集合型信念传播及其在泊松多伯努利 SLAM 中的应用

´Hyowon Kim，*IEEE*会员，Angel F. Garc´ıa-Fern´andez，Yu Ge，*IEEE*学生会员，Yuxuan Xia，*IEEE*会员，Lennart Svensson，*IEEE*高级会员，以及Henk Wymeersch，*IEEE*会士

arXiv:2305.04797v3 [cs.AI] 4 Apr 2024

摘要—**置信传播（BP）是一种实用的概率推断算法，可高效计算随机变量的近似边缘概率密度。然而，标准形式的置信传播仅适用于向量元素数量固定且已知的向量型随机变量，而某些应用依赖于向量元素数量未知的随机有限集（RFS）。本文针对由随机有限集序列定义的因子图开发置信传播规则，其中每个随机有限集的元素数量均未知，旨在为随机有限集推导新的推断方法。此外，我们证明，向量型置信传播是集合型置信传播的特例，其中每个随机有限集都服从伯努利过程。为展示所开发的集合型置信传播的有效性，我们将其应用于用于同时定位与建图（SLAM）的泊松多伯努利（PMB）滤波器，由此自然得到一种集合型 BP PMB-SLAM 方法。该方法类似于向量型 SLAM 方法，仅需进行少量修改。**

索引词—**置信传播、多目标跟踪、泊松多伯努利滤波器、随机有限集、同步定位与建图。**

一、引言

置信传播（BP）是一种强大的统计推断算法，适用于信号处理、机器人学、自动驾驶车辆、图像处理和人工智能等不同领域。特别是，BP 在贝叶斯网络中计算概率密度时具有显著优势 [1]–[4]，，在给定观测数据的情况下，可以高效地计算感兴趣随机变量的边缘概率密度。BP 已被广泛应用于定位 [5], [6], 建图 [7],多目标跟踪（MTT） [8], [9],同时定位与建图（SLAM） [10]–[14],以及同时定位与跟踪（SLAT） [15]。建图和多目标跟踪分别根据含噪传感器测量值对地标进行建图和对目标进行跟踪。同时估计未知传感器状态以及地标和目标，分别可实现 SLAM 和 SLAT。本研究面临的主要挑战源于未知数量目标与由于漏检和杂波而产生的不完美测量之间的数据关联不确定性。为有效应对这一挑战，研究人员提出了以下几种方法。经典 SLAM 方法 [16]–[20] 在贝叶斯滤波器之外考虑数据关联，而滤波器则作用于向量随机变量。随着随机有限集（RFS）在 [21], [22],中的引入，一种在理论上可靠的工具得以用于建模未知数量的目标，并处理目标与测量之间的数据关联。通过使用向量类型的随机变量对目标进行建模，借助若干临时性修改 [12]–[14]，即可通过置信传播高效计算目标的边缘密度。其中，基于 RFS 和置信传播的方法从目标与数据关联的联合后验密度建模出发，严谨地处理了多目标跟踪和同步定位与建图的主要挑战。

有多种基于随机有限集的方法用于多目标跟踪和同步定位与建图。概率假设密度（PHD）滤波器 [21]–[24]传播随机有限集的一阶统计矩，即其强度。基数化概率假设密度（CPHD）滤波器传播强度和基数分布 [21], [22], [25]。基于多目标共轭先验的随机有限集滤波器能够获得更准确的解，因为这类先验在预测和更新下天然封闭 [26]–[29]。泊松多伯努利混合（PMBM） [27], [28] 采用泊松出生模型和多伯努利混合（MBM）。对于采用泊松出生模型的标准多目标模型 [21]，，多目标跟踪和同步定位与建图的贝叶斯最优解由 PMBM 共轭先验给出 [26],[28]。若采用多伯努利（MB）出生模型而非泊松出生模型，共轭先验则为 MBM [27]。MBM 滤波器对应于泊松强度为零的 PMBM 滤波器，且在预测步骤中将出生伯努利分量加入 MBM。若扩展 MBM 滤波器中的全局假设数量，使每个伯努利分量的目标存在性均为确定值，即可得到 MBM_{01} 滤波器 [27]。MBM 和 MBM_{01} 滤波器均可在不改变滤波递归的情况下进行标记。MBM_{01} 滤波器的递归与 δ-广义标记多伯努利（δ-GLMB）滤波递归类似 [30]–[34]。一些基于随机有限集的方法依靠置信传播计算边缘关联概率 [26]，，并在每次更新后通过边缘化关联变量，将 PMBM [27], [28] 转化为泊松多伯努利（PMB） [26], [28], [29], [35] 。

除了基于随机有限集的方法外，向量型置信传播方法也已应用于跟踪和建图问题。在[8], [9], 中，通过在目标状态与数据关联变量联合分布的因子图表示上运行向量型置信传播，来解决多目标跟踪问题。

H. Kim 任职于韩国大田 34134 忠南国立大学电子工程系（邮箱：hy- owon.kim@cnu.ac.kr）。´A. F. Garc´ıa-Fern´andez 任职于英国利物浦 L69 3GJ 利物浦大学电气工程与电子学系，同时任职于西班牙马德里安东尼奥·德·内布里哈大学 ARIES研究中心（邮箱：angel.garcia-fernandez@liverpool.ac.uk）。Y. Ge、L. Svensson 和 H. Wymeersch 任职于瑞典哥德堡 412 58 查尔姆斯理工大学电气工程系（邮箱：{yuge；lennart.svensson；以及 henkw}@chalmers.se）。Y. Xia 任职于瑞典林雪平 581 83 林雪平大学电气工程系（邮箱：yuxuan.xia@liu.se）。

其中，目标采用增广向量建模，包含二元目标存在指示变量；目标与数据关联变量之间的消息传递方法沿用自 [9]。无线电信号传播下的同步定位与建图问题在[10]–[14]中进行了建模。 [10], [11] 的作者构建了因子图，并针对由位置、方向和时钟偏差组成的未知传感器变量引入了高效的消息传递调度；此外， [11]进一步研究了多种类型的目标。基于 [9],中的增广目标向量以及目标与数据关联变量的因子化联合分布， [12]–[14]提出了用于联合同步定位与建图和数据关联的消息传递方法。这些基于向量型置信传播的方法 [12]–[14]可解释为航迹导向泊松多伯努利滤波器 [28] ，并取得了具有竞争力的性能。为处理未检测目标和新检测目标， [12]–[14],采用了辅助概率假设密度；该方法最初分别在 [36] 中用于向量型多目标跟踪，在[37] 中用于集合型多目标跟踪。 [13], 明确介绍了辅助概率假设密度滤波器的传播过程，但该过程位于因子图表示之外。因此，未检测目标及其与新检测目标之间的联系并未表示在所构建的因子图中。 [38]讨论了基于向量的方法中对未检测目标的建模，但这需要区分最终会被检测到的目标和永远不会被检测到的目标。此外，如何在多假设跟踪框架中应用置信传播也没有得到明确说明。因此，尽管基于置信传播的方法在算法实现方面具有优势，但仍需要进行某些特定的修改。

本文旨在通过开发一种新型置信传播算法，弥合随机有限集理论与置信传播之间的差距。该算法运行于定义在 RFS 序列上的因子图。与传统置信传播一样，只要对随机有限集密度进行因子分解，这种方法便为在因子图上进行自动推断打开了大门。该方法可以避免对启发式方法和近似的需求。已有相关工作在 [39], 中将置信传播应用于更新步骤，但并未系统地处理整个滤波递归，未检测目标和新检测目标的建模除外。因此，本文旨在基于随机有限集密度，对集合型置信传播及其相应的因子图进行形式化。基于新提出的集合型置信传播，我们利用所开发的集合型置信传播推导出 PMB 滤波器。本文的贡献总结如下：

- **集合型置信传播的定义：** 我们推导出集合型置信传播，并证明向量型置信传播是集合型置信传播的一个特例。我们还表明，与向量型置信传播一样，受约束的贝特自由能的内部驻点也是集合型 BP 固定点。
- **集合型置信传播中新因子的引入：** 我们设计了一种划分与合并因子，可将单个集合划分为多个集合，也可将多个集合合并为单个集合，适用于处理基数未知的集合。我们还提出了一种转换因子，用于处理附带辅助向量（例如唯一标记）的集合。
- **采用集合型置信传播推导适用于建图、多目标跟踪、同步定位与建图和 SLAT 相关问题的 PMB 和多伯努利滤波器：** 借助所开发的集合型置信传播，我们重新审视 PMB 和多伯努利同步定位与建图滤波器。我们首先引入辅助变量，将它们的联合同步定位与建图及数据关联分布因子化，根据因子化密度构建因子图，并在因子图上运行集合型置信传播。这项工作还可用于构建基于集合型置信传播的 PMB 建图、多目标跟踪和 SLAT 滤波器。由此得到的方法与 PMB-SLAM 滤波器十分相似：后者通过忽略新检测目标产生的传感器状态信息，并选取 Murty 算法确定的最可能关联，来计算更新后的传感器状态密度 [28] [40]。
- **与向量型 BP-SLAM 的关系：** 我们清楚地展示了所提出的集合型 BP PMB-SLAM 与向量型 BP-SLAM 滤波器 [12]–[14]之间的联系。尽管所提出的滤波器直接从随机有限集扩展推导而来，并基于已建立的集合型置信传播框架开发，但除 IV-F 节所述的少量细节差异外，这些方法在算法上等价。然而，向量型 BP-SLAM 滤波器 [12]–[14] 在算法开发过程中需要采用某些启发式方法，而所提出的集合型 BP PMB-SLAM 滤波器则避免了这些方法。仿真结果表明，在泊松点过程（PPP）出生具有信息量的场景中，所提出的集合型 BP PMB-SLAM 滤波器优于向量型 BP-SLAM 滤波器 [12]–[14], 。

本文的组织结构如下：第二节介绍向量型 BP 和随机有限集的背景知识。第三节提出集合型置信传播规则和集合型因子节点。第四节将所提出的集合型置信传播应用于 PMB 滤波器，并分析集合型与向量型 BP-SLAM 滤波器之间的联系。第五节报告数值结果并进行讨论，第六节给出结论。

II. 背景

本节回顾因子图和置信传播，并简要介绍随机有限集方法。

符号说明：标量用斜体表示，向量和矩阵分别用粗体小写字母和大写字母表示，集合用花体表示，例如 x、$\mathbf{x}$、$\mathbf{X}$ 和 $\mathcal{X}$。空间 $\mathbb{R}$ 的有限子集所构成的集合记为 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$。由一系列向量 $\mathbf{x}^i$ 组成的向量记为$\mathbf{x}$，多个集合组成的序列$\mathcal{X}$ 记为 $\mathcal{X}$。

A. 向量类型因子图与置信传播

1）联合密度分解与因子图：令$\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^{n_x}$ 表示单个状态向量，并令$\mathbf{x} = [(\mathbf{x}^1)^\top, ..., (\mathbf{x}^N)^\top]^\top$ 表示用于表示 N 状态的增广单状态向量。于是，我们将隐变量$\mathbf{x}$ 的联合概率密度记为 $f(\mathbf{x})$，其可分解为 [1], [4]

$$f(\underline{\mathbf{x}}) \propto \prod_a f_a(\underline{\mathbf{x}}^a), \tag{1}$$

其中， $f_a(\mathbf{x}^a)$ 表示一个非负函数，而$\mathbf{x}^a$ 表示函数 $f_a(\cdot)$的自变量向量。

式（1）中的因子化函数及其对应的自变量向量可以用因子图表示。一般图模型 [1]的因子图由表示不同因子和变量的节点组成，因子用方形表示，即 $f_a(\cdot)$，变量用圆形表示，即$\mathbf{x}^i$；因子与其自变量之间通过边相连。

示例 1. 假设我们有一个概率密度 $f(\mathbf{x})$，满足 $\mathbf{x} = [(\mathbf{x}^1)^\top, (\mathbf{x}^2)^\top]^\top$, $\mathbf{x}^A = \mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^B = \mathbf{x}^2$,$\mathbf{x}^C = [(\mathbf{x}^1)^\top,(\mathbf{x}^2)^\top]^\top$,它可以分解为

$$f(\underline{\mathbf{x}}) \propto f_A(\mathbf{x}^1) f_B(\mathbf{x}^2) f_C(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2). \tag{2}$$

相应的因子图如图 *1* 所示。

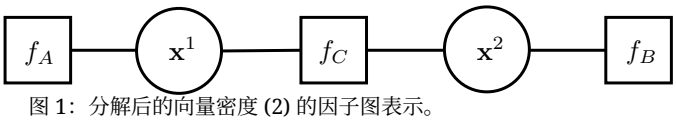


图 1：分解后的向量密度 (2) 的因子图表示。

2) 置信传播：置信传播是一种高效的方法，可根据联合概率密度函数 [1]估计变量的边缘密度。通过在因子图上运行置信传播，我们计算所有连接上因子与变量之间传递的消息。我们分别将从因子 a 到变量 i 以及从变量 i 到因子 a传播的消息记为 $\mathtt{m}_{a\to i}(\mathbf{x}^i)$ 和 $\mathtt{n}_{i\to a}(\mathbf{x}^i)$。消息按以下规则更新：

$$\mathtt{m}_{a\to i}(\mathbf{x}^i) = \int f_a(\underline{\mathbf{x}}^a) \prod_{j\in\mathcal{N}(a)\setminus\{i\}} \mathtt{n}_{j\to a}(\mathbf{x}^j) \mathrm{d}\mathbf{x}^{\sim i}, \tag{3}$$

$$\mathtt{n}_{i\to a}(\mathbf{x}^i) = \prod_{b\in\mathcal{M}(i)\setminus\{a\}} \mathtt{m}_{b\to i}(\mathbf{x}^i), \tag{4}$$

其中，$\mathcal{N}(a)$ 表示与因子 $f_a(\mathbf{x}^a)$ 相连的相邻向量索引集合 i，当且仅当 $\mathbf{x}^i$ 是 $f_a(\cdot)$ 的一个自变量时，$i \in \mathcal{N}(a)$；$\mathcal{M}(i)$ 表示与变量 $\mathbf{x}^i$ 相连的相邻因子索引集合 a，当且仅当 $\mathbf{x}^i$ 是 $f_a(\cdot)$ 的一个自变量时，$a \in \mathcal{M}(i)$；而 $\int \ldots \mathrm{d}\mathbf{x}^{\sim i}$ 表示对除 $\mathbf{x}^i$之外的所有向量$\mathbf{x}^j$ 进行积分。消息可用于计算置信分布，以近似边缘化后验密度。变量 i和因子 a 处的置信分布分别记为 $\mathtt{b}(\mathbf{x}^i)$ 和 $\mathtt{b}(\mathbf{x}^a)$，并按以下规则更新：

$$\mathtt{b}(\mathbf{x}^i) \propto \prod_{a\in\mathcal{M}(i)} \mathtt{m}_{a\to i}(\mathbf{x}^i), \tag{5}$$

$$\mathtt{b}(\underline{\mathbf{x}}^a) \propto f_a(\underline{\mathbf{x}}^a) \prod_{i\in\mathcal{N}(a)} \mathtt{n}_{i\to a}(\mathbf{x}^i). \tag{6}$$

B. 随机有限集

1) 集合变量、概率密度与积分：我们将一个随机有限集表示为 $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{n_\mathbf{x}})$，其中向量 $\mathbf{x}^i, i \in \{1, \ldots, n\}$ 和基数 $n = |\mathcal{X}|$ 都是随机的。我们将集合概率密度 $f(\mathcal{X})$ 定义为 [26]

$$f(\mathcal{X}) = p(n) \sum_{\pi} f^n(\mathbf{x}^{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{\pi(n)}), \tag{7}$$

其中，$p(n) = \Pr(|\mathcal{X}| = n)$ 表示集合基数的概率质量函数，π 表示集合 $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ 的一个可能排列，满足 $\pi(i) \in \mathcal{N}$，而$f^n(\cdot)$是包含n 个元素的向量的联合概率密度函数，在排列 π下取值。给定集合值函数 $g(\cdot)$，我们将集合积分定义为 [22, 式（3.11）]

$$\int g(\mathcal{X}) \delta\mathcal{X} = g(\emptyset) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int g(\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n\}) \mathrm{d}\mathbf{x}^1 \ldots \mathrm{d}\mathbf{x}^n. \tag{8}$$

2) 泊松、伯努利和 *PMB* 密度：我们将沿用 [21] 中的定义。假设有一个集合 $\mathcal{X}^{\mathrm{U}}$，它服从泊松过程。其密度为 [26]

$$f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{X}^{\mathrm{U}}) = e^{-\int \lambda(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}} \prod_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}^{\mathrm{U}}} \lambda(\mathbf{x}), \tag{9}$$

其中，$\lambda(\mathbf{x})$ 表示泊松强度函数。伯努利密度 $f^{\mathrm{B}}(\mathcal{X})$ 定义为

$$f^{\mathrm{B}}(\mathcal{X}) = \begin{cases} 1 - r, & \mathcal{X} = \emptyset \\ r\, f(\mathbf{x}), & \mathcal{X} = \{\mathbf{x}\} \\ 0, & |\mathcal{X}| > 1, \end{cases} \tag{10}$$

其中，$f(\mathbf{x})$ 和 $r \in [0, 1]$ 分别表示空间密度和存在概率。具有n 个伯努利分量的多伯努利密度定义为

$$f^{\mathrm{MB}}(\mathcal{X}^{\mathrm{D}}) = \sum_{\uplus_{i=1}^n \mathcal{X}^i = \mathcal{X}^{\mathrm{D}}} \prod_{i=1}^{n} f^i(\mathcal{X}^i), \tag{11}$$

其中，$f^i(\mathcal{X}^i)$ 是伯努利密度，$\uplus$ 表示不相交集合并 [41, pp. 24]。

现在我们可以介绍 PMB 密度，其定义如下。假设有两个独立随机有限集 $\mathcal{X}^{\mathrm{U}}$和 $\mathcal{X}_{\mathrm{D}}$，满足 $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{\mathrm{U}} \uplus \mathcal{X}_{\mathrm{D}}$，其中 $\mathcal{X}^{\mathrm{D}}$服从多伯努利过程，$\mathcal{X}^{\mathrm{U}}$ 服从泊松点过程。利用独立随机有限集的卷积公式 [21],，PMB 密度 $f(\mathcal{X})$ 为

$$f^{\mathrm{PMB}}(\mathcal{X}) \propto \sum_{\uplus_{i=1}^n \mathcal{X}^i \uplus \mathcal{X}^{\mathrm{U}} = \mathcal{X}} \prod_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}^{\mathrm{U}}} \lambda(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{n} f^i(\mathcal{X}^i). \tag{12}$$

3) 辅助变量：推导集合型置信传播泊松多伯努利混合滤波器时，需要引入辅助变量，以消去式（12）中的求和项。具体而言，我们在 PMB 密度（12）中引入 $u \in \mathbb{U}$，其中 $\mathbb{U} = \{0, 1, \ldots, n\}$ [39]、[42]。因此，我们扩展单目标状态空间，使得 $(u, \mathbf{x}) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}^{n_\mathbf{x}}$，并将带有辅助变量的目标状态集合记为$\tilde{\mathcal{X}} \in \mathcal{F}(\mathbb{U} \times \mathbb{R}^{n_\mathbf{x}})$。带有辅助变量 $u = 0$ 的集合服从泊松点过程，表示目标尚未被检测到，记为 $\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}} = \{(u, \mathbf{x}) \in \tilde{\mathcal{X}} : u = 0\}$。类似地，带有 $u = i$ 的集合服从伯努利过程，表示该单个目标此前已被检测到，记为 $\tilde{\mathcal{X}}^i = \{(u, \mathbf{x}) \in \tilde{\mathcal{X}} : u = i\}$。对于带有 $\tilde{}$ 辅助变量 $\mathcal{X}$ 的目标集合，其 PMB 密度为 [42, 定义 1]

$$\tilde{f}^{\mathrm{PMB}}(\tilde{\mathcal{X}}) = \tilde{f}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}}) \prod_{i=1}^{n} \tilde{f}^i(\tilde{\mathcal{X}}^i). \tag{13}$$

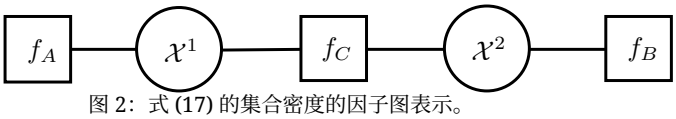


图 2：式 (17) 的集合密度的因子图表示。

这里， $\tilde{f}_{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathrm{U}})$ 和 $\tilde{f}^i(\tilde{\mathcal{X}}^i)$ 定义为

$$\tilde{f}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}}) = \exp\left(-\int \lambda(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right) \prod_{(u,\mathbf{x})\in\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}}} \delta_0[u]\lambda(\mathbf{x}), \quad (14)$$

$$\tilde{f}^i(\tilde{\mathcal{X}}^i) = \begin{cases} 1-r^i, & \tilde{\mathcal{X}}^i = \emptyset \\ r^i f^i(\mathbf{x})\delta_i[u], & \tilde{\mathcal{X}}^i = (u,\mathbf{x}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (15)$$

