arXiv:2305.04802v2 [math.PR] 9 May 2023

随机代数图及其向 Erd ˝ os-R´enyi 收敛

Kiril Bangachev* Guy Bresler†

2023年5月10日

摘要

我们介绍一种新的潜在空间图概率模型，称为随机代数图。一个（右）随机代数图由一个群 $\mathcal{G}$ 定义，该群上有良定义的“均匀”分布 $\mathcal{D}$，以及一个可测函数 $\sigma : \mathcal{G} \longrightarrow [0,1]$，其在 $\mathcal{D}$ 上的期望为 p，且满足 $\sigma(\mathbf{g}) = \sigma(\mathbf{g}^{-1})$，我们称之为“连接函数”。顶点集为 $[n]$ 的随机图 RAG$(n, \mathcal{G}, p, \sigma)$ 按如下方式构造。首先，按照 $\mathcal{D}$. 抽取 n 个独立潜在向量$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$。然后，每两个顶点 i, j 以概率 $\sigma(\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1})$ 相连。随机代数模型涵盖了潜在空间为单位球面和超立方体的随机几何图、随机块模型的某些情形，以及凯莱图的随机子图。

本文关注的核心问题是：在什么参数条件下，随机代数图 RAG$(n, \mathcal{G}, p, \sigma)$ 在统计意义上和/或计算意义上可区分于 Erd˝os-R´enyi 随机图 G(n, p)? 我们的研究结果主要分为两大类。

1. 几何：我们主要关注超立方体情形 $\mathcal{G} = \{\pm 1\}^d$，并在其中使用傅里叶分析工具。我们预计，其中一些见解也适用于球面。对于硬阈值，我们匹配 [LMS+22b] for $p = \omega(1/n)$；对于 $\frac{1}{r\sqrt{d}}$-利普希茨连接函数，我们将 [LR21b] 在 $d = \Omega(n \log n)$ 时的结果扩展到非单调情形。我们还研究了其他连接函数，例如区间并指示函数和低次多项式。一个新颖的现象是，当 σ 为偶函数，即 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(-\mathbf{x})$ 时，与 G(n, p) 的不可区分性在 $d = \Theta(n^{3/2})$ 处出现，而不是在 $d = \Theta(n^3)$ 处出现；后者这一条件（忽略依赖于具体问题的隐含参数）出现在大多数先前结果中。
2. 代数：我们为以下指数级统计计算鸿沟提供证据。考虑任意有限群 $\mathcal{G}$，令 $A \subseteq \mathcal{G}$ 为一个元素集合，其构造方式是：以概率 $p = 1/2$. 独立地纳入每个形如 $\{\mathbf{g}, \mathbf{g}^{-1}\}$ 的集合。令 $\Gamma_n(\mathcal{G}, A)$ 表示如下随机图的分布：从凯莱图 $\Gamma(\mathcal{G}, A)$ 中均匀随机抽取一个大小为 n 的诱导子图。那么，$\Gamma_n(\mathcal{G}, A)$ 和 G$(n, 1/2)$ 在 A 上以高概率统计上不可区分，当且仅当 $\log |\mathcal{G}| \gtrsim n$. 然而，当 $\log |\mathcal{G}| = \log^{\Omega(1)} n$. 时，低次多项式检验无法以 A 上的高概率区分 $\Gamma_n(\mathcal{G}, A)$ 和 G$(n, 1/2)$。

在此过程中，我们还得到了两个据我们所知颇具新意、且可能具有独立研究价值的概率结果。首先，我们针对某些参数范围内独立 Rademacher变量的初等对称多项式的矩，给出了一个近乎紧的界（定理 1.7）。其次，我们证明，当 $n \times n$ 参数为 d 时，两个独立的 Wishart 矩阵之差在 KL 散度意义下收敛于经过适当缩放的 $n \times n$ GOE 矩阵，其中 $d = \omega(n^2)$。这一条件在多项式量级上弱于单个$d = \omega(n^3)$ 参数为 $n \times n$ 的 Wishart 矩阵收敛于 GOE 矩阵所需的条件；后者发生在 d $d = \omega(n^3)$ [BDE+14；JL13]。

*麻省理工学院电气工程与计算机科学系。kirilb@mit.edu

†电气工程与计算机科学系，麻省理工学院。guy@mit.edu。获美国国家科学基金会职业奖 CCF-1940205 支撑。

目录

1 引言 **1**

1.1 先前工作.3 1.2 我们关于超立方体的结果.5 1.3 随机代数图.8 1.4 我们关于典型凯莱图的结果.9

2 符号与预备知识 **11**

2.1 信息论.11 2.2 布尔傅里叶分析.12 2.3 通过傅里叶分析进行检测与不可区分性.14

3 超立方体上的不可区分性主定理 **16**

3.1 自相关函数的对称化.17 3.2 分解为初等对称多项式.18 3.3 初等对称多项式的矩.20 3.4 综合起来.22

4 主定理的应用 **26**

4.1 对称连接.26 4.2 对称连接的变换.31 4.3 典型指示函数连接.33

5 典型随机代数图的不可区分性 35

6 通过超立方体上的带符号三角形计数进行检测 38

6.1 对称连接的检测.38 6.2 带符号三角形的末日：傅里叶配对连接.42

7 典型指示函数连接的检测 45

7.1 带符号子图计数.45 7.2 低次数多项式.45 7.3 统计检测.49

8 讨论与未来方向 **50**

8.1 关于 Liu 和 Racz 的不可区分性论证.50 8.2 超立方体之外的群.52 8.3 统计计算鸿沟.53 8.4 布尔傅里叶分析与概率.53

A 带符号三角形统计量的方差 58 B d 层上的傅里叶权重 59 C 不含低次和高次项的布尔函数 61 D 傅里叶系数的进一步计算 64 E. Cayley 图生成元的分布 66 F 概率潜在空间图上的带符号四环 68

1 引言

潜空间随机图是一类随机图模型，其边的形成取决于与节点相关联的隐藏（潜在）向量。潜在空间图的诸多实例之一——例如出现在[SAC19], 中的实例——是社交网络，它们基于未观测到的特征（如年龄、职业、地理位置等）形成。文献研究这些模型的原因之一是，与更常见的 Erd˝os-R´enyi 随机图不同，潜在空间图能够捕捉并解释现实世界中的现象，例如“我朋友的朋友也（很可能）是我的朋友” [SAC19]。

捕捉这一结构的数学模型由潜在空间 Ω 上的概率分布 $\mathcal{D}$ 、整数 n 以及连接函数 $\sigma : \Omega \times \Omega \longrightarrow [0,1]$ 给出，满足 $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ 几乎处处成立。记 $\mathcal{D}$. $E_{\mathbf{x},\mathbf{y}\sim_{iid}\mathcal{D}}[\sigma(x,y)] \in [0,1]$. 。概率潜空间图 $PLSG(n, \Omega\ \mathcal{D}, \sigma, p)$ 定义如下 [*LR21b*]。对于邻接矩阵 $A = (A_{i,j})_{i,j\in[n]}$,

$$\mathbf{P}(G = \mathbf{A}) = \mathbf{E}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n\sim_{iid}\mathcal{D}}\left[\prod_{1\le i<j\le n} \sigma(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)^{\mathbf{A}_{i,j}}(1-\sigma(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j))^{1-\mathbf{A}_{i,j}}\right]. \tag{1}$$

用文字描述，对于每个节点 $i \in [n] = \{1,2,\ldots,n\}$，都会从 Ω 中按照 $\mathcal{D}$ 抽取一个独立的潜向量 $\mathbf{x}_i$，然后对于每一对顶点 i 和 j，都会以 $\sigma(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}j)$. 的概率独立地生成一条边。

注意，如果 σ 与 p 几乎必然相等，这就是 Erd˝os-R´enyi 分布 G(n, p)。更有趣的例子出现在 (Ω $\mathcal{D}$, σ)。具有更丰富结构的情形中。

本文重点研究的情形是 Ω 是一个群，且 σ 与群结构相“兼容”，如 定义 1.12所述。在深入探讨这一新颖的代数框架之前，我们先介绍一些背景知识和研究动机，具体而言，将描述一种具有几何结构的框架，这种框架已在文献中得到广泛研究。

假设 Ω 是一个度量空间（最常见的情况是 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 配备诱导的 $\|\cdot\|_2$ 度量），且 σ(x, y) 仅取决于 x 和 y 之间的距离。这类图称为随机几何图，我们用 RGG 代替 PLSG。在实践中，随机几何图已在无线网络[Hae12], 共识动力学 [ES16], 和蛋白质-蛋白质相互作用 [HRP08] 等领域得到了应用（更多应用参见 [Pen03; DC22] ）。从理论层面来看，随机几何图按照其构造方式，是一种具有相关边的随机图模型，为研究得更为透彻的 Erd˝os-R´enyi 模型提供了一套有趣且富有成果的平行理论。Khot、Tulsiani 和 Worah 利用球面上的随机几何图，为约束满足问题提供了近似下界 [KTW14], ; Liu 等人最近则证明，在某些参数范围内，随机几何图是高维扩张器[LMS+22a]。最后，对随机几何图的研究推动了概率论中其他领域的发展，例如 Wishart 矩阵收敛到高斯正交系综矩阵 [BG15; BDE+14; BBH 21],，而这又带来了诸如统计问题之间的平均情形归约等应用 [BB19]。

从 [DGL+11; BDE+14] 开始，高维情形（其中 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ and d 随着 n 增长）近年来受到了广泛关注 [BBH21; LR21b; LMS+22b; LMS+22a; EM20; EMP22; RR19; LR21a; BBN20; BBH22]。这些论文中的大多数以及我们当前的研究，其总体研究方向都基于以下观察，这一观察最初由 [DGL +11] 提出。当 $d \longrightarrow +\infty$ 对于一个固定的 n 时，随机几何图通常会失去其几何结构，并变得与具有相同预期密度的 Erdős-Rényi 图无法区分。这引出了以下问题：维数 d 需要多大，才能使边变得相互独立?

更具体地说，我们将每个 Ω $\mathcal{D}, p, \sigma$ 视为由 n 索引的隐式序列，并取 $n \longrightarrow +\infty$.。由此得到以下关于潜在空间图的假设检验问题：

$$H_0 : G \sim \mathsf{G}(n,p) \quad \text{versus} \quad H_1 : G \sim \mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathcal{D},\sigma,p). \tag{2}$$

与这些假设相关的至少有两个不同的问题：

1. 统计学： 首先，何时存在一致性检验？为此，我们旨在刻画这样的参数范围：两个分布之间的全变差趋于零或趋于一。

2. 计算方面： 其次，我们可以考虑计算高效检验。具体而言，何时存在一种多项式时间检验，能够以高概率求解式（2）？

迄今为止，文献主要关注几何模型，而对于这类模型，尚无证据表明统计问题与计算问题的答案有所不同。具体而言，一种高效检验（通过计数带符号子图来实现，我们将在第 6 节中看到）总是达到或近乎达到统计阈值。在第 7 节中，我们给出一个模型示例，有证据表明其统计检测阈值与计算检测阈值之间存在指数级差距。关于这一差距的证据来自日益流行的低次多项式检验框架（例如参见 [SW22], ）。

为了揭示这一差距（以及许多其他取决于 σ的新现象，参见第 1.2 节），我们首先聚焦于布尔超立方体[1], $\Omega = \{\pm 1\}^d \subseteq \mathbb{R}^d$. 。高维情形下的大多数既有论文研究的是单位球面或高斯空间。超立方体模型的优势在于，除了具有几何结构之外，它还具有非常简单的代数结构——它是 d 二阶群的乘积。底层的群结构便于使用傅里叶分析工具，从而使我们能够将结果推广到比以往研究更一般的连接函数 σ 。

<escape>我们关于超立方体的结果促使我们分析更一般的潜在空间图，其中 Ω 是一个群。我们将这类图称为第 1.3 节中定义的随机代数图。事实证明，在这种情形下，一个自然的条件是 $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 仅依赖于 $\mathbf{x}\mathbf{y}^{-1}$ （或者，等价地，依赖于 $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$）。正如我们将在第 1.3 节中看到的，随机代数图具有极其强大的表达能力。</escape>

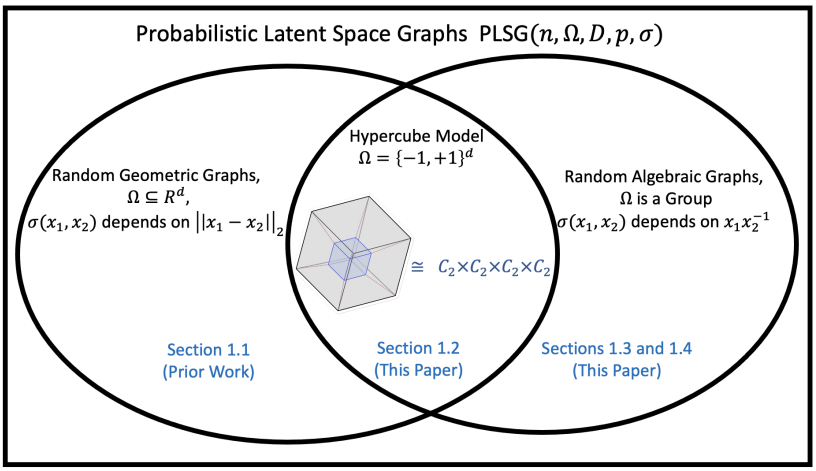

图 1：根据 Ω。底层结构划分的不同概率潜在空间图模型。图中标示了引言中讨论相应模型的章节。

超立方体模型可被视为随机代数图与随机几何图之间的桥梁。当然，在解读超立方体模型的结果时需要谨慎，因为这些结果可能源于底层几何，也可能源于底层代数。在第 8 节中，我们将讨论结果对几何和代数的依赖性。

[1]在整篇论文中，当我们说超立方体时，我们指的是布尔超立方体 $\{\pm 1\}^d$ 而非 $[0,1]^d$. 这一区别非常重要，因为 $[0,1]^d$ 其 $\|\cdot\|_2$ 度量并非齐性度量空间，这使得它的行为与单位球面和布尔超立方体的行为存在显著差异。具体而言，近期的研究 [EAG+20] 表明，在 $[0,1]^d$ 上构建的随机几何图未必会收敛到 Erd˝os-R´enyi 图。

1.1 先前工作

1. 单位球面与高斯空间上的硬阈值。关于高维随机几何图的大多数论文都研究单位球面上的硬阈值：潜在空间为 $\Omega = \mathbb{S}^{d-1}$，其上的分布为均匀分布 Unif。连接函数 σ 定义为 $\mathrm{T}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbb{1}[\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq \tau_{p,d}]$，其中 $\tau_{p,d}$ 的选取使得 $\mathrm{E}[\mathrm{T}_{p,d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = p.$。例如，$\tau_{1/2,d} = 0.$。在 [DGL+11] 中，作者开启了这一研究方向，证明当 $d = \exp(\Omega(n^2))$ 时，这两个图模型不可区分。Bubeck 等人在 [BDE+14] 中将 $d = \omega(n^3)$ 提升了一个指数级。[BDE+14] 的作者还隐含地证明了，当 $d = \tilde{O}(n^3p^3)$ 时，带符号三角形计数统计量（可在多项式时间内计算）能够区分 $\mathrm{G}(n,p)$ 和 $\mathrm{RGG}(n, \mathbb{S}^{d-1}, \mathrm{Unif}\ p, \mathrm{T}_p)$（例如，具体计算见 [LMS+22b], ）。人们相信，带符号三角形统计量给出了紧确界。

猜想 1.1（隐含于 [BDE+14；BBN20；LMS+22b] 及其他文献）。

$$\mathrm{TV}\Big(\mathsf{G}(n,p), \mathsf{RGG}(n, \mathbb{S}^{d-1}, \mathsf{Unif}, p, \mathbf{T}_p)\Big) = o_n(1)$$

当 $d = \tilde{\Omega}(n^3p^3)$ 对于 $p = \Omega(\frac{1}{n})$ 时。

目前关于这一猜想的进展如下。在稀疏区间，当 $p = \Theta(\frac{1}{n})$ 时，Liu 等人通过证明当 $d = \Omega(\log^{36} n)$ 时的不可区分性，在 [LMS+22b] 中解决了该猜想。当 $p \leq \frac{1}{2}$ 且 $p = \omega(\frac{1}{n})$ 时，同一篇论文证明，当 $d = \tilde{\Omega}(n^3p^2)$ 时，$\mathrm{TV}\Big(\mathrm{G}(n,p), \text{随机几何图}\ (n, \mathbb{S}^{d-1}, \mathrm{Unif}\ p, \mathrm{T}_p)\Big) = o(1)$ 成立；相较于猜想 1.1，还差一个因子 p。

包括 [BDE+14] 在内的多篇论文也研究了相关模型，其中将 $(\mathbb{S}^{d-1}$,Unif) 替换为 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d)^{\otimes n})$。这两个模型几乎等价，因为如果 $\mathbf{x}' \sim \mathcal{N}(0, I_d)$，那么 $\mathbf{x}' \times \|\mathbf{x}'\|_2^{-1} \sim \mathrm{Unif}(\mathbb{S}^{d-1})$，且 $\|\mathbf{x}'\|_2^2$ 高度集中于 $d.$。稍后讨论 Wishart 矩阵时，我们会进一步说明高斯空间模型的重要性。

2. Wishart 矩阵。 对于 $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)^{\otimes n} \in \mathbb{R}^{n \times d}$，用 $\mathcal{W}(n,d)$ 表示 Wishart 矩阵的分布 XX^T. 在 [BDE+14]中，作者证明并使用了以下结果。GOE 矩阵 $M(n)$ 是一个对称 $n \times n$ 矩阵，其元素服从高斯分布且为随机变量，并且主对角线及其上方的元素相互独立。主对角线上每个元素的方差为2，对角线上方每个元素的方差为 1。

定理 1.2 ([BDE+14；JL13])。 当 $d = \omega(n^3)$ 时，全变差距离 $\Big(\mathcal{W}(n,d)\ \sqrt{d}M(n) + I_n\Big) = o(1)$。

该结果表明，当 d 足够大时，$\mathcal{W}(n,d)$ 在全变差距离意义下是一个元素独立同分布的高斯矩阵。在随机几何图的背景下，这意味着潜向量的内积相互独立（以全变差距离衡量），因此相应的随机几何图具有相互独立的边。此后，定理 1.2 的结果得到了多种推广。在 [BG15], 中，作者将构造 Wishart 系综时使用的高斯密度替换为对数凹密度，并得到了类似的结果。在 [RR19], 中，作者通过计算 $\mathrm{TV}\Big(\mathcal{W}(n,d)\ \sqrt{d}M(n) + I_n\Big)$，证明 Wishart 系综与 GOE 之间的转变是“平滑”的，其中 $\lim_{n \to +\infty} d/n^3 = c$，且$c.$ 为固定常数。最后，在 [BBH21], 中，作者研究了含隐藏元素的 Wishart 矩阵向含隐藏元素的 GOE 的收敛。他们考虑了隐藏这些元素的结构化掩码和随机“掩码”。他们关于二部掩码的一项结果的特殊情形将在后文用到，具体如下。令 $\mathcal{M}$ 为一个 $n \times n$ 矩阵，将其分成四个 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ 块，其中左上块和右下块仅含零，左下块和右上块仅含一。令 $\odot$ 表示通常的 Schur（逐元素）乘积。

定理 1.3 ([BBH21])。 当 $d = \omega(n^2)$时，全变差距离 $\Big(\mathcal{M} \odot \mathcal{W}(n,d)\ \mathcal{M} \odot (\sqrt{d}M(n) + I_n)\Big) = o_n(1)$。

我们还提到，Ch’etelat 和 Wells 证明了 $\mathcal{W}$在 $n^{K+3} = \omega(d^{K+1})$ 对所有 $K \in \mathbb{N}$ [CW17]的密度存在一系列相变。

3. 软阈值。Liu 和 Racz [LR21a; LR21b] 的一系列研究考察了软阈值模型。在该模型中，边是随机的，而非 $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$ 的确定性函数，这对应于 σ 取值不局限于 0 和 1。[LR21a]，中，所关注的连接函数是纯噪声 $\sigma \equiv p$ 与 T_p 的凸组合，即 $\phi_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1-q)p + q\mathsf{T}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，其中某个 $q \in [0,1]$. 在 [LR21b]，中，作者则考察了如下构造的光滑单调连接函数。取 $(\Omega\ \mathcal{D}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d))$。假设 f 是一个 C_2 α-利普希茨密度，对应于$\mathbb{R}$. 上的零均值分布。令 F 为相应的累积分布函数。令 $\sigma_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := F\big(\frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle - \mu_p}{r\sqrt{d}}\big)$，，其中 $r \geq 1$ 且 $\mu_{p,d,r}$ 的选取满足 $\mathsf{E}[\sigma_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = p$.。 f 是 α-利普希茨这一事实意味着，将其视为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ 的函数时， σ_f 是 $O_\alpha(\frac{1}{r\sqrt{d}})$-利普希茨的（这可直接由 [LR21b, 引理 2.6 得出。]）。主要结果如下。

定理 1.4 ([LR21b]). 设随机几何图$(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d)\ p, \sigma_f)$ 如上所定义。*1)* 若 $d = \omega_{p,\alpha}(\frac{n^3}{r^4})$，则

$$\mathsf{TV}\Big(\mathsf{G}(n,p), \mathsf{RGG}(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d), p, \sigma_f)\Big) = o(1).$$

2）如果 $d = o_{p,\alpha}(\frac{n^3}{r^6})$，并且此外， $d/\log^2 d = \omega(r^6)$ 或 $r/\log^2(r) = \omega(d^{1/6})$，那么

$$\mathsf{TV}\Big(\mathsf{G}(n,p), \mathsf{RGG}(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d), p, \sigma_f)\Big) = 1 - o(1).$$

作者猜想，通过带符号三角形统计量推导出的下界 2) 是紧的[LR21b]。他们利用关于潜空间随机图的以下一般性论断推导出 1) 中的上界。该论断是本文不可区分性结果的出发点。

断言 1.5 ([LR21b])。设 p， $q \in [0,1]$ 是两个不一定相等的概率。考虑图$\mathsf{PLSG}(n,\ \Omega\ \mathcal{D},\ \sigma,\ q)$ 其中 n, $\Omega\ \mathcal{D}$, σ, q. 定义

$$\gamma_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{E}_{\mathbf{z}\sim\mathcal{D}}\Big[(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - p)(\sigma(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - p)\Big]. \tag{3}$$

于是，

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{PLSG}(n, \Omega, \mathcal{D}, \sigma, q) \| \mathsf{G}(n,p)\Big) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \log \mathbf{E}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\sim\mathcal{D}\times\mathcal{D}}\left[\left(1 + \frac{\gamma_p(\mathbf{x},\mathbf{y})}{p(1-p)}\right)^k\right].$$

通常，我们取 $p = q$. 出于纯粹的技术原因，我们以这种更一般的形式陈述结果：在 第 5 节 中，我们需要将其用于 $q = p(1+\epsilon)$，其中 ϵ 比 p.小得多，且相差呈指数级。

根据 Pinsker 不等式（见 定理2.2），证明 KL 散度为 $o(1)$ 阶，就意味着全变差也为 $o(1)$阶。展开上面的表达式，我们得到

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\sim\mathcal{D}\times\mathcal{D}}\left[\left(1 + \frac{\gamma_p(\mathbf{x},\mathbf{y})}{p(1-p)}\right)^k\right] = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} \frac{\mathbf{E}[\gamma_p^t]}{p^t(1-p)^t}. \tag{4}$$

因此，断言 1.5 将证明不可区分性界的问题归结为对 γ_p. 的矩进行界定。在[LR21b], 中，作者借助高斯分析中的多种工具实现了这一点。我们的方法截然不同，它依赖于将 γ_p 解释为自相关函数，而这要求 Ω 具有群论结构。

遗憾的是，正如 [LR21b], 所指出的，这一断言很可能并不紧。在第 8.1 节中，我们展示了新的实例（以及其不紧的原因），希望这能为如何改进断言 1.5提供启示。改进这一断言有望解决若干尚未解决的问题，例如猜想 1.1以及定理 1.4中的差距。

4. 其他随机几何图。近期也有研究探讨了其他几种随机几何图模型。例如，[BBH22；EM20] 研究了各向异性高斯向量的硬阈值模型。这两篇论文共同证明了协方差矩阵的特征值向量满足一个紧条件，在该条件下，全变差的阶为 $o(1)$。

1.2 我们在超立方体上的结果

文献中存在一个巨大空白，所有先前工作都聚焦于具备以下两个性质的连接 σ：

1. 单调性：$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \longrightarrow \sigma(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle)$ 的单调性是一个自然的假设，可以将其理解为：越接近或越对齐的向量，越有可能形成连接函数。不过，许多有趣的 σ 并非单调。例如，当向量弱相关时也可能形成连接，这对应于某些 δ. 下的非单调 $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{1}[|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \delta]$ 。正如我们将在第 4.1 节中看到的，关于 0 的底层对称性，即 $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y})$，会导致不同的不可区分率。

