arXiv:2305.04799v1 [math.FA] 8 May 2023

双复数帕利-维纳定理

SANJAY KUMAR 和 STANZIN DOLKAR

Abstract. 本文研究了 Paley-Weiner 定理的双复数版本，以及上半平面中的柯西积分公式。

1. Introduction and Preliminaries

双复数的研究始于 1892年，当时 Segre [19] 发现四元数斜域缺少交换性这一性质。四元数最初由 W. R. Hamilton 于 1844年引入。双复数的研究一直是一个活跃的研究领域。Segre 受 Hamilton 的研究成果启发，随后引入了一种称为双复数的新数系。

J. D. Riley 在 [17] 中的工作进一步发展了双复变量函数理论。此外，也不能不提 G. B. Price 的工作 [15]，他为我们提供了一种非常有力的方法来研究双复变量全纯函数。我们用 $\mathbb{BC}$ 表示双复数集合，并将其定义如下：

$$\mathbb{BC} = \{z_1 + jz_2 \ : \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\},$$

其中 $\mathbb{C}$ 是复数集合。因此，双复数有时也称为具有复系数的复数。复数集合具有虚数单位 $i.$。由此可见，$\mathbb{BC}$ 有 i、j 作为其虚数单位，且这两个虚数单位可交换，即 $ij = ji$，并且 $i^2 = j^2 = -1.$。双复数可以进行加法和乘法。因此，加法和乘法都满足交换律和结合律。

另一个重要的数集是双曲数集合，它可以独立于 $\mathbb{BC}$. 定义。我们用以下符号表示双曲数集合：

$$\mathbb{D} = \{a + kb : a, b \in \mathbb{R}\},$$

其中 k 称为双曲单位，且 $k^2 = 1.$ 双曲数集合也称为分裂实数、洛伦兹数、迷惑数等。这些数最早由 Cockle [4]引入。在处理 $\mathbb{BC}$时，我们会遇到 $ij = k.$ 因此，我们认识到存在

2010 *Mathematics Subject Classification.* 30G35, 32A30, 32A10.*Key words and phrases.* 双复全纯函数，双复傅里叶变换，Paley Weiner 定理，双复数柯西积分公式。第一作者的研究工作得到 NBHM（DAE）项目资助，项目编号为 2/11/41/2017/R& D-II/3480；第二作者得到 UGC 项目资助，项目编号为 1116/CSIR-UGC NET DEC.2018。

双复数的一个子集，它与分裂实数集合同构。因此，我们可以将分裂实数集合定义为

$$\mathbb{D} = \{a + ijb \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

双复数 $\mathbb{BC}$ 的另一个重要特征是存在幂等元e 和 $e^{\dagger}$，这使得能够以幂等形式表示双复数。幂等元也称为特殊零因子，因为

$$e = \frac{1+ij}{2} \ \ and \ \ e^{\dagger} = \frac{1-ij}{2}$$

and

$$e.e^{\dagger} = 0.$$

因此，它们每一个都是零因子。此外，

$$e^2 = 1 \ \ and \ \ (e^{\dagger})^2 = 1.$$

因此，任意双复数 Z 都可以表示为 $Z = e\beta_1 + e^{\dagger}\beta_2$，其中 β_1 和 β_2 是复数。这种表示方式称为用其幂等元表示双复数。

接下来，我们介绍 $Z \in \mathbb{BC}.$ 的几种表示。任意 $Z \in \mathbb{BC}$ 都可以写成

$$\begin{aligned} Z =& z_1 + jz_2 && (1.1)\\ =& \xi_1 + k\xi_2 && (1.2)\\ =& e\beta_1 + e^{\dagger}\beta_2 && (1.3)\\ =& a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4. && (1.4) \end{aligned}$$

方程 (1.1) 将 Z 确定为 $\mathbb{C}^2(i)$ 的一个元素，而方程 (1.4) 将 Z 识别为 $\mathbb{R}^4$ 的一个元素，方程 (1.3) 是 $Z.$ 的幂等表示。最后，(1.2) 将 Z 与 $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ 中的元素对应起来，更多详情请参见 [1, 第 7] 页。我们从 $\mathbb{BC}.$ 中上半平面的定义开始。

定义 1.1. *[11]* 我们将 $\mathbb{BC}$ 中的上半平面记为 $\Pi_{\mathbb{BC}^+}$，其定义为

$$\Pi_{\mathbb{BC}^+} = \{Z \in \mathbb{BC} : Z = z_1 + jz_2 \ or \ Z = e\beta_1 + e^{\dagger}\beta_2 : (\beta_1, \beta_2) \in \Pi^+ \times \Pi^+\},$$

其中 $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}(i) : \ z = x + iy \ and \ y > 0 \in \mathbb{C}(i)\}$ 是 $\mathbb{C}$.中的上半平面

定义 1.2. *[16]* $\mathbb{BC}$ 中的集合 G 称为乘积型集合，如果 $G = eG_1 + e^{\dagger}G_2$，其中$G_1 = \Pi_{1,i}($ $G)$ 和 $G_2 = \Pi_{2,i}(G)$，其中 $\Pi_{1,i}(G)$ 和 $\Pi_{2,i}(G)$ 分别是 G 在 G_1 和 G_2上的幂等投影。

定义 1.3. *[16]* 若双复函数 $F\colon G \subset \mathbb{BC} \longrightarrow \mathbb{BC}$ 满足 $F(Z) = ef_1(\beta_1) + e^{\dagger}f_2(\beta_2)$，其中每个 $f_k^{'}s\colon G_{k's} \longrightarrow \mathbb{C}$; $k = 1, 2$ 都是复值函数，则称其为乘积型。