其中， $\delta_i[\cdot]$ 表示克罗内克 delta 函数。为简化符号， $\tilde{\cdot}$ 在可能的情况下将省略集合上的辅助变量。

III. 随机有限集的因子图与置信传播

我们介绍针对随机有限集的集合型置信传播更新规则和特殊因子。我们指出，集合型置信传播是标准向量型置信传播的一种推广，因为向量可以表示为仅含一个元素 $p(n=1)=1$ 的集合，如式 (7) 所示。

A. RFS 序列上的因子图与置信传播

假设我们有 n 个随机有限集 $\mathcal{X}^1, \ldots\ldots, \mathcal{X}^n$，其联合密度为 $f(\mathcal{X}^1, \ldots\ldots, \mathcal{X}^n)$。在集合型置信传播的一般表述中，$\mathcal{X}^1, \ldots\ldots, \mathcal{X}^n$ 可能包含辅助变量，也可能不包含；序列中随机有限集的数量 n 是已知的。

定义1（集合密度的因子分解与因子图）。记 $f_a(\cdot)$ 为集合因子 a，它是一个非负函数；记 $\mathcal{N}(a)$ 为与集合因子 a相连的相邻集合变量索引集合；记 $\mathcal{X}^i$ 为集合变量 i；记 $\mathcal{M}(i)$ 为与集合变量$\mathcal{X}^i$相连的相邻集合因子索引集合；并记 $\mathcal{X}^a$ 为集合因子 a 的自变量，由 $i\in\mathcal{N}(a)$ 对应的所有随机有限集 $\mathcal{X}^i$ 按序列排列而成。假设联合密度 $f(\mathcal{X}^1,\ldots,\mathcal{X}^n)$ 因子化如下：

$$f(\mathcal{X}^1,\ldots,\mathcal{X}^n) \propto \prod_a f_a(\underline{\mathcal{X}}^a). \quad (16)$$

于是，因子化密度可以用因子图表示，该图由集合变量 $\mathcal{X}^i$ 和集合因子$f_a(\mathcal{X}^a)$组成，它们分别用圆形和方形表示，并通过边连接 $\mathcal{X}^i$ 与 $f_a(\mathcal{X}^a)$。需要注意的是， $f_a(\mathcal{X}^a)$ 对于$\mathcal{X}^a$ 的每个基数都具有适当的单位，因此我们可以使用集合积分对$\mathcal{X}^1,\ldots,\mathcal{X}^n$ *[22,*进行积分，以计算（16）。第*3.2*节*4]*。

示例 2. 考虑集合密度 $f(\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2)$，使得 $\mathcal{X}^A=\mathcal{X}^1$、$\mathcal{X}^B=\mathcal{X}^2$ 和 $\mathcal{X}^C=(\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2)$，它可以因式分解为

$$f(\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2) \propto f_A(\mathcal{X}^1) f_B(\mathcal{X}^2) f_C(\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2). \quad (17)$$

使用集合变量和集合因子，与 (17) 对应的因子图如图 *2* 所示。

定义 2（集合型置信传播更新规则）。从集合因子 a 到集合变量 i 的集合消息记为$\mathtt{m}_{a\to i}(\mathcal{X}^i)$，而从集合变量 i 到集合因子a 的集合消息记为 $\mathtt{n}_{i\to a}(\mathcal{X}^i)$。集合变量 i 和集合因子 a 处的置信分布分别记为 $\mathtt{b}(\mathcal{X}^i)$和 $\mathtt{b}(\mathcal{X}^a)$。集合消息按照以下规则更新：

$$\mathtt{m}_{a\to i}(\mathcal{X}^i) = \int f_a(\underline{\mathcal{X}}^a) \prod_{j\in\mathcal{N}(a)\setminus\{i\}} \mathtt{n}_{j\to a}(\mathcal{X}^j)\delta\mathcal{X}^{\sim i}, \quad (18)$$

$$\mathtt{n}_{i\to a}(\mathcal{X}^i) = \prod_{b\in\mathcal{M}(i)\setminus\{a\}} \mathtt{m}_{b\to i}(\mathcal{X}^i), \quad (19)$$

其中， $\setminus$ 表示集合差， $\int\ldots\delta\mathcal{X}^{\sim i}$ 表示对除 $\mathcal{X}^i$ 以外的所有集合 $\mathcal{X}^j$ 积分，即对所有满足 $j\in\mathcal{N}(a)\setminus\{i\}$ 的 $\mathcal{X}^j$ 积分。集合变量 i 和集合因子 a 处的信念按照以下规则更新：

$$\mathtt{b}(\mathcal{X}^i) \propto \prod_{a\in\mathcal{M}(i)} \mathtt{m}_{a\to i}(\mathcal{X}^i) \quad (20)$$

$$\mathtt{b}(\underline{\mathcal{X}}^a) \propto f_a(\underline{\mathcal{X}}^a) \prod_{i\in\mathcal{N}(a)} \prod_{b\in\mathcal{M}(i)\setminus\{a\}} \mathtt{m}_{b\to i}(\mathcal{X}^j). \quad (21)$$

定义 1 中集合型置信传播更新规则的最优性由下文给出的定理 1 和推论 1 描述。

定理 1. 受约束的贝特自由能的内部驻点是具有正集合信念的集合型 *BP* 固定点，反之亦然。

Proof. See Appendix A. □

推论 1. 在无环因子图上运行集合型置信传播所得的集合信念，表示精确的边缘概率密度。

证明。见附录 B。 □

例 *3*。考虑图 *2* 中的因子图，它表示例 *2* 中的因子化密度。使用集合型置信传播，集合变量 *1* 和因子 C 处的信念如下所示：$m_{A\to1}(\mathcal{X}^1)=f_A(\mathcal{X}^1), m_{B\to2}(\mathcal{X}^2)=f_B(\mathcal{X}^2), n_{1\to C}(\mathcal{X}^1)=m_{A\to1}(\mathcal{X}^1), n_{2\to C}(\mathcal{X}^2)=m_{B\to2}(\mathcal{X}^2)$,

$$\mathtt{m}_{C\to1}(\mathcal{X}^1) = \int \mathtt{n}_{2\to C}(\mathcal{X}^2) f_C(\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2)\delta\mathcal{X}^2, \quad (22a)$$

$$\mathtt{b}(\mathcal{X}^1) \propto \mathtt{m}_{A\to1}(\mathcal{X}^1)\mathtt{m}_{C\to1}(\mathcal{X}^1), \quad (22b)$$

$$\mathtt{b}(\mathcal{X}^C) \propto f_C(\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2)\mathtt{m}_{A\to1}(\mathcal{X}^1)\mathtt{m}_{B\to2}(\mathcal{X}^2). \quad (22c)$$

注 1 (向量型置信传播是集合型置信传播的特例)。注意，当考虑基数以概率 *1* 为 *1* 的集合时，即$p(|\mathcal{X}^i|=1)=1, \forall\, i$.[1]，即可从集合型置信传播的表达式得到向量型置信传播的消息传递规则和信念。注意，这一性质意味着我们可以直接对联合集合密度和向量密度应用置信传播，分别使用集合变量和向量变量对应的集合积分和向量积分。一个向量型因子图 (1) 可以写成

[1]集合中的元素数量被确定性地设为 1。例如，假设 RFS 表示中有 $\mathcal{X}^1=\{\mathbf{x}^1\}$，$\mathcal{X}^2=\{\mathbf{x}^2\}$，$\mathcal{X}^3=\{\mathbf{x}^3\}$，而向量表示中有 $\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\mathbf{x}^3$。那么，这两种表示是等价的。

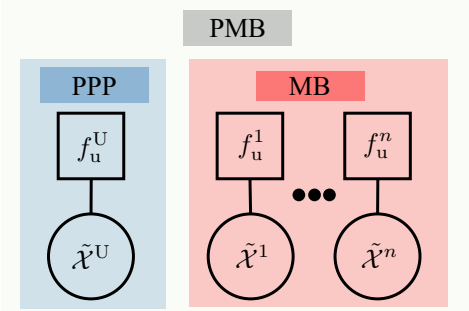


图 3：带辅助变量的 PMB 密度的因子图，见公式 (13)，其为泊松点过程与 n 伯努利密度的乘积。

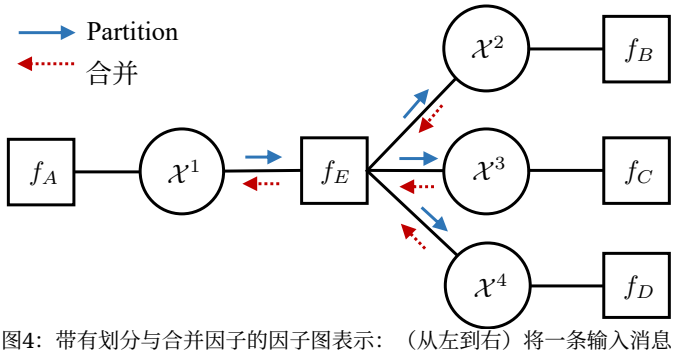


图4：带有划分与合并因子的因子图表示：（从左到右）将一条输入消息划分为多条消息；（从右到左）将多条消息合并为一条消息。

式(16) 中的集合型因子图具有这样的性质：每个因子都要求集合的基数为 *1*。对于只考虑基数为 *1* 的集合的因子，集合积分等价于向量积分，而集合型 *BP* 消息 (20)-(21)等价于式(5)-(6)中的消息。

B. 集合密度的示例和特殊因子

1) PMB 密度的因子图：到目前为止，我们已经说明了集合型置信传播如何应用于一系列随机有限集的联合密度。现在，我们将继续说明如何从 PMB 密度 (12) 获得这种类型的密度。

在由不同子空间不交并构成的单目标空间中定义的集合密度，可用于定义集合序列上的密度 [22, 方程 3.52]。引入辅助变量以表示式 (12) 中的 PMB 时，得到了这种类型的单目标空间，从而得到式 (13)。因此，将这一结果应用于形式为式 (13) 的 PMB 密度，可得

$$\tilde{f}^{\mathrm{PMB}}(\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}},\tilde{\mathcal{X}}^{1},\ldots,\tilde{\mathcal{X}}^{n})=\tilde{f}^{\mathrm{PMB}}(\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}}\uplus\tilde{\mathcal{X}}^{1}\uplus\cdots\uplus\tilde{\mathcal{X}}^{n}). \tag{23}$$

现在，我们可以利用这个定义在 RFS 序列上的联合密度来应用集合类型 BP。带有辅助变量的 PMB 密度（13）的因子图如图 3 所示。由于该密度是完全因子分解的，因此它表现为一组互不相连的因子。通过移除图 3 中相应的因子和变量，我们还可以直接得到带有辅助变量的 PPP 和 MB 密度的因子图。

2）划分与合并因子：随机有限集的并集在文献中很常见 [22, 第 3.5 节3]。为了在因子图中表示随机有限集的并集，我们引入一种称为划分与合并因子的因子，定义如下。

定义 3（划分与合并因子）。我们将划分与合并集合因子定义为

$$f_a(\underline{\mathcal{X}}^{a})=\delta_{\uplus_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{X}^{i}}(\mathcal{X}^{j}), \tag{24}$$

其中，$\delta_{\mathcal{X}}(\cdot)$ 表示以集合 $\mathcal{X}$ 为中心的集合狄拉克 δ 函数，定义见 *[21, 第 11.3.4 节3]*；$\mathcal{X}^{j}$ 是 $\mathcal{X}^{j}=\uplus_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{X}^{i}$的并集。该因子将单个集合 $\mathcal{X}^{j}$划分为$|\mathcal{N}(a)|-1$个子集，即对于 $i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}$，$\mathcal{X}^{i}$；并将$|\mathcal{N}(a)|-1$个集合合并为一个集合$\mathcal{X}^{j}$，即对于 $i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}$，$\mathcal{X}^{i}$。

了解这一因子如何影响集合消息是很有帮助的。假设我们有输入消息 $\mathrm{n}_{j\to a}(\mathcal{X}^{j})$ 和 $\mathrm{n}_{q\to a}(\mathcal{X}^{q})=1$对于 $q\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j,i\}$。通过遵循 the

集合型置信传播更新规则中，对于 $i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}$，从集合因子 a 到集合变量 i 的输出消息为

$$\mathrm{m}_{a\to i}(\mathcal{X}^{i})=\int\mathrm{n}_{j\to a}(\mathcal{X}^{j})\delta_{\uplus_{q\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{X}^{q}}(\mathcal{X}^{j})\delta\mathcal{X}^{\sim i} \tag{25}$$

$$=\int\mathrm{n}_{j\to a}(\uplus_{q\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{X}^{q})\delta\mathcal{X}^{\sim(i,j)} \tag{26}$$

$$=\int\mathrm{n}_{j\to a}(\mathcal{X}^{i}\uplus\mathcal{X})\delta\mathcal{X}, \tag{27}$$

其中，$\int\delta\mathcal{X}^{\sim(i,j)}$ 表示对除 $\mathcal{X}^{i}$ 和 $\mathcal{X}^{j}$之外的所有集合 $\mathcal{X}^{q}$ 进行积分，而 $\mathcal{X}$ 是一个虚变量，用于对所有可能的集合进行积分。这表示 $\mathcal{X}=\uplus_{q\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j,i\}}\mathcal{X}^{q}$，并且带有输入消息 $\mathrm{n}_{j\to a}(\mathcal{X}^{j})$ 的单个集合 $\mathcal{X}^{j}$被划分为 $|\mathcal{N}(a)|-1$ 个子集 $\mathcal{X}^{i}$，并分别带有输出消息 $\mathrm{m}_{a\to i}(\mathcal{X}^{i})$，其中 $i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}$。

反过来，假设对于 $i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}$，我们有输入消息 $\mathrm{n}_{i\to a}(\mathcal{X}^{i})$，那么从集合因子 a 到集合变量 j 的输出消息为

$$\mathrm{m}_{a\to j}(\mathcal{X}^{j})$$

$$=\int\prod_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathrm{n}_{i\to a}(\mathcal{X}^{i})\delta_{\uplus_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{X}^{i}}(\mathcal{X}^{j})\delta\mathcal{X}^{\sim j} \tag{28}$$

$$=\int\sum_{\uplus_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{W}^{i}=\mathcal{X}^{j}}\prod_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathrm{n}_{i\to a}(\mathcal{X}^{i})\delta_{\mathcal{W}^{i}}(\mathcal{X}^{i})\delta\mathcal{X}^{\sim j} \tag{29}$$

$$=\sum_{\uplus_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{W}^{i}=\mathcal{X}^{j}}\prod_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathrm{n}_{i\to a}(\mathcal{W}^{i}), \tag{30}$$

其中，在步骤 (28) 中，我们利用卷积公式得出 $\delta_{\uplus_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{X}^{i}}(\mathcal{X}^{j})=\sum_{\uplus_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{W}^{i}=\mathcal{X}^{j}}\prod_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\delta_{\mathcal{W}^{i}}(\mathcal{X}^{i})$。随后，(30) 表明，带有输入消息 $\mathrm{n}_{i\to a}(\mathcal{X}^{i})$（对应于 $i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}$）的集合 $\mathcal{X}^{i}$ 被合并为一个集合 $\mathcal{X}^{j}$，其输出消息为 $\mathrm{m}_{a\to j}(\mathcal{X}^{j})$。

示例 4。给定图*4*所示的因子图，其中 $\mathcal{X}^{1}=\mathcal{X}^{2}\uplus\mathcal{X}^{3}\uplus\mathcal{X}^{4}$，集合因子 E 处的自变量根据定义*1*表示为集合序列 $\mathcal{X}^{E}=(\mathcal{X}^{1},\mathcal{X}^{2},\mathcal{X}^{3},\mathcal{X}^{4})$。根据定义 *3*，划分与合并因子表示为 $f_E(\mathcal{X}^{E})=\delta_{\mathcal{X}^{2}\uplus\mathcal{X}^{3}\uplus\mathcal{X}^{4}}(\mathcal{X}^{1})$。假设我们有输入消息$\mathrm{n}_{1\to E}(\mathcal{X}^{1})$、$\mathrm{n}_{i\to E}(\mathcal{X}^{i})=1$，其中$i\in\{2,3,4\}$。根据(26)，划分消息$\mathrm{m}_{E\to i}(\mathcal{X}^{i})$计算如下

$$\mathrm{m}_{E\to i}(\mathcal{X}^{i})=\int\mathrm{n}_{1\to E}(\mathcal{X}^{2}\uplus\mathcal{X}^{3}\uplus\mathcal{X}^{4})\delta\mathcal{X}^{\sim(i,1)}, \tag{31}$$

对于 $i=2$，3、4。反之，假设我们有输入消息$\mathtt{n}_{j\to E}(\mathcal{X}^j)$，其中 $j\in\{2,3,4\}$，则从集合因子 E 传递到集合变量*1*的输出消息计算如下

$$\mathtt{m}_{E\to 1}(\mathcal{X}^1) = \sum_{\mathcal{W}^2\uplus\mathcal{W}^3\uplus\mathcal{W}^4=\mathcal{X}^1} \mathtt{n}_{2\to E}(\mathcal{W}^2)\ \mathtt{n}_{3\to E}(\mathcal{W}^3)\mathtt{n}_{4\to E}(\mathcal{W}^4). \tag{32}$$

也就是说，输出消息是三个输入消息的卷积，表示三个相互独立的随机有限集的并集。

命题 1 (泊松点过程划分与合并)。 假设我们有一个集合因子 $f_a(\mathcal{X}^a)$ 和一个随机有限集 $\mathcal{X}^j=\uplus_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{X}^i$。随机有限集 $\mathcal{X}^i$ 遵循泊松过程，其中 $i\in\mathcal{N}(a)$。根据 (27)，从 $f_a(\mathcal{X}^a)$ 到 $\mathcal{X}^i$ （其中$i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}$）的划分消息为

$$\mathtt{m}_{a\to i}(\mathcal{X}^i)\propto f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{X}^i), \tag{33}$$

根据 (30)，从 $f_a(\mathcal{X}^a)$ 到 $\mathcal{X}^j$ 的合并消息为

$$\mathtt{m}_{a\to j}(\mathcal{X}^j)=\sum_{\uplus_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}}\mathcal{W}^i=\mathcal{X}^j}\prod_{i\in\mathcal{N}(a)\setminus\{j\}} f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{W}^i), \tag{34}$$

它遵循泊松点过程。

证明。 参见附录 C。 □

3) 辅助变量移位因子： 我们引入一个因子来改变辅助变量。

定义4 (辅助变量移位函数)。 给定任意整数 L 以及一个具有辅助变量的单目标空间，使得$(u,\mathbf{x})\in\mathbb{U}\times\mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}}$，我们定义函数

$$\mathtt{h}_L(u,\mathbf{x})=(u+L,\mathbf{x}), \tag{35}$$

这会使辅助变量的单位偏移 L。函数$\tilde{\mathtt{h}}_L(\cdot)$ 可以扩展到集合 $\mathcal{X}\in\mathcal{F}(\mathbb{U}\times\mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}})$，使得

$$\mathtt{h}_L(\tilde{\mathcal{X}})=\uplus_{(u,\mathbf{x})\in\tilde{\mathcal{X}}}\{(u+L,\mathbf{x})\}. \tag{36}$$

定义 5 （辅助变量转换因子）。 我们有两个集合 $\tilde{\mathcal{X}}^i=\{(u^1,\mathbf{x}^1)\ \ldots,\ (u^n,\mathbf{x}^n)\}$和 $\tilde{\mathcal{X}}^j=\{(u^1+L,\mathbf{x}^1)\ \ldots,\ (u^n+L,\mathbf{x}^n)\}$，其中 L 是一个整数。根据定义*4*，我们将辅助变量转换因子定义为

$$f_a(\tilde{\mathcal{X}}^i,\tilde{\mathcal{X}}^j)=\delta_{\mathtt{h}_{-L}(\tilde{\mathcal{X}}^j)}(\tilde{\mathcal{X}}^i), \tag{37}$$

其中 $\mathtt{h}_{-L}(\cdot)$ 由(36)给出。

理解该因子如何影响集合消息是很有帮助的。假设我们有一条输入消息 $\mathtt{n}_{i\to a}(\tilde{\mathcal{X}}^i)$。那么，从 $f_a(\tilde{\mathcal{X}}^i,\tilde{\mathcal{X}}^j)$ 到 $\tilde{\mathcal{X}}^j$ 的输出消息为

$$\mathtt{m}_{a\to j}(\tilde{\mathcal{X}}^j)=\int \mathtt{n}_{i\to a}(\tilde{\mathcal{X}}^i)\delta_{\mathtt{h}_{-L}(\tilde{\mathcal{X}}^j)}(\tilde{\mathcal{X}}^i)\delta\tilde{\mathcal{X}}^i \tag{38}$$

$$=\mathtt{n}_{i\to a}(\mathtt{h}_{-L}(\tilde{\mathcal{X}}^j))=\mathtt{n}_{i\to a}(\tilde{\mathcal{X}}^i). \tag{39}$$