2. 对称性：连接 $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 仅依赖于 $\langle \mathbf{x}、\mathbf{y}\rangle$ 在坐标置换下是对称的。然而，在一些有趣的例子中，不同坐标可能以本质上不同的方式影响连接函数。例如，假设潜在向量对应于人们的特征，而图中的边对应于这群人之间的友谊。某些特征上的相似性——例如地理位置——会让人们更容易成为朋友；但其他特征——例如稀缺资源竞争——则可能因竞争关系而让人们更难成为朋友。在 第 4.2 节 中，我们使用一个简单的数学模型来描述此类连接函数，这同样会导致不同的不可区分率。

定理 3.1 迈出了一步，有助于弥补当前论文中的这一空白。它讨论了定义在超立方体 $\Omega = \{\pm 1\}^d$ 上、具有均匀测度 $\mathcal{D} = \mathsf{Unif}$ 的一大类概率潜在空间图，其中单调性和对称性均不成立。我们指出，由于我们的证明基于傅里叶分析工具，而这些工具可以推广到阿贝尔群的直积和环面，因此我们的结果很可能适用于更一般的情形。为获得简洁且易于解释的结果，我们在此不作进一步探讨。

<escape>主要的洞见在于，在超立方体上，傅里叶分析工具有助于分析依赖于逐坐标（群论意义上的）乘积 $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{xy} \in \{\pm 1\}^d$. 这种设定严格比内积的情形更为一般，因为 $(\mathbf{xy})_i = \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$. 当 σ 仅依赖于 $\mathbf{xy}$,时，我们使用记号 RAG （代表随机代数图，参见 定义 1.12），而非 PLSG。定理 3.1 给出了取决于每一层上傅里叶系数最大幅值的不可区分率（布尔傅里叶分析的预备知识见第 2.2 节）。非正式地说，我们有：</escape>

定理 1.6 (非正式 定理 3.1)。假设 $d = \Omega(n)$ $\sigma: \{\pm 1\}^d \longrightarrow [0,1]$ 的期望为 p，且 $m \in \mathbb{N}$ 是一个常数。令 $\sigma = \sum_{S\subseteq[d]} \widehat{\sigma}(S)\omega_S$。对于 $1 \leq i \leq d$，令 $B_i = \text{最大值}\left\{|\widehat{\sigma}(S)|\binom{d}{i}^{1/2} : |S| = i\right\}$。令

$$C_m = \sum_{i=m+1}^{d/2en} B_i^2 + \sum_{i=d-\frac{d}{2en}}^{d-m-1} B_i^2 \quad \textit{and} \quad D = \sum_{\frac{d}{2en}\leq j\leq d-\frac{d}{2en}} B_i^2.$$

若 C_m、B_u^2、$B_{d-u}^2 \leq p(1-p)$ 对 $0 \leq u \leq m$ 成立，则

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n,\{\pm 1\}^d,p,\sigma)\|\mathsf{G}(n,p)\Big) = O\left(\frac{n^3}{p^2(1-p)^2} \times \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{B_i^4}{d^i} + \sum_{i=d-m}^{d}\frac{B_i^4}{d^i} + \frac{C_m^2}{d^{m+1}} + D^2 \times \exp\left(-\frac{d}{2en}\right)\right)\right).$$

定性而言，只要 KL 散度 的所有傅里叶系数 σ 都很小，注 6.6中我们将证明其逆命题——单个较大的傅里叶系数就会使KL 散度 变大。

在第3节开头，我们概述了证明定理 1.6的四个主要步骤，然后再补充所有技术细节。这里，我们重点介绍推导出的以下不等式，它对证明至关重要。推导所需的KL 散度的上界时，就会用到它，因为该上界是通过对称函数的矩得到的。超立方体上的对称函数是初等对称多项式的加权和。

定理 1.7 (定理3.5)**.** 设 $d \in \mathbb{N}$. 考虑初等对称多项式 $e_s : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$定义为 $e_s(\mathbf{x}) = \sum_{S\subseteq[d]:|S|=s} \prod_{i\in S} x_i$. 若 $t \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{d}{2et} < s < d - \frac{d}{2et}$，则

$$\binom{d}{s} \exp\left(-\ln 2 \times \frac{d}{t}\right) \le \mathbf{E}_{\mathbf{x}\sim \mathsf{Unif}(\{\pm1\}^d)}\left[|e_s(\mathbf{x})|^t\right]^{1/t} \le \binom{d}{s} \exp\left(-\frac{d}{2et}\right).$$

我们没有尝试优化指数中的常数。对于其他分布，例如球面均匀分布和高斯分布，该上界同样成立，其中 $s < d/2$.

现在我们介绍定理 1.6 在不同 σ选择下的一些应用。尽管该定理的结论相当冗长，但应用起来却相对简单。我们根据各连接的对称程度来组织结果。注意，在 $\{\pm1\}^d$上的对称情形下，σ 仅取决于 $\sum_{i=1}^d x_i y_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$，这就是通常的内积模型。

1.2.1 对称连接

以往关于不可区分性的研究大多聚焦于单调连接，并证明了形如 $d = \tilde{\Omega}(n^3)$ 的必要条件（其中隐藏常数取决于 p、利普希茨性等）。我们证明，即使是一些最简单的非单调但仍然对称的连接，也会打破这一趋势。

定理 *1.8*（非正式表述，推论*4.5*、*4.10*和*4.14*）。如果 σ 是对称且为偶函数（即 $\sigma(g) = \sigma(-g)$），那么只要 $d = \tilde{\Omega}(n^{3/2})$，就有 $\mathrm{TV}\big(\mathrm{RAG}(n, \{\pm1\}^d, p, \sigma), \mathrm{G}(n, p)\big) = o(1)$。

<escape>之所以成立，是因为 σ 的奇数傅里叶层在偶连接函数的情况下会消失（因此，特别地$B_1 = 0$ 在 定理 1.6中）。我们通过以下猜想推广这一结果，但遗憾的是，该猜想并不能由我们的 定理 3.1 针对 $m > 3$ 推出，因为后者仅适用于 $d = \Omega(n)$这一范围。</escape>

猜想 *1.9*（猜想 *4.16*）。假设 σ 是对称连接函数，且当 $1 \le |S| \le m-1$ 或 $d-m-1 \le |S| \le d$ 时，$\hat{\sigma}(S) = 0$，其中常数 m. 固定。若 $d = \tilde{\Omega}(n^{3/m})$ 成立，则 $\mathrm{TV}\big(\mathrm{G}(n,p), \mathrm{RAG}(n, \{\pm1\}^d, p, \sigma)\big) = o(1)$。

在命题6.13 中，我们证明，如果这一猜想成立，那么它在对数因子范围内是紧的。具体而言，存在一些连接函数 σ，使得猜想 4.16 的条件均得到满足，并且只要满足以下条件，带符号三角形统计量就能区分这两个模型：$d = \tilde{o}(n^{3/m})$。

在对称情形下，定理 1.6 还有一些几乎可直接得出的应用如下。

1. 硬阈值连接。当 $\sigma = \mathrm{T}_p$（在超立方体上定义，方式类似于单位球面的定义）时，我们在推论 4.8 中证明，若 $d = \max\left(\tilde{\omega}(n^3p^2), \Omega(n \log n)\right)$ 成立，则 $\mathrm{TV}\big(\mathrm{RAG}(n, \{\pm1\}^d, p, \mathrm{T}_p)$ 与 $\mathrm{G}(n,p)\big) = o(1)$。这与 [LMS+22b] 中在 $p = \omega(n^{-1})$ 情形下球面上的最佳已知结果一致。对于 T_p 的偶数类比形式 $\mathrm{D}_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbb{1}\left[|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \ge \tau_{p/2,d}\right]$，其期望为 p，当 $d = \max\left((\tilde{\omega}(n^{3/2}p), \Omega(n \log n)\right)$ 时，$\mathrm{G}(n,p)$ 与 $\mathrm{RAG}(n, \{\pm1\}^d, p, \mathrm{D}_p)$ 无法区分；当 $d = o(n^{3/2}p^{3/2})$ 时则可以区分（见推论 4.10 和 6.2）。

2. Lipschitz 连接。在推论 4.4 中，我们证明，对于一个 $\frac{1}{r\sqrt{d}}$-利普希茨连接函数 σ，若 $d = \max\left(\Omega(n^3/r^4), \Omega(n\log n)\right)$，则 $\mathrm{TV}\left(\mathrm{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \sigma) \text{ 与 } \mathrm{G}(n,p)\right) = o(1)$，将 [LR21b] 的工作推广到了非单调情形。同样地，在偶数情形下，我们在推论 4.5 中将这一依赖关系改进为 $d = \max\left(\Omega(n^{3/2}/r^2), \Omega(n\log n)\right)$。

3. **区间并与波动**。在第 4.1.3 节中，我们将经典阈值模型推广到以下情形：其中σ 是单个区间的指示函数，即 $[\tau_{p,d}, +\infty)$ 推广到 σ 是由s 个互不相交区间的并的指示函数的情形。具体来说，当 $d = \Omega(n^3 + n^{3/2}s^2)$ 时，一般情形下满足不可区分性；而 $d = \Omega(n^{3/2}s^2)$ 时，偶数情形下满足不可区分性。我们在第 6.1.2 节中给出 $d = o(ns^2)$,下界，s 表明对其的依赖是紧的。

4. **低次数连接**。在第 4.1.5 节中，我们考虑 σ 是一个常数次数的对称多项式的情况。在这种情况下，我们证明，当$d = \Omega(n)$ 且 $d = \tilde{\omega}(\min(n^3p^2, np^{-2/3}))$时，在第 6.1.4 节中，我们给出了针对$d = o((np)^{3/4})$的检测下界，这种情况下存在一个多项式级别的差距。

1.2.2 对称连接的修改

由于定理 3.1 仅取决于各层傅里叶系数的大小，因此它也适用于不会增大傅里叶系数绝对值的对称连接变换。我们分析了两种这样的变换，称为“系数收缩”和“排斥-吸引”扭曲。这两种变换都有自然的解释，见第 4.2.1 节。

系数收缩的一个特例如下。对于对称连接函数 $\sigma : \{\pm 1\}^d \longrightarrow [0,1]$ 和固定的 $\mathbf{g} \in \{\pm 1\}^d$，系数收缩 $\sigma_{\mathbf{g}}$ 定义为 $\sigma_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) := \sigma(\mathbf{xg})$（这只会将满足 $g_i = -1$ 的坐标 x_i 取反）。如果用它的任意系数收缩 $\sigma_{\mathbf{g}}$ 替换连接函数 σ，那么第 1.2.1 节中的所有不可区分性结果仍然成立，并且对 d 的定量界完全相同。我们的证明技巧能够涵盖这些更一般的非对称连接，这一点是不可区分性结果的一项优点，但同时也是一个缺点。事实证明，某些系数收缩在统计上与 $\mathrm{G}(n,p)$ 不可区分所需的维数会小得多，但定理 1.6 并未涵盖这一现象。

一个特别有趣的例子可以说明这一点。在第 6.2 节中，我们考虑与 $\mathbf{h} = 1, 1, \ldots, 1_d, -1, \ldots, -1_d$对应的共维收缩，其中 $d = 2d_1$. 这种选择$\mathbf{h}$ 恰好抵消了一半变量。在这种情况下，$\sigma_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}) = \sigma_{\mathbf{h}}(\mathbf{xy})$取决于 $\sum_{i\le d_1} x_iy_i - \sum_{j>d_1} x_jy_j$. 因此，边取决于内积之差，而非内积（等价地说，是具有签名 $(+,+,\ldots,+_d,-,\ldots,-_d)$ 的内积）。相应的 Wishart 矩阵类似物具有如下形式：$XX^T - YY^T$，其中 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times d_1}$. 在高斯分布情形下，我们证明如下结论。

定理 *1.10*（定理 *6.17*）。将两个 *Wishart* 矩阵之差的分布定义如下。$\mathcal{W}(n, d_1, -d_1)$ 是 $XX^T - YY^T$ 的分布，其中 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times d_1}$ 是具有独立标准高斯元素的独立同分布矩阵。如果 $d_1 = \omega(n^2)$，那么全变差距离 $\left(\mathcal{W}(n, d_1, -d_1)\sqrt{d_1}M(n)\right) = o_n(1)$。

与定理 1.2相比，该结论仅在维数上有所不同。当 $d = \omega(n^3)$时，Wishart 矩阵收敛到高斯正交系综（GOE），而独立 Wishart 矩阵之差在 $d = \omega(n^2)$时收敛到高斯正交系综（*GOE*）。

这证明了在高斯分布情形下，对于任何仅依赖于$\sum_{i\le d_1} x_iy_i - \sum_{j>d_1} x_jy_j$的连接函数 $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，只要$d = \omega(n^2)$，就有 $\mathrm{TV}\left(\mathrm{RGG}(n, \mathbb{R}^{2d_1}, \mathcal{N}(0, I_{2d_1})\ p, \sigma), \mathrm{G}(n,p)\right) = o(1)$。我们预期超立方体模型也有同样的结论，但我们的定理 3.1 得到的依赖关系是 $d = \omega(n^3)$。

在 第 8.1 节中，我们使用 定理 1.10 严格证明，利用 KL 凸性推导 Claim1.5时存在低效之处，正如 [LR21b]所预测的那样。

1.2.3 典型指示函数连接导致统计计算鸿沟 p

最后，我们研究 RAG$(n, \{\pm1\}^d, p_A, \sigma_A)$ 的行为，其中 $A \subseteq \{\pm1\}^d$ 是超立方体的一个“典型”子集，σ_A 是其指示函数，而 $p_A = |A|/2^d$ 是期望。我们获得了强有力的证据，表明存在一个近乎指数级的统计计算鸿沟。

定理 1.11（非正式表述，定理 4.19、7.2、7.3 和7.5）。在上述设定中，

(a) If $d = \Omega(n \log n)$, *then* $\mathsf{TV}\Big(\mathsf{RAG}(n, \{\pm1\}^d, p_A, \sigma_A) \| \mathsf{G}(n, 1/2)\Big) = o(1)$ *for a* $1 - 2^{-\Omega(d)}$ *fraction of the subsets* A *of* $\{\pm1\}^d$.

(b) 如果 $d = \frac{n}{2} - \omega(1)$，那么 全变差距离 $\Big(\mathsf{RAG}(n, \{\pm1\}^d, p_A, \sigma_A) \| \mathsf{G}(n, 1/2)\Big) = 1 - o(1)$ 对 $\{\pm1\}^d$. 的所有子集 A 均成立。

(c) 若 $d = \log^{\Omega(1)} n$，则对于 $\{\pm1\}^d$. 的子集 A 中占 $1 - 2^{-\Omega(d)}$ 比例的部分，不存在低次多项式检验能够区分 $\mathsf{RAG}(n, \{\pm1\}^d, p_A, \sigma_A)$ 和 $\mathsf{G}(n, 1/2)$

我们的结果更具一般性，对 p 超出 $1/2$. 的其他取值也成立。下一节将更详细地介绍这一点，届时我们会把定理 1.11 推广到大小适当的任意群。与我们在一般群情形下的证明相比，超立方体情形中的傅里叶分析证明有一个优点：˜它给出了连接函数的显式构造，使统计极限出现在 $d = \Theta(n)$。特别地，对于所有满足 A 且 σ_A 为 $d^C/2^{d/2}$-正则的图，这一点都成立，其中常数 C (参见命题 4.20 和注 4.21)。

1.3 随机代数图

关于布尔超立方体的一个关键见解是，我们可以仅根据群乘积来分析连接函数 $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})$，这比由 $\mathbb{R}^d$. 诱导的内积一般得多。事实证明，这种构造可以自然地推广到一大类群。

定义 *1.12*（随机代数图）。设 Ω 是一个幺模局部紧豪斯多夫拓扑群 $\mathcal{G}$，具有唯一的左不变和右不变概率哈尔测度 μ，对应于分布 $\mathcal{D}$.[2]。进一步设连接函数 $\zeta\colon\ \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow [0,1]$ 由 $\zeta(x, y)$ 给出，且仅取决于 $x^{-1}y$，即 $\zeta(x, y) = \sigma(x^{-1}y)$，其中 $\sigma\colon\ \mathcal{G} \longrightarrow [0,1]$. 。那么，我们称 $PLSG(n, \mathcal{G}, \mathcal{D}, p, \zeta)$ 为左随机代数图。记作 $LRAG(n, \mathcal{G}, p, \sigma)$。类似地，对于仅取决于 xy^{-1}. 的连接函数，定义右随机代数图，并记作 $RRAG$。

显然，对于诸如 $\{\pm1\}^d$这样的阿贝尔群，右随机代数图与左随机代数图相同，因此我们将使用更简单的记法 RAG。 接下来，我们将随机代数图与其他研究充分的图模型（及其近似版本）联系起来，以此展示其表达能力。

[2]如果 $\mathcal{G}$ 是有限的，那么该测度就是群元素上的均匀测度。如果 $\mathcal{G}$ 是正交群，那么这就是其上的哈尔测度。重要的是，由于该群是单模的，左哈尔测度与右哈尔测度相同。

1. 球面和超立方体上的随机几何图。超立方体上的随机几何图是随机代数图。更令人惊讶的是，任何由 $\Omega = \mathbb{S}^{d-1}, \mathcal{D} = \mathrm{Unif},$ 以及仅依赖于内积的连接函数 ζ 所定义的随机几何图，都可以表示为随机代数图，尽管当 $d > 3.$ 时， $\mathbb{S}^{d-1}$ 并不具有群结构。具体而言，考虑另一个不同的潜在空间——正交群 $\mathcal{O}(d) = \Omega$及其哈尔测度。潜向量是独立同分布的"均匀分布"正交矩阵 $U_1, U_2, \ldots, U_n.$。为了在 $\mathbb{S}^{d-1}$,上生成均匀独立同分布的潜向量，取 $U_1 v, U_2 v, \ldots, U_n v$，其中 $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ 是任意的，设 $v = e_1.$。定义 $\sigma(U) := \zeta(\langle vv^T, U\rangle)$，并注意到

$$\zeta(U_i v, U_j v) = \zeta(\langle U_i v, U_j v\rangle) = \zeta(\langle vv^T, U_i^T U_j\rangle) = \sigma(U_i^{-1} U_j).$$

显然，$\mathrm{RGG}(n, \mathbb{S}^{d-1}, \mathrm{Unif}\ p, \zeta)$ 和 $\mathrm{LRAG}(n, \mathcal{O}(d)\ p, \sigma)$ 具有相同的分布。

2. 凯莱图：膨胀与随机子图。假设 $\mathcal{G}$ 是一个有限群，且 σ 是某个 $S \subseteq \mathcal{G}$ 的指示函数，该集合满足 $a \in S$ 当且仅当 $a^{-1} \in S.$。凯莱图 $\Gamma(\mathcal{G},\ S)$的顶点集为 $\mathcal{G}$，并且任意两个不同顶点 $g,\ h \in V(\Gamma(\mathcal{G},\ S))$之间存在边，其中 $= \mathcal{G}$ 满足 $gh^{-1} \in S.$。我们考虑两种情形。

首先，当 $n = o(\sqrt{|\mathcal{G}|})$。根据生日悖论，高概率下，$\mathrm{RRAG}(n,\ \mathcal{G},\ p,\ \sigma)$ 中的潜在向量两两不同。这立即引出以下观察。

观察 1.13。假设 $\mathcal{G}$ 是一个大小至少为 n 的群，并且 $S \subseteq \mathcal{G}$ 在取逆元时封闭。用 $\Gamma_n(\mathcal{G}, S)$ 表示 $\Gamma(\mathcal{G}, S)$的 n顶点诱导子图上的均匀分布。如果 $|\mathcal{G}| = \omega(n^2)$,

$$\mathsf{TV}\Big(\mathsf{RRAG}(n, \mathcal{G}, p, \sigma), \Gamma_n(\mathcal{G}, S)\Big) = o(1).$$

其次，当 $|\mathcal{G}| = o(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$. 以高概率，每个 $g \in \mathcal{G}$ 在 $\mathrm{RRAG}(n, \mathcal{G}, p, \sigma)$. 中都会作为潜向量出现 $\frac{n}{|\mathcal{G}|}(1 + o(1))$ 次。因此，$\mathrm{RRAG}(n, \mathcal{G}, p, \sigma)$ 近似为 $\Gamma(\mathcal{G}, S)$ 的 $\frac{n}{|\mathcal{G}|}$ 倍膨胀图 . —

<escape>有趣的是，可以考虑这种与凯莱图的关系是否能够用于理解随机几何图。例如，关于凯莱图的扩张性质，已有若干研究结果 [AR94；Con17], 这些结果可能与随机几何图的扩张性质相关[LMS+22a]。</escape>

3. 随机块模型。随机块模型由一个 n 顶点图构成，其中 k 个社区及其之间的边按如下方式形成（[RB17]）。首先，为每个顶点独立分配一个 $\{1, 2, \ldots, k\}.$ 中的均匀标签。然后，对于任意两个顶点，以概率 p 在它们具有相同标签时生成一条边，以概率 $q < p$ 在其他情况下生成一条边。将该图分布记为随机块模型(n, k, p, q)。

$\mathrm{SBM}(n,\ k,\ p,\ q)$ 可以如下建模为随机代数图。取一个任意的阿贝尔群$\mathcal{G}$，它包含一个阶为 $|\mathcal{G}|/k.$ 的子群 $\mathcal{H}$。定义 $\sigma\colon \mathcal{G} \longrightarrow [0, 1]$，使其满足 $\sigma(\mathrm{g}) := q + (p - q) \times \mathbb{1}[\mathrm{g} \in \mathcal{H}]$。于是，$\mathrm{RAG}(n,\ \mathcal{G},\ p+\overline{(k-1)_k}\ q,\ \sigma)$ 与 $\mathrm{SBM}(n,\ k,\ p,\ q)$ 具有相同的分布。这直接源于这样一个观察：随机块模型中的社群对应于随机代数图中潜向量属于关于 $\mathcal{H}$ 的同一陪集的顶点子集。

1.4 我们关于典型凯莱图的结果

我们利用随机代数图与凯莱图之间的连接函数，研究当生成集随机选取时凯莱图的高概率行为。我们所考虑的随机生成集上的分布如下。

定义 1.14（前逆封闭均匀测度）。设 $\mathcal{G}$ 是一个群，$0 \le p \le 1$ 是一个实数，可能依赖于 $\mathcal{G}$. 。定义密度 AnteU$(\mathcal{G}, p)$ 如下。考虑 $C_2 = \{1, \rho\}$ 在 $\mathcal{G}$ 上的作用，由 $\rho(g) = g^{-1}$ 定义，并设 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_t$ 为相应的轨道。令 $X_1, X_2, \ldots, X_t$ 为 t 独立同分布的伯努利分布(p)随机变量。那么，AnteU$(\mathcal{G}, p)$ 是 $S = \bigcup_j \mathcal{O}_j$ 的分布：$X_j = 1$.

我们将定理 1.11 推广，得到以下主要结果。定理 1.11如下。

定理 1.15（非正式表述，定理 5.1、7.2 和7.5）。考虑一个有限群 $\mathcal{G}$.

(a) 如果 $|\mathcal{G}| =$ 指数 $(\Omega(n$ 对数 $\frac{1}{p}))$，那么 全变差距离 $\left(\Gamma_n(\mathcal{G}, A),\ \mathsf{G}(n, p)\right) = o(1)$ 在 $A \sim$ AnteU$(\mathcal{G}, p)$ 上以至少 $1 - |\mathcal{G}|^{-1/7}$ 的概率成立。

(b) 如果 $|\mathcal{G}| = \exp(O(nH(p)))$，其中 H 是二元熵函数，则 全变差距离 $\left(\Gamma_n(\mathcal{G}, A), \mathsf{G}(n, p)\right) = 1 - o(1)$ 对于任意生成集 A.