定义 1.4. *[12]* 设 $\mathfrak{M}$ 是集合 G. 上的一个 σ-代数。定义在 G 上的双曲实值双复函数 $m = em_1 + e^\dagger m_2$ 称为双曲测度，如果 m_1 和 m_2 是 $\mathfrak{M}$.上的实测度。

D定义 1.5. 设 F 是定义在 $(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}$. 上的双复乘积型函数。该 n

$$F(e\beta_1 + e^\dagger\beta_2) = eF_1(\beta_1) + e^\dagger F_2(\beta_2), \tag{1.5}$$

其中 $(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}$ 是一个双复乘积型域，满足

$$(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}} = e(-\infty,\infty) + e^\dagger(-\infty,\infty).$$

值得注意的是，上半平面 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$ 中的任意 Z 也可以写成

$$Z = e\beta_1 + e^\dagger\beta_2 \in \prod_{\mathbb{BC}^+} \text{ if and only if } \beta_1 = z_1 - iz_2 \in \prod^+ \text{ and } \beta_2 = z_1 + iz_2 \in \prod^+.$$

于是，简单展开可得

$$\beta_1 = z_1 - iz_2 = (x_0 + ix_1) - i(x_2 + ix_3) = (x_0 + x_3) + i(x_1 - x_2).$$

因此，

$$\beta_1 \in \prod^+ \text{ if and only if } x_1 - x_2 > 0 \tag{1.6}$$

and

$$\beta_2 = z_1 + iz_2 = (x_0 + ix_1) + i(x_2 + ix_3) = (x_0 - x_3) + i(x_1 + x_2).$$

因此，

$$\beta_2 \in \prod^+ \text{ if and only if } x_1 + x_2 > 0 \tag{1.7}$$

因此，方程（1.6）和（1.7）意味着 $\beta_1, \beta_2 \in \prod^+$ 当且仅当 $x_1 > |x_2|$。

接下来，我们将 $\mathbb{D}$–积分定义为 F 在（$-\infty$, ∞）$_{\mathbb{D}} \subset \prod_{\mathbb{BC}^+}$ 上的积分，由

$$\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} F(Z)dZ \odot dZ^\dagger = e\int_{(-\infty,\infty)} F_1(\beta_1)d\beta_1 + e^\dagger\int_{(-\infty,\infty)} F_2(\beta_2)d\beta_2 \ ; Z \in \prod_{\mathbb{BC}^+}.$$

使用此积分定义，我们称双复函数 F 在 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$ 上是 $\mathbb{D}$–平方可积的，如果

$$\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \|F\|_k^2 dm \odot dm^\dagger < \infty,$$

其中， dm 是四维勒贝格测度，使得 $dm = edm_1 + e^\dagger dm_2$。利用方程 (1.5)，我们可以说，$F$ 是 $\mathbb{D}$-平方可积的，当且仅当 F_1 和 F_2 平方可积。也就是说，

$$\int_{\prod^+} |F_i|^2 dm_i < \infty.$$

我们将所有在 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$ 上的 $\mathbb{D}$–平方可积$L_k^2($ 函数构成的空间记为 $L_k^2\big((-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}, dm\big)$，因此，

$$L_k^2\big((-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}, dm\big) = eL^2((-\infty,\infty), dm_1) + e^\dagger L^2((-\infty,\infty), dm_2). \tag{1.8}$$

$F \in L_k^2\big((-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}, dm\big)$ 的双曲范数定义为

$$\|F\|_{k,2}^2 = e\|F_1\|_{1,2}^2 + e^\dagger\|F_2\|_{2,2}^2.$$

也就是说，

$$\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \|F\|_k^2 dm = e\int_{-\infty}^{\infty} |f_1|^2 dm_1 + e^{\dagger}\int_{-\infty}^{\infty} |f_2|^2 dm_2.$$

此外，有界域上的双复Bergman空间在 [14] 中被引入。

定理 1.6. 对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，在 $L_k^p(dm)$ 中的柯西序列 $\{F_n\}$，其极限为 F，存在一个逐点收敛的子列，几乎处处收敛于 $F(x_0, x_3)$。

Pr明。上述定理的证明相当简单。由等式 (1.8)，我们有 ve

$$L_k^p(dm) = eL^p(dm_1) + e^{\dagger}L^p(dm_2). \tag{1.9}$$

设 $Z = e\beta_1 + e^{\dagger}\beta_2$. 。那么，已知这样一个事实：对于在 $L^p(dm_1)$ 中的每个柯西序列 $\{F_{n,1}\}$ 和在 $L^p(dm_2)$ 中的柯西序列 $\{F_{n,2}\}$，其极限分别为 F_1 和 F_2，都存在收敛子列，分别收敛于 $F_1(Re(\beta_1))$ 和 $F_2(Re(\beta_2))$。因此，该定理对 $L_k^p(dm)$ 中的每个柯西序列 $\{F_n\}$ 都成立。
. □

ˆ推论 1. 设 F 为双复函数 F 的双复数傅里叶变换。若 F属于 L_k^2 且 ˆ $F \in L_k^1$，则

$$F(x_0, x_3) = \int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \hat{F}(t)\exp\{i(x_0 + kx_3)\}dm(t) \ a.e.$$

关于双复分析及其应用的近期研究，可参阅 [1, 3, 5, 7, 13]及其中的参考文献。

2. Bicomplex Fourier Transforms

文献 [2, 3,9]研究了双复变量函数的双复数傅里叶变换。标准的双复数傅里叶变换定义为

$$\mathcal{F}_{\mathbb{BC}}(F)(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \exp\{-itZ\}F(t)dt \odot dt^{\dagger},$$

其中 $Z = e\beta_1 + e^{\dagger}\beta_2$.