也就是说，输出消息的形式与输入消息相同，不同之处在于，输入消息中的辅助变量已通过辅助变量移位函数进行转换。

IV. 集合型信念传播的应用

本节旨在提出一种应用方案，将所提出的集合型置信传播（BP）更新规则和适用于随机有限集（RFS）的特殊因子应用于实际问题。具体而言，我们推导了用于同步定位与建图（SLAM）的集合型置信传播（BP）PMB 滤波器和集合型多伯努利（MB）滤波器，其中目标和测量均采用随机有限集（RFS）进行建模。

A. 问题表述

1) 目标：我们的目标是计算离散时刻 k 的边缘密度 $f(\mathbf{s}_k|\mathcal{Z}_{1:k})$ 和 $f(\mathcal{X}_k|\mathcal{Z}_{1:k})$，其中随机向量 $\mathbf{s}_k$ 表示传感器状态，随机有限集 $\mathcal{X}_k$ 表示带有辅助变量的目标状态集合，并采用 PMB 建模。为计算边缘密度，我们采用由预测和更新步骤组成的序贯贝叶斯框架，详见第 IV-B 节和第 IV-C 节。

2) 多目标动力学：每个目标 $\mathbf{x}_{k-1}\in\mathcal{X}_{k-1}$ 在时刻 $k-1$ 以概率 $p_{\mathrm{S}}(\mathbf{x}_{k-1})$ 存活，或以概率 $1-p_{\mathrm{S}}(\mathbf{x}_{k-1})$ 死亡。存活目标按照转移密度 $f(\cdot|\mathbf{x}_{k-1})$ 演化，但它们可能是静态的（此时称为地标），也可能是移动的（此时称为目标，本文将采用这一术语）。时刻 k 的目标集合 $\mathcal{X}_k$，是存活并演化的目标与新目标的并集，其中目标出生遵循强度为 $\lambda_{\mathrm{B}}(\cdot)$ 的泊松点过程。传感器状态可能未知（对于 SLAT 和同步定位与建图而言），也可能已知（对于多目标跟踪和建图而言）。

3）测量：目标 $\mathcal{X}_k$ 在传感器状态$\mathbf{s}_k$下被观测，观测结果用测量集 $\mathcal{Z}_k$表示。每个目标 $\mathbf{x}_k\in\mathcal{X}_k$ 以概率 $p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k,\mathbf{x}_k)$被检测到；若被检测到，则会生成一条测量，其单目标测量似然函数为 $g(\cdot|\mathbf{s}_k,\mathbf{x}_k)$。测量集 $\mathcal{Z}_k$ 是目标测量与强度为 $c(\cdot)$的泊松点过程的并集。

B. 联合密度与因子图下的预测

不失一般性，考虑迭代贝叶斯滤波器中的两个时间步 $k-1$和 k。对于因子图表述，预测中所有变量（包括辅助变量）的联合密度分解为

$$f(\mathbf{s}_{k-1:k},\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}}_{k-1},\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{S}}_{k},\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{B}}_{k},\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{U}}_{k},\tilde{\mathcal{X}}^{1:I_{k-1}}_{k-1:k})$$

$$\propto f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_{k-1})f^{\mathrm{U}}_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}}_{k-1})\prod_{i\in\mathcal{I}_{k-1}} f^{i}_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{X}}^{i}_{k-1}) \tag{40a}$$

$$\times f(\mathbf{s}_k|\mathbf{s}_{k-1})f^{\mathrm{P}}(\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{S}}_{k}|\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}}_{k-1})f(\tilde{\mathcal{X}}^{i}_{k}|\tilde{\mathcal{X}}^{i}_{k-1}) \tag{40b}$$

$$\times f^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{B}}_{k})\delta_{\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{S}}_{k}\uplus\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{B}}_{k}}(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathrm{U}}_{k}), \tag{40c}$$

其中 $\tilde{\mathcal{X}}^{1:I_{k-1}}_{k-1\ k}$：表示时刻 k和 $k-1$的集合序列 $\tilde{\mathcal{X}}^{i}$，$i=$的取值为 $1,\ldots,I_{k-1}$； I_{k-1}是时刻 $k-1$的伯努利分量数。为完整起见，下面描述式（40）中每一行的含义。

- 时刻 $k-1$ (40a)：这一行描述时间步 $k-1$ 的后验，假定其为$f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_{k-1},\mathcal{X}_{k-1})=f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_{k-1})f_{\mathrm{u}}(\mathcal{X}_{k-1})$，其中 $f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_{k-1})$ 是传感器状态后验，而 $f_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}}_{k-1})$ 是目标集合后验。此处 $\mathcal{X}_{k-1}$ 服从 PMB，并带有辅助变量（见第 II-B3 节）。由于这些辅助变量。

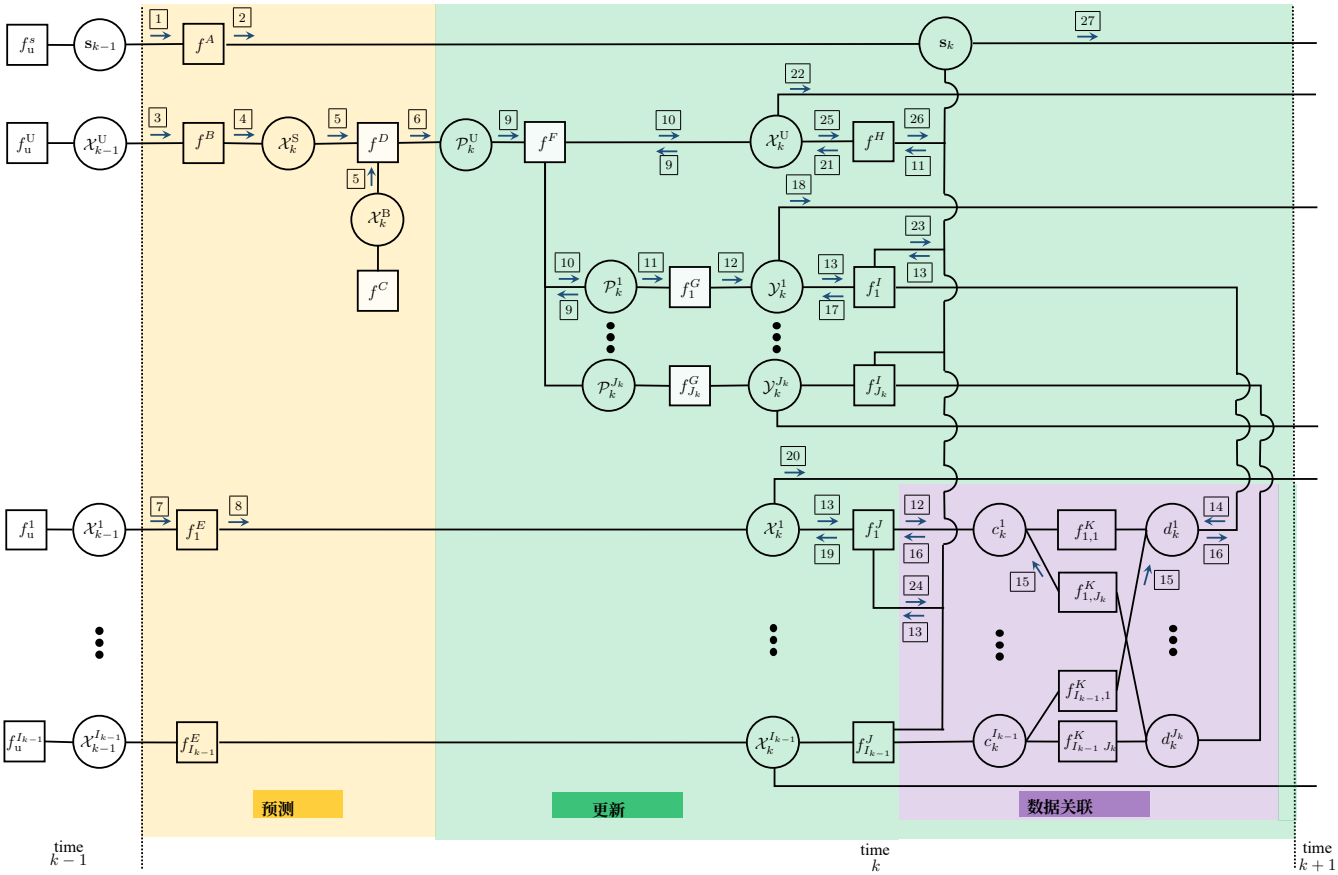


图 5：公式 (40) 和 (46) 的联合密度的串联因子图。第三节 B 中讨论的集合密度特殊因子以白色方块表示。因子节点的简写表示法通过省略参数以及集合上的 $\tilde{\cdot}()$ 得到，如下所示：$f_{\mathrm{u}}^{s} \triangleq \mathfrak{b}(\mathrm{s}_{k-1})$、$f_{\mathrm{u}}^{\mathrm{U}} \triangleq \mathfrak{b}(\mathcal{X}\mathrm{U}_{k-1})$、$f_{\mathrm{u}}^{i} \triangleq \mathfrak{b}(\mathcal{X}_{k-1}^{i})$、$f^{A} \triangleq f^{A}(\mathrm{s}_k, \mathrm{s}_{k-1})$、$f^{B} \triangleq f^{B}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{S}}, \mathcal{X}\mathrm{U}_{k-1})$、$f^{C} \triangleq f^{C}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{B}})$、$f^{D} \triangleq f^{D}(\mathcal{X}\mathrm{S}_k, \mathcal{X}_k^{\mathrm{B}}, \mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})$、$f_i^{E} \triangleq f_i^{E}(\mathcal{X}_k^{i}, \mathcal{X}_{k-1}^{i})$、$f^{F} \triangleq f^{F}(\mathcal{X}\mathrm{U}_k, \mathcal{P}_k^{1}, \cdots, \mathcal{P}_k^{J_k})$、$f_j^{G} \triangleq f_j^{G}(\mathcal{P}_k^{j}, \mathcal{Y}_k^{j})$、$f^{H} \triangleq f^{H}(\mathrm{s}_k, \mathcal{X}\mathrm{U}_k)$、$f_j^{I} \triangleq f_j^{I}(\mathrm{s}_k, \mathcal{Y}_k^{j}, d_k^{j})$、$f_i^{J} \triangleq f_i^{J}(\mathrm{s}_k, \mathcal{X}_k^{i}, c_k^{i})$，以及 $f_{i,j}^{K} \triangleq f_i^{K}{}_{,j}(c_k^{i}, d_k^{j})$。

˜变量，时刻 $k-1$ 的 PMB 后验 $f_{\mathrm{u}}(\mathcal{X}_{k-1})$，可分解为 $f_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{\mathrm{U}})$ 与 $f_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{i})$ 的乘积，其中 $i \in \mathcal{I}_{k-1}$，且 $\mathcal{I}_{k-1} = \{1, \ldots, I_{k-1}\}$。这里，$\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{\mathrm{U}}$ 是未检测目标的集合（建模为泊松点过程），$\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{i}$ 是已检测目标 i 的集合（每个目标均建模为伯努利）。$\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{\mathrm{U}}$ 的子集 $\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_{k-1}$ 和 $\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{i}$ 定义为

$$\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{\mathrm{U}} = \{(u, \mathbf{x}) \in \tilde{\mathcal{X}}_{k-1} : u = 0\}, \tag{41}$$

$$\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{i} = \{(u, \mathbf{x}) \in \tilde{\mathcal{X}}_{k-1} : u = i\}, \ i \in \mathcal{I}_{k-1}. \tag{42}$$

目标的集合密度具有式 (13)–(15) 的形式。

- 转移密度(40b)：这一行描述了转移密度，其中 $f(\mathbf{s}_k|\mathbf{s}_{k-1})$、$f(\tilde{\mathcal{X}}_k^{i}|\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{i})$ 和 $f^{\mathrm{P}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathrm{S}_k}|\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_{k-1})$ 分别对应传感器状态、先前检测到的目标和未检测目标。这里，$\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{S}_k$ 表示来自 $\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_{k-1}$ 的存活集合，它被建模为带辅助变量 $u = 0$ 的泊松点过程。带辅助变量的伯努利分量的转移密度为

$$f(\tilde{\mathcal{X}}_k|\tilde{\mathcal{Y}}_k) \tag{43}$$

$$= \begin{cases} p_{\mathrm{S}}(\mathbf{y}_k) f(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_k) \delta_{u_k'}[u_k], & \tilde{\mathcal{X}}_k = \{(u_k, \mathbf{x}_k)\}, \\ & \tilde{\mathcal{Y}}_k = \{(u_k', \mathbf{y}_k)\} \\ 1 - p_{\mathrm{S}}(\mathbf{y}_k), & \tilde{\mathcal{X}}_k = \emptyset, \\ & \tilde{\mathcal{Y}}_k = \{(u_k', \mathbf{y}_k)\} \\ 1, & \tilde{\mathcal{X}}_k = \emptyset, \tilde{\mathcal{Y}}_k = \emptyset \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

泊松点过程的转移密度为

$$f^{\mathrm{P}}(\tilde{\mathcal{X}}_k|\tilde{\mathcal{Y}}_k) \tag{44}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{\uplus_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{X}}_k^{i} = \tilde{\mathcal{X}}_k} \prod\limits_{i=1}^{n} f(\tilde{\mathcal{X}}_k^{i}|\{\tilde{\mathbf{y}}_k^{i}\}), & \tilde{\mathcal{Y}}_k = \{\tilde{\mathbf{y}}_k^{1}, \ldots, \tilde{\mathbf{y}}_k^{n}\} \\ 1, & \tilde{\mathcal{X}}_k = \emptyset, \tilde{\mathcal{Y}}_k = \emptyset \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

其中 $f(\tilde{\mathcal{X}}_k^{i}|\{\tilde{\mathbf{y}}_k^{i}\})$ 满足式 (43)，而 $\tilde{\mathbf{y}}_k^{i} = (0, \mathbf{y}_k^{i})$。

- 未检测目标 (40c)：最后一行描述了时刻 k 新生目标的集合密度，以 $f(\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{B}_k)$ 表示，其中 $\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{B}_k$ 表示一个服从泊松点过程的新生目标集合，而集合因子 $\delta_{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{S}} \uplus \tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{B}k}}(\tilde{\mathcal{P}}\mathrm{U}_k)$ 将存活目标集合 $\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{S}_k$ 和新生目标集合 $\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{B}_k$ 合并为集合 $\tilde{\mathcal{P}}\mathrm{U}_k$（另见定义 3）。$\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{B}k}$ 和 $\tilde{\mathcal{P}}\mathrm{U}_k$ 均具有辅助变量 $u = 0$。

利用式（40）中的因子化密度，我们绘制该因子。

用于预测的图，如图 5 所示（黄色区域）。这里我们使用以下符号表示因子节点:

$$f^A(\mathbf{s}_k,\mathbf{s}_{k-1}) \triangleq f(\mathbf{s}_k|\mathbf{s}_{k-1}), \tag{45a}$$
$$f^B(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{S}},\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{\mathrm{U}}) \triangleq f(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{S}}|\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^{\mathrm{U}}), \tag{45b}$$
$$f^C(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{B}}) \triangleq f^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{B}}) \tag{45c}$$
$$f^D(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{S}},\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{B}},\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}}) \triangleq \delta_{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{S}}\uplus\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{B}}}(\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}}), \tag{45d}$$
$$f_i^E(\tilde{\mathcal{X}}_k^i,\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^i) \triangleq f(\tilde{\mathcal{X}}_k^i|\tilde{\mathcal{X}}_{k-1}^i). \tag{45e}$$

我们通过运行所提出的集合型置信传播，计算图 5 中无环预测因子图上的消息。[2] 请注意，消息 2、6 和 8 等价于对 $\mathbf{s}_k$、$\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}}$ 和 $\tilde{\mathcal{X}}_k^{1:I_{k-1}}$ 进行预测时的边缘密度；这对应于标准 PMB 滤波器 [26], 的预测，可表示为 $f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k)$、$f_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}})$ 和 $f_{\mathrm{p}}^i(\tilde{\mathcal{X}}_k^i)$，其中 $i\in\mathcal{I}_{k-1}$。

C. 使用联合密度及其因子图进行更新

不失一般性，我们考虑预测步骤之后时刻 k 的更新步骤。更新中所有变量的联合密度为

$$f(\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}},\tilde{\mathcal{P}}_k^{1:J_k},\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}},\tilde{\mathcal{Y}}_k^{1:J_k},\tilde{\mathcal{X}}_k^{1:I_{k-1}},\mathbf{c}_k,\mathbf{d}_k|\mathcal{Z}_k)$$
$$\propto f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k)f_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}})\prod_{i\in\mathcal{I}_{k-1}} f_{\mathrm{p}}^i(\tilde{\mathcal{X}}_k^i) \tag{46a}$$
$$\times\,\delta_{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}\uplus_{j=1}^{J_k}\tilde{\mathcal{P}}_k^j}(\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}})\prod_{j\in\mathcal{J}_k}\psi(c_k^i,d_k^j)\delta_{\mathbf{h}_{-(I_{k-1}+j)}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^j)}(\tilde{\mathcal{P}}_k^j) \tag{46b}$$
$$\times\,\tilde{l}(\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{Y}}_k^j,d_k^j)t(\mathcal{Z}_k^i|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{X}}_k^i,c_k^i)[1-p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k,\cdot)]^{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}}. \tag{46c}$$

式 (46) 的证明是对 [28] 中附录 E 的扩展，且 [27], 可在附录 E 中找到。为完整起见，我们说明式 (46) 中每一行的含义如下。

- 时刻 $k-1$ 的预测（46a）：此行描述时刻步 k 的预测密度，相关讨论见 IV-B 节末尾。
- 一致性约束 (46b)：这一行确保引入的隐变量之间的一致性。在时间 k，给定一组测量 $\mathcal{Z}_k$，其索引集为 $\mathcal{J}_k=\{1,\dots,J_k\}$。我们引入数据关联变量 $\mathbf{c}_k\in\mathbb{N}^{I_{k-1}}$，$c_k^i\in\{0,\dots,J_k\}$ 和 $\mathbf{d}_k\in\mathbb{N}^{J_{k-1}}$，$d_k^j\in\{0,\dots,I_{k-1}\}$；在目标导向的数据关联中，$c_k^i=j$ 表示目标 i 与测量 j相关联，而 $c_k^i=0$ 表示目标 i 未被检测到。在测量导向的数据关联中，$d_k^j=i>0$ 表示测量 j 与目标 i相关联，而 $d_k^j=0$ 表示测量 j 来自一个从未被检测到的目标或杂波。特别地，我们引入了 $\Psi(\mathbf{c}_k,\mathbf{d}_k)=\prod_{i=1}^{I_{k-1}}\prod_{j=1}^{J_k}\psi(c_k^i,d_k^j)$，以确保 $\mathbf{c}_k$ 和 $\mathbf{d}_k$之间的相互一致性，其中当 $c_k^i=j,d_k^j\neq i$ 或 $c_k^i\neq j$，$d_k^j=i$ 时，$\psi(c_k^i,d_k^j)=0$，否则为 1。因子 $\delta_{\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_k\uplus_{j=1}^{J_k}\tilde{\mathcal{P}}_k^j}(\tilde{\mathcal{P}}\mathrm{U}_k)$ 将集合 $\tilde{\mathcal{P}}\mathrm{U}_k$划分为 J_k+1个集合，使得 $\tilde{\mathcal{P}}\mathrm{U}_k=\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_k\uplus_{j=1}^{J_k}\tilde{\mathcal{P}}_k^j$，其中，$\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_k$是仍未被检测到的目标集合（如似然部分中的 $[1-p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k,\cdot)]^{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}}$ 所示），而对于 $j\in\mathcal{J}_k$，$\tilde{\mathcal{P}}_k^j$表示在时刻 k首次被检测到的存活未检测目标或新生目标。因子 $\delta_{\mathbf{h}_{-(I_{k-1}+j)}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^j)}(\tilde{\mathcal{P}}_k^j)$（参见定义 5）将 $\tilde{\mathcal{P}}_k^j$的辅助变量从 0 转换为 $I_{k-1}+j$，从而将集合 $\tilde{\mathcal{P}}_k^j$转换为与测量 j产生的新检测到的目标（或杂波）相对应的集合 $\tilde{\mathcal{Y}}_k^j$。子集 $\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_k$、$\tilde{\mathcal{X}}_k^i$ 和 $\tilde{\mathcal{Y}}_k^j$ 定义如下。

$$\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}=\{(u,\mathbf{x})\in\tilde{\mathcal{X}}_k:u=0\}, \tag{47}$$
$$\tilde{\mathcal{X}}_k^i=\{(u,\mathbf{x})\in\tilde{\mathcal{X}}_k:u=i\},\ i\in\mathcal{I}_{k-1}, \tag{48}$$
$$\tilde{\mathcal{Y}}_k^j=\{(u,\mathbf{x})\in\tilde{\mathcal{X}}_k:u=I_{k-1}+j\},\ j\in\mathcal{J}_k. \tag{49}$$