(c) 如果 $|\mathcal{G}| = \exp(\Omega(k \log n))$，那么任何次数至多为 k 且以图的边为输入的多项式检验，都无法以高概率区分 $\mathsf{G}(n, p)$ 和 $\Gamma_n(\mathcal{G}, A)$，其中概率取自 $A \sim$ AnteU$(\mathcal{G}, p)$。

我们注意到，如果将 $\Gamma_n(\mathcal{G},\ A)$ 替换为 RRAG$(n,\ \mathcal{G},\ p_A,\ \sigma_A)$，则这些结果也可以用等价的方式表述，其中 σ_A 是 A 的指示函数，而 p_A 是其期望。

特别是，这表明 Γ_n（$\mathcal{G}$，A）与G（n，p）之间的不可区分性只取决于 $\mathcal{G}$的大小，而与其群结构无关。这延续了长期以来的一项传统：证明随机凯莱图的重要性质只取决于群的大小。关于这一主题的早期文献包括随机游走方面的研究 [AD86；DH96；HO21]（参见 [HO21] 以了解更多参考文献）、相关的图扩展性质 [AR94],以及典型凯莱图的色数 [Alo13] 。

先前结果与我们当前结果的一个主要区别在于所采用的生成集测度。先前的研究使用的是我们所称的后逆封闭均匀测度。

定义 1.16（后逆封闭均匀测度）。设 $\mathcal{G}$ 是一个有限群，$k \le |\mathcal{G}|$ 是一个整数。定义密度 PostU$(\mathcal{G}, k)$ 如下：从 $\mathcal{G}$ 中抽取 k 个均匀随机元素 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$，并令$Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_k\}$. 。那么，PostU$(\mathcal{G}, k)$ 是 $S = Z \cup Z^{-1}$. 的分布

生成集上的这两种测度有若干差异，但其中最关键的一点如下。对于前逆封闭均匀测度，每个元素以 S 的概率出现在p. 中。而对于后逆封闭均匀测度，一个g 阶为二的元素以 q 的概率出现：$=1 - (1 - \frac{1}{|\mathcal{G}|})^k$ 因为$\mathbf{g} \in Z \cup Z^{-1}$ 当且仅当$\mathbf{g} \in Z$. 另一方面，一个h 阶大于 2 的元素以 $1 - (1 - \frac{2}{|\mathcal{G}|})^k \approx 2q$. 的概率出现。这表明，对于同时具有大量二阶元素和阶大于 2 的元素的群，我们无法使用 PostU 测度来证明诸如定理 1.15中给出的不可区分性结果。考虑以下例子。

例 1.17. 考虑群 $\mathcal{G} = \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_2$. 。记关于子群 $\mathcal{C}_3$ 的三个不同陪集为 $H_i = \{i\} \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_2$，其中 $i \in \{0, 1, 2\}$. 。H_0 中的元素阶，至多为 2，而 H_1，H_2 中的元素阶为 3。现在，考虑 PostU$(\mathcal{G},$ ~~k~~$)$，~~其中 k 的选~~取满足$\mathbf{E}[|S| \times |\mathcal{G}|^{-1}] \approx \frac{1}{2}$. 。$H_0$ 中的每个元素以概率 q 出现在 S 中，而 H_1，H_2 中的每个元素以概率 $\sim 2q$ 出现，使得 $q \times |H_0| + 2q \times (|H_1| + |H_2|) = \frac{|\mathcal{G}|}{2}$. 。由此可得 $q \approx \frac{3}{10}$.

令 S 从 PostU$(\mathcal{G}, k)$ 和 $G \sim \Gamma_n(\mathcal{G}, S)$ 中抽取。以高概率，G 的顶点可以分为三群—— G_0, G_1, G_2, 其中 G_i 包含来自陪集 H_i. 的顶点。G 中 G_0, G_1, G_2 各自内部的平均密度约为 $3\,10$, 而 G 的边的平均密度则.....

在每个集合中至多有一个端点，G_0, G_1, G_2 将约为[6 10]. 显然，对于 Erd˝os–R´enyi 图，这种对顶点 G_0, G_1, G_2 的划分通常并不存在。因此，无法利用 $\mathcal{G} = \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \underbrace{\mathcal{C}_2}_{d}$ 上的 PostU 测度获得统计不可区分性结果。

当然，AnteU 和 PostU 之间还存在其他差异，例如，在 PostU 测度下，来自不同轨道的元素并非独立出现（例如，S 的最大元素数量为 $2k$）。不过，这些差异的影响相对较小。在附录 E 中，我们进一步刻画了 AnteU 之外的其他分布，在这些分布下，我们的统计和计算不可区分性结果仍然成立。非正式地说，分布 $\mathrm{D}(\mathcal{G}, p)$ 所需满足的性质如下。设 $A \sim \mathrm{D}(\mathcal{G}, p)$。对于几乎所有元素 $\mathrm{x} \in \mathcal{G}$，如果我们以任意事件 E 为条件，该事件规定除 x 之外的 polylog($|G|$) 个元素是否属于 x^{-1}，我们仍然有 $\mathrm{P}[\mathrm{x} \in A|E] = p + O(|\mathcal{G}|^{-c})$，其中 $c \in (0, 1)$ 是一个常数。

特别地，这意味着，当我们使用 PostU($\mathcal{G}$, k) 时，只要适当地选择 k，使得 $(1 - \frac{1}{|\mathcal{G}|})^k = p + O(\frac{1}{|\mathcal{G}|})$，我们的关于 $\mathcal{G} = \{\pm 1\}^d$ 的结果就仍然成立，因为 $\{\pm 1\}^d$ 中的所有元素的阶均为 2。类似地，对于所有不含二阶元素的群，我们都可以使用具有适当 k 的 PostU 密度，其中包括奇数阶群。

2 符号与预备知识

2.1 信息论

本文的主要研究内容是理解两个图分布——G(n, p) 和 PLSG(n, Ω $\mathcal{D}$, σ, p)——在什么情况下具有统计不可区分性，以及在什么情况下不具有统计不可区分性。为此，我们需要定义分布之间的相似性度量。

定义 2.1 (例如，[PWng])。设$\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$ 是可测空间$(\Omega\ \mathcal{F})$上的两个概率测度。假设$\mathbf{P}$ 关于$\mathbf{Q}$ 绝对连续，且其 *Radon-Nikodym* 导数为$\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$. 对于一个凸函数 f: $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$，满足 $f(1) = 0$，$\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$之间的 f-散度定义为

$$\mathsf{D}_f(\mathbf{P}\|\mathbf{Q}) = \int_\Omega f\left(\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}\right) d\mathbf{Q}.$$

本文主要关注以下两种 f-散度:

1. 全变差: 全变差$(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$:=$\mathrm{D}_f(\mathbf{P}\|\mathbf{Q})$ 对于 $f(x) = \frac{1}{2}|x - 1|$. 很容易证明，全变差可以等价地定义为全变差$(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sup_{A\in\mathcal{F}} |\mathbf{P}(A) - \mathbf{Q}(A)|$.
2. *KL* 散度: $\mathrm{KL}(\mathbf{P}\|\mathbf{Q})$:=$\mathrm{D}_f(\mathbf{P}\|\mathbf{Q})$ for $f(x) = x \log x$ (where $f(0) = 0$).

众所周知，全变差刻画了最优统计检验的错误概率。然而，证明 KL 散度的界通常更容易，再通过 Pinsker 不等式将其转化为全变差。

定理2.2 (例如，[PWng])。设 $\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$ 是可测空间上的两个概率测度$(\Omega\ \mathcal{F})$，且 $\mathbf{P}$ 相对于 $\mathbf{Q}$绝对连续。那么，

$$\mathsf{TV}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq \sqrt{\frac{1}{2}\mathsf{KL}(\mathbf{P}\|\mathbf{Q})}.$$

我们还需要用到另一个经典的不等式，即数据处理不等式。这里只陈述我们所需的非常弱的形式。

定理 *2.3*（例如，[*PWng*]）。对于任意两个分布 P、Q，任意可测的确定性函数 h，以及任意 f-散度 D_f，不等式 $D_f(P\|Q) \geq D_f(h_*(P)\|h_*(Q))$ 成立。这里，$h_*(P)$ $h_*(Q)$ 是相应的推前测度。

2.2 布尔傅里叶分析

本文的主要贡献之一，是将布尔傅里叶分析中的工具引入随机几何图的研究。这里我们将对这一主题作简要介绍。关于这一主题的优秀著作是 [ODo14], ，本文的论述主要以该书为基础。

我们注意到， $\{\pm 1\}^d$ 是一个阿贝尔群（同构于 $\mathbb{Z}_2^d$），其中元素$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$的乘积简记为$\mathbf{xy}$。注意，$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{-1}$ 在 $\{\pm 1\}^d$. 上

布尔傅里叶分析用于研究函数 $f\colon \{\pm 1\}^d \longrightarrow \mathbb{R}$. 。一个重要事实是以下定理：超立方体上的所有函数都是多项式。

定理 2.4。 每个函数 $f\colon \{\pm 1\}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ 都可以唯一表示为

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{S \subseteq [d]} \widehat{f}(S)\omega_S(\mathbf{x}),$$

其中 $\omega_S(\mathbf{x}) = \prod_{i \in S} x_i$ 且 $\widehat{f}(S)$ 是一个实数，我们称其为 S. 上的傅里叶系数

我们称单项式 $\omega_S(\mathbf{x})$ 特征 或 沃尔什多项式。容易验证 $\omega_\emptyset \equiv 1$和 $\omega_s\omega_T = \omega_{S \Delta T}$. 。沃尔什多项式构成了 $\{\pm 1\}^d$. 上实值函数空间的正交基。也就是说，对于两个这样的函数 f， g， 定义 $\langle f, g\rangle = \mathbf{E}_{\mathbf{x}\sim \mathsf{Unif}(\{\pm 1\}^d)}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})]$. 这是一个定义良好的内积，据此可定义一个 L_2-范数 $\|f\|_2^2 := \langle f, f\rangle$。

定理 2.5（例如， [ODo14]）。以下等式成立。

1. $\langle \omega_s, \omega_T\rangle = \mathbb{1}[T = S]$.
2. $\langle f, g\rangle = \sum_{S \subseteq [d]} \widehat{f}(S)\widehat{g}(S)$。特别是，
   (a) $\widehat{f}(S) = \mathbf{E}[f(\mathbf{x})\omega_S(\mathbf{x})]$.(b) $\|f\|_2^2 = \sum_{S \subseteq [d]} \widehat{f}(S)^2$.(c)$\mathbf{E}[f] = \widehat{f}(\emptyset)$,**方差**$[f] = \sum_{\emptyset \subsetneq S \subseteq [d]} \widehat{f}(S)^2$.
3. 傅里叶卷积 $(f * g)\colon \{\pm 1\}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $(f * g)[\mathbf{x}] = \mathbf{E}[f(\mathbf{x}\mathbf{z}^{-1})g(\mathbf{z})]$ 可以表示为

$$(f * g)[\mathbf{x}] = \sum_{S \subseteq [d]} \widehat{f}(S)\widehat{g}(S)\omega_S(\mathbf{x}).$$

通常，研究其他 L_p-范数很有用。对于 $p \geq 1$，其定义为 $\|f\|_p := \mathbf{E}_{\mathbf{x}\sim \mathsf{Unif}(\{\pm 1\}^d)}[|f|^p]^{1/p}$.根据詹森不等式，$\|f\|_p \leq \|f\|_q$在 $p < q$. 时成立。然而，事实证明，某个反向不等式也成立。为陈述该不等式，我们需要噪声算子。

定义 2.6。 对于 $\mathbf{x} \in \{\pm 1\}^d$，令 $\mathcal{N}_\rho(\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{x}$ 的 ρ-相关分布，其中 $\rho \in [0, 1]$. 。也就是说，$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_\rho(\mathbf{x})$ 定义如下。对于每个 $i \in [d]$，独立地以概率 $\frac{1+\rho}{2}$ .....，以概率 $\frac{1-\rho}{2}$ .....。定义：

1. 噪声算子：超立方体上函数的线性算子 T_ρ 定义为 $T_\rho f[\mathbf{x}] := \mathbf{E}_{\mathbf{y}\sim \mathcal{N}_\rho(\mathbf{x})}[f(\mathbf{y})]$. $T_\rho f$ 的傅里叶展开为

$$T_\rho f = \sum_{S \subseteq [d]} \rho^{|S|}\widehat{f}(S)\omega_S.$$

鉴于这个等式， T_ρ 也可以定义为 $\rho > 1$.

2. 稳定性：函数 $f:\ \{\pm1\}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ 的稳定性定义为

$$\mathbf{Stab}_\rho[f] := \langle T_\rho f, f\rangle = \sum_{S\subseteq[d]} \rho^{|S|}\widehat{f}(S)^2 = \left\|T_{\sqrt{\rho}}f\right\|_2^2$$

现在可以陈述我们将在第3节中使用的主要超收缩性结果。

定理 2.7([Bon70])**.** 对于任意 $1 \le p \le q$ 以及任意 $f:\ \{\pm1\}^d \longrightarrow \mathbb{R}$，都有以下不等式

$$\|f\|_q \le \left\|T_{\sqrt{\frac{q-1}{p-1}}}f\right\|_p.$$

特别地，当 $q \ge p = 2$ 时，有 $\|f\|_q^2 \le \sum(q-1)^{|S|}\widehat{f}(S)^2.S\subseteq\emptyset$

噪声算子对 ω_S 的傅里叶系数的影响完全取决于 $S.$ 的大小。基于这一点以及其他原因，引入傅里叶权重很有用。具体而言，对于函数 f: $\{\pm1\}^d \longrightarrow \mathbb{R}$，我们将其在第 $i \in \{0,1,2,\ldots,d\}$ 层的权重定义为

$$\mathcal{W}^i(f) = \sum_{S\subseteq[d]\,:\,|S|=i} \widehat{f}(S)^2.$$

类似地，我们记 $\mathcal{W}^{\le i}(f) = \sum_{j\le i}\mathcal{W}^j(f)$ 和 $\mathcal{W}^{\ge i}(f) = \sum_{j\ge i}\mathcal{W}^j(f)$。显然，对于每个 i，都有$\mathcal{W}^i(f) \le \sum_{j=0}^d \mathcal{W}^j(f) = \|f\|_2^2$.特别地，这意味着如果 $|f| \le 1$ 几乎处处成立（按定义，随机几何图中的连接函数 σ 就属于这种情况），那么对于每个 $i.$，$\mathcal{W}^i(f) \le 1$ 也成立。在某些情况下，还可以推导出更精确的不等式。

定理 2.8 ([KKL88])。 对于任意函数 $f:\ \{\pm1\}^d \longrightarrow [-1,1]$ 满足 $\|f\|_1 = \alpha$， 不等式

$$\mathcal{W}^{\le k}(f) \le \left(\frac{2e}{k}\ln(1/\alpha)\right)^k \alpha^2 \quad \textit{and} \quad \mathcal{W}^{\ge d-k}(f) \le \left(\frac{2e}{k}\ln(1/\alpha)\right)^k \alpha^2$$

在 $k \le 2\ln(1/\alpha)$ 时成立。

最后，我们讨论低次多项式。我们称 $f:\ \{\pm1\}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ 的次数为 k，如果$\widehat{}$它是一个 k 次多项式，也就是说 $f(S) = 0$ 在 $|S| > k.$ 时成立。事实证明，这类多项式的傅里叶系数出奇地小。具体而言，Eskenazis 和 Ivanisvili 运用 Bohnenblust-Hille 不等式的一个变体证明了以下结果。

定理 2.9 ([EI22])。 对于任意固定数 $k \in \mathbb{N}$， 存在某个常数 C_k，使其满足以下性质。如果 $f:\ \{\pm1\}^d \longrightarrow [-1,1]$ 是一个次数为 k 的函数，那么对于任意 $\ell > 0$

$$\sum_{S\,:\,|S|=\ell} |\widehat{f}(S)| \le C_k d^{\frac{\ell-1}{2}}.$$

特别地，如果 f 是对称的（对每个$\mathbf{x}$和置换 π，$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\ldots,x_{\pi(n)})$ 均成立），则以下界成立。

推论 2.10。 如果 $f:\ \{\pm1\}^d \longrightarrow [-1,1]$ 是一个对称常数次数函数，那么对于任意 $\ell > 0.$，$\mathcal{W}^\ell(f) = O(1/d)$

证明。 我们只需注意到 定理 2.9 蕴含

$$\mathcal{W}^\ell(f) = \binom{d}{\ell}\left(\frac{\sum_{S\,:\,|S|=\ell}|\widehat{f}(S)|}{\binom{d}{\ell}}\right)^2 = O\Big(d^\ell \times \frac{d^{\ell-1}}{d^{2\ell}}\Big). \qquad \square$$

2.3 通过傅里叶分析进行检测与不可区分性

在进入本文的主要论证之前，我们先通过两个简单的例子说明傅里叶分析工具在研究随机代数图中的应用，这些工具将在后文发挥作用。这些观察为文献中先前研究过的对象提供了新的视角。

2.3.1 不可区分性

首先，我们将把函数 γ 从 断言 1.5 解释为一个自相关函数 .

Prop命题 2.11。 设 $\mathcal{G} = \{\pm 1\}^d$，并假设 σ 仅依赖于 $\mathbf{xy} = \mathbf{xy}^{-1}$. 则 n,

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sigma - p) * (\sigma - p)[\mathbf{xy}^{-1}].$$

证明。 令 $\sigma(\mathbf{g}) = \sum_{S \subseteq [d]} \widehat{\sigma}(S)\omega_S(\mathbf{g})$，其中 $\mathbf{g} \in \{\pm 1\}^d$. 特别地， $\widehat{\sigma}(\emptyset) = p$. 现在，我们有

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{E}_{\mathbf{z} \sim \mathsf{Unif}(\{\pm 1\}^d)}[(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - p)(\sigma(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - p)] = \mathbf{E}_{\mathbf{z}} \sum_{\emptyset \subsetneq S, T \subseteq [d]} \left[\widehat{\sigma}(S)\widehat{\sigma}(T)\omega_S(\mathbf{xz}^{-1})\omega_T(\mathbf{zy}^{-1})\right] \\ &= \sum_{\emptyset \subsetneq S, T \subseteq [d]} \widehat{\sigma}(S)\widehat{\sigma}(T)\omega_S(\mathbf{x})\omega_T(\mathbf{y}^{-1})\mathbf{E}[\omega_{T \delta S}(\mathbf{z})] = \sum_{S \neq \emptyset} \widehat{\sigma}(S)^2 \omega_S(\mathbf{xy}^{-1}) \\ &= (\sigma - p) * (\sigma - p)[\mathbf{xy}^{-1}].\end{aligned}$$

□

当我们将 $\{\pm 1\}^d$ 替换为任意有限阿贝尔群（以及其他一些群，例如有限阿贝尔群与环面的乘积，只要 σ 是 L_2关于 $\mathcal{D}$可积的），同样的论证也完全适用。因此，我们使用 $\mathbf{xy}^{-1}$。鉴于 公式（4），我们只需证明自相关函数的矩的界，其中自相关函数对应于 $\sigma - p$ （即 σ的自相关函数的中心矩）。

2.3.2 使用傅里叶系数项中的带符号环进行检测

令边 i, j 的指示函数为 $G_{i,j}$. 。文献中关于随机几何图的几乎所有检测算法，都是通过在相应图中计数“带符号” k-环推导出来的，参见 $k \in \{3, 4\}$[LR21b; BDE+14; BBH21]。形式上，这些工作给出了以下检测算法；当 k 为常数时，该算法可在 $O(n^k)$ 时间内高效计算。对所有简单环 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 组成的集合 $\mathcal{C}$ 求和，计算量为 $\prod_{t=1}^{k}(G_{i_t, i_{t+1}} - p)$, 其中 $i_{k+1} := i_1$. 。所得统计量为

$$\tau_{k,p}(G) := \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathcal{C}} \prod_{t=1}^{k} (G_{i_t, i_{t+1}} - p)\,. \tag{5}$$

由于每条边 $G_{i,j}$ 在 Erd˝os-R´enyi 图中都以概率 p 独立出现，显然$\mathbf{E}_{G \sim \mathsf{G}(n,p)}[\tau_k(G)] = 0$. 。因此，要以高概率区分 $\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \sigma)$ 和 $\mathsf{G}(n, p)$,, 只需证明

$$|\mathbf{E}_{H \sim \mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \sigma)} \tau_k(G)| = \omega(\mathbf{Var}_{G \sim \mathsf{G}(n,p)}[\tau_k(G)] + \mathbf{Var}_{H \sim \mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \sigma)}[\tau_k(H)])$$

根据切比雪夫不等式。现在我们用布尔傅里叶分析的语言展示如何计算相关量。

观察 2.12。 对于任意一组 k 指标 $i_1, i_2, \ldots, i_k$，都有

$$\mathbf{E}_{G \sim \mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \sigma)} \left[\prod_{t=1}^{k} (G_{i_t, i_{t+1}} - p)\right] = \sum_{S \neq \emptyset} \widehat{\sigma}(S)^k.$$

证明。 我们只需计算

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\prod(G_{i_t,i_{t+1}}-p)\right]=\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\prod(G_{i_t,i_{t+1}}-p)|\mathbf{x}_{i_1},\mathbf{x}_{i_2},\ldots,\mathbf{x}_{i_t}\right]\right]\\&=\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\prod(\sigma(\mathbf{x}_{i_t}^{-1}\mathbf{x}_{i_{t+1}})-p)|\mathbf{x}_{i_1},\mathbf{x}_{i_2},\ldots,\mathbf{x}_{i_t}\right]\right].\end{aligned}$$

现在，注意到$\mathbf{x}_{i_1}$、$\mathbf{x}_{i_2}$、……、$\mathbf{x}_{i_k}$在超立方体上独立且均匀分布。因此，当我们代入$\mathbf{g}_\ell=\mathbf{x}_{i_{\ell-1}}^{-1}\mathbf{x}_{i_\ell}$，向量$\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2$、……、$\mathbf{g}_{k-1}$相互独立，且$\mathbf{g}_k=\mathbf{g}_1^{-1}\mathbf{g}_2^{-1}\cdots\mathbf{g}_{k-1}^{-1}$. 由此可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\prod(\sigma(\mathbf{x}_{i_t}^{-1}\mathbf{x}_{i_{t+1}})-p)|\mathbf{x}_{i_1},\mathbf{x}_{i_2},\ldots,\mathbf{x}_{i_t}\right]\right]\\&=\mathbf{E}_{(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\ldots,\mathbf{g}_{k-1})\sim_{iid}\mathsf{Unif}(\{\pm1\}^d)}(\sigma(\mathbf{g}_1)-p)(\sigma(\mathbf{g}_2)-p)\cdots(\sigma(\mathbf{g}_{t-1})-p)(\sigma(\mathbf{g}_1^{-1}\mathbf{g}_2^{-1}\cdots\mathbf{g}_{k-1}^{-1})-p).\end{aligned}$$

将上述乘积按傅里叶基展开，得到

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\sum_{S_1,S_2,\ldots,S_t}\prod_{i=1}^{t}\widehat{\sigma}(S_i)\times\prod_{i=1}^{t-1}\omega_{S_i}(\mathbf{g}_i)\times\omega_{S_t}(\mathbf{g}_1^{-1}\mathbf{g}_2^{-1}\cdots\mathbf{g}_{t-1}^{-1})\right]\\&=\sum_{S_1,S_2,\ldots,S_t}\prod_{i=1}^{t}\widehat{\sigma}(S_i)\times\prod_{i=1}^{t-1}\mathbf{E}\left[\omega_{S_i}(\mathbf{g}_i)\omega_{S_t}(\mathbf{g}_i^{-1})\right].\end{aligned}$$

由于$\langle\omega_{S_i},\omega_{S_t}\rangle=\mathbb{1}[S_i=S_t]$，结论得证。 □

由此可知，当 $k=O(1)$，

$$\mathbf{E}_{G\sim\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)}[\tau_k(G)]=\Theta\Big(n^k\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^k\Big).$$

在附录 A中，我们用非常相似的推理证明，方差也可以用 σ.的傅里叶系数来界定

命题 2.13。 **方差**$_{G\sim\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)}[\tau_3(G)]=O\Big(n^3p^3+n^3\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^3+n^4\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^4\Big).$

结合观察 2.12 和命题 2.13，我们得出以下结论。

推论 2.14。如果

$$n^6\Big(\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^3\Big)^2=\omega\Big(n^3p^3+n^3\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^3+n^4\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^4\Big),$$

则 全变差距离$\Big(\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$、$\mathsf{G}(n,p)\Big)=1-o(1)$。此外，计算带符号三角形的多项式时间算法能够以高概率区分$\mathsf{G}(n,p)$和$\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$。

因此，我们已经证明，整个基于带符号三角形的检测论证，都可以用布尔傅里叶分析的语言作出简单的解释。对于 k-圈的计数，当 $k>3$ 时，也可以采用类似的论证，但方差的计算会变得更加困难。我们在 $k=4$ 的情形下，通过一个非常简单的实例展示这一计算过程，详见 附录 F。

3 超立方体上的 不可区分性主定理

在本节中，我们证明关于 G(n,p) 与 RAG$(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$ 的不可区分性的主要技术性结论。由于需要验证的条件很多，这一结论本身看起来并不吸引人。在后续章节中，我们将通过探索特定的连接 σ.来去除这些条件。

定理 *3.1*。考虑维数为 $d\in\mathbb{N}$、连接函数为 $\sigma:\ \{\pm1\}^d\longrightarrow[0,1]$ 、期望为 p，以及常数 $m\in\mathbb{N}$.[3]。存在一个仅依赖于 m、而不依赖于 σ、d、n、p 的常数 K_m，使得以下性质成立。假设 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $nK_m<d$.。对于 $1\le i\le d$，令 $B_i=\max\left\{|\widehat{\sigma}(S)|\binom{d}{i}^{1/2}:\ |S|=i\right\}$.。另记

$$C_m=\sum_{i=m+1}^{\frac{d}{2en}}B_i^2+\sum_{i=d-m-1}^{d-\frac{d}{2en}}B_i^2\quad\textit{and}\quad D=\sum_{\frac{d}{2en}\le j\le d-\frac{d}{2en}}B_i^2.$$

如果还满足以下条件

- $d\ge K_m\times n\times\left(\frac{C_m}{p(1-p)}\right)^{\frac{2}{m+1}}$,
- $d\ge K_m\times n\times\left(\frac{B_u^2}{p(1-p)}\right)^{\frac{2}{u}}$ *for all* $2\le u\le m$,
- $d\ge K_m\times n\times\left(\frac{B_{d-u}^2}{p(1-p)}\right)^{\frac{2}{u}}$ *for all* $2\le u\le m$,

then

$$\begin{aligned}&\mathsf{KL}(\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)\|\mathsf{G}(n,p))\\&\le K_m\times\frac{n^3}{p^2(1-p)^2}\times\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{B_i^4}{d^i}+\sum_{i=d-m}^{d}\frac{B_i^4}{d^i}+\frac{C_m^2}{d^{m+1}}+D^2\times\exp\left(-\frac{d}{2en}\right)\right).\end{aligned}$$

在继续证明之前，我们先作几点说明。首先，应用上述定理时，通常这四个条件可以简化为更简单的 $d\ge K_m\times n$. 例如，当 σ 是对称的时，情况便是如此。事实上，注意到 $\sum_{i=1}^d B_i^2=$ **方差** $[\sigma]\le p(1-p)$ 在这种情况下，因此这三个不等式实际上可由 $d\ge K_m\times n$. 对于“典型的” $\{0,1\}$值连接函数，这一点同样成立，正如我们将在第 4.3 节中看到的那样。

接下来，我们解释 KL散度的界表达式。在该表达式中，我们将傅里叶层基本划分为 $2m+3$ 区间：

- $I_u=\{u\}$ for $u\in[m]$,
- $I_{m+u}=\{d-u\}$ for $u\in[m]$,
- $I_{2m+1}=[m+1,\frac{d}{2en}]\cup[d-\frac{d}{2en},d-m-1]$,
- $I_{2m+2}=(\frac{d}{2en},d-\frac{d}{2en})$,
- $I_{2m+3}=\{d\}$.