现在，利用幂等元 e 和 $e^{\dagger}$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathbb{BC}}(F(Z)) =& \frac{1}{2\pi}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \exp\{-it(e\beta_1 + e^{\dagger}\beta_2)\}dt \odot dt^{\dagger}\\ =& \frac{1}{2\pi}e\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-it\beta_1\}F_1 dt + \frac{1}{2\pi}e^{\dagger}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-it\beta_2\}F_2(t)dt^{\dagger}\\ =& e\mathcal{F}_{\infty}(F_1) + e^{\dagger}\mathcal{F}_{\in}(F_2).\end{aligned}$$

例 2.1. *[2]* 考虑 $F(t) = \exp\{-\|t\|_k\}$. 那么，

$$\mathcal{F}_{\mathbb{BC}}(F(t)) = \frac{2}{1+Z^2} \ ; \ Z = z_1 + jz_2,$$

其中 $\mathcal{F}_{\mathbb{BC}}(F(t)) = \hat{}F(Z) = e\,\hat{}F_1(z_1) + e^{\dagger}\,\hat{}F_2(z_2)$，$\hat{}F_1(z_1) = \frac{2}{1+z_1^2}$ 且 $\hat{}F_2(z_2) = \frac{2}{1+z_2^2}$ ˆ ˆ 满足：$F_1(z_1)$ 和 $F_2(z_2)$ 在 $-1 < Img(z_1)$ 和 $Img(z_2)$ 中全纯 < 1.

ˆ 上述例子表明， F 通常可以延拓为在 $\mathbb{BC}.$ 的某些区域内全纯的函数。接下来，牢记 $\exp\{itZ\}$ 是关于 Z 的全纯函数，我们可以预期并同时讨论对 F 施加的若干条件；当这些条件施加于 F 时，其双复数傅里叶变换 $F(t)$ 会成为在 $\mathbb{BC}.$ 某些区域内的全纯函数。为证明上述结论，令 $\mathfrak{F} \in L^2_k((-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}, dm)$，满足 $\mathfrak{F}(t) = 0$ 在 $(-\infty, 0)_{\mathbb{D}}.$。然后定义

$$F(Z) = \int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} \mathfrak{F}(t)\exp\{itZ\}dt \odot dt^{\dagger}, \tag{2.1}$$

其中 Z 位于双复数上半平面 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$. 那么

$$\begin{aligned}\exp\{itZ\} =& \exp\{it(e\beta_1 + e^{\dagger}\beta_2)\}\\ =& e\exp\{it\beta_1\} + e^{\dagger}exp\{it\beta_2\}\\ =& e\exp\{it[(x_0+x_3)+i(x_1-x_2)]\} + e^{\dagger}\exp\{it[(x_0-x_3)+i(x_1+x_2)]\}.\end{aligned}$$

因此，若 $Z \in \prod_{\mathbb{BC}^+}$，则

$$\begin{aligned}\|\exp\{itZ\}\|_k =& \| e\exp\{it[(x_0+x_3)+i(x_1-x_2)]\}\\ &+e^{\dagger}\exp\{it[(x_0-x_3)+i(x_1+x_2)]\|_k\\ \leqslant& e\|\exp\{it(x_0+x_3)\}\exp\{-t(x_1-x_2)\}\|_1\\ &e^{\dagger}\|\exp\{it(x_0-x_3)\}\exp\{-t(x_1+x_2)\}\|_2\\ \leqslant& e\|\exp\{-t(x_1-x_2)\}\|_1 + e^{\dagger}\|\exp\{-t(x_1+x_2)\}\|_2\\ =& e\|\exp\{-tImg(\beta_1)\}\|_1 + e^{\dagger}\|\exp\{-tImg(\beta_2)\}\|_2\\ =& \exp\{(e(-tImg\beta_1)) + e^{\dagger}(-tImg\beta - 2)\}\\ =& \exp\{-t(e(x_1-x_2) + e^{\dagger}(x_1+x_2))\}\\ =& \exp\{-t(x_1 - kx_2)\}.\end{aligned}$$

因此，(2.1) 存在且定义良好。

由方程 (2.1),

$$\begin{aligned}F(Z) =& \int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} \mathfrak{F}(t)\exp\{itZ\}dt \odot dt^{\dagger}\\ =& e\int_0^{\infty} \mathfrak{F}_1(t)\exp\{it\beta_1\}dt + e^{\dagger}\int_0^{\infty}\mathfrak{F}_2(t)\exp\{it\beta_2\}dt^{\dagger}\\ =& eF_1(\beta_1) + e^{\dagger}F_2(\beta_2).\end{aligned} \tag{2.2}$$

因此 F 在 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$上是全纯的，因为每个 F_i 在 $\prod^+.$ 中都是全纯的。这里每个 F_i 定义为

$$F_i(\beta_i) = \int_0^{\infty} \mathfrak{F}_i(t)\exp\{it\beta_1\}.$$

更多详情请参见 [18]。

接下来, 我们证明，这些函数在 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$ 中的水平线上的限制是

在 $L^2_k\big((-\infty,\infty)_{\mathbb{D}},dm\big)$. 中有界。令 $Z\in\prod_{\mathbb{BC}^+}.$，则 $Z=e\beta_1+e^\dagger\beta_2=x_0+ix_1+jx_2+kx_3$, 并由公式 (2.2) 可得

$$F(Z)=eF_1(\beta_1)+e^\dagger F_2(\beta_2), \tag{2.3}$$

其中每个 F_1 和 F_2 都具有以下形式

$$F_1(\beta_1)=\int_0^\infty \mathfrak{F}_1(t)\exp\{-t(x_1-x_2)\}\exp\{it(x_0+x_3)\}dt \tag{2.4}$$

$$F_2(\beta_2)=\int_0^\infty \mathfrak{F}_2(t)\exp\{-t(x_1+x_2)\}\exp\{it(x_0-x_3)\}dt. \tag{2.5}$$