- 集合似然（46c）：最后一行描述了在给定数据关联 $\mathbf{c}_k$（或等价地给定 $\mathbf{d}_k$）条件下的似然。因子 $\tilde{l}$（$\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{Y}}_k^j,d_k^j$）考虑潜在的新目标或杂波，而 t（$\mathcal{Z}_k^i|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{X}}_k^i,c_k^i$）考虑先前已检测目标的检测和漏检。两个似然定义如下。考虑第 j 个测量 $\mathbf{z}_k^j$ 与新检测到的目标或杂波相关联，并以测量导向的数据关联变量 d_k^j 为条件时的似然：$\tilde{l}$（$\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{Y}}_k{}^j,d_k^j$）为

$$\tilde{l}(\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{Y}}_k{}^j,d_k^j) \tag{50}$$
$$=\begin{cases} p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k,\mathbf{x}_k)g(\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k,\mathbf{x}_k)\delta_0[u_k], & \tilde{\mathcal{Y}}_k{}^j=\{(u_k,\mathbf{x}_k)\},\ d_k^j=0\\ c(\mathbf{z}_k), & \tilde{\mathcal{Y}}_k{}^j=\emptyset,\ d_k^j=0\\ 1, & \tilde{\mathcal{Y}}_k{}^j=\emptyset,\ d_k^j\neq 0\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这里，$p_{\mathrm{D}}(\cdot)$ 说明了目标可能被检测到这一事实，而 $c(\mathbf{z}_k)$ 表示杂波强度（当测量由杂波而非新检测到的目标生成时）。函数 $g(\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k,\mathbf{x}_k)$ 是经典似然函数。然后，似然 $t(\mathcal{Z}_k^i|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{X}}_k^i,c_k^i)$ 考虑集合 $\mathcal{Z}_k^i$ 与第 i 个先前已检测目标相关联，并以目标导向的数据关联变量 c_k^i 为条件时的情况:

$$t(\mathcal{Z}_k^i|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{X}}_k^i,c_k^i) \tag{51}$$
$$=\begin{cases} p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k,\mathbf{x}_k^i)g(\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k,\mathbf{x}_k^i)\delta_i[u_k], & \mathcal{Z}_k^i=\{\mathbf{z}_k^j\},\ c_k^i=j,\ \tilde{\mathcal{X}}_k^i=\{(u_k,\mathbf{x}_k^i)\}\\ (1-\mathrm{p}_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k,\mathbf{x}_k^i))\delta_i[u_k], & \mathcal{Z}_k^i=\emptyset,\ c_k^i=0,\ \tilde{\mathcal{X}}_k^i=\{(u_k,\mathbf{x}_k^i)\}\\ 1, & \mathcal{Z}_k^i=\emptyset,\ c_k^i=0,\ \tilde{\mathcal{X}}_k^i=\emptyset\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因子 $[1-p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k,\cdot)]^{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}}$ 描述了仍未被检测到的目标集合。

使用式 (46) 中的因子化密度，我们绘制了更新的因子图，如图 5（绿色区域）所示。这里我们

[2]此步骤是对第三节所介绍的消息传递规则的直接应用。为完整起见，补充材料的附录 F 中详细给出了这些消息。

因子节点采用以下记号：

$$f^F(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}},\tilde{\mathcal{P}}_k^1,\cdots,\tilde{\mathcal{P}}_k^{J_k}) \triangleq \delta_{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}\uplus_{j=1}^{J_k}\tilde{\mathcal{P}}_k^j}(\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}}), \tag{52a}$$

$$f_j^G(\tilde{\mathcal{P}}_k^j,\tilde{\mathcal{Y}}_k^j) \triangleq \delta_{\mathbf{h}_{-(I_{k-1}+j)}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^j)}(\tilde{\mathcal{P}}_k^j), \tag{52b}$$

$$f^H(\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}) \triangleq [1-p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k,\cdot)]^{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}}, \tag{52c}$$

$$f_j^I(\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{Y}}_k^j,d_k^j) \triangleq \tilde{l}(\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{Y}}_k^j,d_k^j), \tag{52d}$$

$$f_i^J(\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{X}}_k^i,c_k^i) \triangleq t(\mathcal{Z}_k^i|\mathbf{s}_k,\tilde{\mathcal{X}}_k^i,c_k^i), \tag{52e}$$

$$f_{i,j}^K(c_k^i,d_k^j) \triangleq \psi(c_k^i,d_k^j). \tag{52f}$$

我们通过运行所提出的集合型置信传播算法，计算图 5 中更新因子图上的消息和信念；该算法的详细内容见补充材料附录 F。消息不会沿时间反向传递。迭代消息传递仅用于数据关联步骤，而其他步骤只进行一次消息传递。最终，消息 27 表示时间步 k 结束时传感器状态的后验，22 表示未检测目标的泊松点过程后验，18 表示每个新检测到的目标对应的伯努利后验，20 表示每个先前检测到的目标对应的伯努利后验。创建连接时间步 k 与时间步 $k+1$ 的因子图时将使用这些后验。请注意，检测到的目标数量会随时间增加。

D. 连接预测与更新中的因子图

到目前为止，我们分别讨论了预测和更新因子图。现在，我们进一步说明这些因子图如何连接。预测中的因子图（见图 5 中的黄色部分）包含变量节点 $\mathrm{s}_k,\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}},\tilde{\mathcal{X}}_k^1,\ldots,\tilde{\mathcal{X}}_k^{I_{k-1}}$，而更新中的因子图（见图 5 中的绿色和紫色部分）包含变量 $\mathrm{s}_k,\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_k,\tilde{\mathcal{P}}_k^1,\ldots,\tilde{\mathcal{P}}_k^{J_k},\tilde{\mathcal{X}}_k^1,\ldots,\tilde{\mathcal{X}}_k^{I_{k-1}}$。我们注意到，变量 $\mathrm{s}_k,\tilde{\mathcal{X}}_k^1,\ldots,\tilde{\mathcal{X}}_k^{I_{k-1}}$ 是相同的。为了连接预测和更新因子图中的其他变量节点，我们可以使用合并与划分因子（见定义 3），以及针对新检测到的伯努利分量的辅助变量转换因子（见定义 5）。也就是说，我们首先采用因子 $f^F(\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}},\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_k,\tilde{\mathcal{P}}_k^1,\ldots,\tilde{\mathcal{P}}_k^{J_k})$，将集合 $\tilde{\mathcal{P}}_k^{\mathrm{U}}$ 划分为子集 $\tilde{\mathcal{X}}\mathrm{U}_k,\tilde{\mathcal{Y}}_k^1,\ldots,\tilde{\mathcal{Y}}_k^{J_k}$（所有辅助变量均为 0）。然后，对每个新检测到的伯努利分量应用辅助变量转换因子 $f_j^G(\tilde{\mathcal{P}}_k^j,\tilde{\mathcal{Y}}_k^j)$。考虑与集合因子 $f^F(\cdot)$ 和 $f_j^G(\cdot)$ 关联的集合变量（见图 5），可知集合变量 $\tilde{\mathcal{Y}}_k^j$ 和 $\mathcal{X}\mathrm{U}_k$ 分别服从参数为 $u=I_{k-1}+j$ 和 $u=0$ 的泊松过程。最后，预测和更新的因子图通过因子 ($f^A(\cdot)$、 $f^D(\cdot)$ 和 $f_i^E(\cdot)$) 及其关联变量连接起来。

注 2 (前一时刻平滑的因子图)。 图 *5* 展示了时刻 $k-1$ 和 k 的预测与更新步骤的因子图拼接结果。我们可以推导出一个联合预测与更新因子图（而非将两者拼接）。该因子图需要使用泊松多伯努利混合来表示时刻 $k-1$ 和 k *[42]* 之间的轨迹集 *[43]*。此外，该因子图还能使我们通过平滑推断时刻 $k-1$ 创建的伯努利在时刻 k 的状态。

注 3 （特殊情况与推广）。 因子分解（(40) 和 (46)）以及图 *5* 中相应的因子图，可以通过特化和推广来涵盖各种应用。一些特殊情况包括：

- 当目标没有机动性时，可得到建图与同步定位和建图；这对应于转移密度为 $f(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})=\delta(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k-1})$。
- 当传感器状态始终已知时，可得到建图与多目标跟踪（*MTT*），因此移除 $f_{\mathrm{u}}(\mathrm{s}_{k-1})$ 和 $f(\mathrm{s}_k|\mathrm{s}_{k-1})$，并且 $\boldsymbol{s}_{k-1}$ 和 $\boldsymbol{s}_k$ 不再作为顶点显式出现在因子图中（而是作为参数并入似然函数）。

注 4 （集合型置信传播多伯努利滤波器）。 要得到集合型置信传播多伯努利滤波器（无论是否带标签），我们采用与集合型置信传播泊松多伯努利混合滤波器相同的建模假设，但出生模型采用多伯努利而非泊松。随后，将泊松点过程的强度设为零，并在预测步骤 *[44]* 中加入出生过程的伯努利分量。相应的因子图与图 *5* 中的因子图等价，但移除了所有泊松点过程变量（$\mathcal{X}_{\mathrm{U}k-1}$、$\mathcal{X}_{\mathrm{S}k}$、$\mathcal{X}_{\mathrm{B}k}$、$\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}$、$\mathcal{P}_k^1$、...、$\mathcal{P}_k^{J_k}$、$\mathcal{X}_{\mathrm{U}k}$）、与之相连的因子（$f_{\mathrm{Uu}}$ f^B、f^C、f^D、f^F、f_1^G、...、$f_{J_k}^G$）以及新检测到的目标（$\mathcal{Y}_k^1$、...、$\mathcal{Y}_k^{J_k}$），同时在预测步骤中添加新的出生伯努利变量和因子。

注释 5 （集合型置信传播与其他随机有限集滤波器的结合使用）。 需要注意的是，集合型置信传播可用于推导基于计算目标边缘分布的随机有限集滤波器，例如 *PMB* 和多伯努利滤波器，适用于一般的测量模型和杂波模型，包括点目标与扩展目标共存的情形 *[45]*。它不适合推导概率假设密度滤波器和基数概率假设密度滤波器，因为这些滤波器不计算边缘分布，而是将后验近似为泊松点过程或独立同分布簇过程 *[22]*。集合型置信传播也不适合用于实现基于共轭先验的滤波器，例如 *PMBM* 和 δ*-GLMB* 滤波器。

E. 面向同步定位与建图的集合型置信传播 *PMB* 近似 *KLD* 最小化

假设先验为 PMB，则集合类型置信传播的预测可以用闭式形式表示。作为 PMBM 更新的直接应用， [28, 第 IV-B 节], , 更新后的密度为$\tilde{f}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{PMBM}}(\tilde{\mathcal{X}}_k|\mathbf{s}_k)f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k)$，其中 $\tilde{f}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{PMBM}}(\tilde{\mathcal{X}}_k|\mathbf{s}_k)$ 表示给定传感器状态 $\mathbf{s}_k$ 时，包含辅助变量的 PMBM，详见 [43, 第 III-A 节], , 其中 $\tilde{\mathcal{X}}_k=\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}\uplus\tilde{\mathcal{X}}_k^{1:I_{k-1}}\uplus\tilde{\mathcal{Y}}_k^{1:J_k}$（参见式（46））。

引理 1. s_k，$\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}$，$\tilde{\mathcal{X}}_k^i$，$\tilde{\mathcal{Y}}_k^j$ 的边缘分布构成一个 *PMB*，它是相应 *PMBM* 后验的最优近似，因为它最小化了 *Kullback–Leibler*散度（*KLD*）$D(\tilde{f}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{PMBM}}(\tilde{\mathcal{X}}_k|\mathbf{s}_k)f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k)\,||\tilde{q}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{PMB}}(\tilde{\mathcal{X}})q_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k))$。$\mathrm{s}_k$，$\tilde{\mathcal{X}}_{\mathrm{U}k}$，$\tilde{\mathcal{X}}_k^i$，$\tilde{\mathcal{Y}}_k^j$ 的边缘密度为

$$\tilde{q}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{PMB}}(\tilde{\mathcal{X}})=\tilde{q}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{U}})\prod_{i=1}^{n}\tilde{q}_{\mathrm{u}}^i(\tilde{\mathcal{X}}^i), \tag{53}$$

$$q_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k) = f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k), \tag{54}$$

$$q_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}) = \int f_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}|\mathbf{s}_k) f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k)\mathrm{d}\mathbf{s}_k, \tag{55}$$

$$q_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{X}}_k^{i}) = \int f_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{X}}_k^{i}|\mathbf{s}_k) f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k)\mathrm{d}\mathbf{s}_k, \tag{56}$$

$$q_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^{j}) = \int f_{\mathrm{u}}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^{j}|\mathbf{s}_k) f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k)\mathrm{d}\mathbf{s}_k. \tag{57}$$

收敛后，应用于(46) 的集合型置信传播通过生成因子图上受约束 *Bethe* 自由能的内部点，来近似这些边缘密度，见定理 *1*。

证明。 KLD 最小化的证明是对 [42], 中命题 1 的扩展，展示了该解的最优性。Bethe 自由能最小化则是定理 1 的结果。□

F. 探究关系：集合型与向量型 *BP PMB-SLAM* 滤波器

现在，我们揭示所提出的集合型置信传播滤波器与向量型置信传播滤波器 [13] 之间的联系。事实证明，所提出的集合型 BP PMB-SLAM 滤波器在算法上与向量型 BP-SLAM 滤波器 [13], 完全相同，仅存在细微差异。[3] 我们指出，关于向量型方法与基于随机有限集的方法之间的联系，已有部分讨论从目标密度表达和数据关联的角度展开，见 [9,第 XIII-A 节] 和 [28,第 IV-E 节]。

1) 先前检测到的目标： 所提出的集合型 BP-SLAM 滤波器中的伯努利密度可用状态$\mathbf{y} = [\mathbf{x}^\top, \epsilon]^\top$进行参数化，其中 ϵ 是存在变量：目标存在时 $\epsilon = 1$ ，目标不存在时 $\epsilon = 0$ 。向量表示下的伯努利密度为 $f(\mathbf{x}\ \epsilon) = f(\epsilon) f(\mathbf{x}|\epsilon)$，其中 $f(\mathbf{x}\ \epsilon = 1) = f(\{\mathbf{x}\})$，且$f(\mathbf{x}\ \epsilon = 0) = f(\emptyset)$。向量表示在理论上存在一个缺陷：它需要引入一个实际上并不存在的虚拟密度 $f(\mathbf{x}|\epsilon = 0)$，但这不会影响实际结果。采用相同的步骤，可以定义等价的条件密度（因子）以处理至多包含一个元素的集合。有鉴于此，我们可以用存在变量表示法写出图 5 中包含伯努利密度的因子图部分。对于涉及具有向量密度的变量（例如$\mathbf{s}_k$）的部分，表达起来也很直接。

2) 未检测目标：由于未检测目标服从 PPP 分布，因此，这部分因子图（包括因子f^B（用于预测）和因子 f^H（用于更新））无法用存在变量表示。因此，采用存在变量的类似因子图必须舍弃这部分信息来源。为弥补向量型 BP 中的信息损失，一种解决方案是使用外部概率假设密度滤波器对未检测特征建模，如 [13] 所示。外部概率假设密度滤波器的预测步骤旨在与图 5 中通过（预测）因子图得到的解相匹配。

[3]请注意， [12] 中的向量型 BP-SLAM 滤波器提到了使用外部概率假设密度滤波器的可能性，但并未详细说明，因此我们重点将其与 [13], 进行比较，因为后者明确描述了外部概率假设密度滤波器。

3) 新检测到的目标：在更新过程中，可使用外部概率假设密度滤波器描述新检测到的伯努利分布。为将该概率假设密度滤波器与因子图关联起来，参考文献 [13] 要求直接对新检测特征的密度进行建模。该密度对应于概率假设密度滤波器的预测强度乘以检测概率，并在 [13,式（16）]中归一化为积分为一。

4) 检测概率：向量型 BP SLAM 要求未检测目标的检测概率不依赖于传感器状态，即 $p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k, \mathbf{x}_k) = p_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}_k)$，如 [13]所示。之所以有此要求，是因为若 $p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k, \mathbf{x}_k)$ 依赖于 $\mathbf{s}_k$ 和 $\mathbf{x}_k$，则检测概率应成为连接每个新检测到的特征与传感器状态的因子的一部分，如图 5 所示。对此，可在向量型置信传播中定义未检测特征的密度（即归一化的 PHD 强度），然后在因子中考虑 $p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k, \mathbf{x}_k)$，如图 5 所示。

5) 传感器状态更新：还需要指出，尽管 [12], [13] 中的因子图考虑了从传感器状态发往新检测到特征的消息，但传感器状态的置信分布更新方程中并未包含这些消息，见 [12, 式 (37)]和 [13, 第 III-G 节]。 [12], [13] 中也未考虑从新检测到的特征发往传感器状态的消息所对应的方程。修正这些方程后，即可得到一种向量型 BP-SLAM 算法，其形式类似于本文提出的集合型 BP-SLAM 算法。

6) 推导： 同样需要注意的是，本文提供了基于随机有限集从第一性原理出发，对 [13] 中获得的（略作修改的）向量型 BP-SLAM 算法的另一种推导。也就是说，向量型 BP-SLAM 假设了单个特征动力学、单个特征消亡、传感器动力学和量测模型，但不包含特征出生。相反，假设在当前时间步，我们已知先前特征的多伯努利密度以及新检测特征的多伯努利密度。随后构建因子图。之后，可以在基于向量的同步定位与建图中使用外部概率假设密度滤波器来对未检测特征进行建模。

相反，集合型 BP PMB-SLAM 的推导如下。我们需要建立特征出生、单特征动力学、单特征消亡、传感器动力学和测量的模型，这与贝叶斯多目标跟踪算法类似。然后，使用辅助变量得到相应的因子图，再使用集合型置信传播求解该因子图。所得算法经过上述少量修改后，与 [13] 中采用外部概率假设密度滤波器的向量型置信传播 SLAM 类似。用存在变量表示每个伯努利分量，可以更清楚地看出二者之间的联系。这表明，经过上述少量修改后，采用外部概率假设密度滤波器的向量型置信传播 SLAM 算法可以从随机有限集理论推导得出，这对相关文献而言是一项重要成果。还值得注意的是，我们提出的集合型置信传播多伯努利-SLAM 算法也可以用存在变量表示。

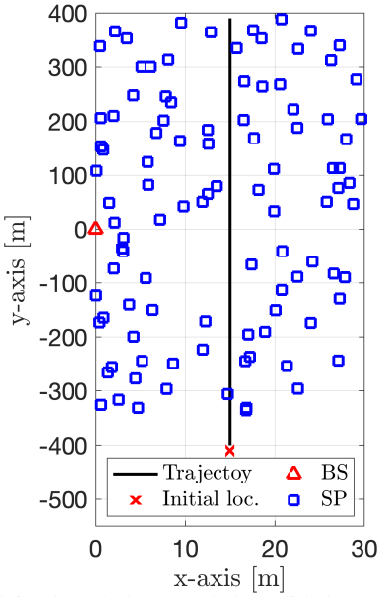


图 6：双基地无线电同步定位与建图场景，其中均匀分布着 176 个散射点。单个基站发射信号，传感器接收两种类型的测量：基站-传感器；以及基站-散射点-传感器。

V. 数值结果

本节将所提出的集合型置信传播 PMB-SLAM 和置信传播多伯努利 SLAM 滤波器分别简称为 SBP-PMB-SLAM 和 SBP-MB-SLAM，并与置信传播 SLAM [13]，（简称 VBP-SLAM1）进行比较。请注意，如第 IV-F 节所述，经过少量修改的向量型置信传播 SLAM 滤波器 [12], [13] （简称 VBP-SLAM2）与 SBP-PMB-SLAM 等效。我们介绍用于评估 SLAM 滤波器的仿真设置，随后讨论仿真结果。

A. 仿真设置

1) 传感器与地标：我们考虑双基地无线电同步定位与建图的传播环境，其中单个基站（BS）发送导频信号，散射点（SP）（即地标）均匀分布，如图 6 所示。单个传感器可以接收两类测量：一类来自基站—传感器路径；另一类来自基站—散射点—传感器路径。我们将基站和散射点 j 的位置分别记为 $\mathbf{x}_{\mathrm{BS}}$ 和 $\mathbf{x}^{j}{}_{\mathrm{SP}}$。时刻 k 的传感器状态记为 $\mathbf{s}_k = [\mathbf{x}_{k,s}^{\top}, \dot{\mathbf{x}}_{k,s}^{\top}]^{\top}$，其中 $\mathbf{x}_{k,s} = [x_{k,s}, y_{k,s}]^{\top}$ 表示位置，而 $\dot{\mathbf{x}}_{k,s} = [\dot{x}_{k,s}, \dot{y}_{k,s}]^{\top}$ 表示速度。