[3]应用该定理时，我们通常会取 $m\le3$，因此确实可以将其视为一个较小的常数。

这有两个原因。首先，正如我们将在第4.1节和第4.1.4节中看到的，极其接近 0 和d的层级（即由 $O(1)$或 $d - O(1)$索引的层级）与其他层级有着根本不同的作用。这解释了为什么 I_1、 I_2、 $\dots I_{2m}$、I_{2m+3}要单独处理，也解释了为什么 I_{2m+1}和 I_{2m+2}还要进一步分开（注意，如果 m 是常数，那么 I_{2m+1}中的层级 m、 $m+1$、……、 $2m$ 的索引也具有 $O(1)$的量级）。此外，还有一个原因使得 I_{2m+2} 与其他部分分开处理：在相应的层级上，超收缩性界显著更强（见定理3.5）。

虽然上述定理适用范围很广，但正如我们将在第 4 节看到的，它有一个令人遗憾的重大局限——即使其他三个不等式在 d 取值小得多时也成立，它仍要求 $d = \Omega_m(n)$（例如见第 4.1.4 节）。在第 8.1 节中，我们证明，这并非源于我们用于界定 γ 的矩的复杂技巧。事实上，任何基于断言 1.5、应用于超立方体上取值于 $\{0,1\}$ 的连接函数的论证，都要求 $d = \Omega(n)$。尤其是，这意味着，当 $p = o(n^{-2/3})$ 时，要研究猜想 1.1 在超立方体上的对应版本，以及我们的猜想 4.16，就需要借助其他工具。在定理 7.5 中，我们说明，对于期望为 $\Theta(1)$ 量级的取值于 $\{0,1\}$ 的连接函数，$d = \Omega(n)$ 之所以必要，还有另一个独立于证明技巧的原因。

最后，我们简要概述证明，该证明分为几个部分。

1. 首先，在第3.1节中，我们通过增大其傅里叶系数的绝对值来对其进行“对称化”，使同一层上的所有系数都相等。这可能会得到一个取值不在 σ 中的函数。正如我们将看到的，这不会影响我们的论证。 $[0,1]$.

2. 接着，在第3.2节中，我们利用凸性论证，将对称化函数的矩上界化为若干个（经缩放的）初等对称多项式上的矩，这些多项式取决于上文描述的区间I_1， I_2，……， I_{2m+3}。

3. 接下来，在第3.3节中，我们使用超收缩性工具，分别对初等对称多项式的矩给出界。据我们所知，我们证明了在某些情形下初等对称多项式的矩的新界。

4. 最后，我们综合以上内容，证明定理 3.1 ，见第3.4节。

3.1 对自相关函数进行对称化

鉴于公式（4）和断言 1.5，我们需要界定 γ. 我们的第一个观察是，就界定 k阶矩而言，可以将 γ 替换为其对称化版本。

命题 3.2. 设 γ、 B_1、 B_2……、 B_d 均如定理 *3.1* 中所述，并考虑函数 n

$$f(\mathbf{g}) := \sum_{\emptyset \subseteq S \subsetneq [d]} \frac{B_{|S|}^2}{\binom{d}{|S|}} \omega_S(\mathbf{g}).$$

那么，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $0 \le \mathbf{E}_{\mathbf{g}}[\gamma(\mathbf{g})^k] \le \mathbf{E}_{\mathbf{g}}[f(\mathbf{g})^k]$.

证明。 利用 命题 2.11，我们知道

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{g}}[\gamma(\mathbf{g})^k] &= \mathbf{E}\left(\sum_{\emptyset \subsetneq S \subset [d]} \widehat{\sigma}^2(S)\omega_S(\mathbf{g})\right)^k \\ &= \sum_{S_1,S_2,\dots,S_k} \widehat{\sigma}^2(S_1)\widehat{\sigma}^2(S_2)\cdots\widehat{\sigma}^2(S_k)\mathbf{E}[\omega_{S_1}(\mathbf{g})\omega_{S_2}(\mathbf{g})\cdots\omega_{S_k}(\mathbf{g})].\end{aligned}$$

现在，注意到 $\mathbf{E}[\omega_{S_1}(\mathbf{g})\omega_{S_2}(\mathbf{g})\cdots\omega_{S_k}(\mathbf{g})]$ 仅取值 0 和 1，这立即意味着 $\mathbf{E}[\gamma^k]$. 的非负性。令 $\mathcal{ECV}$ 为使其取值为 1 的所有 k 元组 $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ 构成的集合（这就是偶覆盖的集合）。根据 B_i 的定义，对于所有 $S \neq \emptyset$，均有 $|\widehat{\sigma}^2(S)| \leq B_{|S|}^2 \binom{d}{|S|}^{-1}$ 成立，因此我们得出结论：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{g}}[\gamma(\mathbf{g})^k] &= \sum_{(S_1,S_2,\ldots,S_k)\in\mathcal{ECV}} \widehat{\sigma}^2(S_1)\widehat{\sigma}^2(S_2)\cdots\widehat{\sigma}^2(S_k) \\ &\leq \sum_{(S_1,S_2,\ldots,S_k)\in\mathcal{ECV}} \frac{B_{|S_1|}^2}{\binom{d}{|S_1|}}\frac{B_{|S_2|}^2}{\binom{d}{|S_2|}}\cdots\frac{B_{|S_k|}^2}{\binom{d}{|S_k|}} = \mathbf{E}_{\mathbf{g}}[f(\mathbf{g})^k].\end{aligned} \tag{6}$$

最后一个等式成立的理由与公式（6）中的第一个等式相同。 □

由于 f 是对称的，我们可以将其表示为初等对称多项式 e_i. 的加权和。也就是说，

$$f(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{B_i^2}{\binom{d}{i}} e_i(\mathbf{g}). \tag{7}$$

注意，如果 σ 是对称的，那么在这一步我们并未造成任何损失，因为 $\gamma = f$. 接下来，我们实际上将界定 L_k范数 f，即利用$\mathbf{E}[f^k] \leq \mathbf{E}[|f|^k] = \|f\|_k^k$. 当 k 为偶数时，这样做不会造成任何损失。当定理 3.1中的 KL 界中的 k 为奇数时，也可以证明这样做不会造成任何损失（除了一个常数因子），这是由于$\mathbf{E}[f^k]$. 考虑公式（4）中的表达式，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(x,y)\sim\mathcal{D}\times\mathcal{D}}\left[\left(1+\frac{\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})}{p(1-p)}\right)^k\right] = \sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{g}\sim\mathsf{Unif}(\{\pm1\}^d)}[\gamma(\mathbf{g})^k]}{p^t(1-p)^t} &= 1+\sum_{t\geq2}\binom{k}{t}\frac{\mathbf{E}[\gamma^k]}{p^t(1-p)^t} \\ &\leq 1+\sum_{t\geq2}\binom{k}{t}\frac{\mathbf{E}[f^k]}{p^t(1-p)^t} \\ &\leq 1+\sum_{t\geq2}\binom{k}{t}\frac{\|f\|_k^k}{p^t(1-p)^t},\end{aligned} \tag{8}$$

其中我们利用了$\mathbf{E}[\gamma] = \widehat{\gamma}(\emptyset) = 0$ 根据命题 2.11。

3.2 拆分为初等对称多项式

接下来，我们将使用凸性论证来证明，在对 公式（8）进行界定时，只需考虑所有质量都分布在常数个层级上的情形。关键思路是将 公式（8）视为不同层级上的系数的函数。为此，定义

$$h(W^1, W^2, \ldots, W^d) := 1+\sum_{t\geq2}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}\left\|\sum_{i=1}^{d}\frac{W^i}{\binom{d}{i}}e_i(\mathbf{g})\right\|_k^k.$$

显然，$(B_1^2,\ B_2^2,\ \ldots\ldots,\ B_d^2) = (W^1,\ W^2,\ \ldots\ldots,\ W^d)$对应于 f，而 $h(B_1^2,\ B_2^2,\ \ldots\ldots,\ B_d^2)$是公式（8）最后一行中的表达式。其核心思路是，$h$ 是凸函数，因此它在凸多胞体上的最大值会在该多胞体的某个顶点处取得。我们将以这样的方式构造多胞体，使其顶点对应于具有特定稀疏性的向量。

命题 3.3。 函数 h是凸函数。

证明。 我们只需证明， h 是凸函数的复合函数。首先，对于任意 t,

$$(W^i)_{i\in[d]} \longrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{d} \frac{W^i}{\binom{d}{i}} e_i(g) \right\|_t$$

是凸的。事实上，对于任意的 $\alpha \in [0,1]$ 以及向量 $(W_1^i)_{i\in[d]}$ 和 $(W_2^i)_{i\in[d]}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i\in[d]} \frac{\alpha W_1^i + (1-\alpha) W_2^i}{\binom{d}{i}} e_i \right\|_t \\
&\leq \left\| \alpha \sum_{i\in[d]} \frac{W_1^i}{\binom{d}{i}} e_i \right\|_t + \left\| (1-\alpha) \sum_{i\in I[d]} \frac{W_2^i}{\binom{d}{i}} e_i \right\|_t \\
&= \alpha \left\| \sum_{i\in[d]} \frac{W_1^i}{\binom{d}{i}} e_i \right\|_t + (1-\alpha) \left\| \sum_{i\in[d]} \frac{W_2^i}{\binom{d}{i}} e_i \right\|_t,
\end{aligned}$$

由范数的凸性可得。由于 $x \longrightarrow x^t$ 关于 $t \geq 2$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增且为凸函数，因此 $(W^i)_{i\in I} \longrightarrow \left\| \sum_{i\in[d]} \frac{W^i}{\binom{d}{i}} e_i(g) \right\|_t$ 也是凸的。因此， h 是凸函数的一个系数为正的线性组合，故其为凸函数。

□

现在，我们将如下定义适当的多面体，以便应用凸性论证。对于任意划分大小 $\Xi \in [d]$，将 $[d]$ 划分为 Ξ 个不相交集合的划分 $\mathbf{I} = (I_\xi)_{\xi=1}^{\Xi}$，以及非负向量 $\mathbf{w} = (w_\xi)_{\xi=1}^{\Xi}$，定义以下单纯形乘积 $\Delta_{\mathbf{I},\ \mathbf{w}}$. 它由以下条件给出：对所有 $i \in [d]$， $0 \leq W^i$；对所有 $\xi \in [\Xi].$， $\sum_{i\in I_\xi} W^i \leq w_\xi$。利用 h 在 $\Delta_{\mathbf{I}\text{ 上的凸性},\ \mathbf{w}}$，我们得到以下结论。

推论 3.4. 对于任意$\Delta_{\mathbf{I},\ \mathbf{w}}$， 其定义如上，

$$\sup_{(W^i)_{i=1}^d \in \Delta_{\mathbf{I},\mathbf{w}}} h\left((W^i)_{i=1}^d\right) \leq \sup_{i_\xi \in I_\xi\ \forall \xi\in[\Xi]} 1 + \sum_{t=2}^{k} \binom{k}{t} \frac{\Xi^t}{p^t(1-p)^t} \left(\sum_{\xi\in[\Xi]} \left\| \frac{w_\xi}{\binom{d}{i_\xi}} e_{i_\xi} \right\|_t^t \right).$$

证明。 由于根据前一个定理， h 是凸的，它在凸多胞体 $\Delta_{\mathbf{I},\ \mathbf{w}}$ 上的上确界可在一个顶点处取得。顶点对应于以下类型的向量 $(V^i)_{i=1}^d$。对于每个 $\xi \in [\Xi]$，都存在唯一的指标 $i_\xi \in I_\xi$，使得 $V^{i_\xi} \neq 0$，并且 $V^{i_\xi} = w_\xi$. 因此，

$$\sup_{(W^i)_{i=1}^d \in \Delta_{\mathbf{I},\mathbf{w}}} h\left((W^i)_{i=1}^d\right) \leq \sup_{i_\xi \in I_\xi\ \forall \xi\in[\Xi]} 1 + \sum_{t=2}^{k} \binom{k}{t} p^{-t}(1-p)^{-t} \left\| \sum_{\xi\in[\Xi]} \frac{w_\xi}{\binom{d}{i_\xi}} e_{i_\xi} \right\|_t^t.$$

利用三角不等式和简单不等式 $(\sum_{\xi\in[\Xi]} u_\xi)^t \leq \Xi^t \sum_{\xi\in[\Xi]} u_\xi^t$ （其中 u_ξ为非负实数），即可完成证明

$$\left\| \sum_{\xi\in[\Xi]} \frac{w_\xi}{\binom{d}{i_\xi}} e_{i_\xi} \right\|_t^t \leq \left(\sum_{\xi\in[\Xi]} \left\| \frac{w_\xi}{\binom{d}{i_\xi}} e_{i_\xi} \right\|_t \right)^t \leq \Xi^t \sum_{\xi\in[\Xi]} \left\| \frac{w_\xi}{\binom{d}{i_\xi}} e_{i_\xi} \right\|_t^t.$$

□

鉴于定理 3.1的陈述，我们将使用紧接在I_1、 I_2、.....、 I_{2m+3}之后定义的区间，也就不足为奇了：定理 3.1。不过，在这样做时，我们需要对推论 3.4中出现的初等对称多项式的范数进行界定。这是我们接下来要做的。

3.3 初等对称多项式的矩

处理低次多项式的范数时，通常会对定理 2.7 应用于 $q = 2$，因为二阶矩的公式很简单。不过，若在我们的设定中直接应用这个不等式，就会得到

$$\|e_i(g)\|_t \le \left\|(t-1)^{i/2} e_i(g)\right\|_2 = (t-1)^{i/2} \binom{d}{i}^{1/2}.$$

当我们考虑 $i.$ 的较大取值时，这个不等式对我们的目的完全失去作用。具体而言，假设 $i = d/2.$。那么，这个界给出$(t-1)^{d/4} 2^{\Theta(d)}$，如果 $t = \omega(1)$，这就太大了，因为

$$\|e_i(\mathbf{g})\|_t \le \|e_i(\mathbf{g})\|_\infty \le \binom{d}{i} \le 2^d.$$

尽管 L_∞ 界已经好得多，但对我们的目的而言仍然不够。因此，我们在定理3.5中给出以下更好的界。据我们所知，其中第二个是新的。

定理3.5。假设 d 和 t 是满足 $d > 2te$ 和 $t > 1.$ 的整数。任取 $s \in [0, d]$ 并定义$\mathsf{sm}(s) = \min(s, d-s)$。那么，我们有以下界：

- 对于任意 s,

$$\|e_s\|_t \le \binom{d}{s}^{1/2} (t-1)^{\frac{\mathsf{sm}(s)}{2}}.$$

- 此外，若$\mathsf{sm}(s) \ge \frac{d}{2te}$，则

$$\|e_s\|_t \le \binom{d}{s} \exp\left(-\frac{d}{4te}\right).$$

最后，这第二个界在指数上除常数因子外是紧的。

证明。 首先，我们证明不失一般性，可以假设 $s \le d/2$，因此 $\mathsf{sm}(s) = s.$。事实上，请注意，对于超立方体上的任意函数 q 和任意特征 ω_T，显然 $\|q\omega_T\|_k = \mathbf{E}[|q\omega_T|^k]^{1/k} = \mathbf{E}[|q|^k]^{1/k} = \|q\|_k$. 因此，

$$\|e_s\|_t = \left\|\omega_{[d]} \sum_{S\,:\,|S|=s} \omega_S\right\|_t = \left\|\omega_{[d]} \sum_{S\,:\,|S|=s} \omega_S\right\|_t = \left\| \sum_{S\,:\,|S|=s} \omega_{\bar{S}}\right\|_t = \|e_{d-s}\|_t.$$

有了这一点，我们就可以证明第一个界了，这只需用到超收缩性不等式 定理 2.7。事实上，当 $s < d/2$,

$$\|e_s\|_t \le \sqrt{t-1}^{\,s} \|e_s\|_2 = (t-1)^{\frac{\mathsf{sm}(s)}{2}} \binom{d}{s}^{1/2}.$$

现在我们继续讨论有趣得多的第二个界。设 $s \ge \frac{d}{2et}$ 并选择 ψ 使得$s - \psi = \frac{d}{2et}$（为简化记号，我们假设 $\frac{d}{2et}$是一个整数）。直接应用.....的问题 —

定理 2.7 是 .....多项式 e_s 的次数 s 过高。我们按如下方式降低次数。

$$\begin{aligned}
\|e_s\|_t &= \Big\| \sum_{S\,:\,|S|=t} \omega_S \Big\|_t \\
&= \Big\| \sum_{T\,:\,|T|=\psi} \sum_{A\,:\,|A|=s-\psi, A\cap T=\emptyset} \omega_{A\cup T} \binom{s}{\psi}^{-1} \Big\|_t \\
&\le \sum_{T\,:\,|T|=\psi} \Big\| \sum_{A\,:\,|A|=s-\psi, A\cap T=\emptyset} \omega_A \omega_T \binom{s}{\psi}^{-1} \Big\|_t \\
&= \sum_{T\,:\,|T|=\psi} \Big\| \sum_{A\,:\,|A|=s-\psi, A\cap T=\emptyset} \omega_A \binom{s}{\psi}^{-1} \Big\|_t .
\end{aligned}$$

我们用到了以下事实。每个 S 都可以用 $\binom{s}{\psi}$ 种方式表示为 $A\cup T$，其中 A 和 T 互不相交，且 $|T|=\psi$. 其次，由于 A 和 T 互不相交，$\omega_{A\cup T}=\omega_A\omega_T$. 最后，我们利用了以下事实：对于任意多项式 q，$\|\omega_T q\|_t = \|q\|_t$. 现在，由于上一个等式中的多项式的次数为 $s-\psi=\frac{d}{2et}$，这可能远小于 s，我们可以应用 定理 2.7 ，再结合 Paresval 恒等式，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\,:\,|T|=\psi} \Big\| \sum_{A\,:\,|A|=s-\psi, A\cap T=\emptyset} \omega_A \binom{s}{\psi}^{-1} \Big\|_t \\
&\le \sum_{T\,:\,|T|=\psi} (t-1)^{\frac{s-\psi}{2}} \Big\| \sum_{A\,:\,|A|=s-\psi, A\cap T=\emptyset} \omega_A \binom{s}{\psi}^{-1} \Big\|_2 \\
&= \sum_{T\,:\,|T|=\psi} (t-1)^{\frac{s-\psi}{2}} \sqrt{\sum_{A\,:\,|A|=s-\psi, A\cap T=\emptyset} \binom{s}{\psi}^{-2}} \\
&= \sum_{T\,:\,|T|=\psi} (t-1)^{\frac{s-\psi}{2}} \sqrt{\binom{d-\psi}{s-\psi}\binom{s}{\psi}^{-2}}_2 \\
&= \binom{d}{\psi}(t-1)^{\frac{s-\psi}{2}} \sqrt{\binom{d-\psi}{s-\psi}\binom{s}{\psi}^{-2}}_2 \\
&= \binom{d}{s}\sqrt{(t-1)^{s-\psi}\binom{d}{\psi}^2\binom{d-\psi}{s-\psi}\binom{s}{\psi}^{-2}\binom{d}{s}^{-2}}.
\end{aligned}$$

现在我们使用简单的组合恒等式 $\binom{d}{\psi}\binom{d-\psi}{s-\psi} = \binom{s}{\psi}\binom{d}{s}$. 。证明它的方法有两种：可以展开阶乘，也可以注意到，等式两边都在计算满足条件 $|T|=\psi, |A|=s-\psi.$ 的 $[d]$ 的不相交子集对 (T, A)。换言之，我们有

$$\begin{aligned}
&\binom{d}{s}\sqrt{(t-1)^{s-\psi}\binom{d}{\psi}^2\binom{d-\psi}{s-\psi}\binom{s}{\psi}^{-2}\binom{d}{s}^{-2}} \\
&= \binom{d}{s}\sqrt{(t-1)^{s-\psi}\binom{d-\psi}{s-\psi}^{-1}} \le \binom{d}{s}\sqrt{(t-1)^{s-\psi}\left(\frac{d-\psi}{s-\psi}\right)^{-(s-\psi)}} \\
&= \binom{d}{s}\left(\frac{(t-1)(s-\psi)}{d-\psi}\right)^{\frac{s-\psi}{2}} \le \binom{d}{s}\left(\frac{2t(s-\psi)}{d}\right)^{\frac{s-\psi}{2}} = \binom{d}{s}\exp\left(-\frac{d}{4et}\right),
\end{aligned}$$

正如所需。上文使用了界 $\binom{d-\psi}{s-\psi} \geq \binom{d-\psi}{s-\psi}^{(s-\psi)}$ 和 $d-\psi \geq d-s \geq d/2,$，并采用了由 $s-\psi = \dfrac{d}{2et}$. 给出的 ψ 取值。至此，界的证明完成。

剩下要证明的只是第二个界的紧致性。不过请注意，$\mathbf{P}[e_s(\mathbf{g}) = \binom{d}{s}] = \frac{1}{2^d}$，因为当$\mathbf{g}_i = 1$对所有 $i.$—成立时，该事件就会发生。因此，

$$\|e_s\|_t \geq \left(\frac{1}{2^d}\binom{d}{s}^t\right)^{1/t} = \binom{d}{s}2^{d/t} = \binom{d}{s}\exp\left(-O\left(\frac{d}{t}\right)\right). \qquad \square$$

我们对如何推广上述不等式作出以下备注。由于本文不需要相应的不等式，这些内容纯粹具有理论意义。

备注 3.6。 如果我们考虑系数为 $[-1,1].$ 的加权版本，那么完全相同的界和证明同样适用。也就是说，形如以下形式的多项式

$$q(\mathbf{g}) = \sum_{S\,:\,|S|=s} \varepsilon_S \omega_S(\mathbf{g}),$$

其中 $\varepsilon_S \in [-1,1]$ 对每个 $S.$ 均成立。 q 具有较小的谱无穷范数（即其傅里叶系数绝对值具有一致的小界）时，这表明可以改进经典定理 定理 2.7。我们想知道，这一现象是否也适用于权重并非全部集中在单个层级上的多项式。

备注 3.7。 当 $\frac{d}{2et} < s \prec \frac{d}{2}$，在其他随机向量（例如标准高斯 $\mathcal{N}(0, I_d)$）以及球面上的均匀分布）处对 e_s 求值时，同样的不等式也成立，且证明完全相同，因为类似于 定理 2.7 的不等式同样成立（参见 *[SA17，命题 5.48，备注 3.50]*）。

3.4 综合起来看

最后， 我们将迄今讨论的所有内容结合起来，证明主要的技术结果。 t.

证明定理 3.1。 首先，我们注意到，不失一般性，我们可以作出以下假设：

1. $B_1^4 = O_m\left(\frac{dp^2}{(1-p^2)}\right)$，
2. $B_{d-1}^4 = O_m\left(\frac{dp^2}{(1-p^2)}\right)$， 3. $B_d^4 = O_m\left(\frac{p^2}{(1-p^2)}\right)$， 4. $D^2 = O_m\left(\text{指数}\left(\frac{d}{2en}\right) \times \frac{p^2}{(1-p^2)}\right)$.