那么， F_1 和 F_2 是 $\prod^+$ 中水平直线上的限制，由 [18], 可知，这些限制在 $L^2((-\infty,\infty)\ dm_i)$; $i=1,2$ 中构成一个有界集。因此，由方程（2.3）可知， F 在$\prod_{\mathbb{BC}^+}$ 中水平直线上的限制在 $L^2_k((-\infty,\infty)_{\mathbb{D}},dm)$中构成一个有界集。因此，以下注释得出结论：

注 2.2. F 在水平线上的限制 F_1 和 F_2 也在 $L^2_k\big((-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}$ 中构成有界集， $dm\big)$. 更多详情请参阅 *[18]*。

3. Bicomplex Paley-Weiner Theorem

本节中，我们将 Paley-Weiner 定理推广到双复数情形。Paley-Weiner 定理的基础在于一个重要事实：注 2.2 的逆命题也成立。

定理 3.1. 设 $F:\prod_{\mathbb{BC}^+}\longrightarrow\mathbb{BC}$ 是定义在 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$ 上的全纯函数，并且

$$\sup_{\substack{\mathbb{D}\\ x_1>|x_2|}}\frac{1}{2\pi}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}}\|F(Z)\|_k^2dx_0=M<\infty.$$

那么存在 $\mathfrak{F}\in L^2_k\big((-\infty,\infty)_{\mathbb{D}},dm\big)$ 使得

$$F(Z)=\int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}}\mathfrak{F}(t)\exp\{itZ\}dt\odot dt^\dagger,$$

其中 Z 属于 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$，且满足 $Z=e\beta_1+e^\dagger\beta_2=x_0+ix_1+jx_2+kx_3$，并且

$$\int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}}\|F(t)\|_k^2dt=M$$

对于某个常数 M.

证明。我们先假设存在这样一个全纯 L^2_k 函数，记为 $\mathfrak{F}$，并设 F 是定义在上半平面 $\prod_{\mathbb{BC}^+}.$ 上的双复全纯函数。那么

$$F(Z)=eF_1(\beta_1)+e^\dagger F_2(\beta_2),$$

其中 F_l 对于 $l=1,\ 2$ 在复上半平面 $\prod^+$. 上全纯。于是，根据 Paley-Weiner 定理，对于每个 F_1 和 $F_2\ \in H(\prod^+)$，存在 $\mathfrak{F}_1$ 和 $\mathfrak{F}_2$ 属于 $L^2(0,\infty)$，使得每个 $F_1((x_0+x_3)+i(x_1-x_2))$ 和 $F_2((x_0-x_3)+i(x_1+x_2))$ 分别是 $\mathfrak{F}_1\exp\{-(x_1-x_2)t\}$ 和 $\mathfrak{F}_2\exp\{-(x_1+x_2)t\}$的逆傅里叶变换，也就是说，

$$F_1(\beta_1) = \mathcal{F}^{-1}\big(\mathfrak{F}_1(t)\exp\{-(x_1 - x_2)\}\big) \tag{3.1}$$

and

$$F_2(\beta_2) = \mathcal{F}^{-1}\big(\mathfrak{F}_2(t)\exp\{-(x_1 + x_2\}\big). \tag{3.2}$$

于是，根据反演公式，我们有

$$\mathfrak{F}_1(t) = \mathcal{F}\{F_1(\beta_1)\exp\{-(x_1 - x_2)t\}\} \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{F}_2(t) = \mathcal{F}\{F_2(\beta_2)\exp\{-(x_1 + x_2)t\}\}. \tag{3.4}$$

现在，由方程（3.3）和（3.4），我们得到

$$\begin{aligned} e\mathfrak{F}_1(t) + e^\dagger\mathfrak{F}_2(t) =& e\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\beta_1)\exp\{-it(x_0 + x_3) - tx_1 + tx_2\}dx_0\right) \\ &+ e^\dagger\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\beta_2)\exp\{-it(x_0 - x_3) - tx_1 + tx_2\}dx_0^\dagger\right) \\ =& e\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\beta_1)\exp\{-it\beta_1\}dx_0 + e^\dagger\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\beta_2)\exp\{-it\beta_2\}dx_0^\dagger \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} F(Z)\exp\{-itZ\}dZ \odot dZ^\dagger \\ =& \mathfrak{F}(Z). \end{aligned}$$

因此，对于 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$ 中的双复全纯函数，我们假设存在一个 L_k^2函数 $\mathfrak{F}$，使得

$$\mathfrak{F}(Z) = \frac{1}{2\pi}\int F(Z)\exp\{-itZ\}dZ \odot dZ^\dagger. \tag{3.5}$$

(3.5) 中的积分是在 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$ 中选择一条水平直线的结果，因为方程 (3.1) 和 (3.2) 是沿 $\prod^+$. 中的水平线的表示现在，我们需要证明 $\mathfrak{F} \in L_k^2\big((0,\infty)_{\mathbb{D}}\big)$ 是唯一确定的。因此，我们在这里使用柯西定理。

为此，令 $\curlywedge_\alpha$ 是 $\prod_{\mathbb{BC}^+}$. 中的矩形路径。那么，由于 $\curlywedge_\alpha$ 是闭路径，可以写成

$$\curlywedge_\alpha = e\curlywedge_{\alpha_1} + e^\dagger\curlywedge_{\alpha_2}, \tag{3.6}$$