2) 动力学：对于传感器在 K 个时间步内的动力学，我们采用匀速运动模型[46,第 6.3 节2]，其已知转移密度为 $f(\mathbf{s}_k|\mathbf{s}_{k-1})$，且传感器状态的演化遵循

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{F}\mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{q}_k, \tag{58}$$

$\mathbf{F}$ 和$\mathbf{B}$定义为 [46, 第 6.3 节2]

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2\times 2} & \Delta t\mathbf{I}_{2\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{I}_{2\times 2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5\Delta t^2\mathbf{I}_{2\times 2} \\ \Delta t\mathbf{I}_{2\times 2} \end{bmatrix}. \tag{59}$$

这里，Δt 是采样时间，$\mathbf{q}_k$ 是驱动过程，服从协方差矩阵为 ance matrix $\sigma_w^2\mathbf{I}_{2\times 2}$的零均值高斯分布，其中 σ_w 是标准差，$\mathbf{I}_{2\times 2}$ 是 2×2 单位矩阵。

参数设置如下：$K = 80$ 个时间步，$\sigma_w = 0.1$ 米/秒^2，和 $\Delta t = 0.5$ 秒。传感器状态的先验概率密度设为 $f(\mathrm{s}_0) = \mathrm{N}(\mathrm{s}_0; \mathrm{s}^{0|0}, \mathrm{P}^{0|0})$，其中每次仿真运行中，$\mathrm{s}^{0|0}$均从 $\mathrm{N}(\mathrm{s}^{-}_0, \mathrm{P}^{0|0})$ 中采样。这里，s^{-}是初始传感器状态的真实值，单位为米、米、米/秒和米/秒；$\mathrm{P}^{0|0} = \mathrm{blkdiag}[0.5\mathrm{I}_{2\times 2}, 0.005\mathrm{I}_{2\times 2}]$，且 P 对角项的单位为米^2, 、米^2, 、米/秒^{2}和米/秒^2, 。

3) 测量：传感器获取测量集$\mathcal{Z}_k = \{\mathbf{z}_k^0, \mathbf{z}_k^1, \ldots\ldots, \mathbf{z}_k^{J_k}\}$，其中$\mathbf{z}_k^0$和$\mathbf{z}_k^j$分别是对应于 $j > 0$ 基站和不同散射点的测量。令$\mathbf{t}_k^j = [(\mathbf{x}^{j}{}_{\mathrm{SP}})^{\top}, \mathbf{x}_{k,s}^{\top}]^{\top}$ 为散射点位置$\mathbf{x}^{j}{}_{\mathrm{SP}}$与传感器位置$\mathbf{x}_{k,s}$组成的增广向量。在基站位置已知的情况下，$j > 0$对应的测量$\mathbf{z}_k^0$ 和$\mathbf{z}_k^j$ 建模为

$$\mathbf{z}_k^0 = \mathbf{x}_{k,s} + \mathbf{r}_k, \tag{60}$$

$$\mathbf{z}_k^j = \mathbf{H}\mathbf{t}_k^j + \mathbf{r}_k. \tag{61}$$

这里$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_{2\times 2}, -\mathbf{I}_{2\times 2}]$，而$\mathbf{r}_k$ 是测量噪声，服从协方差为$\sigma_r^2\mathbf{I}_{2\times 2}$的零均值高斯分布，其中 σ_r 为标准差。我们将虚警和短暂可见的散射点视为杂波，并将其建模为$\mathbf{z}_k^{\mathrm{C}} \in \mathcal{Z}_k$。传感器观测到的杂波测量数量服从均值为$\mu_{\mathrm{c}}$ [42]的泊松分布，杂波强度表示为 $c(\mathbf{z})$。

参数设置如下：感兴趣区域内为 $\mu_{\mathrm{c}} = 1$, $c(\mathbf{z}) = 1.6\cdot 10^{-4}$，且为 $\sigma_r = 0.707$ m。网络中均匀分布的 SP 数量记为 N_{SP}。网络尺寸为 $[0, 30]$ m $\times[-400, 470]$ m，$N_{\mathrm{SP}} = 176$，基站位置为 $\mathbf{x}_{\mathrm{BS}} = [0, 0]^{\top}$。传感器的视场由以下因素决定：

$$p_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k, \mathbf{x}_k) = \begin{cases} p_{\mathrm{D}} & \|\mathbf{x}_k - \mathbf{s}_k\| < r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{62}$$

其中 $r = 20$ m 且 $p_{\mathrm{D}} = 0.95$。从 $k = 5$ 开始即可观测到地标，之后的每个时间步都可能观测到其他地标。在这两种场景下进行传感器定位时，采用来自$k = 5$的多径；而对于 $k < 5$，则利用基站—传感器路径的测量。[4]

4) SLAM 滤波器：为研究新检测到的地标对传感器状态更新的影响，我们考虑 K 个时间步和两种场景：一种采用无信息出生模型，另一种则在对未检测地标建模时采用信息性出生模型。在现实环境中，无信息出生模型代表缺乏先验地图知识的情形，而信息性出生模型则假设我们已有可用地图。

SBP-PMB-同步定位与建图和 VBP-PMB1 [13] 中的未检测地标及出生均通过泊松点过程进行建模，并由强度函数实现。未检测地标的强度大小规律-

[4]通过椭球门控方法 [47], , 确定基站—传感器路径的测量为 $\hat{}\mathbf{z} = \min^{\mathbf{z}_k^j \in \mathcal{Z}_k}(\mathbf{z}_k^j - \mathbf{x}_{\mathrm{BS}})^{\top}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z}_k^j - \mathbf{x}_{\mathrm{BS}})$。

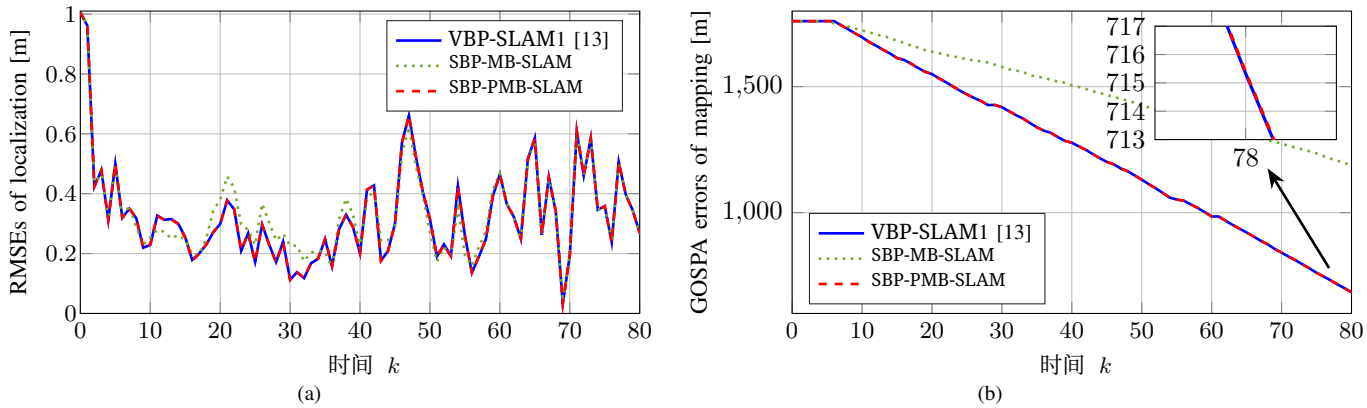


图 7：无信息出生情形。比较所提出的集合型 BP PMB-SLAM SBP-PMB-SLAM（即 VBP-SLAM2）与 VBP-SLAM1 [13] 以及 SBP-MB-SLAM：（a）传感器定位的均方根误差；（b）地标建图的 GOSPA 误差。

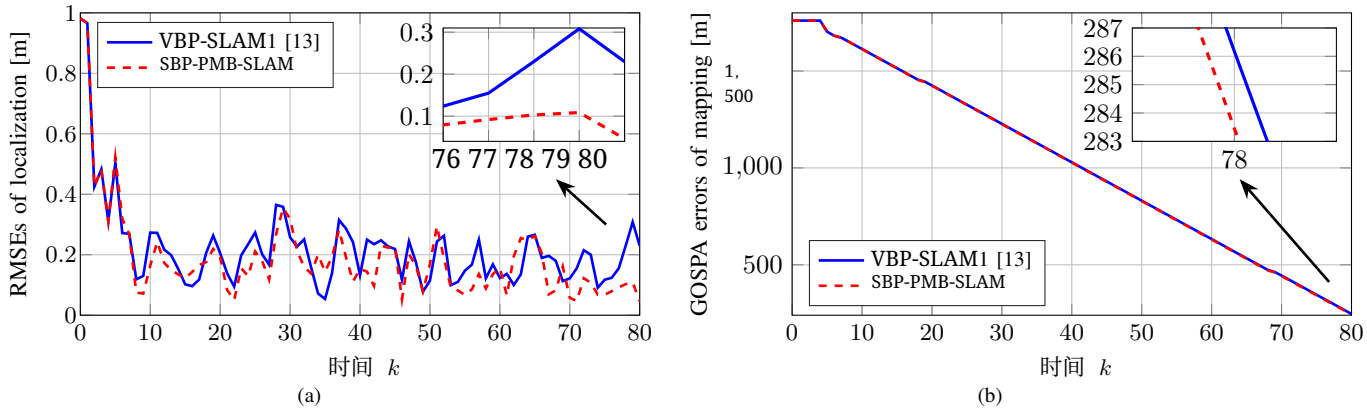


图 8：信息性出生情形。比较所提出的 SBP-PMB-SLAM（即 VBP-SLAM2）与 VBP-SLAM1 [13]：(a) 传感器定位的均方根误差和 (b) 地标建图的 GOSPA 误差。SBP-MB-SLAM 的性能与 SBP-PMB-SLAM 相同，因此省略相关图表。

已检测目标和出生分别表示为 $\lambda(\mathrm{x}) = \sum_q \eta^q \mathrm{N}(\mathrm{x}; \mathrm{x}^q, \mathrm{U}^q)$ 和 $\lambda^{\mathrm{B}}(\mathrm{x}) = \sum_q \eta^{\mathrm{B},q} \mathrm{N}(\mathrm{x}; \mathrm{x}^{\mathrm{B},q}, \mathrm{U}^{\mathrm{B},q})$，其中 $\mathrm{N}(\mathrm{x}; \mathrm{x}, \mathrm{U})$ 表示高斯密度，η 表示高斯权重。对于 SBP-MB-SLAM，出生由 MB 过程建模。MB 出生密度采用式 (11) 的形式，其中第 q 个伯努利分量具有存在概率 $r^{\mathrm{B},q}$，以及高斯密度 $\mathrm{N}(\mathrm{x}; \mathrm{x}^{\mathrm{B},q}, \mathrm{U}^{\mathrm{B},q})$。对于信息性出生情形，我们将出生数量设置为新检测到的地标数量，即 $\mathrm{x}^{\mathrm{B},q} \sim \mathrm{N}(\mathrm{x}; \mathrm{x}^{j(q)}$ SP $, \mathrm{U}^{\mathrm{B},q})$，$\eta^{\mathrm{B},q} = 1$，并采用较小的高斯协方差 $\mathrm{U}^{\mathrm{B},q} = 0.01\mathrm{I}_{2\times 2}$，其中 $j(q)$ 表示与第 q 个高斯分布对应的 SP 索引。对于无信息出生情形，我们将出生的高斯分布数量设置为与测量数量相同，出生权重设为 $\eta^{\mathrm{B},q} = 10^{-3}$，并采用较大的高斯协方差 $\mathrm{U}^{\mathrm{B},q} = 10^6 \times \mathrm{I}_{2\times 2}$。

使用卡尔曼滤波器 [48]，我们实现了与地标和数据关联对应的消息和信念。由于卡尔曼滤波器无法处理 27 的传感器状态的置信分布，因此使用粒子滤波器 [4][49]，以 N_{P} 个样本实现。每个时间步完成信念计算后，当 $r^i_{k|k} > \Gamma_{\mathrm{D}}$ 时，我们判定检测到了一个地标。移除先前检测到的、具有 $r^i_{k|k} < \Gamma_{\mathrm{Ber}}$ 且对应于 $i = 1, \ldots, I_{k-1} + J_k$ 的地标，并消除 PPP 中具有 $\eta^q_{k|k} < \Gamma_{\mathrm{Poi}}$ 的高斯分布。

其余算法参数设置如下：$N_p = 10^4$，$\Gamma_{\mathrm{D}} = 0.4$；$\Gamma_{\mathrm{Ber}} = 10^{-5}$；$\Gamma_{\mathrm{Poi}} = 5 \cdot 10^{-10}$；$p_{\mathrm{S}} = 0.99$. 仿真结果取 500 次蒙特卡罗试验的平均值。传感器定位和地标映射的性能分别通过均方根误差（RMSE）和广义最优子模式分配（GOSPA） [50, 公式 (1)] 进行评估，参数分别为 $\mathrm{G}_p = 1$、$\mathrm{G}_c = 2$ 和 $\mathrm{G}_\alpha = 2$。

B. 结果与讨论

1) 无信息出生：图 7 展示了在 SBP-PMB-SLAM 中未检测地标的泊松点过程和出生，以及在 SBP-MB-SLAM 中出生的多伯努利均为无信息时，SLAM 性能随时间的变化。在 $K = 80$期间，尽管采用了消息 23 进行传感器置信分布计算，SBP-PMB-SLAM 的 SLAM 性能仍与 VBP-BP-SLAM滤波器相同。这是因为，与对应于先前检测到的地标的消息 20 相比，对应于新检测到的地标或杂波的消息 23 提供的信息较少。SBP-MB-SLAM 滤波器的制图性能低于另外两个滤波器。这是因为多伯努利出生模型中的伯努利集合数量有限，其中的

表 I：信息性出生情形：不同 N_{SP} 和 μ_c下的传感器定位均方根误差及建图 GOSPA 误差。

			VBP- 同步定位与建图1 [13]	SBP-PMB-SLAM
均方根误差 [m]	$N_{\mathrm{SP}} = 176$	$\mu_c = 1$	0.1651	0.1306
		$\mu_c = 5$	0.1881	0.1334
		$\mu_c = 10$	0.2014	0.1401
	$N_{\mathrm{SP}} = 352$	$\mu_c = 1$	0.1321	0.1125
		$\mu_c = 5$	0.1361	0.1137
		$\mu_c = 10$	0.1559	0.1195
GOSPA 误差 [m]	$N_{\mathrm{SP}} = 176$	$\mu_c = 1$	638.48	636.42
		$\mu_c = 5$	979.74	977.31
		$\mu_c = 10$	1162.34	1160.52
	$N_{\mathrm{SP}} = 352$	$\mu_c = 1$	622.52	620.99
		$\mu_c = 5$	794.65	793.17
		$\mu_c = 10$	881.29	880.04

每个都可用于对单个地标建模，而后续泊松点过程对应的集合则捕获多个地标。

2) 信息性出生：图 8 展示了在 SBP-PMB-SLAM 中未检测地标和出生对应的 PPP，以及在 SBP-MB-SLAM 中 MB 出生均具有信息性的情形下，SLAM 性能随时间的变化情况。使用具有信息性的 PPP 时，与 VBP-SLAM1 相比，集合型 BP PMB-SLAM SBP-PMB-SLAM 的性能有所提升。这是因为出现了新的地标，且未检测地标对应的 PPP 具有信息性。传感器定位间隙清晰可见，并且从 $k = 5$ 开始确定地标，因为地标从 $k = 5$ 开始变得可观测。由于每个时间步都会出现新检测到的地标，因此 GOSPA 的差距会随着时间步的增加而增大。我们发现，SBP-MB-SLAM 的性能与 SBP-PMB-SLAM 完全相同，因此省略了相关结果。这是因为消息中杂波部分的占比远小于新检测到的地标部分，并且在信息性出生情形下，SBP-MB-SLAM 中 MB 出生的实现方式与 SBP-PMB-SLAM 中的实现方式等效。 23 [5]

表 I 分别列出了不同设置下传感器定位的均方根误差和地标映射的广义最优子模式分配误差： $\mu_c = 1$ with $c(\mathbf{z}) = 1.6 \cdot 10^{-4}$, $\mu_c = 5$ with $c(\mathbf{z}) = 8 \cdot 10^{-4}$, and $\mu_c = 10$ with $c(\mathbf{z}) = 1.6 \cdot 10^{-3}$, for $N_{\mathrm{SP}} = 176$, $N_{\mathrm{SP}} = 352$。结果是对 $k > 40$之后稳态运行期间所有蒙特卡洛仿真运行的结果取平均所得。表 I 显示，随着杂波泊松均值 μ_c 增大（$\mu_c = 1, \mu_c = 5, \mu_c = 10$），两种方法的性能都逐渐下降。与 with $N_{\mathrm{D}} = 2$ 相比，采用 $N_{\mathrm{D}} = 4$ 时的传感器定位精度有所提高。这一提升归因于传感器定位精度会随着映射精度或检测到的目标数量增加而提高。SBP-PMB-SLAM 与 VBP-SLAM1 之间的性能差距源于在传感器状态更新中使用了新检测到的目标。

VI. 结论

本文提出了集合型置信传播的一般框架，可作为计算随机有限集边缘分布（或其近似密度）的基础工具。基于该框架，我们推导出采用所提出的集合型置信传播的 PMB 和多伯努利滤波器，适用于建图、多目标跟踪、同步定位与建图以及同步定位与跟踪等相关问题。在服从伯努利过程的密度条件下，我们证明了向量型置信传播是集合型置信传播的一种特殊情形。为处理因子图中未知的集合基数，我们针对集合划分、集合合并以及集合辅助变量移位，提出了集合因子节点。我们将所提出的集合型置信传播应用于 PMB-SLAM 滤波器，并探讨了集合型置信传播 PMB 与向量型 BP-SLAM [12][13] 滤波器之间的关系。结果表明，在为未检测地标采用信息性泊松点过程的情况下，所提出的集合型 BP-SLAM 滤波器（以及等价的向量型 BP 算法）优于向量型 BP；而在采用非信息性泊松点过程时，两者性能相当。通过采用各种启发式方法，可以轻松修改向量型 BP，使其性能和运行方式与集合型置信传播相匹配。

集合型置信传播还可应用于其他领域，包括平滑（通过按时间逆序计算消息实现）、扩展目标（每个目标都可能生成一个测量集合）、协同处理（通过连接与两个不同传感器相关的因子图实现）、一般的目标生成测量和任意杂波，以及定位（通过添加与环境中固定锚点相关的因子实现）。集合型置信传播框架应用于其他类别的随机有限集滤波器及其对应的置信传播方法，值得进一步研究。最后，我们希望所提出的框架能够应用于建图和跟踪以外领域的问题。

附录 A 定理 1 的证明

我们以与向量型置信传播定理 2] 类似的方式证明定理 1。 [3,

证明。 利用式 (20) 和 (21) 中的集合置信分布，我们引入 Bethe 自由能 [3]: $F_{\mathrm{Bethe}} = U_{\mathrm{Bethe}} - H_{\mathrm{Bethe}}$，其中$U_{\mathrm{Bethe}}$ 为 Bethe 平均能量，定义为[6]

$$U_{\mathrm{Bethe}} = -\sum_a \int \mathfrak{b}(\underline{\mathcal{X}}^a) \ln f_a(\underline{\mathcal{X}}^a) \delta \underline{\mathcal{X}}^a, \tag{63}$$

且 H_{Bethe} 是 Bethe 熵，定义如下:

$$H_{\mathrm{Bethe}} = -\sum_a \int \mathfrak{b}(\underline{\mathcal{X}}^a) \ln \mathfrak{b}(\underline{\mathcal{X}}^a) \delta \underline{\mathcal{X}}^a + \sum_i (|\mathcal{M}(i)| - 1) \int \mathfrak{b}(\mathcal{X}^i) \ln \mathfrak{b}(\mathcal{X}^i) \delta \mathcal{X}^i. \tag{64}$$

Bethe 自由能、平均能量和熵的约束都是集合信念的函数，具体如下。归一化约束为$\int \mathfrak{b}(\mathcal{X}^i)\delta\mathcal{X}^i = 1$对所有集合变量 i 成立， $\int \mathfrak{b}(\mathcal{X}^a)\delta\mathcal{X}^a = 1$对所有满足 $|\mathcal{M}(i)| \geq 2$的集合因子 a 成立。边缘化约束为 $\int \mathfrak{b}(\mathcal{X}^a)\delta\mathcal{X}^{\sim i} = \mathfrak{b}(\mathcal{X}^i)$, 其中 $i \in \mathcal{N}(a)$。不等式约束为 $0 \leq \mathfrak{b}(\mathcal{X}^a) \leq 1$ 对所有集合因子 a 成立，且 $0 \leq \mathfrak{b}(\mathcal{X}^i) \leq 1$ 对所有集合变量 i成立。由于