事实上，如果其中某项假设不成立，那么我们试图证明的 KL 散度上界将大于 2（适当的隐藏常数仅依赖于 m）。通过 Pinsker 不等式得到的全变差上界将大于 1，因此是平凡的。

现在我们继续应用 推论 3.4，区间为 I_1、 I_2、……、 I_{2m+3}，权重如下。

- $I_u = \{u\}$ and $w_u = B_u^2$ for $u \in [m]$,
- $I_{m+u} = \{d-u\}$ 和$w_{m+u} = B_{d-u}^2$ 对于 $u \in [m]$,

- $I_{2m+1} = [m+1, \frac{d}{2en}] \cup [d - \frac{d}{2en}, d-m-1]$ 和 $w_{2m+1} = C_m$,
- $I_{2m+2} = [\frac{d}{2en}, d - \frac{d}{2en}]$和 $w_{2m+2} = D$,
- $I_{2m+3} = \{d\}$和 $w_{2m+3} = B_d^2$.

定义的权重向量 $\mathbf{w}$ 恰好界定了 f 在各个相应层级上的权重。因此， h 在$\Delta_{\mathbf{I},\mathbf{w}}$ 上的上确界至少与公式（8）中的表达式一样大，该表达式给出了两个相关随机图模型之间全变差的上界。具体而言，利用公式（4）和推论 3.4，我们得到

$$
\begin{aligned}
&1 + \sum_{t=2}^{k} \binom{k}{t} p^{-t}(1-p)^{-t} \mathbf{E}[\gamma^t] \\
&\leq 1 + \sum_{t=2}^{k} \binom{k}{t} p^{-t}(1-p)^{-t} \|f\|_t^t \\
&\leq 1 + \sup_{i_u \in I_u \ \forall u \in [2m+3]} \sum_{u \in [2m+3]} \sum_{t=2}^{k} \binom{k}{t} p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t \left\| \frac{w_u}{\binom{d}{u}} e_{i_u} \right\|_t^t .
\end{aligned}
$$

现在，我们按照难度递增的顺序，基于 u 考虑不同的情形。

情形 1) 当 $u = 2m+3$. 那么， $i_u = d$，因此 $\|e_{i_u}\|_t = \|e_d\|_t = 1$. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=2}^{k} \binom{k}{t} p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t \|w_u e_{i_u}\|_t^t \\
&= \sum_{t=2}^{k} \binom{k}{t} p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t B_d^{2t} \\
&= (1+\psi)^k - 1 - k\psi,
\end{aligned}
$$

其中 $\psi = \frac{2m+3}{p\ 1-p}\binom{}{}$ $B_d^2 = o\binom{1}{n} = o\binom{1}{k}$，根据证明开头对 B_d 的假设。这便推出了

$$
(1+\psi)^k - 1 - k\psi \leq e^{1+\psi k} - 1 - \psi k = O(\psi^2 k^2).
$$

因此，对于 $u = 2m+3$,

$$
\sum_{t=2}^{k} \binom{k}{t} p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t \|w_u e_{i_u}\|_t^t = O_m\left(k^2 \frac{B_d^4}{p^2(1-p)^2}\right). \tag{9}
$$

情形2）当 $u=2m+2$. 我们对 $\sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t\left\|\frac{w_{2m+2}(\,)}{\binom{d}{i_{2m+2}}}e_{i_{2m+2}}\right\|_t^t$. 注意，对于 $i_u\in I_{2m+2}$，我们有$\mathsf{sm}(i)\geq\frac{d}{2ne}$.因此，$\|e_{i_u}\|_t\leq\|e_{i_u}\|_n\leq\binom{d}{i_u}\exp(-\frac{d}{4en})$根据定理3.5，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t\frac{D^t}{\binom{d}{i_u}^t}\|e_{i_u}\|_t^t\\
&\leq\sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t\frac{D^t}{\binom{d}{i_u}^t}\binom{d}{i_u}^t\exp\left(-\frac{dt}{4en}\right)\\
&=\left(1+\frac{D(2m+3)}{p(1-p)}\exp\left(-\frac{d}{4en}\right)\right)^k-1-k\frac{D(2m+3)}{p(1-p)}\exp\left(-\frac{d}{4en}\right).
\end{aligned}$$

不过请注意，

$$\psi:=\frac{D(2m+3)}{p(1-p)}\exp\left(-\frac{d}{4en}\right)=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

根据证明开头对 D 的假设。因此可得

$$(1+\psi)^k-1-\psi k=O(\psi^2k^2).$$

因此，对于 $u=2m+2$,

$$\sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t\left\|\frac{w_{2m+2}}{\binom{d}{i_u}}e_{i_u}\right\|_t^t=O_m\left(\frac{D^2}{p^2(1-p)^2}\exp\left(-\frac{d}{2en}\right)\right)$$

对于一个足够大的、仅依赖于 m.的隐藏常数

情况 3）当 $u=2m+1$. 同样地，不妨设 $i_u\leq d/2$，我们希望对其进行界定

$$\sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t\left\|\frac{w_{2m+1}}{\binom{d}{i_{2m+1}}}e_{i_u}\right\|_t^t.$$

利用定理3.5，我们知道 $\left\|e_{i_{2m+1}}\right\|_t\leq\binom{d}{i_{2m+1}}^{1/2}(t-1)^{\frac{i_{2m+1}}{2}}$，因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t\frac{C_m^t}{\binom{d}{i_{2m+1}}^t}\left\|e_{i_{2m+1}}\right\|_t^t\\
&\leq\sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}(2m+3)^t\frac{C_m^t}{\binom{d}{i_{2m+1}}^t}\binom{d}{i_{2m+1}}^{t/2}(t-1)^{i_{2m+1}t/2}.
\end{aligned}$$

这一次我们展示各项中的指数衰减。更具体地说，我们证明以下不等式

$$\binom{k}{t}\left(\frac{(2m+3)C_m}{p(1-p)\binom{d}{i_{2m+1}}^{1/2}}\right)^t(t-1)^{i_{2m+1}t/2}\geq\frac{e}{2}\binom{k}{t+1}\left(\frac{(2m+3)C_m}{p(1-p)\binom{d}{i_{2m+1}}^{1/2}}\right)^{t+1}t^{i_{2m+1}(t+1)/2}.$$

这归结为证明

$$\binom{d}{i_{2m+1}}^{1/2} \geq \frac{(2m+3)e}{2}\frac{k-t}{t+1}\frac{C_m}{p(1-p)}t^{i_{2m+1}/2}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{ti_{2m+1}/2}.$$

利用 $\binom{t}{t-1}^t \leq 4, \binom{d}{i_{2m+1}} \geq \binom{d}{i_{2m+1}}^{i_{2m+1}}$,和 $n \geq k-t \geq k,$，我们只需证明

$$\left(\frac{d}{i_{2m+1}}\right)^{i_{2m+1}/2} \geq \frac{(2m+3)e}{2}n\frac{C_m}{p(1-p)}t^{i_{2m+1}/2-1}4^{i_{2m+1}/2}. \tag{10}$$

由于 $t \leq k \leq n,$，右侧在 $t = n,$ 时达到最大值，因此我们只需证明

$$\left(\frac{d}{i_{2m+1}}\right)^{i_{2m+1}/2} \geq \frac{(2m+3)e}{2}n^{i_{2m+1}/2}4^{i_{2m+1}/2}\frac{C_m}{p(1-p)} \iff$$
$$d \geq i_{2m+1} \times n \times 4 \times \left(\frac{(2m+3)eC_m}{2p(1-p)}\right)^{\frac{2}{i_{2m+1}}}.$$

现在，右侧的形式为 $KxM^{\frac{1}{x}} := Z(x)$，其中 $x = i_{2m+1}.$。log $Z(x)$ 的导数为 $\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x}$ log $M),$，它至多有一个正根，即 $x =$log $M.$。因此，$Z(x)$ 在 $[m+1, \frac{d}{2en}]$ 上的最大值出现在 $m+1$ 或 $\frac{d}{2en}.$ 处。将这些值代入后，我们得到右侧的以下表达式。首先，当 $i_{2m+1} = m+1,$

$$O_m\left(n \times \left(\frac{C_m}{p(1-p)}\right)^{\frac{2}{m+1}}\right) \leq d,$$

其中，当常数 $K_m.$ 足够大时，该不等式由定理中的假设成立。其次，当 $i_{2m+1} = \frac{d}{2en},$

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{e}d \times \left(\frac{(2m+3)eC_m}{2p(1-p)}\right)^{\frac{4en}{d}} \\
&= \frac{2}{e}d \times \left(\frac{(2m+3)e}{2}\right)^{\frac{4en}{d}} \times \left(\left(\frac{C}{p(1-p)}\right)^{\frac{2}{m+1}}\right)^{\frac{en(m+1)}{d}} \\
&\leq \frac{2}{e}d \times \left(\frac{(2m+3)e}{2}\right)^{\frac{4en}{d}} \times \left(\frac{1}{K_m} \times \frac{d}{n}\right)^{\frac{en(m+1)}{d}} \\
&\leq \frac{2}{e}d \times \left(\frac{(2m+3)e}{2}\right)^{\frac{4en}{d}} \times K_m^{-\frac{en(m+1)}{d}} e^{e(m+1)},
\end{aligned}$$

其中我们使用了 $\binom{d}{n}^{\frac{n}{d}} \leq$exp$(\binom{d}{n}-1)^{\frac{n}{d}}) \leq e.$现在，对于足够大的 K_m，当 $d > K_m n$，上述表达式至多为 $d.$ 由于指数衰减成立，

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}\frac{C_m^t}{\binom{d}{i_{2m+1}}^t}\binom{d}{i_{2m+1}}^{t/2}(t-1)^{i_{2m+1}t/2} \\
&= O\left(k^2\frac{C_m^2}{p^2(1-p^2)\binom{d}{i_{2m+1}}}\right) \\
&= O_m\left(k^2\frac{C_m^2}{p^2(1-p^2)d^{m+1}}\right).
\end{aligned}$$

情况 4) 当 $u \le 2m$. 情况 $u \in [2m]\backslash\{1, m+1\}$ 的处理方式与前面的情况 3) 完全相同，只是我们在 $w_u = B_u^2$ 时使用 $u \in [m]$，并在 $w_u = B_{d-u+m}^2$ 时使用 $u \in [m+1, 2m]$，而不是$w_u = C_m$. 唯一需要注意的是，当 $i_u \in \{1, d-1\}$. 此时，公式 (10) 的对应式变为

$$d^{1/2} \ge O_m\left(n\frac{w_u}{p(1-p)}t^{-1/2}\right).$$

不过，这一次，右侧在 $t = 2$. 处取最大值。因此，我们需要

$$d = \Omega_m\left(n^2\frac{w_u^2}{p^2(1-p)^2}\right),$$

这由证明开头所作的假设保证。

综合所有这些情况，我们得到对于任意固定的 k,

$$1 + \sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}p^{-t}(1-p)^{-t}\mathbf{E}[\gamma^t]$$

$$= 1 + O_m\left(k^2\sum_{i=1}^{m}\frac{B_i^4}{p^2(1-p)^2d^i} + k^2\sum_{i=0}^{m}\frac{B_{d-i}^4}{p^2(1-p)^2d^i} + k^2\frac{C_m^2}{p^2(1-p)^2d^{m+1}} + \frac{D^2}{p^2(1-p)^2}\exp\left(-\frac{d}{en}\right)\right).$$

因此，该表达式的对数至多为

$$K_m\left(k^2\sum_{i=1}^{m}\frac{B_i^4}{p^2(1-p)^2d^i} + k^2\sum_{i=0}^{m}\frac{B_{d-i}^4}{p^2(1-p)^2d^i} + k^2\frac{C_m^2}{p^2(1-p)^2d^{m+1}} + k^2\frac{D^2}{p^2(1-p)^2}\exp\left(-\frac{d}{en}\right)\right)$$

适当 选择的 K_m.。对 $k \in [n-1]$ 求和后，我们便得到了所需结论 . □

4 主定理的应用

如前所述，本研究的部分动机是推动当前对随机几何图的研究，使其扩展到连接函数不一定单调或对称的情形。我们分别去除这两个假设。首先，我们保留对称性，并探讨定理 3.1 在已有的单调情形和新提出的非单调情形中的含义。随后，我们聚焦于两类特定的非单调连接函数，它们是通过对对称连接函数进行简单修改得到的。这两类连接函数将在后文第 6 节中发挥作用，因为它们会导致常用的有符号三角统计量失效；在第 8.1 节中也将发挥作用，因为它们严格地揭示了断言 1.5中的一项低效性。最后，我们通过研究“典型”的稠密指示连接函数，真正超越对称性的范畴。

4.1 对称连接

考虑适用于对称函数的定理 3.1 。那么， $B_i^2 = \mathcal{W}^i(\sigma) \le$ **方差**$[\sigma] \le p(1-p)$。同样，不等式 $C_m \le p(1-p)$ $D \le p(1-p)$ 成立。特别是，这意味着只要 $d = \Omega_m(n)$，所有其他条件便会自动满足。现在，如果 $d = \Omega(n\log n)$ 足够大（即隐藏常数足够大），指数项就会消失。若令 $m = 2$, 项 $p^2\frac{n^3}{1-p()^2}\frac{C_m^2}{d^{m+1}} \le \frac{n^3}{d^3} = o_n(1)$ 也会消失。我们有如下推论。

推论 4.1。存在一个绝对常数 K，具有以下性质。假设 $d > Kn$对数 n.令 σ： $\{\pm1\}^d \longrightarrow [0,1]$ 为一个对称连接。那么，

$$\mathsf{KL}(\mathsf{RAG}(n, \{\pm1\}^d, p, \sigma)\|\mathsf{G}(n,p))$$

$$= O\left(\frac{n^3\mathcal{W}^d(\sigma)^2}{p^2(1-p)^2} + \frac{n^3(\mathcal{W}^1(\sigma)^2 + \mathcal{W}^{d-1}(\sigma)^2)}{p^2(1-p)^2d} + \frac{n^3(\mathcal{W}^2(\sigma)^2 + \mathcal{W}^{d-2}(\sigma)^2)}{p^2(1-p)^2d^2}\right) + o(1).$$

对于处于 $d=\Omega(n\log n)$ 这一范围内的对称连接，只有层级 1、2、$d-1$、$d-2$、$d-1$、d 上的傅里叶权重才有影响。在 第 4.1.4 节 中，我们猜想如何推广这一现象。

现在，我们来具体应用推论 4.1。在这些应用中，我们只需界定 σ 在层级1、2、$d-1$、$d-2$、d. 除 d 之外的所有层级都很容易处理，因为它们的分母中都有一个关于 d 的多项式归一化项。不过，要界定 $\mathcal{W}^d(\sigma)$ 则需要更加谨慎。正如我们将在第4.1.3 节中看到的，这不仅是我们证明技巧所导致的，也是与 σ. 的“波动”有关的重要现象。在接下来的章节中，我们将使用以下简单界，其证明将在附录 B中给出。

引理 4.2。假设 $f:\{\pm1\}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ 是对称的。记 f_i 为 f 在其参数中恰有 i 个等于1 而其余均等于 -1. 时的取值。那么，

$$|\widehat{f}([d])|\leq\frac{1}{2}\mathbf{E}_{j\sim Bin(d-1,\frac{1}{2})}|f_{j+1}-f_j|=O\left(\frac{\sum_{j=1}^d|f_{j+1}-f_j|}{\sqrt{d}}\right).$$

我们指出，量 $\sum_{j=1}^d|f_{j+1}-f_j|$ 是实分析文献中全变差的直接对应物 [SS05，第117], 页；全变差用于度量函数的“波动”。由于“全变差”这一名称已用于我们论文中一个更核心的对象，我们将这个新量称为波动量。记作FI（f）：$=\sum_{j=1}^d|f_{j+1}-f_j|$. 我们认为，将 $|\widehat{\sigma}([d])|$ 解释为波动的度量，或许有助于将我们的结果推广到高斯和球面设定中，并考虑非单调连接。我们将在第 4.1.3 节中对此进行更深入的讨论。

4.1.1 Lipschitz 连接

由于我们的不可区分性结果所依赖的主要技术工具是断言 1.5，我们首先考虑 Racz 和 Liu 最初应用该断言的利普希茨连接 [LR21b]。我们将证明，即使去掉单调性假设，也可以在我们的框架下重新得到他们的结果定理 1.4。第一步是^界定 $|f([d])|$.

命题 4.3。若 $f:\{\pm1\}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ 是关于汉明距离的对称 L-利普希茨函数，意即

$$|f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},-1,x_{i+1},\ldots,x_n)|\leq L$$

对所有 i和 $x_1,x_2,\ldots,x_{i_1},x_i,\ldots,x_n$均成立，则 $|\widehat{f}([d])|\leq\frac{L}{2}$.

证明。根据引理 4.2，证明显而易见。注意

$$|f_{j+1}-f_j|=|f(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{j+1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{d-j+1})-f(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{j},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{d-j})|\leq L$$

对所有 j均成立 □

利用这一结论，我们得到以下结果。

推论 4.4. 假设 σ是一个对称的 $\frac{1}{r\sqrt{d}}$-*Lipschitz* 连接函数。如果 $d=\omega_p(\frac{n^3}{r^4})$且$d=\Omega(n\log n)$,

$$\mathsf{KL}(\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)\|\mathsf{G}(n,p))=o(1).$$

证明。 我们将应用 推论 4.1。根据著名的有界差分不等式， [Han，命题 2。4]我们知道，由于 σ是 $\frac{1}{r\sqrt{d}}$-利普希茨， **方差**$[\sigma]\leq\frac{1}{r^2}$， 因此每个 $\mathcal{W}^i(\sigma)$都被 $\frac{1}{r^2}$. 所界定。另一方面，$\mathcal{W}^d(\sigma)$由 $\frac{1}{r^2d}$ 根据 命题 4.3可知，其被界定。因此， 推论 4.1 中的表达式被界定为

$$O\left(\frac{n^3}{dr^4}+\frac{n^3}{d^2r^4}+\frac{n^3}{d^2r^4}\right)=o(1).$$ □

我们的方法具有灵活性，因此当映射 σ 为偶函数时，可以得到更强的结果 .

推论 4.5. 假设 σ 是对称偶 $\frac{1}{r\sqrt{d}}$-利普希茨连接函数，且 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(-\mathbf{x})$ 也成立。如果 d 是偶数，$d = \Omega(n \log n)$，且 $d = \omega_p(\frac{n^{3/2}}{r^2})$，那么

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \sigma) \| \mathsf{G}(n, p)\Big) = o(1).$$

证明。 证明与前一个命题中的证明类似。不过，我们注意到，当 σ 为偶数时，奇数层级上的所有傅里叶系数都为零。特别地，这对层级1 和 $d-1$. 成立。因此，表达式推论 4.1 的上界为

$$O\left(\frac{n^3}{d^2 r^4} + \frac{n^3}{d^2 r^4}\right) = o(1). \qquad \square$$

注 4.6。 本节中关于偶数连接的更强结果是一种普遍现象，这一点也会在后续结果中再次出现。这是我们在 第 4.1.4 节中的更一般猜想的一部分。我们注意到，要求 d 为偶数只是为了简化表述。否则，还需要额外对 $\mathcal{W}^{d-1}(\sigma)$ 进行界定，这是一个标准的技术性工作（见 附录 D）。

4.1.2 硬阈值连接

现在我们转而考察经典的硬阈值设定。我们的工具表明，只需对原始模型做一个细微调整——引入“双重阈值”——就会出现一种引人注目的新现象。

我们从基本的阈值模型开始。设 τ_p 满足 $\mathbf{P}_{\mathbf{x}\sim\mathsf{Unif}(\{\pm1\}^d)}[\sum_i x_i \geq \tau_p] = p$. 令 $\mathbf{T}_p$为由下式定义的映射 $\mathbb{1}\left[\sum_{i=1}^n x_i \geq \tau_p\right]$. 同样，我们希望理解最后一层上的傅里叶系数。利用存在唯一的 j 使得 $f_{j+1} \neq f_j$ 对于 $f = \mathbf{T}_p$，由 引理 4.2，在 附录 B 中我们得到以下界。

命题 4.7。 $\widehat{\mathbf{T}_p}([d]) = O\left(\sqrt[p]{\log \frac{1}{p}} \Big/ \sqrt{d}\right)$.

推论 4.8。 假设 $d = \Omega(n \log n)$ $d = \omega(n^3 p^2 \log^2 \frac{1}{p})$，且 $p = d^{O(1)}$. 那么，

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \mathbf{T}_p) \| \mathsf{G}(n, p)\Big) = o(1).$$

证明。由定理 2.8 可知，$\mathcal{W}^1(\sigma) = O(p^2 \log \frac{1}{p})$ $\mathcal{W}^{d-1}(\sigma) = O(p^2 \log \frac{1}{p})$ $\mathcal{W}^2(\sigma) = O(p^2 \log^2 \frac{1}{p})$，且 $\mathcal{W}^{d-2}(\sigma) = O(p^2 \log^2 \frac{1}{p})$。由命题 4.7，$\mathcal{W}^d(\sigma) = O(d^{-1} p^2 \log \frac{1}{p})$。因此，推论 4.1 中的表达式变为

$$O\left(\frac{n^3 p^2 \log^2 \frac{1}{p}}{d} + \frac{n^3 p^2 \log^4 \frac{1}{p}}{d^2} + \frac{n^3 p^2 \log^2 \frac{1}{p}}{d^2}\right) = o(1),$$

这里我们用到了以下事实： p 在 d. 中有多项式上界 $\square$

值得注意的是，这与 $p = \omega(\frac{1}{n})$ 阶 [LMS+22b] 的当前最优结果相符。与之前一样，如果考虑问题的偶数版本，我们可以得到更强的结果。令 δ_p 为满足以下条件的整数$\mathbf{P}[|\sum_{i=1}^n x_i| \geq \delta_p] = p$. 考虑由指示函数给出的“双重阈值”连接函数 $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbb{1}\left[|\sum_{i=1}^n x_i| \geq \delta_p\right]$. 在 附录 B中，我们证明以下不等式。

命题 4.9. $\widehat{\mathbf{D}_p}([d]) = O\left(\sqrt[p]{\log \frac{1}{p}} \Big/ \sqrt{d}\right)$.

推论 4.10。 假设 d 为偶数，$d = \Omega(n \log n)$ $d = \omega(n^{3/2} p \log^2 \frac{1}{p})$，且 $p = d^{O(1)}$。那么，

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \mathbf{D}_p) \| \mathsf{G}(n,p)\Big) = o(1).$$

证明。与推论 4.5的证明中一样，我们只需注意到，当 d 为偶数时，层级 1 和$d-1$ 上的权重会$\mathbf{D}_p$ 为偶映射时消失。因此，剩下的是

$$O\left(\frac{n^3 p^2 \log^4 \frac{1}{p}}{d^2} + \frac{n^3 p^2 \log^2 \frac{1}{p}}{d^2}\right) = o(1). \qquad \square$$

$\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \mathbf{D}_p)$ 的补图是相对于连接函数 $\sigma(\mathbf{x}) := \mathbb{1}[\sum_{i=1}^n x_i \in (-\delta_p, \delta_p)]$. 定义的随机代数图。这个随机图与[KTW14], 中使用的图非常相似，作者在那里考虑了区间指示函数 $\mathbb{1}[\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle \in [\tau_1, \tau_2]]$，不过其潜在空间为单位球面。[KTW14] 中区间指示函数的用途促使我们提出这样的问题：如果 σ 是多个区间的并集的指示函数，会怎样?

4.1.3 非单调连接、区间并集与波动

为说明我们所说的波动，先考虑由 $\kappa \in [0, 1/2]$, 给出的简单连接函数：

$$\pi_\kappa(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} + \kappa \omega_{[d]}(\mathbf{x}). \tag{11}$$

将其视为 $\mathbf{x}$ 中 *1* 的个数的函数时，当 κ. 取较大值时，该函数会发生很大的“波动”。注意，π_κ 只取 $1/2 \pm \kappa$ 这些值，并且当单个坐标发生改变时会在这些值之间交替。在极端情形 $\kappa = 1/2$, π_κ 是所有 $\mathbf{x}$ 中坐标等于 -1. 的个数为偶数的 $\mathbf{x}$ 的指示函数。将其视为 $\sum_{i=1}^d x_i$ 的函数时，它是 $d/2 + O(1)$ 个区间的并集。简单应用断言 1.5即可得到以下命题。

推论 4.11。 每当 $n\kappa^{4/3} = o(1)$ 时，KL 散度$\Big(\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, 1/2, \pi_\kappa), \mathsf{G}(n, 1/2)\Big) = o(1)$。

证明。令 γ_κ 为 $\pi_\kappa - \frac{1}{2}$. 的自相关。显然, - $\gamma_\kappa = \kappa^2 \omega_{[d]}(\mathbf{x})$，因此，当 t 为奇数时，$\mathbf{E}[\gamma_\kappa^t] = 0$；当 t 为偶数时，$\mathbf{E}[\gamma_\kappa^t] = \kappa^{2t}$。由于 $n\kappa^{4/3} = o(1)$ 成立，故 $n\kappa^2 = o(1)$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \log \mathbf{E}\left[\left(1 + \frac{\gamma_\kappa(\mathbf{x})}{p(1-p)}\right)^k\right] \\
&\le \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1 + \sum_{t=2}^{k} \binom{k}{t} \frac{\kappa^{2t}}{4^t}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(\left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right)^k - k\frac{\kappa^2}{4}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1 + O\left(k^2 \frac{\kappa^4}{16}\right)\right) = O\left(\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \times \kappa^4\right) = O(n^3\kappa^4),
\end{aligned}$$

由此即可得出结论。 $\square$

我们稍后将探讨这些界的紧致性。现在，从这个例子中得到的主要结论是：连接函数的“波动”越大，就越容易将其区分开来。接下来，我们将说明这一现象具有更普遍的适用性。回顾波动的定义FI，它来自引理 4.2。我们先通过两个简单的例子来计算量FI。

例 4.12。 如果 $\sigma\colon\ \{\pm1\}^d \longrightarrow [0,1]$ 是单调的，那么 $\mathsf{Fl}(\sigma) \le 1$. 事实上，由于所有差值 $f_{i+1}-f_i$ 具有相同的符号，因此 $\sum_{i=0}^{d-1}|f_{i+1}-f_i| = |\sum_{i=0}^{d-1} f_{i+1}-f_i| = |f_d - f_0| \le 1$.