其中，$\curlywedge_{\alpha_1}$ 和 $\curlywedge_{\alpha_2}$ 分别是 $e\prod^+$ 和 $e^\dagger\prod^+$中的矩形路径。利用方程（3.6），我们可以假设 $\curlywedge_{\alpha_1}$的顶点为 $e(\pm\alpha + i)$ $e^\dagger(\pm\alpha + i)$和 $e(\pm\alpha + iy)$ $e^\dagger(\pm\alpha + iy)$，令

$$I = \int_{\curlywedge_\alpha} F(Z)\exp\{-itZ\}dZ \odot dZ^\dagger.$$

那么，

$$I = e\int_{\curlywedge_{\alpha_1}} F_1\exp\{-it\beta_1\}d\beta_1 + e^\dagger\int_{\curlywedge_{\alpha_2}} F_2(\beta_2)\exp\{-it\beta_2\}d\beta_2, \tag{3.7}$$

其中 $F = eF_1 + e^\dagger F_2$ 使得 $F_1, F_2 \in H(\prod^+)$ 且 $Z = e\beta_1 + e^\dagger\beta_2$ 使得 $(\beta_1, \beta_2) \in \prod^+ \times \prod^+$. 因此，利用柯西定理，我们得到

$$I = 0. \tag{3.8}$$

利用方程 (3.7)，我们有 $I = eI_1 + e^\dagger I_2$. 求解 I_1 对于从直线 $e(\gamma + i)$ 到 $e(\gamma + iy)$，我们得到一个序列 $(\alpha_{1,\ j})_{j=1}^{\infty}$ 使得 $I_1(\alpha_{1,\ j}) \longrightarrow 0$ 并且 $I_1(-\alpha_{1,\ j}) \longrightarrow 0$ 如$j \to \infty$ 在 $e\Pi^+$. 中

同样，对于 I_2，我们可以找到一个序列 $(\alpha_{2,\ j})_{j=1}^{\infty}$ ，使得 $I_2(\alpha_{2,\ j}) \longrightarrow 0$ ，当 $j \to \infty$ 且$I_2(-\alpha_{2,\ j}) \longrightarrow 0$ 时 $j \to \infty$ 在 $e^\dagger\Pi^+$. 中。因此必定存在一个序列 $\{\alpha_{k,j}\}_{j=1}^{\infty}$ ，使得 $\{\alpha_{k,j}\}_{j=1}^{\infty} = e\{\alpha_{1,j}\}_{j=1}^{\infty} + e^\dagger\{\alpha_{2,j}\}_{j=1}^{\infty}$ 且

$$I(\alpha_{k,j}) \longrightarrow 0 \text{ and } I(-\alpha_{k,j}) \longrightarrow 0. \tag{3.9}$$

进一步推导，定义

$$G_j(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_{k,j}}^{\alpha_{k,j}} F(z_1 + jz_2)\exp\{-it(x_0 + kx_3)\}dx_0.$$

于是，由方程 (3.8) 和 (3.9)，可得

$$\lim_{j\to\infty}\{\exp\{-ktx_2 + tx_1\}G_j(x_1, x_2, t) - \exp\{-kt + t\}G_j(1, 1, t)\} = 0. \tag{3.10}$$

现在，令 $\mathcal{F}_{\mathbb{BC}}$ 为双复数傅里叶变换，并将 $F_{x_1,\ x_2}(x_0, x_3)$ 写作 $F(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3)$。那么 $F_{x_1,\ x_2}$ 属于 $L_k^2(-\infty, \infty)_{\mathbb{D}}$.
根据双复数 Plancherel 定理 [9], ，我们有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \|\hat{F}_{x_1,x_2}(t) - G_j(x_1, x_2, t)\|_k^2 dt \odot dt^\dagger = 0.$$

因此，由定理 1.6，序列 $\{G_j(x_1, x_2, t)\}$ 存在一个逐点收敛子序列 ˆ，该子序列几乎处处收敛到 $F_{x_1,\ x_2}(t)$。现在，定义

$$\mathfrak{F}(t) = \exp\{-kt + t\}\hat{F}_{1,1}(t). \tag{3.11}$$

由方程 (3.10)，我们有

$$\mathfrak{F}(t) = \exp\{-ktx_2 + tx_1\}\hat{F}_{x_1,x_2}(t). \tag{3.12}$$

因此，同样由 $\mathbb{BC}$ 的 Plancherel 定理，对于每个 $x_1, x_2 \in (0, \infty)_{\mathbb{D}}$，我们有 ，

$$\begin{aligned}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \exp\{-2(-ktx_2 + tx_1)\}\|\mathfrak{F}(t)\|_k^2 dt \odot dt^\dagger &= \int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \|\hat{F}_{x_1,x_2}(t)\|_k^2 dt \odot dt^\dagger \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \|F_{x_1,x_2}(x_0, x_3)\|_k^2 dx_0 \\ &\leqslant M. \end{aligned} \tag{3.13}$$

如果我们令 $x_2, x_1 \to \infty$，那么方程（3.13）表明 $\mathfrak{F}(t) = 0$ 在 $(-\infty, 0)_{\mathbb{D}}$ 上几乎处处成立，并且如果$x_2, x_1 \to 0$，那么

$$\int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} \|\mathfrak{F}(t)\|_k^2 \ dt \odot dt^\dagger \leqslant M. \tag{3.14}$$

Thus

$$F_{x_1,x_2}(x_0, x_3) = \int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \hat{F}_{x_1,x_2}(t)\exp\{it(x_0, x_3)\}dt \odot dt^\dagger \tag{3.15}$$

or

$$\begin{aligned} F(Z) &= \int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} \mathfrak{F}(t)\exp\{-(-ktx_2+tx_1)\}\exp\{it(x_0+kx_3)\}dt\odot dt^{\dagger} \\ &= \int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} \mathfrak{F}(t)\exp\{itZ\}dt\odot dt^{\dagger}\ ;\ Z\in\Pi_{\mathbb{BC}^+}. \end{aligned}$$

