) - \lambda_k(\tau)) \right| \le \lambda_1(\tau) \tag{19}$$
- $$\ell(\lambda(\tau)) \le \ell(\lambda(\sigma)) \le \ell(\lambda(\tau)) + 1 \tag{20}$$

证明。 这些不等式是 Greene 定理的一个应用。

- 我们有包含关系 $fix(\sigma) \subset \mathfrak{I}_1(\sigma)$ 这意味着（17）中的第一个不等式。
- 设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_{\lambda_1(\sigma)}$ 是 σ 中长度最大的递增子序列。我们有

$$\{i_1, i_2, \dots i_{\lambda_1(\sigma)}\} = (\{i_1, i_2, \dots i_{\lambda_1(\sigma)}\} \cap fix(\sigma)) \cup (\{i_1, i_2, \dots i_{\lambda_1(\sigma)}\} \cap (\{1, 2, \dots, n\} \setminus fix(\sigma))),$$
$$(\{i_1, i_2, \dots i_{\lambda_1(\sigma)}\} \cap fix(\sigma)) \subset fix(\sigma),$$
$$(\{i_1, i_2, \dots i_{\lambda_1(\sigma)}\} \cap (\{1, 2, \dots, n\} \setminus fix(\sigma))) \subset \mathfrak{I}_1(\tau).$$

由此得到（17）的第二个不等式

- 假设 $I \subset \mathfrak{I}_{i-1}(\tau) \subset \mathfrak{I}_{i-1}(\sigma)$。那么 $(I \cup fix(\sigma)) \subset \mathfrak{I}_i(\sigma)$。由此得到（18）中的第一个不等式。
- 令 $I \subset \mathfrak{I}_i(\sigma)$ 的长度最大。于是

$$\begin{aligned} I &= (I \cap fix(\sigma)) \cup (I \cap (\{1,2,\dots,n\} \setminus fix(\sigma))), \\ &(I \cap fix(\sigma)) \subset fix(\sigma), \\ (I \cap (\{1,2,\dots,n\} \setminus fix(\sigma))) &\subset \mathfrak{I}_i(\tau). \end{aligned}$$

  这给出了 (18) 的第二个不等式。
- 从 (17) 中减去 (18)，得到

$$-\lambda_1(\tau) \le -\lambda_i(\tau) \le \sum_{j=2}^{i} (\lambda_j(\sigma) - \lambda_j(\tau)) \le \lambda_1(\tau).$$

  这给出了 (19)。

□

3 概率引理

关键的概率观察如下。

引理 11. 如果 $\sigma_n = (fix(\sigma_n)\ \tau_n)$ 是共轭不变的，那么在给定 $fix(\sigma_n)$ 的条件下，τ_n 是共轭不变的，也就是说，对任意 $S \subset [n]$，以及 $[n] \setminus S$ 的一个排列 ρ，和大小为 n 的一个排列 π。如果 $\mathbb{P}(\#_1(\sigma_n) = card(S)) \neq 0$，那么

$$\mathbb{P}(\sigma_n = \tau | fix(\sigma_n) = S) = \mathbb{P}(\rho\sigma_n\rho^{-1} = \tau | fix(\sigma_n) = S)$$

证明直接来自条件概率和共轭不变性的定义。这个引理使我们能够使用关于没有（或很少）不动点的排列的已知结果。我们在附录 A 中回顾这些结果。

引理 12. 假设对于任意 n，$\sigma_n = (fix(\sigma_n)\ \tau_n)$ 都是大小为 n 的共轭不变对合。那么对所有 $\varepsilon > 0$，

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\sqrt{n}} L_{\lambda(\sigma_n)}\left(2s\sqrt{n}\right) - \sqrt{1 - \frac{\#_1(\sigma_n)}{n}}\,\Omega\left(s\sqrt{1 - \frac{\#_1(\sigma_n)}{n}}\right) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

证明。 利用引理 8可得

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \left| L_{\lambda(\sigma_n)}(s) - L_{\lambda(\tau_n)} \right| \le 2\sqrt{\max_{m\ge 2} \left| \sum_{k=l+1}^{m} (\lambda_k(\sigma_n) - \lambda_k(\tau_n)) \right|} + \sqrt{2}.$$