例 4.13. 假设 $I = [a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]\cup\cdots\cup[a_s,b_s]$, 其中这些是端点为整数的 s 互不相交区间（$b_i+1 < a_{i+1}$）。那么，若 $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbb{1}[\sum_{i=1}^d x_i \in I]$, 则 $\mathsf{Fl}(f) \le 2s$ 当$|f_{b_i+1}-f_{b_i}| = 1, |f_{a_i}-f_{a_i-1}| = 1$ 时成立，且所有其他边际差均为 0。

我们已经在 引理 4.2 中看到 $|\widehat{f}([d])| = O\left(\frac{\mathsf{Fl}(\sigma)}{\sqrt{d}}\right)$. 运用迄今为止发展的相同证明技巧，我们得出以下结论。

推论 4.14. 假设 σ 是一个对称连接函数。每当满足 $d = \Omega(n\log n)$ 且$d = \omega\left(\max\left(n^3p^2\log^2\frac{1}{p}, n^{3/2}\mathsf{Fl}(\sigma)^2p^{-1}\right)\right)$ 时，

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)\|\mathsf{G}(n,p)\Big) = o(1).$$

若 σ 和 d 为偶数，则较弱的条件 $d = \omega\left(\max\left(n^{3/2}p\log^2\frac{1}{p}, n^{3/2}\mathsf{Fl}(\sigma)^2p^{-1}\right)\right)$ 足以推出 $\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)\|\mathsf{G}(n,p)\Big) = o(1)$。

例 4.15。 一个特别有趣的情形是， σ 是 s 个互不相交的区间的指示函数，如例 4.13所示。通过将$\mathsf{Fl}(\sigma)$ 替换为 $2s$ 上文中的表达式，可得到不可区分率。聚焦于$p = \Omega(1)$的情形（这样可以更清楚地看出区间数量的影响），我们需要

$$d = \omega(n^3 + n^{3/2}s^2)$$

对于任意区间并的不可区分性，以及

$$d = \omega(n^{3/2}s^2)$$

对于关于 0 对称的区间并的不可区分性。

我们注意到，这两个不等式只有在 $s = o(\sqrt{d})$时才有意义。 正如 $s \approx \sqrt{d}$处这种行为的消失并非巧合，相关讨论见注 6.7。

4.1.4 不含低次和高次项的连接猜想

我们现在给出以下猜想，它推广了这样一个观察：对于满足 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(-\mathbf{x})$ 的连接 σ，当维数较小时，相应的随机代数图与 $\mathsf{G}(n,p)$ 无法区分。 $d.$ 设 $k \ge 0$ 为一个常数。假设对称连接 $\sigma\colon\ \{\pm1\}^d \longrightarrow [0,1]$ 满足 $\mathcal{W}^i(\sigma) = 0$ （当 $i < k$ 时），并且 $\mathcal{W}^i(\sigma) = 0$ （当 $i > d-k.$ 时）。考虑定理 3.1 中关于 $\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$ 与 $\mathsf{G}(n,p)$ 之间 KL 散度的上界，其中 $m = k+1.$。在附加假设 $d = \Omega(n\log n)$ 下，该上界的阶为

$$\frac{n^3B_m^2}{p^2(1-p)^2d^m} + \frac{n^3C_m}{p^2(1-p)^2d^{m+1}} \le \frac{n^3\mathbf{Var}[\sigma]}{p^2(1-p)^2d^m} + \frac{n^3\mathbf{Var}[\sigma]}{p^2(1-p)^2d^{m+1}} = O\left(\frac{n^3}{d^m}\right).$$

特别是，这表明只要 $d = \omega(n^{3/m})$, $\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n,\ \{\pm1\}^d,\ p,\ \sigma)\|\mathsf{G}(n,\ p)\Big) = o(1)$。 遗憾的是，在我们的方法中，存在强烈的限制 $d = \Omega(n\log n)$。

猜想 4.16。 假设 $m \in \mathbb{N}$ 是一个常数，且 σ 是一个对称连接函数，使得层级 $\{1,2,\dots,m-1\} \cup \{d-m+1,\dots,d\}$ 上的权重全都等于 0。如果 $d = \tilde{\Omega}(n^{3/m})$，那么

$$\mathsf{TV}\Big(\mathsf{RAG}(n,\{\pm 1\}^d,p,\sigma),\mathsf{G}(n,p)\Big) = o(1).$$

遗憾的是，我们的方法只能在 $m = \{1,2,3\}$ 的情况下推出这一猜想，正如定理 3.1 所示，因为我们还需要 $d = \Omega(n\log n)$。在第 6.1.3 节中，我们通过证明一个匹配的下界，为这一猜想提供了进一步的证据。当然，我们还应当探讨是否存在非平凡的对称函数，使其在 $\{1,2,\dots,m-1\}\cup\{d-m+1,\dots,d\}$层级上的傅里叶权重全为 0。在附录 C中，我们对这个问题给出了肯定的回答。

4.1.5 低次多项式

最后，我们简要讨论低次多项式。这类多项式在布尔傅里叶分析领域尤其值得关注（例如，见 [EI22；ODo14]）。讨论的主要目的是补充猜想 4.16。人们可能会草率地根据该猜想得出结论：对于较大的 $d.$，正是 σ 的“低次”项使某个随机代数图 $\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$ 有别于 Erd˝os-R´enyi 图。然而，这一结论并不正确——由低次多项式构成的对称连接函数（即一切都由低次项决定），在维数较小的情况下，也会变得无法与 $\mathsf{G}(n,p)$ 区分开来 $d.$。因此，更准确的直觉是：低次与高次之间的相互作用，才是某些随机代数图 $\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$ 在 $d.$ 较大时有别于 Erd˝os-R´enyi 图的原因。

推论 4.17。 假设 $k \in \mathbb{N}$ 是一个固定常数，且 $\sigma\colon \{\pm1\}^d \longrightarrow [0,1]$ 是一个次数为 $k.$ 的对称连接。若 $d = \Omega(n)$ 且 $d = \omega_k\left(\min(n^3p^2\log^2\frac{1}{p}, np^{-2/3})\right)$，则

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)\|\mathsf{G}(n,p)\Big) = o(1).$$

证明。 我们应用 推论 4.1 于 $m = k$ 并得到

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)\|\mathsf{G}(n,p)\Big) = O\left(\frac{n^3\mathcal{W}^1(\sigma)}{p^2(1-p)^2d} + \frac{n^3\mathcal{W}^2(\sigma)}{p^2(1-p)^2d^2}\right).$$

现在，我们使用推论 2.10 和 定理 2.8 分别以两种方式给右侧定界 y:

$$O\left(\frac{n^3}{p^2(1-p)^2d^3}\right) \quad \text{and} \quad O\left(\frac{n^3p^2\log^2\frac{1}{p}}{d}\right).$$

取两个界中较强的一个，即得结论。 □

4.2 对称连接的变换

定理 3.1 之所以具有灵活性，一个原因是它并未明确要求 定理 3.1 必须满足 σ 对称性，而仅要求每个层级上的傅里叶系数绝对值具有统一上界。特别是，这使我们能够将其应用于对称连接函数的各种变形。接下来，我们将介绍两种修改对称函数的方法，使得 推论 4.4、4.5、4.8、4.10和4.14中的结论仍然成立。这两种变形都具有明确的解释意义，并将在第 6.2 节中进一步展示一些重要现象。

目前尚不清楚，先前用于证明随机几何图不可区分性的技术是否能够处理非单调、非对称连接。尤其是，基于分析.....的方法。

Wishart 矩阵([BDE+14; BBN20]) 在非对称情形下似乎尤其不适用，因为内积结构本质上要求对称性。另一方面，Racz 和 Liu 在 [LR21b] 中的方法，非常依赖通过累积分布函数表示连接函数，而这本质上要求单调性。虽然我们的方法涵盖了这些更一般的情形，但我们将在 第 6.2 节看到一个例子，表明遗憾的是它并非总是最优的。

4.2.1 实多项式的系数收缩

假设给定 $f\colon \{\pm 1\}^d \longrightarrow \mathbb{R}$。我们知道它可以表示为一个多项式。

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum_{S\subseteq[d]} \widehat{f}(S) \prod_{i\in S} x_i.$$

我们可以将 f 扩展为多项式 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, 也可表示为

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum_{S\subseteq[d]} \widehat{f}(S) \prod_{i\in S} x_i.$$

现在，对于任意向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in [-1, 1]^d$,，我们可以通过考虑多项式来“收缩” $\tilde{f}$的系数。

$$\tilde{f}_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_d) := \tilde{f}(x_1\alpha_1, x_2\alpha_2, \ldots, x_d\alpha_d) = \sum_{S\subseteq[d]} \widehat{f}(S) \prod_{i\in S} \alpha_i \prod_{i\in S} x_i.$$

随后，这会诱导出多项式 $f_\alpha\colon \{\pm 1\}^d \longrightarrow \mathbb{R}$，定义为

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum_{S\subseteq[d]} \widehat{f}(S) \prod_{i\in S} \alpha_i \prod_{i\in S} x_i.$$

这是一个“系数收缩”，因为 $|f_\alpha(S)| \le |f(S)|$ 显然成立。此外，注意，当$\mathbf{g} \in \{\pm 1\}^d$, 时，显然 $f_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{gx})$。特别地，这意味着如果 f取值于 $[0, 1]$,，那么 $f_{\mathbf{g}}$. 也如此。这一结论实际上在更一般的情况下也成立。

观察 4.18。对于任意函数 $f\colon \{\pm 1\}^d \longrightarrow [0, 1]$ 以及向量 $\alpha \in [-1, 1]^d$, f_α 取值于 $[0, 1]$. 证明。注意到，相应的实多项式 f, f_α 关于每个变量都是线性的。此外，集合 $A = \prod_{i=1}^d [-|\alpha_i|, |\alpha_i|]$, $B = [-1, 1]^d$ 都是凸集，并且 $A \subseteq B$. 因此，

$$\sup_{\mathbf{x}\in\{\pm 1\}^d} f_\alpha(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y}\in B} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{z}\in A} \tilde{f}(\mathbf{z}) \le \sup_{\mathbf{z}\in B} \tilde{f}(\mathbf{z}) = \sup_{\mathbf{x}\in\{\pm 1\}^d} f(\mathbf{x}) \le 1.$$

同理，我们得出 $f_\alpha \ge 0$ 成立。 □

特别地，这意味着，对于任意 $\alpha \in [-1, 1]^d$ 以及 σ 上的连接函数 $\{\pm 1\}^d$, σ_α 都是定义良好的连接函数。因此，以下所有推论 4.4、4.5、4.8、4.10和4.14均成立，只要将其中相应的连接函数替换为这些连接函数的任意系数收缩。正如我们将在第 6.2 节中看到的，尤其有趣的是 $\alpha \in \{\pm 1\}^d$ 的情形，因为这相当于简单地对 σ. 中的某些变量取反。特别地，假设 $\alpha = (\underbrace{1、1、\ldots\ldots、1}_{\ell}\ \underbrace{-1、-1、\ldots\ldots、-1}_{d-\ell})$ 对于某个 $1 \le \ell \le d$. 。然后，连接函数 $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 变成一个函数

$$\sum_{i\le\ell} x_i y_i - \sum_{i>\ell} x_i y_i.$$

相应的二形式并非半正定，因此基于施密特正交化和分析Wishart矩阵的方法在这种情形下不太可能得出有意义的结果。

4.2.2 排斥-吸引扭曲

回想一下，研究非单调、非对称连接的一个动机是，在某些现实场景中——例如建立友谊——不同特征上的相似性可能会对形成一条边的概率产生不同影响。

为对这一情形建模，考虑最简单的情况：$d = 2d_1$，且每个潜向量都包含两个长度为 d_1，的分量，即 $\mathbf{x} = [\mathbf{y}, \mathbf{z}],$，其中 $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \{\pm 1\}^{d_1}$，而 $[\mathbf{y}, \mathbf{z}]$ 是它们的拼接。在$\mathbf{y}$ 部分的相似性会产生“吸引”作用，使边更有可能形成；而$\mathbf{z}$ 部分的相似性会产生“排斥”作用，使边更不容易形成。具体而言，考虑两个对称连接 $a: \{\pm 1\}^{d_1} \longrightarrow [0,1]$ 和 $r: \{\pm 1\}^{d_1} \longrightarrow [0,1]$，其均值例如为 $1/2.$。我们将下列函数称为它们的排斥-吸引扭曲

$$\rho_{a,r}([\mathbf{y}, \mathbf{z}]) = \frac{1 + a(\mathbf{y}) - r(\mathbf{z})}{2}.$$

可以验证，$\rho_{a,\ r}$ 仍是一个均值为 $1/2$ 的连接函数，并满足 $\mathbf{方差}[\rho_{a,r}] = \frac{1}{4}(\mathbf{方差}[a]+\mathbf{方差}[r])$。此外，

$$(\rho_{a,r} - 1/2) * (\rho_{a,r} - 1/2) = (a - 1/2) * (a - 1/2) + (r - 1/2) * (r - 1/2).$$

因此，若记 $\gamma_\rho = \left(\rho_{a,r} - \frac{1}{2}\right) * \left(\rho_{a,r} - \frac{1}{2}\right), \gamma_a = (a - 1/2) * (a - 1/2)\ \gamma_r = (r - 1/2) * (r - 1/2)$，则有 $\gamma_\rho = \gamma_a + \gamma_r.$ 对每个 p 使用 $\|\gamma_a + \gamma_r\|_p \leq \|\gamma_a\|_p + \|\gamma_r\|_p$，我们可以重复定理 3.1 中的论证，但需多出一个简单的因子 2，适用于 $\gamma_\rho.$ 特别是，这意味着当 $d = \Omega(n \log\ n)$ 时，对于任意两个对称连接 a, r，

$$\begin{aligned}
&\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \rho_{a,r}) \| \mathsf{G}(n,p)\Big) \\
&= O\left(n^3 \mathcal{W}^d(a)^2 + \frac{n^3(\mathcal{W}^1(a)^2 + \mathcal{W}^{d-1}(a)^2)}{d} + \frac{n^3(\mathcal{W}^2(a)^2 + \mathcal{W}^{d-2}(a)^2)}{d^2}\right) \\
&+ O\left(n^3 \mathcal{W}^d(r)^2 + \frac{n^3(\mathcal{W}^1(r)^2 + \mathcal{W}^{d-1}(r)^2)}{d} + \frac{n^3(\mathcal{W}^2(r)^2 + \mathcal{W}^{d-2}(r)^2)}{d^2}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

如推论 4.1中所述。现在可以将其与推论 4.4、4.5、4.8、4.10 以及4.14结合起来。正如我们将在第 6.2 节中看到的，从理论角度来看，尤其有趣的是以下情形：$a = r.$

也可以 考虑两个以上连接函数的线性组合。本文不讨论这种情况 e.

4.3 典型指示连接函数

最后，我们转向一种真正超越对称性的情形。具体而言，我们探讨这样一个问题：何时一个具有指示连接函数的“典型”随机代数图，与 $\mathsf{G}(n,p)$ 无法区分。更形式化地说，我们考虑 $\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, \sigma_A, p_A)$，其中 $\sigma_A(\mathsf{g}) = \mathbb{1}[\mathsf{g} \in A]$，且 A 取自 $\mathsf{AnteU}(\{\pm 1\}^d, p)$。回忆一下，$\mathsf{AnteU}(\{\pm 1\}^d, p)$ 是 $\{\pm 1\}^d$ 的子集上的分布，其中每个元素都以概率 p 独立地被纳入；这是因为超立方体上的所有元素的阶都至多为 2（见定义 1.14）。

定理 4.19。假设 设 $d = \Omega(n \log\ n)$。以至少 $1 - 2^{-d}$ 的概率，在 $A \sim \mathsf{AnteU}(\{\pm 1\}^d, p$ ），

$$\mathsf{TV}\Big(\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, \sigma_A, p_A) \| \mathsf{G}(n,p)\Big) = o_n(1).$$

正如我们将在 第 7 节中看到的，d 对 n 的依赖在 $p = \Omega(1)$时，除对数因子外是紧的。我们使用以下关于随机函数傅里叶系数的著名界。

命题 *4.20*（[ODo14]）。假设通过以概率 p 独立地包含每个元素，从 $\{\pm 1\}^d$ 中抽样得到 B（即 $B \sim \mathit{AnteU}(\mathcal{G}, p)$）。令 σ_B 为 B. 的指示函数。那么，以至少 $1-2^{-d}$ 的概率，以下不等式 $|\widehat{\sigma_B}(\emptyset) - p| \le 2^{1-d/2}\sqrt{d}$ 和 $|\widehat{\sigma_B}(S)| \le 2^{1-d/2}\sqrt{d}$ 对所有 $S \neq \emptyset$ 同时成立。

现在，我们只需结合命题 4.20和定理 3.1。

定理 4.19 的证明。我们将证明该命题对所有满足 $|\widehat{\sigma_A}(\emptyset) - p| \le \frac{2\sqrt{d}}{2^{d/2}}$ 且 $|\widehat{\sigma_A}(S)| \le \frac{2\sqrt{d}}{2^{d/2}}$ 对所有 $S \neq \emptyset$. 都成立的集合 $A \subseteq \{\pm 1\}^d$ 均成立。根据命题 4.20，这就足够了。设 A 为这样的集合，并令 $p_A = \mathbf{E}[\sigma_A] = \widehat{\sigma_A}(\emptyset)$。考虑定理 3.1。由此可知，对每个 i，都有 $B_i \le \Delta\binom{d}{i}^{1/2}$，其中 $\Delta = \frac{2\sqrt{d}}{2^{d/2}}$ 是为简化记号而设。取 $m = 1.$。于是，

$$\begin{aligned} C_m &= \sum_{2 \le i \le \frac{d}{2en}} \Delta^2 \binom{d}{i} + \sum_{d - \frac{d}{2en} \le i \le d-2} \Delta^2 \binom{d}{i} \\ &= O\left(\Delta^2 \binom{d}{\frac{d}{2en}}\right) \\ &= O\left(\frac{4d}{2^d}(2e^2 n)^{\frac{d}{2en}}\right) \\ &= O\left(\frac{2^{O(d \log n/n)}}{2^d}\right) = O\left(\frac{1}{2^{d/2}}\right). \end{aligned}$$

类似地，

$$D = \sum_{\frac{d}{2en} < i < d - \frac{d}{2en}} \Delta^2 \binom{d}{i} \le \Delta^2 2^d = 4d.$$

由于 $d = \Omega(n\log\, n)$，满足 定理 3.1 的条件。因此，

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, 1/2, \sigma_A) \| \mathsf{G}(n, p_A)\Big) \tag{12}$$

$$= O\left(\frac{n^3}{p_A^2} \times \left(\frac{B_1^4}{d} + \frac{B_{d-1}^4}{d} + B_d^4 + \frac{O(\frac{1}{2^d})}{d^2} + 4d\exp\left(-\frac{d}{2en}\right)\right)\right) \tag{13}$$

$$= O\left(\frac{n^3 d^3}{p_A^2 2^{2d}} + \frac{n^3}{p_A^2 d^2 2^d} + n^3 d \times \exp\left(-\frac{d}{2en}\right)\right). \tag{14}$$

当 $d = \Omega(n\log\, n)$ 且隐藏常数足够大时，最后一个表达式的阶为 $o_n(1)$。最后，注意到

$$\mathsf{TV}\Big(\mathsf{G}(n,p), \mathsf{G}(n,p_A)\Big) = o(1)$$

只要 $p = \Omega(1/n^2)$，且 $|p_A - p| \le 2^{1-d/2}\sqrt{d}$. 事实上，这可由以下观察得到。设 $p_A < p$ 不失一般性。则，$\mathsf{G}(n,p_A)$ 可以先通过采样 $\mathsf{G}(n,p)$，再以概率 $\frac{p_A}{p} \ge 1 - 2^{1-d/2}\sqrt{d}p^{-1} = 1 - o(n^{-3})$ 保留每条边来进行采样。因此，以高概率 $(1 - o(n^{-3}))$，$\binom{n}{2} = 1 - o(n^{-1})$，所有边都会被保留，并且这两个分布在全变差距离下相距$o(1)$。我们使用三角不等式，并结合公式 (12)。 □

注 4.21. 上述证明提供了一种构造性方法，可以找到在 $d = \Omega(n)$ 时会出现不可区分性的连接函数 σ。具体而言，一个充分条件是：除 $\widehat{\sigma_A}(\emptyset)$ 外，所有傅里叶系数都由 $\frac{2\sqrt{d}}{2^{d/2}}$ 界定，且 $|\widehat{\sigma_A}(\emptyset) - p| \le \frac{2\sqrt{d}}{2^{d/2}}$。事实上，可以验证，即使在更宽松的条件下，同样的论证仍然成立：对任意固定常数 C，所有系数都由 $\frac{d^C}{2^d}$ 界定。傅里叶系数在 0 以上的层级上由 ϵ 界定的这类函数称为 ϵ-正则 [ODo14]。

对于 $\frac{2\sqrt{d}}{2^{d/2}}$-正则且均值为 1/2 的指示函数，最简单的例子或许是模 2 内积函数和完全二次函数 [ODo14，例 6。4]。这些提供了相变到 Erdős-Rényi 的位置在 $d = \Theta(n)$ 的函数的显式例子。

5 典型随机代数图的不可区分性

我们现在通过以下方式加强定理 4.19：（1）将其扩展到所有大小适当的群；（2）将$\log n$ 因子替换为可能更小的$\log \frac{1}{p}$ 因子。该证明具有概率性，因此无法提供显式构造函数的方法，使相变发生在 $d = \Omega(n)$处。

定理 5.1。 给定一个整数 n 和一个实数 $p \in [0,1]$. 令 $\mathcal{G}$ 为大小至少为$\exp(Cn \log \frac{1}{p})$ 的任意有限群，其中 C. 为某个普适常数。然后，对于 A ∼上的 $1 - |\mathcal{G}|^{-1/7}$，有至少 $1 - |\mathcal{G}|^{-1/7}$ 的概率满足$\mathsf{AnteU}(\mathcal{G}, p)$，我们有

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RRAG}(n, \mathcal{G}, \sigma_A, p_A) \| \mathsf{G}(n,p)\Big) = o(1),$$

其中 $p_A = \mathbf{E}_{\mathbf{g}\sim\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}[\sigma_A(\mathbf{g})]$. 对于RRAG，将其替换为LRAG后，完全相同的结论也成立。

证明。 鉴于公式（4），我们只需证明，对于典型集合 A，函数

$$\gamma_A(\mathbf{g}) = \mathbf{E}_{\mathbf{z}\sim\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}[(\sigma_A(\mathbf{g}\mathbf{z}^{-1}) - p)(\sigma_A(\mathbf{z}) - p)]$$

具有足够小的矩。我们通过在 A. 上使用二阶矩方法来界定这些矩。也就是说，对于 $t \geq 1$，定义以下函数：

$$\phi_t(A) = \mathbf{E}_{\mathbf{g}\sim\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}[\gamma_A(\mathbf{g})^t] \text{ and } \Phi(t) = \mathbf{E}_{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}[\phi_t^2(A)].$$