固定 x_2, x_1 后，再次应用双复数 Plancheral 定理，我们得到 n

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \|F(z_1+jz_2)\|_k^2 dx_0 &= \int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} \|\mathfrak{F}\|_k^2\exp\{-2(t(-kx_2+x_1))\}dt\odot dt^{\dagger} \\ &\leqslant \int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} \|\mathfrak{F}(t)\|_k^2 dt\odot dt^{\dagger}. \end{aligned}$$

Thus

$$\sup_{\substack{\mathbb{D}\\ 0<x_1,x_2<\infty}} \frac{1}{2\pi}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \|F(x_0+ix_1+jx_2+kx_3)\|_k^2 dx_0 = M \leqslant \int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} \|\mathfrak{F}(t)\|_k^2 dt\odot dt^{\dagger}. \tag{3.16}$$

因此，由方程 (3.14) 和 (3.16)，可得

$$\int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} \|\mathfrak{F}\|_k^2 dt\odot dt^{\dagger} = M.$$

□

接下来，我们讨论另一类形如下式的双复数 F

$$F(Z) = \int_{(-A,A)_{\mathbb{D}}} \mathfrak{F}(t)\exp\{itZ\}dt\odot dt^{\dagger}, \tag{3.17}$$

其中 $\mathfrak{F}\in L_k^2(-A,A)_{\mathbb{D}}$ 和 A 有限且为正。因此，

$$\begin{aligned} \|F(Z)\|_k &\leqslant \sqrt{2}\int_{(-A,A)_{\mathbb{D}}} \|\mathfrak{F}(t)\|_k\exp\{-(-ktx_2+tx_1)\}dt\odot dt^{\dagger} \\ &\leqslant \sqrt{2}\exp\{A\|(tx_1-ktx_2)\|_k\}\int_{(-A,A)_{\mathbb{D}}} \|\mathfrak{F}(t)\|_k dt\odot dt^{\dagger}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

如果 $C=\sqrt{2}\int_{(-A,\ A)_{\mathbb{D}}}\|\mathfrak{F}(t)\|_k dt$，那么 $C<\infty$，且 (3.18) 变为

$$\|F(Z)\|_k \leqslant C\exp\{A\|Z\|_k\}. \tag{3.19}$$

我们还可以证明，满足 (3.19) 的 F 整函数称为双复指数型。下一个定理的背景如下:

方程 (3.17) 中的函数类型是指数函数，其在实轴和第 k 轴上的限制属于 $L_k^2.$。我们将证明反过来也成立。

定理 3.2. 设 F 是一个指数型双复函数，并且

$$\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \|F(x_0+kx_3)\|_k^2 dx_0\odot dx_0^{\dagger} \ <\ \infty. \tag{3.20}$$

那么存在 $\mathfrak{F}\in L_k^2(-A,A)_{\mathbb{D}}$，使得:

$$F(Z) = \int_{(-A,A)_{\mathbb{D}}} \mathfrak{F}(t)\exp\{itZ\}dt\odot dt^{\dagger} \tag{3.21}$$

对于所有 $Z \in \mathbb{BC}$.

证明。设 $\epsilon_{\mathbb{D}}$ 是一个大于 0 的数，并设 $F_{\epsilon_{\mathbb{D}}}(x_0+kx_3) = F(x_0+kx_3)\exp\{-\epsilon_{\mathbb{D}}\|x_0+kx_3\|_k\}$. 那么，我们证明

$$\lim_{\mathbb{D}} \epsilon_{\mathbb{D}} \to 0 \int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} F_{\epsilon_{\mathbb{D}}}(x_0+kx_3)\exp\{-it(x_0+kx_3)\}dx_0 \odot dx_0^{\dagger} = 0, \tag{3.22}$$

其中 $t \in (-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}$ 且 $\|t\|_k > A.$。由此可见 $\|F_{\epsilon_{\mathbb{D}}} - F\|_{k,\ 2} \to 0$ 当 $\epsilon_{\mathbb{D}} \to 0.$。双复数 Plancheral 定理表明 $\|F_{\epsilon_{\mathbb{D}}} - \mathfrak{F}\|_{k,\ 2} \to 0$ 当 $\epsilon_{\mathbb{D}} \to 0$，其中 $\mathfrak{F}$ 是 $F.$ 的双复数傅里叶变换。因此，方程 (3.22) 表明 $\mathfrak{F}(t) = 0$ 在 $[-A, A]_{\mathbb{D}}$ 之外成立，故由推论 1 可知，(3.21) 对几乎所有 $Z = x_0 + kx_3.$ 都成立。此外，方程 (3.21) 的左右两边表示整个双复函数。因此，(3.21) 对每个 $Z \in \mathbb{BC}.$ 都成立。

因此，为了证明该定理，我们将证明 (3.22) 成立。
为此，令 $\curlywedge_\alpha$ 为一条双复数路径，定义为

$$\curlywedge_\alpha(u) = u\ \exp\{i\alpha\},$$

其中 $u \in [0,\infty)_{\mathbb{D}}$. 那么，

$$\curlywedge_\alpha\,(u) = e\,\curlywedge_{\alpha_1} + e^{\dagger}\curlywedge_{\alpha_2}, \tag{3.23}$$

其中 $\curlywedge_{\alpha_1}$ 和 $\curlywedge_{\alpha_2}$ 是复路径。将 $\mathbb{BC}$ 中的半平面置于其中。

$$\Pi_{\mathbb{BC}(\alpha)} = \{W : Re(W\exp\{i\alpha\}) > A\}$$

再次

$$\Pi_{\mathbb{BC}(\alpha)} = e\Pi_\alpha + e^{\dagger}\Pi_\alpha, \tag{3.24}$$

其中，Π_α 是$\Pi_{\mathbb{BC}(\alpha)}$ 在复平面中的分解。定义，

$$\Omega_\alpha(W) = \int_{\curlywedge_\alpha} F(Z)\exp\{-WZ\}dZ \odot dZ^{\dagger}. \tag{3.25}$$