根据引理 10，可得

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \left| L_{\lambda(\sigma_n)}(s) - L_{\lambda(\tau_n)} \right| \le 2\sqrt{\lambda_1(\tau_n)} + \sqrt{2}.$$

注意，在给定 $fix(\sigma_n)$ 的条件下，τ_n 是一个大小为 $n - fix(\sigma_n)$ 的均匀无不动点对合。

因此，对任意15，直接应用推论 ε，$\varepsilon' > 0$ 存在 n_0 使得对任意 S 基数至少为 n_0 在给定 $fix(\sigma_n) = S$ 的条件下，

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\sqrt{n}} L_{\lambda(\tau_n)}\left(2s\sqrt{n}\right) - \sqrt{1 - \frac{\#_1(\sigma)}{n}}\,\Omega\left(s\sqrt{1 - \frac{\#_1(\sigma_n)}{n}}\right) \right| > \varepsilon \right) < \varepsilon'.$$

由此得到引理 12。

□

4 主要结果的证明

定理的证明 2。思路是分别在 $\frac{\#(\sigma_n)-\#_1\sigma_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ () 和 $\frac{n-\#_1\sigma_n^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$ () 这种情况下证明结果。

- 假设 $\frac{\#(\sigma_n)-\#_1\sigma_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ () 此情形下的证明与引理 12的证明类似。事实上，

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \left|L_{\lambda(\sigma_n)}(s) - L_{\lambda(\tau_n)}\right| \leq 2\sqrt{\lambda_1(\tau_n)} + \sqrt{2}.$$

  成立。注意，在给定 $fix(\sigma_n)$ 的条件下， τ_n 是均匀的循环排列。
  此外，引理 16 表明，对于均匀随机循环排列 π_n,

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{2\sqrt{n}} L_{\lambda(\pi_n)}\left(2s\sqrt{n}\right) - \Omega\left(s\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

  结论与引理12

- 假设， $\frac{n-\#_1\sigma_n^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$() 。
  通过对 $\#_2(\sigma_n) = k$ ，这直接应用了 [Kammoun，2022，定理 30]（参见第 4.2 节的第一个例子），取

  – $(V_n, E_n') = \mathcal{G}_{\mathfrak{S}n}$，对称群的 Cayley 图。– $I_n = \mathbb{Y}_n$，Young 图的集合– $V_n^i = \{\sigma$ ；是具有循环结构 i 的排列集合。– $Class(\sigma)$，是 σ 的循环结构– $i_n^* = (\underbrace{2\ \ldots\ 2}_{k\text{次}}, , , 1, \underbrace{\ \ldots\ 1}_{n-2k\text{次}},)$，有 k 行、每行长度为 2 的 Young 图，在这种情况下，很容易看出 $\underline{d}(\sigma) = \sum_{j>2} j\#j(\sigma) = n - \#_1(\sigma^2)$。

  Kammoun [Kammoun，2022，定理 30] 中的条件 (17)-(20) 已经在 [Kammoun，2022]。参考测度的收敛性在引理 12中得到证明。收敛性 (22) 是显然的，因为左端几乎处处等于 0，而收敛性 (23) 直接应用了[Kammoun，2018年，引理 3。7]。

证明至此完成。 □

定理 3 的证明。 我们将分别处理每个方程。

- 由（20），我们得到

$$\ell(\lambda(\tau_n)) \leq \ell(\lambda(\sigma_n)) \leq \ell(\lambda(\tau_n)) + 1$$

  在给定 fix（σ_n） $= S$的条件下，并根据（3），由引理 11， τ_n 满足引理 17的条件。因此，对于所有 $\varepsilon > 0$，存在某个 n_0 使得若 $card$（S） $> n_0$,

$$\mathbb{P}\left|\left(\frac{\ell(\lambda(\tau_n)) - 2\sqrt{card(S)}}{card(S)^{\frac{1}{6}}} \leq s\right) - F_2(s)\right| < \varepsilon.$$