[6]由于标准集合积分和密度 [22,（第 3.2 节）4]的单位，集合积分（如 $\int \mathfrak{b}(\mathcal{X}) \ln \mathfrak{b}(\mathcal{X})\delta\mathcal{X}$和 $\int \mathfrak{b}(\mathcal{X}) \ln f(\mathcal{X})\delta\mathcal{X}$）需要使用测度论积分 [51],。从这个意义上说，积分为 $\int \mathfrak{b}(\mathcal{X}) \ln(K^{|\mathcal{X}|}\mathfrak{b}(\mathcal{X}))\delta\mathcal{X}$和 $\int \mathfrak{b}(\mathcal{X}) \ln(K^{|\mathcal{X}|}f(\mathcal{X}))\delta\mathcal{X}$，其中 K是单个状态$\mathbf{x} \in \mathcal{X}$超体积的单位。为简化记号，我们在积分中省略单位 $K^{|\mathcal{X}|}$。

[5]该消息由两部分组成：杂波和新检测到的地标。

根据内部驻点假设，不等式约束将处于非活跃状态。因此，我们用拉格朗日乘子施加等式约束，分别记为 γ_a、 γ_i和 $\lambda_{a,\ i}(\mathcal{X}^i)$，并将拉格朗日函数写作

$$
\begin{aligned}
L = &- \sum_a \int \mathfrak{b}(\underline{\mathcal{X}}^a) \ln f_a(\underline{\mathcal{X}}^a) \delta \underline{\mathcal{X}}^a \\
&+ \sum_a \int \mathfrak{b}(\underline{\mathcal{X}}^a) \ln \mathfrak{b}(\underline{\mathcal{X}}^a) \delta \underline{\mathcal{X}}^a \\
&- \sum_i (|\mathcal{M}(i)| - 1) \int \mathfrak{b}(\mathcal{X}^i) \ln \mathfrak{b}(\mathcal{X}^i) \delta \mathcal{X}^i \\
&+ \sum_a \gamma_a (\int \mathfrak{b}(\underline{\mathcal{X}}^a) \delta \underline{\mathcal{X}}^a - 1) + \sum_i \gamma_i (\int \mathfrak{b}(\mathcal{X}^i) \delta \mathcal{X}^i - 1) \\
&+ \sum_i \sum_{a \in \mathcal{M}(i)} \int \lambda_{a,i}(\mathcal{X}^i) (\mathfrak{b}(\mathcal{X}^i) - \int \mathfrak{b}(\underline{\mathcal{X}}^a) \delta \mathcal{X}^{\sim i}) \delta \mathcal{X}^i .
\end{aligned} \tag{65}
$$

根据拉格朗日函数对 $\mathfrak{b}(\mathcal{X}^a)$ 和 $\mathfrak{b}(\mathcal{X}^i)$ 的导数，我们可以得到如下内部驻点：

$$
\hat{\mathfrak{b}}(\mathcal{X}^i) = \frac{1}{Z_i} \exp\Big(\frac{1}{|\mathcal{M}(i)| - 1} \sum_{a \in \mathcal{M}(i)} \lambda_{a,i}(\mathcal{X}^i) \Big), \tag{66}
$$

$$
\hat{\mathfrak{b}}(\underline{\mathcal{X}}^a) = \frac{1}{Z_a} f_a(\underline{\mathcal{X}}^a) \exp\Big(\sum_{i \in \mathcal{N}(a)} \lambda_{a,i}(\mathcal{X}^i) \Big), \tag{67}
$$

其中， Z_a 和 Z_i 是归一化常数。令

$$
\lambda_{a,i}(\mathcal{X}^i) = \ln n_{i \to a}(\mathcal{X}^i) = \ln \prod_{b \in \mathcal{M}(i) \setminus \{a\}} m_{b \to i}(\mathcal{X}^i), \tag{68}
$$

并将 (68) 代入 (66) 和 (67)，即可得到 (20) 和 (21) 的集合型 BP 固定点，如下所示：

$$
\hat{\mathfrak{b}}(\mathcal{X}^i) \propto \prod_{a \in \mathcal{M}(i)} \mathfrak{m}_{a \to i}(\mathcal{X}^i), \tag{69}
$$

$$
\hat{\mathfrak{b}}(\underline{\mathcal{X}}^a) \propto f_a(\underline{\mathcal{X}}^a) \prod_{i \in \mathcal{N}(a)} \prod_{b \in \mathcal{M}(i) \setminus \{a\}} \mathfrak{m}_{b \to i}(\mathcal{X}^j). \tag{70}
$$

为了反向证明该定理，我们引入 $\mathfrak{m}_{a \to i}$

$$
\mathfrak{m}_{a \to i} = \exp\left(\frac{2 - |\mathcal{M}(i)|}{|\mathcal{M}(i)| - 1} \lambda_{a,i}(\mathcal{X}^i) + \frac{1}{|\mathcal{M}(i)| - 1} \lambda_{b,i}(\mathcal{X}^i) \right), \tag{71}
$$

其中 $\lambda_{b,\ i}(\mathcal{X}^i) = \ln\ n_{i \to b}(\mathcal{X}^i)$，可由 (68) 以及 (18) 和 (19) 的集合消息更新规则得到。将 (68) 中的 $\prod_{b \in \mathcal{M}(i) \setminus \{a\}} \mathfrak{m}_{b \to i}$ 和 (71) 中的 $\mathfrak{m}_{a \to i}$ 代入 (20) 和 (21) 的集合型 BP 固定点，即可证明该定理的逆命题。

在拉格朗日函数中，我们省略了一个只与单个因子相连的变量（即 $|\mathcal{M}(i)| = 1$），称为死端变量，因为死端变量不会对 Bethe 自由能和信念产生贡献。虽然不需要计算死端变量处的信念，但可以按需根据置信分布 $\int \mathfrak{b}(\mathcal{X}^a) \delta \mathcal{X}^{\sim i}$ 轻松计算得出。

□

附录 B 推论 1 的证明

我们通过证明在无环因子图中运行集合型置信传播后得到的集合信念 $\mathfrak{b}(\mathcal{X}^i)$ 对应于 $\mathcal{X}^i$ 的边缘概率密度，来证明推论 1。

证明。注意，当 $|\mathcal{N}(a)| = 1$ 时，$\mathfrak{m}_{a \to i}(\mathcal{X}^i) = f_a(\mathcal{X}^a)$。根据链式法则以及公式 (18) 和 (19)，公式 (18) 中的集合信念 $\mathfrak{b}(\mathcal{X}^i)$ 可表示为所有集合因子 $f_a(\mathcal{X}^a)$ 乘积的积分。它对应于公式 (16) 中的 $\int f(\mathcal{X}^1, \ldots, \mathcal{X}^n) \delta \mathcal{X}^{\sim i}$。 □

附录 C 命题 1 的证明

我们利用定义 3 的划分与合并因子证明命题 1。

证明。 然后，利用定义 3 的划分与合并因子，我们可以将泊松集 $\mathcal{X}^j$ 与输入泊松消息 $\mathfrak{n}_{j \to a}(\mathcal{X}^j)$划分为 $|\mathcal{N}(a)| - 1$ 个泊松集 $\mathcal{X}^i$，其对应的泊松输出消息为 $\mathfrak{m}_{a \to i}(\mathcal{X}^i)$，其中 $i \in \mathcal{N}(a) \setminus \{j\}$。假设我们有输入消息 $\mathfrak{n}_{j \to a}(\mathcal{X}^j) = f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{X}^j)$，其服从 PPP 密度 $\mathfrak{n}_{q \to a}(\mathcal{X}^q) = 1$，其中 $q \in \mathcal{N}(a) \setminus \{j, i\}$。由 (26) 可得，从 $f_a(\mathcal{X}^a)$到 $\mathcal{X}^i$、对应于 $i \in \mathcal{N}(a) \setminus \{j\}$ 的划分消息为

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{m}_{a \to i}(\mathcal{X}^i) &= \int \mathfrak{n}_{j \to a}(\uplus_{q \in \mathcal{N}(a) \setminus \{j\}} \mathcal{X}^q) \delta \mathcal{X}^{\sim i} && (72) \\
&= \int \mathfrak{n}_{j \to a}(\mathcal{X}^i \uplus \mathcal{X}) \delta \mathcal{X} && (73) \\
&\propto f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{X}^i), && (74)
\end{aligned}
$$

相同的 PPP 强度函数。这表明，泊松集被划分为多个具有相同 PPP 强度函数的泊松集，推导见附录 D。

反过来，带有输入泊松消息 $\mathfrak{n}_{i \to a}(\mathcal{X}^i)$、对应于 $i \in \mathcal{N}(a)$ 的 $|\mathcal{N}(a)| - 1$ 泊松集合 $\mathcal{X}^i$，会合并为一个带有泊松输出消息 $\mathfrak{m}_{a \to j}(\mathcal{X}^j)$ 的泊松集 $\mathcal{X}^j$。假设我们有输入消息 $\mathfrak{n}_{i \to a}(\mathcal{X}^i) = f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{X}^i)$，对应于 $i \in \mathcal{N}(a)$ 的 $\setminus \{j\}$，且这些消息服从 PPP 密度。(30) 式的消息为

$$
\mathfrak{m}_{a \to j}(\mathcal{X}^j) = \sum_{\uplus_{i \in \mathcal{N}(a) \setminus \{j\}} \mathcal{W}^i = \mathcal{X}^j} \prod_{i \in \mathcal{N}(a) \setminus \{j\}} f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{W}^i). \tag{75}
$$

这表明，输出消息是所有输入 PPP 消息的卷积，表示多个泊松集的并集。

□

附录 D 泊松集划分的证明

由式 (9) 可得 $f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{X}) = e^{-\bar{\lambda}} \prod_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \lambda(\mathbf{x})$ 和 $\bar{\lambda} = \int \lambda(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}$，因此式 (72) 可表示为

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{m}_{a \to i}(\mathcal{X}^i) && (76) \\
&= \int e^{-\bar{\lambda}} \prod_{q \in \mathcal{N}(a) \setminus \{j\}} \prod_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^q} \lambda(\mathbf{x}) \delta \mathcal{X}^{\sim i} && (77) \\
&\propto e^{-\bar{\lambda}} \prod_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^i} \lambda(\mathbf{x}) \prod_{q \in \mathcal{N}(a) \setminus \{j\}} \int e^{-\bar{\lambda}} \prod_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^q} \lambda(\mathbf{x}) \delta \mathcal{X}^{\sim (i,j)} && (78)
\end{aligned}
$$

$$= e^{-\bar{\lambda}} \prod_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}^i} \lambda(\mathbf{x}) = f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{X}^i). \tag{79}$$

最后，我们得到 $\mathrm{m}_{a\to i}(\mathcal{X}^i) \propto f^{\mathrm{PPP}}(\mathcal{X}^i)$。

附录 E 联合更新密度

我们通过引入 $\mathcal{X}_k^1 \uplus \cdots \uplus \mathcal{X}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{X}_k^{I_{k-1}}$、$\mathcal{Z}_k^1 \uplus \cdots \uplus \mathcal{Z}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{Z}_k^{I_{k-1}}$ 和 $\mathcal{Y}_k^1 \uplus \cdots \uplus \mathcal{Y}_k^{J_k} = \mathcal{Y}_k^{J_k}$，证明式 (46) 的联合更新密度。我们从时间步 k 的先验开始（不含辅助变量），使得

$$f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_k) = f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k) f_{\mathrm{p}}(\mathcal{X}_k) \tag{80}$$

$$= f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k) \sum_{\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{X}}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{X}_k} f_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}) \prod_{i=1}^{I_{k-1}} f_{\mathrm{p}}^i(\mathcal{X}_k^i), \tag{81}$$

其中，先验假设传感器状态与目标集合相互独立。在时间步 k 接收到的测量集合为 $\mathcal{Z}_k = \{z_k^1, ..., z_k^{J_k}\}$。

A. 似然

对于任意满足 $|\mathcal{X}_k^i| \leq 1$ 的集合 $\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}$，$\mathcal{X}_k^1$，.....，$\mathcal{X}_k^{I_{k-1}}$，其中 $i = 1$，.....，I_{k-1}，我们引入似然函数 [27, 式 (25)]

$$l_o(\mathcal{Z}_k | \mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}, \mathcal{X}_k^1, ..., \mathcal{X}_k^{I_{k-1}}, \mathbf{s}_k)$$
$$= \sum_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{Z}}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{Z}_k} l(\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}} | \mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}, \mathbf{s}_k) \prod_{i=1}^{I_{k-1}} t(\mathcal{Z}_k^i | \mathcal{X}_k^i, \mathbf{s}_k), \tag{82}$$

其中，$\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}$ 表示一个测量集，其中包含由 $\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}$中的目标和杂波共同生成的测量元素；$t(\mathcal{Z}_k^i|\mathcal{X}_k^i)$表示在不存在杂波的情况下，包含零个或一个测量元素的集合的似然，定义如下：

$$t(\mathcal{Z}_k^i | \mathcal{X}_k^i, \mathbf{s}_k)$$
$$= \begin{cases} p_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k) l(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k), & \mathcal{Z}_k^i = \{\mathbf{z}_k\}, \mathcal{X}_k^i = \{\mathbf{x}_k\} \\ 1 - p_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k), & \mathcal{Z}_k^i = \emptyset, \mathcal{X}_k^i = \{\mathbf{x}_k\} \\ 1, & \mathcal{Z}_k^i = \emptyset, \mathcal{X}_k^i = \emptyset \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{83}$$

此外，我们知道，对于 $\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}} = \mathcal{X}_k^{\mathrm{U}} \uplus \mathcal{Y}_k^1 \uplus \cdots \uplus \mathcal{Y}_k^{J_k}$，多目标似然满足

$$l(\mathcal{Z}_k | \mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}, \mathbf{s}_k) = l_o(\mathcal{Z}_k | \mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}, \mathcal{Y}_k^1, \ldots, \mathcal{Y}_k^{J_k}, \mathbf{s}_k). \tag{84}$$

B. 后验

由 [27,公式 (34)], 可得后验密度。

$$f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_k) \propto l(\mathcal{Z}_k | \mathcal{X}_k, \mathbf{s}_k) f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_k) \tag{85}$$
$$= f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k) \sum_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{Z}}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{Z}_k} \sum_{\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{X}}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{X}_k} l(\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}} | \mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}, \mathbf{s}_k) f_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})$$
$$\times \prod_{i=1}^{I_{k-1}} t(\mathcal{Z}_k^i | \mathcal{X}_k^i, \mathbf{s}_k) f_{\mathrm{p}}^i(\mathcal{X}_k^i) \tag{86}$$

$$= f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k) \sum_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{Z}}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{Z}_k} \sum_{\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{X}}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{X}_k} \sum_{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{Y}}_k^{J_k} = \mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}}$$
$$\times f_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}) [1 - p_{\mathrm{D}}(\cdot, \mathbf{s}_k)]^{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}}$$
$$\times \prod_{j=1}^{J_k} \left[\chi_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}}(\mathbf{z}_k^j) \tilde{l}(\mathbf{z}_k^j | \mathcal{Y}_k^j, \mathbf{s}_k) f_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\mathcal{Y}_k^j) \right.$$
$$\left. + (1 - \chi_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}}(\mathbf{z}_k^j)) \delta_{\emptyset}(\mathcal{Y}_k^j) \right] \prod_{i=1}^{I_{k-1}} t(\mathcal{Z}_k^i | \mathcal{X}_k^i, \mathbf{s}_k) f_{\mathrm{p}}^i(\mathcal{X}_k^i), \tag{87}$$

其中，$\chi_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}}(\mathbf{z}_k^j)$ 的定义为：若 $\mathbf{z}_k^j \in \mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}$，则取值为 1；否则取值为 0。将最后两个卷积求和合并为一个，得到

$$f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_k)$$
$$\propto f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k) \sum_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{Z}}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{Z}_k} \sum_{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{Y}}_k^{J_k} \uplus \overline{\mathcal{X}}_k^{I_{k-1}} = \mathcal{X}_k} f_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}})$$
$$\times [1 - p_{\mathrm{D}}(\cdot, \mathbf{s}_k)]^{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}} \prod_{j=1}^{J_k} \left[\chi_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}}(\mathbf{z}_k^j) \tilde{l}(\mathbf{z}_k^j | \mathcal{Y}_k^j, \mathbf{s}_k) f_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\mathcal{Y}_k^j) \right.$$
$$\left. + (1 - \chi_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}}(\mathbf{z}_k^j)) \delta_{\emptyset}(\mathcal{Y}_k^j) \right] \prod_{i=1}^{I_{k-1}} t(\mathcal{Z}_k^i | \mathcal{X}_k^i, \mathbf{s}_k) f_{\mathrm{p}}^i(\mathcal{X}_k^i). \tag{88}$$

现在，我们可以为先前的目标 $\mathcal{X}_k^1$、.....、$\mathcal{X}_k^{I_{k-1}}$ 以及新检测到的目标$\mathcal{Y}_k^1$、.....、$\mathcal{Y}_k^{J_k}$添加辅助变量。新检测到的目标的辅助变量将从 $I_{k-1}+1$开始。于是，我们有

$$\tilde{f}_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k, \tilde{\mathcal{X}}_k) \propto f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}) \sum_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}} \uplus \overline{\mathcal{Z}}_k^{I_{k-1}} = Z_k} \tilde{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}) [1 - p_{\mathrm{D}}(\cdot, \mathbf{s}_k)]^{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}}$$
$$\times \prod_{j=1}^{J_k} \left[\chi_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}}(\mathbf{z}_k^j) \tilde{l}(\mathbf{z}_k^j | \tilde{\mathcal{Y}}_k^j, \mathbf{s}_k) \tilde{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^j) \right.$$
$$\left. + (1 - \chi_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}}(\mathbf{z}_k^j)) \delta_{\emptyset}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^j) \right]$$
$$\times \prod_{i=1}^{I_{k-1}} t(\mathcal{Z}_k^i | \tilde{\mathcal{X}}_k^i, \mathbf{s}_k) \tilde{f}_{\mathrm{p}}^i(\tilde{\mathcal{X}}_k^i). \tag{89}$$

通过联合考虑（46b）中引入的数据关联$\mathbf{c}_k$ 和$\mathbf{d}_k$ ，我们可以引入测量集如下：

$$\mathcal{Z}_k^i = \begin{cases} \{\mathbf{z}_k^{c_k^i}\} & c_k^i > 0 \\ \emptyset & c_k^i = 0 \end{cases}, \tag{90}$$

$$\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}} = \{\mathbf{z}_k^j : d_k^j = 0\}. \tag{91}$$

借助式 (46b) 中引入的关联函数 $\psi(\mathbf{c}_k^i, \mathbf{d}_k^j)$，我们可以将式 (89) 改写为

$$\tilde{f}_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k, \tilde{\mathcal{X}}_k) \propto f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}) \sum_{\mathbf{c}_k, \mathbf{d}_k} \tilde{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}) [1 - p_{\mathrm{D}}(\cdot, \mathbf{s}_k)]^{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}} \tag{92}$$
$$\times \prod_{j=1}^{J_k} \left[\chi_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}}(\mathbf{z}_k^j) \tilde{l}(\mathbf{z}_k^j | \tilde{\mathcal{Y}}_k^j, \mathbf{s}_k, d_k^j) \tilde{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^j) \right.$$
$$\left. + (1 - \chi_{\mathcal{Z}_k^{\mathrm{U}}}(\mathbf{z}_k^j)) \delta_{\emptyset}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^j) \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{I_{k-1}} t(\mathcal{Z}_k^i|\tilde{\mathcal{X}}_k^i, \mathbf{s}_k, c_k^i) \tilde{f}_{\mathrm{p}}^i(\tilde{\mathcal{X}}_k^i),$$

其中，$\tilde{l}(\mathbf{z}_k^j|\tilde{\mathcal{Y}}_k^j, \mathbf{s}_k, d_k^j)$ 和 $t(\mathcal{Z}_k^i|\tilde{\mathcal{X}}_k^i, \mathbf{s}_k, c_k^i)$ 分别在式 (50) 和 (51) 中定义。现在，我们将后验中的关联变量 $\mathbf{c}_k$ 和 $\mathbf{d}_k$ 显式写出，以定义该密度。于是，我们可以将联合更新密度定义为