那么 $\Omega_\alpha(W) = e\Omega_\alpha(W_1) + e^{\dagger}\Omega_\alpha(W_2)$，其中

$$\Omega_\alpha(W_i) = \int_{\curlywedge_{\alpha_1}} F_i(\beta_i)\exp\{-W_i\beta_i\}d\beta_i \quad \text{for} \quad i = 1, 2.$$

利用 [18, 第 375]，页上的这一复数版本定理，我们看到每个 $\Omega_\alpha(W_i)$ 在半平面 Π_α 上都是全纯的，因此 $\Omega_\alpha(W)$ 在 $\Pi_{\mathbb{BC}(\alpha)}\cdot$ 上也是全纯的。另外，如果 $\alpha = 0$，那么

$$\Omega_0(W) = \int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}} F(x_0+kx_3)exp\{-W(x_0+kx_3)\}dx_0 \odot dx_0^{\dagger}\ ; \quad ReW > 0$$

并且如果 $\alpha = \pi$,

$$\Omega_\pi(W) = -\int_{(-\infty,0)_{\mathbb{D}}} F(x_0+kx_3)exp\{-W(x_0+kx_3)\}dx_0 \odot dx_0^{\dagger}\ ; \quad ReW < 0.$$

因此，Ω_0 和 Ω_π 在 (3.20) 所示的半平面内是全纯的。现在，如果我们看到

$$\begin{aligned}
&\Omega_0(\epsilon_{\mathbb{D}}+it)-\Omega_\pi(-\epsilon_{\mathbb{D}}-it)\\
&\quad=\int_{(0,\infty)_{\mathbb{D}}}F(x_0+kx_3)\exp\{-(\epsilon_{\mathbb{D}}+it)(x_0+kx_3)\}dx_0+\\
&\int_{(-\infty,0)_{\mathbb{D}}}F(x_0+kx_3)\exp\{-(-\epsilon_{\mathbb{D}}+it)(x_0+kx_3)dx_0^\dagger\\
&=\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}}F(x_0+kx_3)\exp\{-(\epsilon_{\mathbb{D}}+it)(x_0+kx_3)-(-\epsilon_{\mathbb{D}}+it)(x_0+kx_3)\}dx_0^\dagger\\
&=\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}}F(x_0+kx_3)\exp\{(x_0+kx_3)[-\epsilon_{\mathbb{D}}-it+\epsilon_{\mathbb{D}}-it]\}dx_0\odot dx_0^\dagger\\
&=\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}}F(x_0+kx_3)\exp\{(x_0+kx_3)(-it)\}dx_0\odot dx_0^\dagger,
\end{aligned}$$

那么，只需证明 $\Omega_0(\epsilon_{\mathbb{D}})-\Omega_\pi(-\epsilon_{\mathbb{D}}+it)\ \to\ 0$ 对于 $\epsilon_{\mathbb{D}}\to 0$ 当 $t>A$ 且 $t<-A$ 时成立。利用 Ω_0 和 Ω_π 的幂等元分解，并借助幂等元 e 和 $e^\dagger$，再结合该定理的复数版本成立这一事实，即可证明这一点。因此，

$$\lim_{\mathbb{D}}\epsilon_{\mathbb{D}}\to 0\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}}F_{\epsilon_{\mathbb{D}}}(x_0+kx_3)\exp\{-it(x_0+kx_3)\}dx_0=0.$$

□

现在，我们证明上半平面上的双复数柯西积分公式。首先给出以下陈述：

定理 3.3。如果 $F\in H^p(\prod_{\mathbb{BC}^+})$； $1\leqslant p<\infty$，那么

$$F(Z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}}\frac{F(W)}{W-Z}dW\odot dW^\dagger\ ;Z\ \in\ \prod_{\mathbb{BC}^+}$$

并且对于所有 $Z\in\prod_{\mathbb{BC}^-}$.，积分均为零
反过来，如果 $H\in L_k^q(dm)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 并且

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}}\frac{H(W)}{W-Z}dW\odot dW^\dagger=0$$

对于所有 $Z\in\prod_{\mathbb{BC}^-}.$，那么对于 $Z\in\prod_{\mathbb{BC}^+}$，这个积分表示一个双复函数 $F\in H^p(\prod_{\mathbb{BC}^+})$，其中边界函数

$$F(x_0,x_3)=H(x_0,x_3)\ a.e.$$

证明。由于 $H^p(\prod_{\mathbb{BC}^+})=eH^P(\prod^+)+e^\dagger H^p(\prod^+)$ 且 $F\in H^p(\prod_{\mathbb{BC}^+})$。因此，双复数柯西积分公式（参见 [16], ）可表示为

$$C(F(Z))=e\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1(W_1)}{W_1-\beta_1}dW_1+e^\dagger\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_2(W_2)}{W_2-\beta_2}dW_2.$$

也就是说，

$$C(F(Z)) = eI_1 + e^{\dagger}I_2,$$

其中， I_1 和 I_2 是 F_1的复柯西积分， $F_2 \in H^p$（$\prod^+$）在 $\prod^+$ 和 $\prod^-$. 中均为解析函数。于是，双复数柯西积分在$\prod_{\mathbb{BC}^+}$ 和$\prod_{\mathbb{BC}^-}$.中均为全纯函数。

现在，利用幂等分解，我们得到

$$\begin{aligned} C(F(Z)) - C(F(Z^*)) =& \{e\mathfrak{F}_1(\beta_1) + e^{\dagger}\mathfrak{F}_2(\beta_2)\} - \{e\mathfrak{F}_1(\bar{\beta_1}) + e^{\dagger}\mathfrak{F}_2(\bar{\beta_2})\} \\ =& \, e\{\mathfrak{F}_1(\beta_1) - \mathfrak{F}_1(\bar{\beta_1})\} + e^{\dagger}\{\mathfrak{F}_2(\beta_2) - \mathfrak{F}_2(\bar{\beta_2})\}. \end{aligned}$$