  这意味着（4）。

• 通过对 on #2(σ_n) $= k$进行条件化。注意， [Kammoun，2022，定理 30] 中的依概率收敛可以替换为依分布收敛；将其应用于 $\ell(\lambda(\tau_n))$，并按定理2的证明选择 V_n、 I_n、 V_n^i、 $Class(\sigma)$和 i_n^* 即可。参考测度的收敛由命题13给出。收敛式（22）显然成立，因为左端几乎必然等于0；在条件（5）下，收敛式（23）则直接应用 [Kammoun，2022，引理25]即可得到。这意味着（6）。

• 我们将[Kammoun，2022，定理 30] 应用于 $\lambda_1(\tau_n)$ ，方法是选取 V_n， I_n， V_n^i， $Class(\sigma)$ 如定理2 的证明中那样，并固定 i_{2p}^* 所有块均等于2 的 i_{2p+1}^* 分拆，其中p 个块等于2，且有 1 个块等于 1。在这种情况下，很容易看出

$$\underline{d}(\sigma) \leq 1 + \sum_{j \neq 2} j \#j(\sigma) = 1 + n - 2\#_2(\sigma).$$

参考测度的收敛性由命题13给出。在 (7) 条件下，收敛式 (23) 可直接由 [Kammoun，2022，引理 25]推出。这意味着 (8)。

• 与定理2的证明类似，思路是分别在以下情形下证明该结果：

$$\frac{\#(\sigma_n) - \#_1(\sigma_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

且当

$$\frac{n - \#_1(\sigma_n^2)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

第一种情形，由 (20) 可得

$$\ell(\lambda(\tau_n)) \leq \ell(\lambda(\sigma_n)) \leq \ell(\lambda(\tau_n)) + 1$$

因此只需证明 τ_n的收敛性。固定 $\varepsilon > 0$，在给定 $fix(\sigma_n) = S$的条件下，τ_n 是一个大小为 $n - card(s)$ 的共轭不变排列，并且以高概率满足$\frac{}{\#(\tau_n)\ n-card(S)^{\frac{1}{6}}} < \varepsilon$ ，由引理17可知。

在第二种情况下，我们使用 [Kammoun，2022，定理 30] 通过选择 V_n， I_n， V_n^i， $Class$（σ）以及 i_n^*，与定理 2的证明中相同。在这种情况下，我们只需要参考测度下的收敛性，也就是说，我们将问题简化为证明随机共轭不变对合的结果。现在，设 σ_n 为一个随机共轭不变排列。给定 fix（σ_n）$= S$， τ_n 是无不动点的卷积，因此可以得出结论，因为

$$\ell(\lambda(\tau_n)) \leq \ell(\lambda(\sigma_n)) \leq \ell(\lambda(\tau_n)) + 1.$$

□

引理的证明 5。 方程（19）结合 $m = 2$ 可得

$$\lambda_2(\sigma_n) \leq \lambda_2(\tau_n) + \lambda_1(\tau_n) \leq 2\lambda_1(\tau_n)$$

根据引理 11，以高概率 τ_n 是一个不含不动点且循环总数小于 $\sqrt{n}$的共轭不变随机排列。我们得到

$$\frac{\tau_n}{\sqrt{n}} \to 2$$

□

不动点数量微观的排列的一个RS像

命题13。 *[Baik 和 Rains, 2001]* 假设 (σ_n) 是一个大小为 n的均匀对合。

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\ell(\sigma_n)-2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}}\leq s\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\underline{\ell}(\sigma_n)-2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}}\leq s\right)=F_1(s).$$

假设(σ_n) 是一个大小为 n的均匀无不动点对合。

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\ell(\sigma_n)-2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}}\leq s\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\underline{\ell}(\sigma_n)-2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}}\leq s\right)=F_4(s).$$

命题14。 *[Méliot, 2011]* 假设(σ_n) 是一个大小为 n的均匀对合。那么对于所有 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{\sqrt{2n}}L_{\lambda(\sigma_n)}\left(s\sqrt{2n}\right)-\Omega(s)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