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k, \tilde{\mathcal{X}}_k, \mathbf{c}_k, \mathbf{d}_k) \propto & f_{\mathrm{p}}(\mathbf{s}_k) \tilde{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}) [1 - p_{\mathrm{D}}(\cdot, \mathbf{s}_k)]^{\tilde{\mathcal{X}}_k^{\mathrm{U}}} \\ & \times \prod_{j=1}^{J_k} \tilde{l}(\mathbf{z}_k^j|\tilde{\mathcal{Y}}_k^j, \mathbf{s}_k, d_k^j) \tilde{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{U}}(\tilde{\mathcal{Y}}_k^j) \\ & \times \prod_{i=1}^{I_{k-1}} t(\mathcal{Z}_k^i|\tilde{\mathcal{X}}_k^i, \mathbf{s}_k, c_k^i) \tilde{f}_{\mathrm{p}}^i(\tilde{\mathcal{X}}_k^i) \psi(c_k^i, d_k^j),\end{aligned} \tag{93}$$

参考文献

[1] F. R. Kschischang、B. J. Frey 和 H.-A. Loeliger，“因子图与和积算法”，*IEEE*信息论汇刊，第47卷，第2期，498–519页，2001年2月。[2] H.-A. Loeliger，“因子图简介”，*IEEE*信号处理杂志，第21卷，第1期，28–41页，2004年1月。[3] J. S. Yedidia、W. T. Freeman 和 Y. Weiss，“构造自由能近似与广义置信传播算法”，*IEEE*信息论汇刊，第51卷，第7期，2282–2312页，2005年7月。[4] H. Wymeersch，《迭代接收机设计》。剑桥大学出版社，2007年。[5] A. Ihler、J. Fisher、R. Moses 和 A. Willsky，“用于传感器网络自校准的非参数置信传播”，*IEEE*通信特选领域期刊，第23卷，第4期，809–819页，2005年4月。[6] H. Wymeersch、J. Lien 和 M. Z. Win，“无线网络中的协作定位”，*IEEE*会议录，第97卷，第2期，427–450页，2009年2月。[7] C. Rhodes、C. Liu 和 W.-H. Chen，“使用高斯置信传播进行可扩展的概率气体分布建图”，载于*2022*年*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议（*IROS*），日本京都，2022年10月，第9459–9466页。[8] F. Meyer、P. Braca、P. Willett 和 F. Hlawatsch，“一种使用多个传感器跟踪未知数量目标的可扩展算法”，*IEEE*信号处理汇刊，第65卷，第13期，3478–3493页，2017年7月。[9] F. Meyer、T. Kropfreiter、J. L. Williams、R. Lau、F. Hlawatsch、P. Braca 和 M. Z. Win，“用于可扩展多目标跟踪的消息传递算法”，*IEEE*会议录，第106卷，第2期，221–259页，2018年2月。[10] H. Wymeersch、N. Garcia、H. Kim、G. Seco-Granados、S. Kim、F. Wen 和 M. Fr¨ohle，“5G毫米波下行链路车辆定位”，载于*IEEE*全球通信大会（*GLOBECOM*）会议录，阿联酋阿布扎比，2018年12月，第206–212页。[11] H. Kim、H. Wymeersch、N. Garcia、G. Seco-Granados 和 S. Kim，“5G毫米波车辆跟踪”，载于*IEEE*第*52*届阿西洛马会议：信号、系统与计算会议录，美国加利福尼亚州太平洋丛林，2018年10月，第541–547页。[12] E. Leitinger、F. Meyer、F. Hlawatsch、K. Witrisal、F. Tufvesson 和 M. Z. Win，“一种基于多径的同步定位与建图置信传播算法”，*IEEE*无线通信汇刊，第18卷，第12期，5613–5629页，2019年9月。[13] E. Leitinger、S. Grebien 和 K. Witrisal，“利用到达角和幅度信息的基于多径的同步定位与建图”，载于*IEEE*国际通信会议研讨会会议录（*ICC Workshops*），中国上海，2019年5月。[14] E. Leitinger、A. Venus、B. Teague 和 F. Meyer，“基于多径的同步定位与建图中的数据融合：结合多条传播路径的信息”，*IEEE*信号处理汇刊，第71卷，2023年9月。[15] F. Meyer、O. Hlinka、H. Wymeersch、E. Riegler 和 F. Hlawatsch，“包含非合作对象的移动网络分布式定位与跟踪”，*IEEE*信号与信息处理网络汇刊，第2卷，第1期，57–71页，2015年3月。[16] A. Stentz、D. Fox 和 M. Montemerlo，“FastSLAM：同时定位与建图问题的一种因子分解解法”，载于全国人工智能会议录，2002年，第593–598页。[17] G. Grisetti、R. K¨ummerle、C. Stachniss 和 W. Burgard，“基于图的同步定位与建图教程”，*IEEE*智能交通系统杂志，第2卷，第4期，31–43页，2010年。[18] H. Durrant-Whyte 和 T. Bailey，“同时定位与建图：第一部分”，*IEEE*机器人与自动化杂志，第13卷，第2期，99–110页，2006年6月。

[19] T. Bailey 和 H. Durrant-Whyte，“同时定位与建图（SLAM）：第二部分”，IEEE机器人与自动化杂志，第13卷，第3期，第108–117页，2006年9月。[20] R. C. Smith 和 P. Cheeseman，“空间不确定性的表示与估计”，国际机器人研究期刊，第5卷，第4期，第56–68页，1986年。[21] R. Mahler，《统计多源多目标信息融合》。美国马萨诸塞州诺伍德：Artech House，2007年。[22] ——，《统计多源多目标信息融合进展》。Artech House，2014年。[23] ——，“基于一阶多目标矩的多目标贝叶斯滤波”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第39卷，第4期，第1152–1178页，2003年10月。[24] H. Kim、K. Granstr¨om、L. Gao、G. Battistelli、S. Kim 和 H. Wymeer-sch，“利用多模型PHD进行5G毫米波协同定位与地图构建”，IEEE无线通信汇刊，第19卷，第6期，第3782–3795页，2020年3月。[25] A. F. Garcia-Fernandez 和 B.-N. Vo，“基于直接Kullback–Leibler散度最小化推导PHD和CPHD滤波器”，IEEE信号处理汇刊，第63卷，第21期，第5812–5820页，2015年11月。[26] J. L. Williams，“边缘多伯努利滤波器：MHT、JIPDA和基于关联的多伯努利滤波器的RFS推导”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第51卷，第3期，第1664–1687页，2015年7月。[27] ´A. F. Garc´ıa-Fern´andez、J. L. Williams、K. Granstr¨om 和 L. Svensson，“泊松多伯努利混合滤波器：直接推导与实现”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第54卷，第4期，第1883–1901页，2018年8月。[28] H. Kim、K. Granstrom、L. Svensson、S. Kim 和 H. Wymeersch，“5G毫米波车载网络中的基于泊松多伯努利混合的SLAM滤波器”，IEEE车辆技术汇刊，第71卷，第8期，第8646–8661页，2022年8月。[29] M. Fr¨ohle、C. Lindberg、K. Granstr¨om 和 H. Wymeersch，“用于目标与传感器状态联合跟踪的多传感器泊松多伯努利滤波器”，IEEE智能车辆汇刊，第4卷，第4期，第609–621页，2019年12月。[30] D. Moratuwage、M. Adams 和 F. Inostroza，“*δ*-广义标记多伯努利同时定位与建图”，载于《国际控制、自动化与信息科学会议》（ICCAIS），韩国平昌，2018年10月，第175–182页。[31] ——，“利用最优核粒子滤波方法实现的*δ*-广义标记多伯努利同时定位与建图”，《传感器》，第19卷，第10期，2019年5月。[32] H. Deusch，“高度自动化车辆的基于随机有限集的定位与SLAM”，博士学位论文，driveU/乌尔姆大学测量、控制与微技术研究所，德国，2015年。[33] H. Deusch、S. Reuter 和 K. Dietmayer，“标记多伯努利SLAM滤波器”，IEEE信号处理快报，第22卷，第10期，第1561–1565页，2015年10月。[34] B.-T. Vo 和 B.-N. Vo，“标记随机有限集与多目标共轭先验”，IEEE信号处理汇刊，第61卷，第13期，第3460–3475页，2013年7月。[35] Y. Ge、O. Kaltiokallio、H. Kim、F. Jiang、J. Talvitie、M. Valkama、L. Svensson、S. Kim 和 H. Wymeersch，“用于双基地毫米波无线电SLAM的计算高效的扩展卡尔曼泊松多伯努利混合滤波器”，IEEE通信特选领域期刊，2022年7月。[36] P. Horridge 和 S. Maskell，“利用概率假设密度滤波器在多目标环境中确认航迹”，载于《传感器数据融合研讨会论文集》，德国柏林，2011年10月，第1103–1110页。[37] J. L. Williams，“混合泊松与多伯努利滤波器”，载于《国际信息融合会议论文集》，新加坡，2012年7月，第1103–1110页。[38] S. Coraluppi 和 C. A. Carthel，“树林中树倒下时确实会发出声响：带有未检测目标出生的多假设跟踪”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第50卷，第3期，第2379–2388页，2014年7月。[39] Y. Xia、 ´A. F. Garc´ıa-Fern´andez、F. Meyer、J. L. Williams、K. Granstr¨om 和 L. Svensson，“利用置信传播进行扩展目标跟踪的轨迹泊松多伯努利滤波器”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，2023年。[40] K. G. Murthy，“一种按代价递增顺序排列所有分配方案的算法”，《运筹学》，第16卷，第3期，第682–687页，1968年。[41] M. A. Armstrong，《基础拓扑学》。施普林格科学与商业媒体，2013年。[42] ´A. F. Garc´ıa-Fern´andez、L. Svensson、J. L. Williams、Y. Xia 和 K. Granstr¨om，“轨迹泊松多伯努利滤波器”，IEEE信号处理汇刊，第68卷，第4933–4945页，2020年8月。[43] ´A. F. Garc´ıa-Fern´andez、L. Svensson 和 M. R. Morelande，“基于轨迹集的多目标跟踪”，IEEE航空航天与电子系统汇刊，第56卷，第3期，第1685–1707页，2019年6月。

[44] ´A. F. Garc´ıa-Fern´andez、Y. Xia、K. Granstr¨om、L. Svensson 和 J. L. Williams，“多伯努利混合滤波器的高斯实现”，载于第*22*届国际信息融合会议（*FUSION*），加拿大渥太华，2019年7月，第1–8页。[45] ´A. F. Garc´ıa-Fern´andez、Y. Xia 和 L. Svensson，“具有一般目标生成测量和任意杂波的泊松多伯努利混合滤波器”，*IEEE*信号处理汇刊，第71卷，2023年，第1895–1906页。[46] Y. Bar-Shalom、X. R. Li 和 T. Kirubarajan，面向跟踪与导航应用的估计：理论、算法与软件。美国新泽西州霍博肯：Wiley，2002年。[47] K. Panta、B.-N. Vo 和 S. Singh，“概率假设密度滤波器的新型数据关联方案”，*IEEE*航空航天与电子系统汇刊，第43卷，第2期，第556–570页，2007年4月。[48] S. S¨arkk¨a，贝叶斯滤波与平滑。剑桥大学出版社，2013年。[49] M. S. Arulampalam、S. Maskell、N. Gordon 和 T. Clapp，“用于在线非线性/非高斯贝叶斯跟踪的粒子滤波器教程”，*IEEE*信号处理汇刊，第50卷，第2期，第174–188页，2002年2月。[50] A. S. Rahmathullah、A. F. Garc´ıa Fern´andez 和 L. Svensson，“广义最优子模式分配度量”，载于第*20*届国际信息融合会议论文集（*FUSION*），中国西安，2017年7月，第1–8页。[51] H. G. Hoang、B.-N. Vo、B.-T. Vo 和 R. Mahler，“泊松点过程的柯西–施瓦茨散度”，*IEEE*信息论汇刊，第61卷，第8期，第4475–4485页，2015年8月。



Hyowon Kim 于2021年获得韩国首尔汉阳大学电子工程系博士学位。目前，他是韩国大田忠南国立大学电子工程系助理教授。2021年至2023年，他在瑞典查尔姆斯理工大学电气工程系担任玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里学者／博士后研究员。他曾是查尔姆斯理工大学电气工程系的访问研究员，查尔姆斯理工大学，

2019年至2020年，他在瑞典。他的主要研究兴趣包括5G及Beyond 5G通信系统中的无线通信和集成感知/定位/通信。



´Angel F. Garc´ıa-Fern´andez 分别于2007年和2011年获得马德里理工大学（西班牙马德里）的电信工程学位和博士学位。他目前是英国利物浦利物浦大学电气工程与电子学系的高级讲师。他曾在马德里理工大学、瑞典哥德堡的查尔姆斯理工大学、澳大利亚珀斯的科廷大学以及芬兰埃斯波的阿尔托大学担任博士后职位。他的

其主要研究活动和兴趣集中在贝叶斯推断领域，尤其关注动态系统和多目标跟踪。



Yu Ge （S’20）于2017年获得中国杭州浙江大学工学学士学位，并于2019年获得瑞典斯德哥尔摩瑞典皇家理工学院理学硕士学位。他目前是瑞典查尔姆斯理工大学电气与工程系的博士生。其研究兴趣包括集成通信与感知、无线定位系统、同时定位与建图以及多物体跟踪，尤其关注5G和超越5G场景。



Yuxuan Xia 于2017年和2022年分别获得瑞典哥德堡查尔姆斯理工大学通信工程理学硕士学位和信号处理博士学位。获得博士学位后，他留在同一研究组担任博士后研究员一年。目前，他是瑞典哥德堡Zenseact AB的产业博士后研究员，同时隶属于瑞典林雪平大学自动控制系。他的主要研究兴趣包括传感器融合，

多物体跟踪和同步定位与建图，尤其是汽车应用。



Lennart Svensson （M’09-SM’10）是查尔姆斯理工大学的信号处理教授。他的主要研究兴趣包括机器学习和贝叶斯推断，尤其是非线性滤波、深度学习和跟踪。他组织了一门关于多目标跟踪的大规模开放在线课程，可在 edX 和 YouTube 上学习；并于2009年、2010年、2017年和2019年获得国际信息融合会议的论文奖。



Henk Wymeersch （S’01, M’05, SM’19, F’24）于2005年在比利时根特大学获得电气工程/应用科学博士学位。目前，他是瑞典查尔姆斯理工大学电气工程系的通信系统教授。加入查尔姆斯理工大学之前，他于2005年至2009年在麻省理工学院信息与决策系统实验室担任博士后研究员。Wymeersch教授曾担任副编辑，

IEEE通信快报（2009—2013年）、IEEE无线通信汇刊（自2013年起）以及IEEE通信汇刊（2016—2018年）的编委，目前是IEEE信号处理杂志编委会的高级会员。2019—2021年间，他曾担任IEEE车辆技术学会杰出演讲人。他目前的研究兴趣包括在5G和5G演进背景下通信与感知的融合。

适用于泊松多伯努利同步定位与建图的集合型信念传播：补充材料

附录 F 集合型置信传播消息与信念

因子图（图 5）上的消息和信念按如下方式计算。

A. 预测

预测步骤与前一时间步的更新步骤级联，此时我们有一个传感器状态向量和$I_{k-1}+1$ 个集合：1 表示从未被检测到的未检测目标； I_{k-1} 表示之前已被检测到的目标。

1) 传感器：我们计算传感器状态预测密度的消息。传感器变量的置信分布$\mathbf{s}_{k-1}$ 记为 $\mathbf{b}(\mathbf{s}_{k-1})$，由前一时间步的消息 27 得到。

1 A message from the the sensor variable $\mathbf{s}_{k-1}$ to linked factor A, i.e., $f^{A}(\mathbf{s}_k,\mathbf{s}_{k-1})=f(\mathbf{s}_k|\mathbf{s}_{k-1})$, is denoted by $\mathbf{n}_{\mathbf{s}_{k-1}\to A}(\mathbf{s}_{k-1})$, and $\mathbf{n}_{\mathbf{s}_{k-1}\to A}(\mathbf{s}_{k-1})=\mathbf{b}(\mathbf{s}_{k-1})$.

2 从因子 A 传递到变量$\mathbf{s}_k$ 的消息记为 $\mathbf{m}^{A\to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k)$，其表达式为

$$\mathbf{m}_{A\to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k)=\int \mathbf{n}_{\mathbf{s}_{k-1}\to A}(\mathbf{s}_{k-1})f(\mathbf{s}_k|\mathbf{s}_{k-1})\mathrm{d}\mathbf{s}_{k-1}. \tag{S1}$$

2）未检测目标：未检测目标要么仍然未被检测到，要么首次被检测到。因此，我们计算未检测目标和新检测目标的预测密度消息。未检测目标集合 $\mathcal{X}_{k-1}^{\mathrm{U}}$ 的置信分布记为 $\mathbf{b}(\mathcal{X}_{k-1}^{\mathrm{U}})$，由上一时刻的消息 22 得到。

3 从集合变量 $\mathcal{X}_{k-1}^{\mathrm{U}}$ 到相连因子 B 的消息，即 $f^{B}(\mathcal{X}_{\mathrm{S}k},\ \mathcal{X}_{\mathrm{U}k-1})=f(\mathcal{X}_{\mathrm{S}k}|\mathcal{X}_{\mathrm{U}k-1})$，记为 $\mathbf{n}^{\mathsf{X}_{k-1}^{\mathrm{U}}\to B}(\mathcal{X}_{k-1}^{\mathrm{U}})=\mathbf{b}(\mathcal{X}_{k-1}^{\mathrm{U}})$，其服从 PPP分布。

4 从因子 B 到 $\mathcal{X}_k^{\mathrm{S}}$ 的消息记为 $\mathbf{m}^{B\to \mathsf{X}_k^{\mathrm{S}}}(\mathcal{X}_{\mathrm{S}k})$，其表达式为

$$\mathbf{m}_{B\to \mathsf{X}_k^{\mathrm{S}}}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{S}})=\int \mathbf{n}_{\mathsf{X}_{k-1}^{\mathrm{U}}\to B}(\mathcal{X}_{k-1}^{\mathrm{U}})f(\mathcal{X}_k^{\mathrm{S}}|\mathcal{X}_{k-1}^{\mathrm{U}})\delta\mathcal{X}_{k-1}^{\mathrm{U}}, \tag{S2}$$

其服从 PPP分布。

5 从 $\mathcal{X}_k^{\mathrm{S}}$ 和 $\mathcal{X}_k^{\mathrm{B}}$ 到相连因子 D 的消息，即 $f^{D}(\mathcal{X}_{\mathrm{S}k},\ \mathcal{X}_{\mathrm{B}k},\ \mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})=\delta_{\mathcal{X}_k^{\mathrm{S}}\uplus\mathcal{X}^{\mathrm{B}k}}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})$，分别记为 $\mathbf{n}^{\mathsf{X}_k^{\mathrm{S}}\to D}(\mathcal{X}_{\mathrm{S}k})$ 和 $\mathbf{n}^{\mathsf{X}_k^{\mathrm{B}}\to D}(\mathcal{X}_{\mathrm{B}k})$，其中 $\mathbf{n}^{\mathsf{X}_k^{\mathrm{B}}\to D}(\mathcal{X}_{\mathrm{B}k})=f^{C}(\mathcal{X}_{\mathrm{B}k})=f_{\mathrm{Poi}}(\mathcal{X}_{\mathrm{B}k})$ 服从 PPP分布。

6 从因子 D 到 $\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}$ 的消息记为 $\mathbf{m}^{D\to \mathsf{P}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})$，其表达式为

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{D\to \mathsf{P}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})=&\iint \mathbf{n}_{\mathsf{P}_k^{\mathrm{S}}\to D}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{S}})\mathbf{n}_{\mathsf{X}_k^{\mathrm{B}}\to D}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{B}})\\&\times\delta_{\mathcal{X}_k^{\mathrm{S}}\uplus\mathcal{X}_k^{\mathrm{B}}}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})\delta\mathcal{X}_k^{\mathrm{S}}\delta\mathcal{X}_k^{\mathrm{B}},\end{aligned} \tag{S3}$$

其服从PPP分布。

3) 先前检测到的目标：我们计算先前检测到的目标的预测密度消息。对于 $i=\{1,\dots,I_{k-1}\}$，先前检测到的目标集合变量 $\mathcal{X}_{k-1}^{i}$ 的信念记为 $\mathbf{b}(\mathcal{X}_{k-1}^{i})$，由前一时间步的消息 20 得到。

7 Messages from the set-variable $\mathcal{X}_{k-1}^{i}$ to the the linked factors E^{i}, i.e., $f_i^{E}(\mathcal{X}_k^{i},\mathcal{X}_{k-1}^{i})=f(\mathcal{X}_k^{i}|\mathcal{X}_{k-1}^{i})$, are denoted by $\mathbf{n}_{\mathsf{X}_{k-1}^{i}\to E^{i}}(\mathcal{X}_{k-1}^{i})$, and $\mathbf{n}_{\mathsf{X}_{k-1}^{i}\to E^{i}}(\mathcal{X}_{k-1}^{i})=\mathbf{b}(\mathcal{X}_{k-1}^{i})$ for $i\in\mathcal{I}_{k-1}$.