我们通过界定二阶矩 $\Phi(t)$ 并使用切比雪夫不等式，证明对于典型的 A， $\phi_t(A)$ 很小。我们首先将 $\phi_t(A)$ 和 $\Phi(t)$ 表示为。首先，

$$\begin{aligned}\phi_t(A) = \mathbf{E}_{\mathbf{g}\sim\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}[\gamma_A(\mathbf{g})^t] &= \mathbf{E}_{\mathbf{g}\sim\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}\Big[\mathbf{E}_{\mathbf{z}}[(\sigma_A(\mathbf{g}\mathbf{z}^{-1}) - p)(\sigma_A(\mathbf{z}) - p)]^t\Big] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{g},\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^t\sim_{iid}\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}\left[\prod_{i=1}^t (\sigma_A(\mathbf{g}\mathbf{z}_i^{-1}) - p)(\sigma_A(\mathbf{z}_i) - p)\right].\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \mathbf{E}_{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}[\phi_t^2(A)] \\ &= \mathbf{E}_{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}\left[\left(\mathbf{E}_{\mathbf{g},\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^t\sim_{iid}\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}\left[\prod_{i=1}^t (\sigma_A(\mathbf{g}\mathbf{z}_i^{-1}) - p)(\sigma_A(\mathbf{z}_i) - p)\right]\right)^2\right] \\ &= \mathbf{E}_{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}\Bigg[\mathbf{E}_{\mathbf{g}^{(1)},\mathbf{g}^{(2)},\{\mathbf{z}_i^{(1)}\}_{i=1}^t,\{\mathbf{z}_i^{(2)}\}_{i=1}^t\sim_{iid}\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}\Bigg[\prod_{i=1}^t (\sigma_A(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1}) - p) \\ &\qquad \times \prod_{i=1}^t (\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(1)}) - p) \prod_{i=1}^t (\sigma_A(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_i^{(2)})^{-1}) - p) \prod_{i=1}^t (\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(2)}) - p)\Bigg]\Bigg].\end{aligned}$$

现在的主要思路是，我们可以交换 A 和 $\{\mathbf{g}^{(1)}、\mathbf{g}^{(2)}、\{\mathbf{z}_i^{(1)}\}_{i=1}^t、\{\mathbf{z}_i^{(2)}\}_{i=1}^t\}$. 之间的期望次序。由于对于每个 $\mathbf{h} \in \mathcal{G}$，根据密度 $\mathsf{AnteU}(\mathcal{G}、 p)$，的定义，$\mathbf{E}^{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}\sigma_A(\mathbf{h}) = p$，因此，形如 $(\sigma_A(\cdot) - p)$ 的每一项在对 A. 取期望时，其期望值均为零。下界

我们对 $\mathcal{G}$ 的大小所得到的界将确保，对于“典型”的 $\{\mathbf{g}^{(1)}$、$\mathbf{g}^{(2)}$、$\{\mathbf{z}_i^{(1)}\}_{i=1}^t$、$\{\mathbf{z}_i^{(2)}\}_{i=1}^t\}$，至少有一个形如 $(\sigma_A(\cdot)-p)$ 的项与其他项独立，从而使期望值（几乎）为零。具体来说，将上述表达式改写为

$$\mathbf{E}_{\mathbf{g}^{(1)},\mathbf{g}^{(2)},\{\mathbf{z}_i^{(1)}\}_{i=1}^t,\{\mathbf{z}_i^{(2)}\}_{i=1}^t\sim_{iid}\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}\Bigg[\mathbf{E}_{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}\Bigg[\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(1)})-p) \times\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_i^{(2)})^{-1})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(2)})-p)\Bigg]\Bigg]. \tag{15}$$

现在注意，如果存在某个 $\xi\in\{\mathbf{g}^{(1)},\mathbf{g}^{(2)},\{\mathbf{z}_i^{(1)}\}_{i=1}^t,\{\mathbf{z}_i^{(2)}\}_{i=1}^t\}$，使得对于任何其他 $\zeta\in\{\mathbf{g}^{(1)},\mathbf{g}^{(2)},\{\mathbf{z}_i^{(1)}\}_{i=1}^t,\{\mathbf{z}_i^{(2)}\}_{i=1}^t\}$，都有 $\xi\neq\zeta,\xi\neq\zeta^{-1}$，那么上述表达式确实等于 0，因为这意味着 $\sigma_A(\xi)$ 与所有其他项 $\sigma_A(\zeta)$ 相互独立。称 $B=B\left(\{\mathbf{g}^{(1)},\mathbf{g}^{(2)},\{\mathbf{z}_i^{(1)}\}_{i=1}^t,\{\mathbf{z}_i^{(2)}\}_{i=1}^t\}\right)$ 为所有 $\xi\in\{\mathbf{g}^{(1)},\mathbf{g}^{(2)},\{\mathbf{z}_i^{(1)}\}_{i=1}^t,\{\mathbf{z}_i^{(2)}\}_{i=1}^t\}$ 都满足这一性质的事件。如前所述，在 B 上我们有

$$\mathbf{E}_{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}\left[\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(1)})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_i^{(2)})^{-1})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(2)})-p)\right]=0,$$

且在 B之外，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}\left[\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(1)})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_i^{(2)})^{-1})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(2)})-p)\right]\\ &\le\left\|\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(1)})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_i^{(2)})^{-1})-p)\prod_{i=1}^t(\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(2)})-p)\right\|_\infty\le 1.\end{aligned}$$

由此可得 $\Phi(t)\le 1-\mathbf{P}[B]$. 接下来，我们将证明 $\mathbf{P}[B]=1-O\left(|\mathcal{G}|^{-1/3}\right)$.

记 $M\subseteq\mathcal{G}$ 为满足方程 $\mathbf{x}^2=\mathbf{h}$ 在 $\mathcal{G}$. 上至少有 $|\mathcal{G}|^{1/3}$ 个解的群元素$\mathbf{h}$ 的集合。根据马尔可夫不等式，$|M|\le|\mathcal{G}|^{2/3}$. 现在，我们按顺序依次抽取元素 $\{\mathbf{g}^{(1)},\mathbf{g}^{(2)},\{\mathbf{z}_i^{(1)}\}_{i=1}^t,\{\mathbf{z}_i^{(2)}\}_{i=1}^t\}$，并跟踪以下条件之一失效的概率（若某个条件失效，我们就终止）：

1. $\mathbf{g}^{(1)}\notin M\cup\{1\}$ 和 $\mathbf{g}^{(2)}\notin M\cup\{1\}$.2. $\mathbf{z}_i^{(1)}\notin\{\mathbf{z}_j^{(1)},(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1}:\ j<i\}\cup\{(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1},(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1})^{-1}:\ j<i\}$.3. $\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1}\notin\{\mathbf{z}_j^{(1)},(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1}:\ j\le i\}\cup\{(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1},(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1})^{-1}:\ j<i\}$.4. $\mathbf{z}_i^{(2)}\notin\{\mathbf{z}_j^{(2)},(\mathbf{z}_j^{(2)})^{-1}:\ j<i\}\cup\{\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_j^{(2)})^{-1},(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_j^{(2)})^{-1})^{-1}:\ j<i\}$, and $\mathbf{z}_i^{(2)}\notin\{\mathbf{z}_j^{(1)},(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1},\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1},(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1})^{-1}:\ j\le n\}$.

5. $\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_i^{(2)})^{-1}\notin\{\mathbf{z}_j^{(2)},(\mathbf{z}_j^{(2)})^{-1}:\ j<i\}\cup\{\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_j^{(2)})^{-1},(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_j^{(2)})^{-1})^{-1}:\ j<i\}$, and $\mathbf{z}_i^{(2)}\notin\{\mathbf{z}_j^{(1)},(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1},\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1},(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1})^{-1}:\ j\le n\}$.

注意，条件 2-5 恰好刻画了事件 B 发生，因此条件 1-5 同时成立的概率至多为$\mathbf{P}[B]$. 。加入条件 1 是为了便于证明。我们分别分析每一步。

1. $\mathbf{P}[\mathbf{g}^{(1)}\in M\cup\{1\}]=\frac{|M|\cup\{1\}}{|\mathcal{G}|}=O(|\mathcal{G}|^{-1/3})$，$\mathbf{g}^{(2)}$. 也同理。因此，抽样过程在此阶段失败的概率至多为 $O(|\mathcal{G}|^{-1/3})$。

2. 由于元素 $\mathbf{z}_i^{(1)} \notin \{\mathbf{z}_j^{(1)}, (\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1} : \ j < i\} \cup \{(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1}, (\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_j^{(1)})^{-1})^{-1} : \ j < i\}$ 独立于$\mathbf{z}_i^{(1)}$，且此类元素至多有 $4i \le 4t \le 4n$ 个，因此我们在此步骤失败的概率为 $O(n/|\mathcal{G}|)$。

3. 对$\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1}$ 的计算几乎相同，只是需要分别处理$\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1} = (\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1}$ 和$\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1} = \mathbf{z}_i^{(1)}$. 这两种情况。第一个事件只有在$\mathbf{g}^{(1)} = 1$的情况下才会发生，而此时抽样过程已在步骤*1*终止。第二个事件等价于$g^{(1)} = (\mathbf{z}_i^{(1)})^2$. 如果抽样过程未在步骤1终止，则该事件发生的概率至多为 $|\mathcal{G}|^{-2/3}$，因为$\mathbf{g}^{(1)} \notin M$. 因此，失败的总概率为 $O(n/|\mathcal{G}| + |\mathcal{G}|^{-2/3})$。

4. 与步骤2中一样，对$\mathbf{z}_i^{(2)}$ 的计算给出 $O(n/|\mathcal{G}|)$。

5. 与步骤5一样，对$\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1}$ 的计算得到 $O(n/|\mathcal{G}| + |\mathcal{G}|^{-2/3})$.

对所有 $j \in [t], \ell \in \{1, 2\}$, 求和，并使用并集界，可得失败概率至多为

$$O\left(\frac{1}{|\mathcal{G}|^{1/3}}\right) + O\left(\frac{t}{|\mathcal{G}|^{2/3}}\right) + O\left(\frac{tn}{|\mathcal{G}|}\right) = O\left(\frac{1}{|\mathcal{G}|^{1/3}}\right)$$

根据定义以及关于 $|\mathcal{G}|$. 的假设， $t \le n \le \log|\mathcal{G}|$ ，其中 t

回到前面的推导，我们得出，对于某个绝对常数 $C,$， $1 - \mathbf{P}[B] \le C|\mathcal{G}|^{-1/3}$；因此，对于某个绝对常数 $C.$， $\Phi(t) \le C|\mathcal{G}|^{-1/3}$

现在，我们可以对 A 应用矩方法，从而得出

$$\mathbf{P}_A[|\phi_t(A)| > |\mathcal{G}|^{-1/12}] \le \frac{\mathbf{E}_A[\phi_t(A)^2]}{|\mathcal{G}|^{-1/6}} = \frac{\Phi(t)}{|\mathcal{G}|^{-1/6}} \le C|\mathcal{G}|^{-1/6}.$$

因此，对于 $A \sim$上的 AnteU$(\mathcal{G}, p)$ $\phi_t(A) \le |\mathcal{G}|^{-1/12}.$，该结论以高概率成立。对所有 $t \in \{1, 2, \ldots, n-1\},$ 应用并集界，我们得出：对于 $A \sim$上的 AnteU$(\mathcal{G}, p)$ $\phi_t(A) \le |\mathcal{G}|^{-1/12}$，对所有 $t \in [n-1].$， $1 - Cn|\mathcal{G}|^{-1/6} > 1 - |\mathcal{G}|^{-1/7}$ 以高概率成立

现在，假设 A 是满足以下条件的一个这样的集合： $\phi_t(A) \le |\mathcal{G}|^{-1/12}$ 对所有 $t \in [n-1]$.利用公式（4），我们得到

$$\sum_{k=0}^{n-1} \log \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} \mathbf{E}_{\mathbf{g} \sim \mathsf{Unif}(\mathcal{G})} \left[\frac{\gamma(\mathbf{g})^t}{p^t(1-p)^t}\right] \le \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \sum_{t=1}^{k} \binom{k}{t} \frac{|\mathcal{G}|^{-1/12}}{p^t(1-p)^t}\right).$$

现在，假设 $|\mathcal{G}| > n^{24} 2^{12n} p^{-12n} (1-p)^{-12n}$，其对于某个绝对常数 C 为 $\exp(Cn \log \frac{1}{p})$ 阶，当 $p \le \frac{1}{2}.$ 时。那么，上述表达式有界于

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{n^2 2^n} \sum_{t=1}^{k} \binom{k}{t} \frac{p^n(1-p)^n}{p^t(1-p)^t}\right) \\
&\le \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{n^2 2^n} \sum_{t=1}^{k} \binom{k}{t}\right) \\
&\le \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{n^2 2^n} 2^k\right) \le \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} = o(1).
\end{aligned}$$

□

6 通过超立方体上的带符号三角形计数进行检测 e

这里，我们将探讨对带符号三角形进行计数的作用。首先，我们将给出与第 4.1 节中关于对称连接函数的论证相对应的内容。正如我们将在第 6.2 节中看到的，将带符号三角形统计量应用于非对称连接存在根本性的困难。第 7 节揭示了一个更深层的局限，它甚至超越了对任何小型子图的计数。

6.1 对称连接的检测

我们首先简化推论 2.14。

推论 6.1。 假设 $d = \omega(n)$ $p = \Omega(1/n)$，且 σ 是一个对称连接。如果

$$n^6\Big(\sum_{S\,:\,|S|\in\{1,2,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^3\Big)^2 = \omega\Big(n^3p^3 + n^4 \sum_{|S|\in\{1,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^4\Big),$$

那么，带符号三角形统计量能够以高概率区分$\mathsf{G}(n,p)$与$\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$。

证明。 我们将基本证明，上述不等式以及 $d = \omega(n)$ $p = \Omega(1/n)$，蕴含推论 2.14的条件。记

$$A = \sum_{S\,:\,|S|\in\{1,2,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^3.$$

由于 $\sum_{|S|\in\{1,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^4 > 0$，上述条件意味着 $n^6A^2 = \omega(n^3p^3)$，因此 $A = \omega(n^{-3/2}p^{3/2})$。不过请注意，

$$B := \sum_{S\,:\,|S|\notin\{1,2,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^3 \le \sum_{S\,:\,|S|\notin\{1,2,d-1,d\}} |\widehat{\sigma}(S)|^3 = \sum_{3\le j\le d-3} \binom{d}{j}\left(\frac{\mathcal{W}^j(\sigma)}{\binom{d}{j}}\right)^{3/2},$$

其中，最后一个等式利用了 σ. 的对称性。然而，由于 $\mathcal{W}^j(\sigma) \le \mathbf{方差}[\sigma] \le p - p^2 < p$，最后一个和可由下式界定：

$$\sum_{3\le j\le d-3} \binom{d}{j}^{-1/2} p^{3/2} = O\left(d^{-3/2}p^{3/2}\right) = o(n^{-3/2}p^{3/2}) = o(A).$$

特别地，这意味着 $A + B = \Omega(A)$，且 $n^3|A + B| = \omega(n^{3/2}p^{3/2}) = \omega(1)$。因此，

$$\begin{aligned} n^6\Big(\sum_{S\neq\emptyset} \widehat{\sigma}(S)^3\Big)^2 &= \Omega\Big(n^6 \sum_{S\,:\,|S|\in\{1,2,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^3\Big)^2 \\ &= \omega\Big(n^3p^3 + n^4 \sum_{|S|\in\{1,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^4\Big) + \omega\Big(n^3 \sum_{S\neq\emptyset} \widehat{\sigma}(S)^3\Big) \\ &= \omega\Big(n^3p^3 + n^3 \sum_{S\neq\emptyset} \widehat{\sigma}(S)^3 + n^4 \sum_{|S|\in\{1,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^4\Big), \end{aligned}$$

其中我们使用了该推论的假设，以及以下事实： $n^6(A + B)^2 = \omega(|n^3(A + B)|)$，该事实由 $|n^3(A + B)| = \omega(1)$ 推出。为完成证明，我们只需将四次幂之和中缺少的项加上。采用与我们界定 B 时相同的方法，可得

$$n^4 \sum_{S\,:\,|S|\notin\{1,2,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^4 = n^4 \sum_{2\le j\le d-2} \binom{d}{j} p^2 \binom{d}{j}^{-2} = O(n^4p^2d^{-2}) = o(n^2p^2) = o(n^3p^3),$$

whe在最后一行中，我们使用了 $pn = \Omega(1)$这一事实。由此即可得出结论 . □

注意，该命题给出了与推论 4.1 完全对应的定性结论，因为它同样仅取决于层级 1、2、$d-2$、$d-1$、d.

现在，我们转而证明特定函数的检测结果，这些结果为我们的不可区分性结果提供下界。对于 推论 4.4和 推论 4.8，我们不提供任何下界结果，因为相关结果已见于文献（尽管针对的是高斯空间上的略有不同的模型）。具体而言，在 [LR21b], 中，Liu 和 Racz 证明，当连接函数满足 σ 单调 $\frac{1}{r\sqrt{d}}$-利普希茨条件时，只要 $d = o(n^3/r^6)$ 成立，带符号三角形统计量就能区分底层几何。 在 [LMS+22b], 中，作者证明，当 $\mathbf{T}_p$ 满足 $d = \tilde{o}(n^3p^3)$ 时，带符号三角形统计量可以区分连接函数。

6.1.1 硬阈值连接

在这里，我们证明以下界，对应于 推论 4.10。

推论 6.2。 当 d 为偶数且 $d = \omega(n)$ $p = \Omega(\frac{1}{n})$ 并且 $d = o(n^{3/2}p^{3/2})$,

$$\mathsf{TV}(\mathsf{G}(n,p), \mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \mathbf{D}_p)) = 1 - o(1).$$

因此，为了证明这一结论，我们需要计算$\mathbf{D}_p$ 的傅里叶系数，这不足为奇。$\widehat{\ }$ $\tilde{}$根据命题 4.9 ，我们知道$\mathbf{D}_p([d]) = O(\frac{p}{d^{1/2}})$。在附录 ~~D.1~~中，我们证明了以下更进一步的界。

命题 6.3. 当 $p = d^{O(1)}$ 时，$\mathbf{D}_p$ 的傅里叶系数满足

1. $\widehat{\mathbf{D}_p}([2]) = \Omega(\frac{p}{d})$.
2. $\widehat{\mathbf{D}_p}([d-2]) = \tilde{O}(\frac{p}{d^{3/2}})$.

这些足以证明该推论。

推论的证明 推论 *6.2* 。 我们只需应用 推论 6.1。由于层级 $1, d-1,$ 上的所有傅里叶系数都等于零，我们将重点放在层级 $2, d-2, d$.

$$\sum_{S\,:\,|S|\in\{1,2,d-2,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^3 = \Omega\left(\frac{p^3}{d^3}\binom{d}{2}\right) + \tilde{O}\left(\binom{d}{2}\frac{p^3}{d^{9/2}} + \frac{p^3}{d^{3/2}}\right) = \Omega\left(\frac{p^3}{d}\right),$$

$$\sum_{S\,:\,|S|\in\{1,d-1,d\}} \widehat{\sigma}(S)^4 = \tilde{O}\left(\frac{p^4}{d^2}\right).$$

因此，根据 推论 6.1，当.....时，我们可以检测到几何结构

$$n^6\frac{p^6}{d^2} = \omega(n^3p^3) + \tilde{\omega}\left(\frac{p^4}{d^2}\right).$$

很容易验证，这等价于 $d = o(n^{3/2}p^{3/2})$。 □

6.1.2 非单调连接、区间并与波动

现在我们转向非单调连接和区间并的更一般情形。我们只考虑 $p = \Theta(1)$ 的情况，以便更好地说明对奇偶性的相关性，这种相关性体现在区间的数量和解析总变差上。我们首先处理 π_κ. 的简单情形

推论 6.4. 如果 $n\kappa^2 = \omega(1)$，带符号三角形统计量能够以高概率区分$\mathsf{G}(n,p)$ 与$\mathsf{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, 1/2, \pi_\kappa)$。

证明。 根据 推论 2.14，只要满足以下条件，带符号三角形统计量就能以高概率区分这两个图模型

$$n^6\kappa^6 = \omega(n^3 + n^3\kappa^3 + n^4\kappa^4).$$

显然，这等价于 $n\kappa^2 = \omega(1)$。 □

注 6.5。特别地，注意当 $\kappa = \Theta(1)$ 时，对于任意 $d.$，都可以以高概率区分 $G(n, 1/2)$ 和 $RAG(n, \{\pm1\}^d, 1/2, \pi_\kappa)$。这一现象显然是超立方体所特有的。在高斯情形下，只要 $d = \tilde{\omega}(n^3)$，对于任意仅依赖于 $\langle x, y\rangle$ 的连接函数$\sigma(x, y)$，$TV\Big(G(n,p)$ 与 $RGG(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d)\ p, \sigma)\Big) = o(1)$，这是因为根据定理 1.2，在这一情形下 Wishart 矩阵与 GOE 矩阵不可区分。理解高斯空间与超立方体之间这一差异的一种方式是，后者还具有算术结构，因此，像 π_κ这样高度依赖算术结构的连接函数可能导致截然不同的行为。特别是在$\pi_{1/2}$的情形下，所得图 $RAG(n, \{\pm1\}^d, 1/2, \pi_{1/2})$ 是二分图：该图中的顶点 i, j 相邻，当且仅当 x_i 与 x_j· 中等于 -1 的坐标数量具有相同的奇偶性

注 6.6. 请注意，$\pi_{1/2}$ 在非零层级上有一个较大的傅里叶系数，但这已经足以使$RAG(n, \{\pm1\}^d, 1/2, \pi_{1/2})$ 可被检测到，且无论取何 $n.$ 这是对定理 3.1的定性逆命题。

注 6.7. 最后，任取 $s = \omega(\sqrt{d})$，并令 $h(x) := \mathbb{1}\left[\sum_{i=1}^d x_i \in [-s, s]\right]$. 那么，连接函数$\sigma(x) := h(x) \times \pi_{1/2}(x)$ 是 $O(s)$ 个区间之并的指示函数。尽管如此，$RAG(n, \{\pm1\}^d, p, \sigma)$ 和 $G(n, 1/2)$ 仍能以概率 $1 - o(1)$ 区分。事实上，$P_{g\sim Unif(\{\pm1\}^d)}[\sigma(g) = \pi_{1/2}(g)] = 1 - o(1)$，这意味着对于所有足够小的 $m.$，$TV\Big(RAG(m, \{\pm1\}^d, 1/2, \sigma), RAG(m, \{\pm1\}^d, 1/2, \pi_{1/2})\Big) = o(1)$。因此，对于足够小的 $m = \omega(1)$，只需关注顶点 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 上的诱导子图，就能区分 $RAG(n, \{\pm1\}^d, p, \sigma)$ 和 $G(n, 1/2)$。

现在我们继续讨论更有趣的区间并。请注意，在这种情况下，我们证明的一般区间并的不可区分率为 $d = \omega(n^3 + n^{3/2}s^2)$，而关于 0 对称的区间并的不可区分率为 $d = \omega(n^{3/2}s^2)$。我们给出的与这些不可区分率相对应的结果基于以下区间并。为简单起见，假设 d 为偶数且 $d = 2d_1.$ 我们从一般情形开始。

推论 6.8。 设 $s = \tilde{\Omega}(d^{1/3})$ 且 $s = o(\sqrt{d})$。那么，存在一个连接函数 ζ，它是一个由 s 个区间组成的区间并的指示函数，并且 $\mathbf{E}[\zeta] = \Omega(1)$。此外，只要 $d = o(ns^2)$，就可以通过带符号三角形统计量检测到 ζ。

我们按如下方式构造该函数 ζ。

命题 6.9。 令 $s = o(\sqrt{d})$，并考虑由 s 个区间组成的区间并，其形式为

$$I_s = \{d_1, d_1 + 2, d_1 + 4, \ldots, d_1 + 2(s-2)\} \cup [d_1 + \sqrt{d}, d].$$

令连接函数 ζ_s 定义为 $\zeta_s(x) = \mathbb{1}[\sum_{i=1}^d x_i \in I_s]$. 那么，以下事实成立：$\mathbf{E}[\zeta_s] = \Omega(1)$，$|\widehat{\zeta_s}([\ell])| \le \binom{d}{l}^{-1/2}$ 对于 $\ell \in \{1, 2, d-1, d-2\}$，以及 $\widehat{\zeta_s}([d]) = \Theta(\frac{s}{\sqrt{d}})$.