推论15。假设　　设(σ_n) 是一个大小为 n的均匀无不动点对合。那么对于所有 $\varepsilon>$　　0,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{\sqrt{2n}}L_{\lambda(\sigma_n)}\left(s\sqrt{2n}\right)-\Omega(s)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

引理16。 *[Kammoun, 2018年, 定理 8]*假设随机排列序列 $(\sigma_n)_{n\geq1}$ 在共轭作用下稳定，且对于所有 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\#(\sigma_n)}{n}>\varepsilon\right)=0.$$

那么对所有 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{\sqrt{2n}}L_{\lambda(\sigma_n)}\left(s\sqrt{2n}\right)-\Omega(s)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

引理17。 *[Kammoun, 2018]* 假设对所有正整数 n, σ_n 是一个大小为 n 对所有 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\#(\sigma_n)}{n^{\frac{1}{2}}}>\varepsilon\right)=0.$$

那么，

$$\frac{\ell(\sigma_n)}{\sqrt{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}2$$

此外，假设对所有 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\#(\sigma_n)}{n^{\frac{1}{6}}}>\varepsilon\right)=0.$$

那么对于所有 $s\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\ell(\sigma_n)-2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}}\leq s\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\underline{\ell}(\sigma_n)-2\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{6}}}\leq s\right)=F_2(s).$$

参考文献

J. Baik 和 E. M. Rains。对合的单调子序列的渐近性质。《杜克数学杂志》，109(2):205–281，2001年。ISSN 0012-7094。doi: 10.1215/S0012-7094-01-10921-6。URL https://doi.org/10.1215/S0012-7094-01-10921-6。J. Borga、W. D. Silva 和 E. Gwynne。布朗可分置换测度中递增子序列及布朗余图测度中齐次集的幂律界，2023。G. Chapuy、B. Louf 和 H. Walsh。Plancherel–Hurwitz 测度下的随机分拆、高亏格 Hurwitz 数与地图，2022。URL https://arxiv.org/abs/2206.11315。G. de B. Robinson。关于对称群的表示。《美国数学杂志》，60(3):745–760，1938年。ISSN 00029327，10806377。URL http://www.jstor.org/stable/2371609。V. Dubach。具有较长递增子序列的局部一致随机排列，2023。C. Greene。Schensted 定理的推广。《数学进展》，14(2):254–265，1974年。ISSN 0001-8708。doi: https://doi.org/10.1016/0001-8708(74)90031-0。URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870874900310。M. Kammoun。不变随机置换的单调子序列与下降过程。ArXiv 电子预印本，2018年5月。M. S. Kammoun。随机置换及其他群的普适性。《随机过程及其应用》，147:76–106，2022。ISSN 0304-4149。doi: https://doi.org/10.1016/j.spa.2022.01.012。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414922000126。D. E. Knuth。排列、矩阵与广义杨表。《太平洋数学杂志》，34:709–727，1970。ISSN 0030-8730。URL http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102971948。B. Logan 和 L. Shepp。随机杨表的一个变分问题。《数学进展》，26(2):206–222，1977年。ISSN 0001-8708。doi: https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90030-5。URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870877900305。P.-L. Méliot。Schur–Weyl 测度与 Gelfand 测度的 Kerov 中心极限定理（扩展摘要）。《离散数学与理论计算机科学》，第669–680页，2011年。D. Romik。《最长递增子序列的奇妙数学》，数学统计学会教材第4卷。剑桥大学出版社，纽约，2015年。ISBN 978-1-107-42882-9。B. E. Sagan。《对称群》。施普林格纽约，2001年。doi: 10.1007/978-1-4757-6804-6。URL https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6804-6。C. Schensted。最长递增与递减子序列。《加拿大数学杂志》，13:179–191，1961年。ISSN 0008-414X。URL https://doi.org/10.4153/CJM-1961-015-3。A. M. Vershik 和 S. V. Kerov。对称群 Plancherel 测度的渐近行为与杨表的极限形式。《苏联科学院院刊》，233(6):1024–1027，1977年。ISSN 0002-3264。