8 条来自智能体的消息，E发送至 ith detected set-variables $\mathcal{X}_k^{i}$，记为 $\mathbf{m}_{E^{i}\to \mathsf{X}_k^{i}}(\mathcal{X}_k^{i})$，由下式给出。

$$\mathbf{m}_{E^{i}\to \mathsf{X}_k^{i}}(\mathcal{X}_k^{i})=\int \mathbf{n}_{\mathsf{X}_{k-1}^{i}\to E^{i}}(\mathcal{X}_{k-1}^{i})f(\mathcal{X}_k^{i}|\mathcal{X}_{k-1}^{i})\delta\mathcal{X}_{k-1}^{i} \tag{S4}$$

B. 更新

更新步骤级联至预测步骤，由此获得消息 2、6 和 8。

1) 未检测目标的分离：未检测目标集合被划分为 1 个仍未检测的目标集合，以及 J_k 个新检测目标集合。

9 从集合变量 $\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}}$ 到因子 F的消息，即$f^{F}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}},\mathcal{X}_{\mathrm{U}k},\mathcal{P}_k^{1},\dots,\mathcal{P}_k^{J_k})=\delta_{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}\uplus\mathcal{P}_k}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})$，记为 $\mathbf{n}^{\mathsf{P}_k^{\mathrm{U}}\to F}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})=\mathbf{m}^{D\to \mathsf{P}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})$。从集合 $\mathcal{X}_{\mathrm{U}k},\mathcal{P}_k^{1},\dots,\mathcal{P}_k^{J_k}$到因子 F的消息分别为 $\mathbf{n}^{\mathsf{X}_k^{\mathrm{U}}\to F}(\mathcal{X}_{\mathrm{U}k})=1,\mathbf{n}^{\mathsf{P}_k^{j}\to F}(\mathcal{P}_k^{j})=1$，其中 $j\in\{1,\dots,J_k\}$。

10 从因子 F 到 $\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}$ 的消息记为 $\mathbf{m}^{F\to \mathsf{X}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{X}_{\mathrm{U}k})$。根据命题 1，$\mathbf{m}^{F\to \mathsf{X}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{X}_{\mathrm{U}k})$ 可表示为

$$\mathbf{m}_{F\to \mathsf{X}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}})=\int \mathbf{n}_{\mathsf{P}_k^{\mathrm{U}}\to F}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})\delta_{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}\uplus\mathcal{P}_k}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})\delta\mathcal{X}_k^{\sim\mathrm{U}} \tag{S5}$$

$$\propto f^{\mathrm{Poi}}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}), \tag{S6}$$

与 PPP分布成正比。类似地，对于 $j\in\{1,\dots,J_k\}$，从因子 F到 $\mathcal{P}_k^{j}$的消息记为 $\mathbf{m}^{F\to \mathsf{P}_k^{j}}(\mathcal{P}_k^{j})$，根据命题 1，

$j\in\{1,\dots,J_k\}$对应的 $\mathbf{m}^{F\to \mathsf{P}_k^{j}}(\mathcal{P}_k^{j})$ 可表示为

$$\mathbf{m}_{F\to \mathsf{P}_k^{j}}(\mathcal{P}_k^{j})=\int \mathbf{n}_{\mathsf{P}_k^{\mathrm{U}}\to F}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})\delta_{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}\uplus\mathcal{P}_k}(\mathcal{P}_k^{\mathrm{U}})\delta\mathcal{P}_k^{\sim j}, \tag{S7}$$

$$\propto f^{\mathrm{Poi}}(\mathcal{P}_k^{j}) \tag{S8}$$

也与 PPP分布成正比。

11 从集合变量 $\mathcal{P}_k^{j}$ 到相连因子 G^{j}的消息，即 $f_j^{G}(\mathcal{P}_k^{j},\mathcal{Y}_k^{j})=\delta_{\mathbf{h}_{-(I_{k-1}+j)}(\mathcal{Y}_k^{j})}(\mathcal{P}_k^{j})$，记为 $\mathbf{n}^{\mathsf{P}_k^{j}\to G^{j}}(\mathcal{P}_k^{j})=\mathbf{m}^{F\to \mathsf{P}_k^{j}}(\mathcal{P}_k^{j})$，其中 $j=\{1,\dots,J_k\}$。

12 从因子 G^{j} 到关联的集合变量 $\mathcal{Y}_k^{j}$ 的消息记为 $\mathbf{m}_{G^{j}\to \mathsf{Y}_k^{j}}(\mathcal{Y}_k^{j})$。根据定义 5，消息 $\mathbf{m}_{G^{j}\to \mathsf{Y}_k^{j}}(\mathcal{Y}_k^{j})$ 为

$$\mathbf{m}_{G^{j}\to \mathsf{Y}_k^{j}}(\mathcal{Y}_k^{j})=\int \mathbf{n}_{F\to \mathsf{P}_k^{j}}(\mathcal{P}_k^{j})\delta_{\mathbf{h}_{-(I_{k-1}+j)}(\mathcal{Y}_k^{j})}(\mathcal{P}_k^{j}), \tag{S9}$$

其服从带有辅助变量 $u = I_{k-1} + j$的 PPP分布。

2) 数据关联：我们通过在含有环的因子图上运行环路置信传播 [26]，计算 c_k^i 和 d_k^j 的边缘概率消息。初始关联概率由预测消息及其关联似然因子确定。

13 传感器状态变量 s_k 发往关联因子 I^j（即 $f_j^I(\mathsf{s}_k, \mathcal{Y}_k^j, d_k^j) = \tilde{l}(\mathsf{z}_k^j|\mathsf{s}_k, \mathcal{Y}_k^j, d_k^j)$，适用于 $j \in \mathcal{J}_k$）以及 J^i（即 $f_i^J(\mathsf{s}_k, \mathcal{X}_k^i, c_k^i) = t(\mathcal{Z}_k^i|\mathsf{s}_k, \mathcal{X}_k^i, c_k^i)$，适用于 $i \in \mathcal{I}_{k-1}$）的消息分别记为 $\mathsf{n}_{\mathsf{s}_k \to I^j}(\mathsf{s}_k)$ 和 $\mathsf{n}_{\mathsf{s}_k \to J^i}(\mathsf{s}_k)$，其表达式为 $\mathsf{n}_{\mathsf{s}_k \to I^j}(\mathsf{s}_k) = \mathsf{n}_{\mathsf{s}_k \to J^i}(\mathsf{s}_k) = \mathsf{m}_{A \to \mathsf{s}_k}(\mathsf{s}_k)$。集合变量 $\mathcal{Y}_k^j$ 发往因子 I^j 的消息记为 $\mathsf{n}_{\mathsf{Y}_k^j \to I^j}(\mathcal{Y}_k^j)$，且 $\mathsf{n}_{\mathsf{Y}_k^j \to I^j}(\mathcal{Y}_k^j) = \mathsf{m}_{G^j \to \mathsf{Y}_k^j}(\mathcal{Y}_k^j)$，适用于 $j \in \{1, \ldots, J_k\}$。集合变量 $\mathcal{X}_k^i$ 发往关联因子 J^i 的消息记为 $\mathsf{n}_{\mathsf{X}_k^i \to J^i}(\mathcal{X}_k^i)$，且 $\mathsf{n}_{\mathsf{X}_k^i \to J^i}(\mathcal{X}_k^i) = \mathsf{m}_{E^i \to \mathsf{X}_k^i}(\mathcal{X}_k^i)$，适用于 $i \in \mathcal{I}_{k-1}$。

14 来自关联因子 I^j 到关联变量 d_k^j 的消息记为 $\mathsf{m}_{I^j \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j)$。对于 $j \in \mathcal{J}_k$，消息 $\mathsf{m}_{I^j \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j)$ 给定为

$$\mathsf{m}_{I^j \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j) = \iint \mathsf{n}_{\mathsf{s}_k \to F^j}(\mathbf{s}_k) \mathsf{n}_{\mathsf{Y}_k^j \to I^j}(\mathcal{Y}_k^j) \tilde{l}(\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k, \mathcal{Y}_k^j, d_k^j) \mathrm{d}\mathbf{s}_k \delta\mathcal{Y}_k^j. \tag{S10}$$

来自关联因子 J^i 到关联变量 c_k^i 的消息记为 $\mathsf{m}_{J^i \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i)$。对于 $i \in \mathcal{I}_{k-1}$，消息 $\mathsf{m}_{J^i \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i)$ 给定为

$$\mathsf{m}_{J^i \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i) = \iint \mathsf{n}_{\mathsf{s}_k \to J^i}(\mathbf{s}_k) \mathsf{n}_{\mathsf{X}_k^i \to J^i}(\mathcal{X}_k^i) t(\mathcal{Z}_k^i|\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_k^i, c_k^i) \mathrm{d}\mathbf{s}_k \delta\mathcal{X}_k^i. \tag{S11}$$

15 在第 L 次迭代中，在因子 K^i、^{j}（即 f_i^K、$_j$（c_k^i、d_k^j）$= \psi$（c_k^i、d_k^j））之间，对目标导向的数据关联变量 c_k^i 和测量导向的数据关联变量 d_k^j 执行环路置信传播 [26]。在第 l 次迭代中，从变量 c_k^i 到 d_k^j 以及从变量 d_k^j 到 c_k^i 的消息分别记为 $\mathsf{m}^{(l)}{}_{\mathsf{d}_k^j \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i)$ 和 $\mathsf{m}^{(l)}{}_{\mathsf{c}_k^i \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j)$，其表达式为

$$\mathsf{m}^{(l)}_{\mathsf{d}_k^j \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i) = \sum_{j=0}^{J_k} \mathsf{m}_{J^i \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i) \psi(c_k^i, d_k^j) \prod_{i' \in \mathcal{I}_{k-1} \setminus \{i\}} \mathsf{m}^{(l-1)}_{\mathsf{c}_k^{i'} \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j) \tag{S12}$$

$$\mathsf{m}^{(l)}_{\mathsf{c}_k^i \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j) = \sum_{i=0}^{I_{k-1}} \mathsf{m}_{I^j \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j) \psi(c_k^i, d_k^j) \prod_{j' \in \mathcal{J}_k \setminus \{j\}} \mathsf{m}^{(l-1)}_{\mathsf{d}_k^{j'} \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i). \tag{S13}$$

Their initial messages are given by $\mathsf{m}^{(0)}_{\mathsf{d}_k^j \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i) = \sum_{j=0}^{J_k} \mathsf{m}_{J^i \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i) \psi(c_k^i, d_k^j)$ and $\mathsf{m}^{(0)}_{\mathsf{c}_k^i \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j) = \sum_{i=0}^{I_{k-1}} \mathsf{m}_{I^j \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j) \psi(c_k^i, d_k^j)$.

16 从变量 c_k 到因子 J 的消息记为 $\mathsf{n}^{c_k^i \to J^i}(c_k^i)$。对于 $i \in \mathcal{I}_{k-1}$，消息 $\mathsf{n}^{c_k^i \to J^i}(c_k^i)$ 的表达式为

$$\mathsf{n}_{c_k^i \to J^i}(c_k^i) = \prod_{j \in \mathcal{J}_k} \mathsf{m}^{(L)}_{\mathsf{d}_k^j \to \mathsf{c}_k^i}(c_k^i). \tag{S14}$$

来自变量 d_k^j 到关联因子的消息记为 $\mathsf{n}^{\mathsf{d}_k^j \to I^j}(d_k^j)$。对于 $j \in \mathcal{J}_k$，消息 $\mathsf{n}^{\mathsf{d}_k^j \to I^j}(d_k^j)$ 给定为

$$\mathsf{n}_{\mathsf{d}_k^j \to I^j}(d_k^j) = \prod_{i \in \mathcal{I}_{k-1}} \mathsf{m}^{(L)}_{\mathsf{c}_k^i \to \mathsf{d}_k^j}(d_k^j). \tag{S15}$$

3）信念计算：我们计算先前检测到的目标、新检测到的目标、未检测目标以及传感器状态的信念。信念总数为 2+$I_{k-1} + J_k$：传感器状态向量 1 个；未检测目标 1 个；检测到的目标 $I_{k-1} + J_k$个。

a) 新检测到的目标：我们计算 J_k 集合变量 $\mathcal{X}_k^j$ 关于 $j \in \mathcal{J}_k$的置信分布。每个集合变量 $\mathcal{X}_k^j$ 表示一个目标，该目标是首次检测到的，或表示杂波，具体如下。

17 从因子 I^j 到相连集合变量 $\mathcal{Y}_k^j$ 的消息记为 $\mathsf{m}_{I^j \to \mathsf{Y}_k^j}(\mathcal{Y}_k^j)$。对于 $j \in \mathcal{J}_k$，消息 $\mathsf{m}_{I^j \to \mathsf{Y}_k^j}(\mathcal{Y}_k^j)$ 定义为

$$\mathsf{m}_{I^j \to \mathsf{Y}_k^j}(\mathcal{Y}_k^j) = \int \sum_{i=0}^{I_{k-1}} \mathsf{n}_{\mathsf{d}_k^j \to I^j}(d_k^j = i) \mathsf{n}_{\mathsf{s}_k \to I^j}(\mathbf{s}_k) \times \tilde{l}(\mathbf{z}_k^j|\mathbf{s}_k, \mathcal{Y}_k^j, d_k^j = i) \mathrm{d}\mathbf{s}_k. \tag{S16}$$

18 集合变量 $\mathcal{Y}_k^j$ 的置信分布记为 $\mathsf{b}(\mathcal{Y}_k^j)$，其中$j \in \mathcal{J}_k$。置信分布 $\mathsf{b}(\mathcal{Y}_k^j)$ 的计算方式为

$$\mathsf{b}(\mathcal{Y}_k^j) \propto \mathsf{m}_{G^j \to \mathcal{Y}_k^j}(\mathcal{Y}_k^j) \mathsf{m}_{I^j \to \mathcal{Y}_k^j}(\mathcal{Y}_k^j), \tag{S17}$$

其服从伯努利分布。

b) 先前检测到的目标：我们计算集合变量 $\mathcal{X}_k^i$ 关于 $i \in \mathcal{I}_{k-1}$的置信分布 I_{k-1}。每个集合变量$\mathcal{X}_k^i$ 表示先前已检测到的目标，具体如下。

19 从因子 J^i 到集合变量 $\mathcal{X}_k^i$ 的消息记为 $\mathsf{m}_{J^i \to \mathsf{X}_k^i}(\mathcal{X}_k^i)$。对于$i \in \mathcal{I}_{k-1}$，消息 $\mathsf{m}_{J^i \to \mathsf{X}_k^i}(\mathcal{X}_k^i)$ 定义为

$$\mathsf{m}_{J^i \to \mathsf{X}_k^i}(\mathcal{X}_k^i) = \int \sum_{j=0}^{J_k} \mathsf{n}_{\mathsf{c}_k^i \to J^i}(c_k^i = j) \mathsf{n}_{\mathsf{s}_k \to J^i}(\mathbf{s}_k) \times t(\mathcal{Z}_k^i|\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_k^i, c_k^i = j) \mathrm{d}\mathbf{s}_k. \tag{S18}$$

20 集合变量的信念记为 $\mathcal{X}_k^i$，其中 $i \in \mathcal{I}_{k-1}$。信念分布 $\mathsf{b}(\mathcal{X}_k^i)$ 通过以下方式获得

$$\mathsf{b}(\mathcal{X}_k^i) \propto \mathsf{m}_{E^i \to \mathsf{X}_k^i}(\mathcal{X}_k^i) \mathsf{m}_{J^i \to \mathsf{X}_k^i}(\mathcal{X}_k^i), \tag{S19}$$

其服从伯努利分布。

c) 未检测目标：我们计算表示从未被检测到、因此仍未检测到的目标的集合变量 $\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}$ 的 1 置信分布，具体如下。

21 从传感器状态 $\mathbf{s}_k$ 到因子 H的消息，即$f^H(\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_{\mathrm{U}k})$ $= [1 - \mathrm{p}_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_{\mathrm{U}k})]^{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}}$，记为 $\mathrm{n}_{\mathbf{s}_k \to I}(\mathbf{s}_k)$，定义为 $\mathrm{n}_{\mathbf{s}_k \to H}(\mathbf{s}_k) = \mathrm{n}_{A \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k)$。从因子 H 到所连接的集合变量 $\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}$ 的消息记为 $\mathrm{m}^{H \to \mathbf{X}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}})$，定义为

$$\mathrm{m}_{H \to \mathbf{X}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}) = \int \mathrm{n}_{\mathbf{s}_k \to H}(\mathbf{s}_k)[1 - \mathrm{p}_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_k^{\mathrm{U}})]^{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}} \mathrm{d}\mathbf{s}_k. \tag{S20}$$

22 集合变量 $\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}$的置信分布记为 $\mathrm{b}(\mathcal{Y}_k^j)$，计算如下:

$$\mathrm{b}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}) \propto \mathrm{m}_{F \to \mathbf{X}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}) \mathrm{m}_{H \to \mathbf{X}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}), \tag{S21}$$

其服从伯努利分布。

d) 传感器：我们利用来自预测传感器状态、先前检测到的目标和新检测目标的消息，计算传感器状态 $\mathbf{s}_k$的 1 个置信分布。

23 从因子 I^j 到所连接的向量变量 $\mathbf{s}_k$的消息记为 $\mathrm{m}^{I^j \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k)$。消息 $\mathrm{m}^{I^j \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k)$（对于 $j \in \mathcal{J}_k$）定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_{I^j \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k) = \int \sum_{i=0}^{I_{k-1}} & \mathrm{n}_{\mathrm{d}_k^j \to I^j}(d_k^j = i) \mathrm{n}_{\mathbf{Y}_k^j \to I^j}(\mathcal{Y}_k^j) \\ & \times \tilde{l}(\mathbf{z}_k^j | \mathbf{s}_k, \mathcal{Y}_k^j, d_k^j = i) \delta \mathcal{Y}_k^j. \end{aligned} \tag{S22}$$

24 从因子 J^i 到所连接的向量变量$\mathbf{s}_k$的消息记为 $\mathrm{m}^{J^i \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k)$。消息 $\mathrm{m}^{J^i \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k)$（对于 $i \in \mathcal{I}_{k-1}$）定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_{J^i \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k) = \int \sum_{j=0}^{J_k} & \mathrm{n}_{\mathrm{c}_k^i \to J^i}(c_k^i = j) \mathrm{n}_{\mathbf{X}_k^i \to J^i}(\mathcal{X}_k^i) \\ & \times t(\mathcal{Z}_k^i | \mathbf{s}_k, \mathcal{X}_k^i, c_k^i = j) \delta \mathcal{X}_k^i. \end{aligned} \tag{S23}$$

25 从 $\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}$ 到因子 H 的消息表示为 $\mathrm{n}^{\mathbf{X}_k^{\mathrm{U}} \to H}(\mathcal{X}_{\mathrm{U}k})$，而 $\mathrm{n}^{\mathbf{X}_k^{\mathrm{U}} \to H}(\mathcal{X}_{\mathrm{U}k}) = \mathrm{m}_{F \to \mathbf{X}_k^{\mathrm{U}}}(\mathcal{X}_{\mathrm{U}k})$。

26 从因子 H 到传感器状态 $\mathbf{s}_k$ 的消息记为 $\mathrm{m}^{H \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k)$，计算方式为

$$\mathrm{m}_{H \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k) = \int \mathrm{n}_{\mathbf{X}_k^{\mathrm{U}} \to H}(\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}})[1 - \mathrm{p}_{\mathrm{D}}(\mathbf{s}_k, \mathcal{X}_k^{\mathrm{U}})]^{\mathcal{X}_k^{\mathrm{U}}} \delta \mathcal{X}_k^{\mathrm{U}} \tag{S24}$$

27 传感器变量 $\mathbf{s}_k$ 的置信分布记作 $\mathrm{b}(\mathbf{s}_k)$，计算方式为

$$\begin{aligned} \mathrm{b}(\mathbf{s}_k) \propto & \mathrm{m}_{A \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k) \mathrm{m}_{H \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k) \\ & \times \prod_{j \in \mathcal{J}_k} \mathrm{m}_{I^j \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k) \prod_{i \in \mathcal{I}_{k-1}} \mathrm{m}_{J^i \to \mathbf{s}_k}(\mathbf{s}_k). \end{aligned} \tag{S25}$$

最终，我们得到边缘后验密度，$f_{\mathrm{u}}(\mathbf{s}_k) = \mathrm{b}(\mathbf{s}_k)$、$f_{\mathrm{U}\mathrm{u}}(\mathcal{X}_{\mathrm{U}k}) = \mathrm{b}(\mathcal{X}_{\mathrm{U}k})$、$f_{\mathrm{u}}^i(\mathcal{X}_k^i) = \mathrm{b}(\mathcal{X}_k^i)$，其中 $i \in \mathcal{I}_{k-1}$，

$f_{\mathrm{u}}^i \ \mathcal{X}_k^{I_{k-1}+j} = \mathcal{X}_k^j \quad j \in \mathcal{J}_k$ ( ) b( ) for .