因此，根据该定理的复数类比，我们有：

$$\begin{aligned} C(F(Z)) - C(F(Z^*)) =& \, e\{F_1(\beta_1)\} + e^{\dagger}\{F_2(\beta_2)\} \ \beta_1, \beta_2 \in \prod^+ \\ =& F(Z) \ ; \ Z \in \prod_{\mathbb{BC}^+}. \end{aligned}$$

因此， $C(F(Z^*)$ 在 $Z \in \prod_{\mathbb{BC}^+}$. 上是全纯的。因此， $C(F(Z))$ 在 $\prod_{\mathbb{BC}^-}$. 中必定是恒定的。由于 $C(F(Z)) \longrightarrow 0$ 当 $Z \longrightarrow \infty$ 时，我们有

$$C(F(Z)) = 0.$$

因此，

$$C(F(Z^*)) = F(Z) \in \prod_{\mathbb{BC}^+}$$

and

$$C(F(Z)) = 0 \ \in \prod_{\mathbb{BC}^-}.$$

反过来，假设 $H \in L_k^q(m)$。那么

$$L_k^q(m) = eL^q(m_1) + e^{\dagger}L^q(m_2) \tag{3.26}$$

and

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\infty,\infty)_{\mathbb{D}}} \frac{H(W)}{W - Z} dW \odot dW^{\dagger} = 0 \ ; Z \in \prod_{\mathbb{BC}^+}.$$

由于 $H \in L_k^q(m)$，并利用等式 (3.26) 中的分解以及该结果在每个 $L^q(m_i)$ 中成立这一事实；$i = 1$，2，定理得证。

□

References

[1] D. Alpay、M. E. Luna-Elizarraras、M. Shapiro 和 D. C. Sruppa，《双复标量泛函分析基础》及《双复舒尔分析》，Springer数学简明丛书，2014年。https : //doi.org /10.1007/978 − 3 − 319 − 05110 − 9[2] A. Banerjee、S. K. Datta 和 Md. H. Hoque，双复变量函数的傅里叶变换，《亚洲数学应用杂志》，(2015) 1-18。 http://scienceasia.asia[3] H. De Bie、D. C. Struppa、A. Vajiac 和 M. B. Vajiac，双复全纯函数的柯西-柯瓦列夫斯基乘积，《数学新闻》，285(10) (2012), 1230-1242。[4] J. Cockle，代数中的一种新虚量，《哲学杂志丛刊》，34(3) (1849), 37-47。

[5] F. Colombo、I. Sabadini 和 D. C. Struppa，双复全纯函数演算，《数学新闻》，287(13) (2013), 1093-1105。[6] M. E. Luna-Elizarraras、M. Panza、M. Shapiro 和 D. C. Struppa，双复函数与双曲变量函数的几何及恒等定理，《米兰数学杂志》，88 (2020), 247–261。https : //doi.org/10.1007/s 00032 − 020 − 00313 − 8[7] M. E. Luna-Elizarraras、M. Shapiro、D. C. Struppa 和 A. Vajiac，双复全纯函数：双复数的代数、几何与分析，《数学前沿》，Birkhäuser Basel 2015。[8] R. Gervais Lavoie、L. Marchildon 和 D. Rochon，无限维双复希尔伯特空间，《泛函分析年刊》，1(2) (2010), 75-91。[9] A. Ghanmi 和 K. Zine，Segal-Bergman变换与分数阶傅里叶变换的双复类比，《克利福德代数应用进展》，29(74) (2019)。[10] R. Kumar、R. Kumar 和 D. Rochon，双复拓扑模框架下的基本定理，(2011), arXiv : 1109.3424v1。[11] R. Kumar 和 K. Singh，双复希尔伯特空间上的双复线性算子与Littlewood从属定理，《克利福德代数应用进展》，(2015), 591-610。[12] R. Kumar 和 K. Sharma，双曲值测度与概率基本定律，《纯粹与应用数学全球期刊》，13(10) (2017), 7163-7177。$http : //www.ripublication.com/gjpam.htm$[13] M. E. Luna-Elizarraras、M. Shapiro、D. C. Struppa 和 A. Vajiac，双复数及其初等函数，《Cubo数学杂志》，14(2) (2012), 61-80。[14] C. O. Perez-Regalado 和 R. Quiroga-Barranco，有界域上的双复Bergman空间，(2018) arXiv : 1811.00150。[15] G. B. Price，《多复空间与函数导论》，《纯粹与应用数学专著与教材》，Marcel Dekker公司，纽约，140 (1991)。[16] J. B. Reyes、C. O. P. Regalado 和 M. Shapiro，双复情形下的柯西型积分及其性质，《复分析与算子理论》，13 (2019), 2541-2573。[17] J. D. Riley，双复变量函数理论的贡献，《东北数学杂志》第二辑，5 (1953), 132-165。[18] W. Rudin，《实分析与复分析》，第3版。Tata McGraw-Hill，新德里 (2006)。[19] C. Segre，复形式的实表示与超代数对象，《数学年刊》，40 (1892), 413-467。
Department of Mathematics, Central University of Jammu, Rahya-Suchani (Bagla)-181 143,Jammu (J&K), INDIA.*Email address*: sanjaykmath@gmail.com, sanjay.math@cujammu.ac.inDepartment of Mathematics, Central University of Jammu, Rahya-Suchani (Bagla)-181 143,Jammu (J&K), INDIA.*Email address*: stanzin.math@cujammu.ac.in