证明见 附录 D.2。接下来，我们为连接函数是区间并集的指示函数提供下界。

推论 *6* 的证明 *8*。 我们使用 推论 6.1 作为区间并集指示函数 ζ_s. 左边变为 es

$$n^6\left(\tilde{\Theta}\left(\frac{s^3}{d^{3/2}}\right)+dO\left(\binom{d}{1}^{-3/2}\right)+\binom{d}{2}O\left(\binom{d}{2}^{-3/2}\right)\right)=n^6\tilde{\Theta}\left(\frac{s^3}{d^{3/2}}\right)$$

为 $s=\tilde{\Omega}(d^{1/3})$。类似地，右侧为

$$\Theta(n^3)+n^4\tilde{\Theta}\left(\frac{s^4}{d^2}\right)+n^4dO\left(\binom{d}{1}^{-2}\right)+n^4s^2O\left(\binom{d}{2}^{-2}\right)=O\left(n^3+n^4\frac{s^4}{d^2}\right).$$

因此，检测需要满足以下不等式：

$$n^6\frac{s^6}{d^3}=\tilde{\omega}\left(n^3+n^4\frac{s^4}{d^2}\right).$$

这等价于 $d=\tilde{o}(ns^2)$。 □

对称情形下的构造与此类似。

命题 6.10. 设 $s=o(\sqrt{d})$，并考虑由 $2s-1$ 个区间构成的并集，其形式如下：

$$I_s^{sym}=[-d,-d_1-\sqrt{d}]\cup\{d_1-2(s-2),\dots,d_1,\dots,d_1+2(s-2)\}\cup[d_1+\sqrt{d},d].$$

定义连接函数 $\zeta_s^{sym}(x)=\mathbb{1}\left[\sum_{i=1}^d x_i\in I_s^{sym}\right]$。那么，关于 ζ_s^{sym} 有以下事实：$\mathbf{E}[\zeta_s^{sym}]=\Omega(1)$ $|\widehat{\zeta_s^{sym}}([\ell])|\le 1/\sqrt{\binom{d}{l}}$ 对于 $\ell\in\{1,2,d-1,d-2\}$，且 $\widehat{\zeta_s^{sym}}([d])=\Theta(s/\sqrt{d})$。

同样的证明可得以下结论。

推论 6.11。 假设 $s=\Omega(d^{1/6})$ 且 $s=o(\sqrt{d})$。那么，存在一个连接函数 ζ，它是 $2s-1$ 个关于 *0* 对称的区间并集的指示函数，且 $\mathbf{E}[\zeta]=\Omega(1)$。此外，只要 $d=o(ns^2)$，带符号三角形统计量就能检测出 ζ。

6.1.3 不含低次数和高次数项的连接

最后，我们将证明一个与猜想 4.16中所述猜想相匹配的检测率。

例 6.12。 设 m 为固定值。存在一个对称连接函数 $\sigma:\ \{\pm1\}^d\longrightarrow[0,1]$，使得 $\mathcal{W}^k(\sigma_1)=0$ 对于 $k\in\{1,2,\dots,m-1\}\cup\{d-m,\dots,d\}$ 成立；此外，如果 $d=\tilde{\omega}_p(n^{3/m})$，则图 $G(n,p)$ 与 RAG$(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$ 可通过有符号三角统计量以高概率区分。

为证明这一结果，我们将使用以下构造。再次，我们聚焦于 $p=\frac{1}{2}$ 的情形，以更好地说明其对 m. 的依赖关系

命题6.13。 对于任意常数 $m\in\mathbb{N}$，存在一个对称连接函数 $\sigma:\ \{\pm1\}^d\longrightarrow[0,1]$，使得

1. $\mathbf{E}[\sigma_1]=\frac{1}{2}$, *2.* $\mathcal{W}^m(\sigma_1)$ $=\Omega(1/\log^m d)$*</style}*,

3. $\mathcal{W}^k(\sigma_1)=0$ 对于 $k\in\{1,2,\dots,m-1\}\cup\{d-m,d-m+1,\dots,d\}$.

我们构造这个　附录 C 中的连接函数附录 C 现在我们继续证明检测结论　　t.

例 *6.12* 的证明。我们只需应用 推论 2.14。为此，我们需要计算傅里叶系数的三次方和四次方之和。设 m 层 σ 上的符号为 ϵ.

$$\begin{aligned}\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^3 &= \sum_{S:|S|=m}\widehat{\sigma_1}(S)^3 + \sum_{S:m<|S|<d-m}\widehat{\sigma_1}(S)^3\\ &= \epsilon\binom{d}{m}\left(\frac{\mathcal{W}^m(\sigma_1)}{\binom{d}{m}}\right)^{3/2} + O\left(\sum_{m<j<d-m}\binom{d}{j}\left(\frac{p^2}{\binom{d}{j}}\right)^{3/2}\right)\\ &= \epsilon\times\Omega(d^{-m/2}\log^{-3m/2}d) + O(d^{-(m+1)/2}) = \Omega(d^{-m/2}\log^{-3m/2}d).\end{aligned}$$

同理，我们可以得出

$$\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^3 = O(d^{-m/2}) \text{ and } \sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^4 = O(d^{-m}).$$

因此，要检测几何结构，只需满足以下不等式。

$$n^6d^{-m}\log^{-3m}d = \omega(n^3 + n^3d^{-m/2} + n^4d^{-m}).$$

容易验证，当 $d = o(n^{3/m}\log^3 d)$ 或者等价地，当 $d = \tilde{o}(n^{3/m})$。 □

6.1.4 低次数多项式

我们关于低次数连接的下界与推论 4.17之间还存在很大的差距。

定理 6.14。存在一个次数为 *1*、期望为 p 的对称连接函数 σ，使得带符号三角形统计量能够以 $1-o(1)$ 的概率区分$\mathsf{G}(n,p)$ 与$\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$，其中 $d = o((np)^{3/4})$。

证明。考虑连接函数 $\sigma(\mathbf{g}) = p + \sum_{i=1}^{d}\frac{p}{d}g_i$，并应用推论 6.1。 □

6.2 带符号三角形的困境：傅里叶配对连接

到目前为止，我们一直将带符号三角形统计量用作检测几何结构的有效工具。然而，这种方法并非万无一失——带符号三角形统计量可能无法产生任何检测率。值得注意的是，[BBH21] 探讨了类似的思路：作者引入了二部掩码，因此他们的图中不包含任何（带符号的）三角形。在此，我们展示另一种或许更内在的方式，使带符号三角形统计量失效。确切地说，假设 $\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^3 = 0.$ 那么，对$\mathsf{G}(n,p)$ 和$\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,p,\sigma)$ 应用带符号三角形统计量后，期望得到的计数相同：零。

当然，我们应该问：是否存在满足 $\widehat{\sigma}(S)^3 = 0$ 的有趣函数 σ？我们将证明答案是肯定的。我们分析两类具体的连接函数，它们都满足以下更广泛的定义。

定义 6.15。 如果连接函数 $\sigma:\{\pm1\}^d\longrightarrow[0,1]$ 满足以下条件，我们就称其为傅里叶配对的。存在一个双射 β，定义在 $[d]$ 的非空子集上，使得对每个 $S\neq\emptyset.$ 都有 $\widehat{\sigma}(S) = -\widehat{\sigma}(\beta(S))$

显然，任何傅里叶配对的连接函数 σ 都满足 $\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^k = 0$ 对于任意奇数 $k.$ 反之亦然——如果 $\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^k = 0$ 对任意奇数 k成立，那么 该连接函数就是傅里叶配对的。那么，我们该如何构造傅里叶配对的连接函数呢？事实证明，在 第 4.2 节中我们已经构造出了这样的连接函数！

首先注意，对于任意连接函数 σ （甚至不一定是对称的），其排斥—吸引扭曲$\rho_{\sigma,\sigma}$ 都是傅里叶配对的！另一个例子可以通过对某些变量取负的方法得到。d首先考虑定义在 $d = 2d_1$ 个变量上的多数映射，定义如下。若 $\sum g_i > 0$，则 Maj(g) $= 1$；若 $\sum g_i = 0$，则 Maj(g) $= 1/2$；若 $\sum g_i < 0.$，则 Maj(g) $= 0$。注意，RAG($n, \{\pm 1\}^d, 1/2$, Maj) 只是带有硬阈值的通常稠密随机几何图的类似物，该图在 [BDE+14]中进行了研究。[4]利用推论 6.1 可以轻易证明，当 $d = o(n^3)$时，G(n, p) 与 RAG($n, \{\pm 1\}^d, 1/2$, Maj) 是可区分的；鉴于推论 4.8，这一结果是紧的。

现在，考虑对Maj的一种小修改，我们称之为半取反多数函数，并记作HNMaj。令h $=$(1, 1, ..., $1-1$, -1, ..., -1)，且HNMaj(g) $:=$ Maj(hg)，这正是d_1 d_1

关于h的系数收缩。结果发现，证明*HNMaj* 是傅里叶配对的相对容易。

命题 6.16。 映射HNMaj是傅里叶配对的。

证明。 首先，我们声称HNMaj在大于 1 的所有偶数层级上的系数都等于 0。事实上，考虑 f(g) $:= 2$ HNMaj(g) $- 1$. 显然，f是奇函数，因为对于所有g，都有 f(g) $= -f(-$g)。因此，f 在偶数层级上的所有系数都等于 0，所以HNMaj也满足这一点，但 0 层级除外。

现在，对于每个 $S \subseteq [d]$ 奇数大小的集合，定义 s(S) $= S \cap [1, d_1]$ 和 b(S) $= S \cap [d_1 + 1, 2d]$. 我们声称，将 S 映射到某个集合 T，使得 s(S) $=$ b(T) 且 s(T) $=$ b(S) 的双射 β 证明了 HNMaj 是傅里叶配对的。事实上，这可由以下事实推出。对于任意两个 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \{\pm 1\}^{d_1}$，有[5] HNMaj($\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$) $=$ Maj(g1, $-\mathbf{g}_2$) $=$ Maj($-\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1$) $=$ HNMaj($-$g2, $-\mathbf{g}_1$)。结合这两个陈述，我们得到：

$$\widehat{\mathbf{HNMaj}}(S)\omega_S(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = \widehat{\mathbf{HNMaj}}(T)\omega_T(-\mathbf{g}_2, -\mathbf{g}_1) = -\widehat{\mathbf{HNMaj}}(T)\omega_T(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1),$$

由此即可得出结论，因为 $|T| = |S|$ 和 $|S|$ 为奇数。 □

现在，对于两者 $\rho_{\mathbf{Maj},\ \mathbf{Maj}}$ 以及 HNMaj，我们的 定理 3.1 表明，相应的随机代数图与 G(n, $1/2$) 在 $d = \omega(n^3)$时无法区分。 然而，我们无法应用通常用于计数三角形的统计量来检测这些图，因为带符号三角形的数量与 Erd˝os-R´ényi 模型中的相应数量相匹配。显然，通过计数带符号 4-环，我们有望得到某个下界，因为其数量 $\sum_{S \neq} \widehat{\sigma}(S)^4$ (见 观察 2.12) 除非 σ 为常数，否则为正。事实上，可以轻易验证以下事实：

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{G \sim \mathsf{G}(n,1/2)}[\tau_4(G)] &= 0, \\
\mathbf{Var}_{G \sim \mathsf{G}(n,1/2)}[\tau_4(G)] &= \Theta(n^4), \\
\mathbf{E}_{H \sim \mathsf{RAG}(n,\{\pm 1\}^d,1/2,\mathbf{HNMaj})}[\tau_4(H)] &= \Theta\left(\frac{n^4}{d}\right), \\
\mathbf{E}_{K \sim \mathsf{RAG}(n,\{\pm 1\}^d,1/2,\rho_{\mathbf{Maj},\mathbf{Maj}})}[\tau_4(K)] &= \Theta\left(\frac{n^4}{d}\right).
\end{aligned}$$

这表明，当 $d = o(n^2)$ 时，这两个随机代数图模型之间的全变差为$1 - o(1)$，其中 G($n, 1/2$)。 当然，要使这一结论严谨，我们还需要计算这些量 **方差**$_{G \sim \mathsf{RAG}(n,\{\pm 1\}^d,1/2,\cdot)}[\tau_4(G)]$. 本文不采用这种方法，因为计算上较为繁琐。作为替代，我们将借助 HNMaj的高斯潜向量类比情形，利用定理 1.3（见 [BBH21]）证明这一点。

[4]当然，潜在向量$\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 中，满足 $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0$ 的向量之间存在微小差异，因为它们之间的边并非确定性地形成。不过我们将忽略这一点。[5]下文中，$\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$, 表示它们的拼接。

假设 $d = 2d_1$，$\Omega = \mathbb{R}^d$，$\mathcal{D} = \mathcal{N}(0, I_d)$ 和 $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbb{1}\left[\sum_{i\le d_1} x_i y_i - \sum_{j>d_1} x_j y_j \ge 0\right]$. 我们希望了解下列不等式何时成立。

$$\mathsf{TV}\Big(\mathsf{RGG}(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d), 1/2, \sigma), \mathsf{G}(n, 1/2)\Big) = o(1). \tag{16}$$

$\mathsf{RGG}(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d)\ 1/2, \sigma)$ 的边按如下方式构造。每个潜在向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}2, \ldots, \mathbf{x}_n$都可以表示为两个 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中的独立同分布标准高斯向量的拼接，即 $\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_i^1, \mathbf{x}_i^2)$。基于这些向量，构造矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其中 $W_{i,j} = \langle \mathbf{x}_i^1, \mathbf{x}_j^1\rangle - \langle \mathbf{x}_i^2, \mathbf{x}_j^2\rangle$. 最后，通过令 $\mathbf{A}_{i,j} = sign(W_{i,j})$，构造 $\mathsf{RGG}(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d)\ 1/2, \sigma)$ 的邻接矩阵 $\mathbf{A}$。与 [BDE+14] 中一样，只需证明 W 在全变差意义下接近一个具有独立同分布元素的对称矩阵，即可得出式 (16) 成立。这就是我们的下一个结果。回顾第 1.1 节中 $M(n)$ 的定义。

定理 6.17。 如下定义两个 *Wishart* 矩阵之差的分布。 $\mathcal{W}(n, d, -d)$ 是 $XX^T - YY^T$ 的分布，其中 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 是元素独立同分布的标准高斯矩阵。若$d = \omega(n^2)$，则

$$\mathsf{TV}\Big(\mathcal{W}(n, d, -d), \sqrt{d}M(n)\Big) = o_n(1).$$

证明。 由于 X，Y是独立的高斯矩阵，因此 $X - Y$，$X + Y$. 也是如此。因而

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X - Y \\ X + Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, I_{d_1})^{\otimes 2n}.$$

现在，考虑 VV^T中的定理 1.3的二部掩码。具体来说，关注左下三角区域。由 VV^T，我们有 $\frac{1}{2}(X+Y)(X-Y)^T$，并由 $\sqrt{d_1}M(2n)+I_{2n}$，我们有 $\sqrt{d_1}Z$，其中 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)^{n\times n}$，因为它是 GOE 矩阵的左下角。由定理 1.3，当 $d = \omega(n^2)$时，我们得出

$$\mathsf{TV}\Big(\frac{1}{2}(X + Y)(X - Y), \sqrt{d_1}Z\Big) = o(1).$$

根据数据处理不等式（定理 2.3），对函数 $f(V) = (V + V^T)$，我们得出

$$\mathsf{TV}\left(f\left(\frac{1}{2}(X + Y)(X - Y)\right), f\left(\sqrt{d_1}Z\right)\right) = o(1).$$

现在，$f(\frac{1}{2}(X + Y)(X - Y)) = XX^T - YY^T \sim \mathcal{W}(n, d, -d)$，且 $f(\sqrt{d_1}Z) = \sqrt{d_1}(Z + Z^T) \sim \sqrt{d}M(n)$。结论由此得出。 □

反过来，[BBH21，定理 3。2] 直接表明，对邻接矩阵$\mathbf{A}$ 中的带符号 4-环进行计数，可以区分 W与一个高斯正交系综矩阵，因此，随机几何图$(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d)\ 1/2, \sigma)$与$\mathsf{G}(n, 1/2)$相比，因此相变确实发生在 $d = \Theta(n^2)$。

我们在第 8.1 节中使用这一结果，正式证明用于推导KL凸性断言 1.5的 [LR21b]方法效率低下。

6.2.1 超越三角形

到目前为止，在本节中，我们已经证明，三角形统计量有时可能毫无用处。某些连接函数——例如傅里叶配对的连接函数——会产生无法通过带符号三角形计数与 $\mathsf{G}(n, p)$ 区分的潜在空间图。我们可以证明一个更强的结论：对于任意奇数 k 和 $\mathcal{H}$，只要它们是 k-环的诱导子图，那么当且仅当 σ 是傅里叶配对时，$\mathsf{G}(n, p)$ 和 $\{\pm 1\}^d$ 中 $\mathcal{H}$ 的副本的期望数量相同。

乍一看，这里的关键词似乎有些奇怪。注意，除非 σ 是常数，否则对于偶数 k，$\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^k$，RAG$(n, \{\pm1\}^d, p, \sigma)$ 中带符号 k-环的期望数量为正，因此严格大于 G(n,p) 中带符号 k-环的期望数量。因此，对于任意固定的 σ 和 d，如果我们令 n 足够大，就可以通过统计带符号 4-环的数量（或者对于其他某个偶数 k，统计带符号 k-环的数量）来区分 RAG$(n, \{\pm1\}^d, p, \sigma)$ 和 G(n,p)。特别地，这揭示了 Erd˝os-R´enyi 图的一种极值性质，而这一性质先验而言并非显而易见。对于任意固定的 p，在所有偶数 k 对应的情形中，带符号 k-环的期望数量最小的潜在空间图 RAG$(n, \{\pm1\}^d, p, \sigma)$ 就是 G(n,p)。在接近 Erd˝os-R´enyi 图的随机图中，奇数长度环与偶数长度环之间的这种差异并非偶然。它在拟随机图的文献中发挥着至关重要的作用 [KS06]。

Ne然而，我们接下来将证明，计数（带符号）偶环有时也毫无用处 s.

7 典型指示函数连接的检测

我们接下来将为定理 4.19 和定理 5.1建立下界。

7.1 带符号子图计数

最自然的做法是利用带符号环计数来检测随机代数图。然而，在超立方体上的一个简单计算表明，除非 log $|\mathcal{G}| = O(\log n)$。，否则这种方法通常会失败。

命题 7.1。给定一个固定常数 $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ 。对于 $A \sim \mathsf{AnteU}(\mathcal{G}, p)$，其概率至少为 $1 - 2^{-d}$，

$$\mathbf{E}_{H\sim\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,\sigma_A,p_A)}[\tau_{k,p}(H)] = O\Big(\frac{(2\sqrt{d})^k}{2^{(k-2)d/2}}\Big) = O\left(2^{-d/3}\right).$$

证明。 鉴于 命题 4.20，只需证明该命题对所有满足以下条件的集合 $A \subseteq \{\pm1\}^d$ $|\widehat{\sigma_A}(S)| \leq \frac{2\sqrt{d}}{2^{d/2}}$ 对所有 $S \neq \emptyset$ 以及 $|\widehat{\sigma_A}(\emptyset) - p| \leq \frac{2\sqrt{d}}{2^{d/2}}$. 设 ~~$A$~~ 是这样一个集合。应用 观察 2.12，我们有

$$\mathbf{E}_{H\sim\mathsf{RAG}(n,\{\pm1\}^d,\sigma_A,p_A)}[\tau_k(H)] = (p_A - p)^k + \sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma_A}(S)^k = O\left(2^d \times \left(\frac{2\sqrt{d}}{2^{d/2}}\right)^k\right),$$

如所愿。 □

这使得带符号的 k-循环统计量在 $k = O(1)$ 中毫无用处，当 $d = \omega(\log n)$ $p = \omega(\frac{1}{n})$ 时，因为可以轻易验证 **方差**$_{G\sim\mathsf{G}(n,p)}[\tau_k(G)] = \Theta(np^k(1-p)^k)$。

7.2 低次多项式

那么，我们能否通过考虑其他某种可在多项式时间内计算的统计量来取得更好的结果？我们将证明，对于低次多项式检验这一类统计量，答案是否定的。我们的论证同样适用于任何规模适当的有限群 $\mathcal{G}$。我们考虑右代数图，因为它们与凯莱图密切相关，但对于左代数图，同样的结论也成立，而且证明完全相同。

定理 7.2。 给定一个整数 $k = o(n)$ 和一个实数 $p \in [\frac{1}{n^3}, 1 - \frac{1}{n^3}]$。假设 $\mathcal{G}$ 是一个大小至少为$\exp(Ck\log n)$ 的任意群，其中 C. 是某个普适常数。令 $A \sim \mathsf{AnteU}(\mathcal{G}, p)$。考虑连接函数 $\sigma_A(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \mathbb{1}[\mathbf{x}\mathbf{y}^{-1} \in A]$，其中 $\mathbf{E}[\sigma_A] = p_A$.。那么，通常无法区分

$\mathsf{G}(n,p)$ 以及 $\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)$，其使用低次多项式的含义如下。以高概率$1-\exp(-\Omega(k\log n))$ 在 A 上，

$$|\mathbf{E}_{G\sim\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}P(G)-\mathbf{E}_{H\sim\mathsf{G}(n,p)}P(H)|=O\left(\frac{n^{2k}}{|\mathcal{G}|^{1/3}}\right)=\exp(-\Omega(k\log n))$$

对满足 $\mathbf{方差}_{H\sim\mathsf{G}(n,p)}[P(H)]\le 1$. 条件的输入图边变量中，所有次数至多为 k 的多项式 P 均同时成立

正如我们将看到的，这个定理的证明与定理 5.1的证明非常相似。

证明。设 P 是一个次数至多为 k. 的多项式。对于一个图 G，记 $(G)_{(i,j)\in[n]\otimes[n]}$ 为图 G 的边指示函数，其中 $[n]\otimes[n]$ 是 $[n]$. 中由不同数字 i 和 j 组成的 $\binom{n}{2}$ 对的集合。我们可以将 P 表示为

$$P=\sum_{\mathcal{H}\subseteq[n]\otimes[n]:|\mathcal{H}|\le k}a_{\mathcal{H}}\prod_{(i,j)\in\mathcal{H}}\frac{G_{(i,j)}-p}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

事实上，$\psi_{\mathcal{H}}(G):=\prod_{(i,\ j)\in\mathcal{H}}\frac{G_{(i,j)}-p}{\sqrt{p(1-p)}}$ 正是关于 $\{\pm1\}$ 值指示函数 $(2G-1)_{(i,j)\in[n]\otimes[n]}$· 的、以 p 为基础的沃尔什多项式。注意，沃尔什多项式 $\psi_{\mathcal{H}}(G)$ 对应于图 G. 中 $\mathcal{H}$ 的（带符号）子图指示函数。现在，根据帕塞瓦尔恒等式，

$$1=\mathbf{Var}_{H\sim\mathsf{G}(n,p)}[P(H)]=\sum_{0<|\mathcal{H}|\le k}a_{\mathcal{H}}^2.$$

特别是，这意味着对于每个至多含有 k 条边的非空子图 $\mathcal{H}$，$|a_{\mathcal{H}}|\le 1$ 都成立。利用三角不等式，

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{E}_{G\sim\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}P(G)-\mathbf{E}_{H\sim\mathsf{G}(n,p)}P(H)|\\
&\le\sum_{\mathcal{H}\subseteq[n]\otimes[n]:0<|\mathcal{H}|\le k}|a_{\mathcal{H}}|\times|\mathbf{E}_{G\sim\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\psi_{\mathcal{H}}(G)-\mathbf{E}_{H\sim\mathsf{G}(n,p)}\psi_{\mathcal{H}}(H)|\\
&=\sum_{\mathcal{H}\subseteq[n]\otimes[n]:0<|\mathcal{H}|\le k}|a_{\mathcal{H}}|\times|\mathbf{E}_{G\sim\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\psi_{\mathcal{H}}(G)|\\
&\le\sum_{\mathcal{H}\subseteq[n]\otimes[n]:0<|\mathcal{H}|\le k}|\mathbf{E}_{G\sim\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\psi_{\mathcal{H}}(G)|\\
&\le n^{2k}\times\sup_{\mathcal{H}\subseteq[n]\otimes[n]:0<|\mathcal{H}|\le k}|\mathbf{E}_{G\sim\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\psi_{\mathcal{H}}(G)|,
\end{aligned}\tag{17}$$

最后一行中，我们利用了这样的事实：对于 $|[n]\otimes[n]|=\binom{n}{2}.$，至多有 n^{2k} 种 $\mathcal{H}$ 选择。因此，我们只需对 $|\mathbf{E}_{G\sim\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\psi_{\mathcal{H}}(G)|$ 建立一个足够强的上界，该上界对所有足够小的$\mathcal{H}$.都成立。为此，我们将所需量平方，并按如下方式使用二阶矩方法。

$$\begin{aligned}
\Psi(A):&=|\mathbf{E}_{G\sim\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\psi_{\mathcal{H}}(G)|^2\\
&=\mathbf{E}_{G_1,G_2\sim_{iid}\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\left[\psi_{\mathcal{H}}(G_1)\psi_{\mathcal{H}}(G_2)\right]\\
&=\mathbf{E}_{G\sim_{iid}\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\left[\psi_{\mathcal{K}}(G)\right],
\end{aligned}\tag{18}$$

其中，$\mathcal{K}$ 是两个顶点不相交的 $\mathcal{H}$. 副本的任意并。事实上，假设 $\mathcal{H}$ 的顶点集为$V(\mathcal{H})\subseteq[n]$，其中 $|V(\mathcal{H})|\le 2k$（因为 $|E(\mathcal{H})|\le k$）。取一组顶点 $V_1\subseteq[n]\backslash V(\mathcal{H})$，使得$|V_1|=|V(\mathcal{H})|$（这是可行的，因为 $n>4k=o(n)$），并令 $\mathcal{H}_1$ 为定义在 V_1. 上的 $\mathcal{H}$ 的一个同构副本。由于 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}_1$ 的顶点集不相交，变量 $\psi_{\mathcal{H}}(G)$与 $\psi_{\mathcal{H}_1}(g)$相互独立。事实上，$\psi_{\mathcal{H}}(G)$

仅取决于潜在向量 $(\mathbf{x}_i)_{i\in V(\mathcal{H})}$，而 $\psi_{\mathcal{H}_1}(G)$仅取决于潜在向量 $(\mathbf{x}_i)_{i\in V(\mathcal{H}_1)}$. 此外，这两个变量显然是独立同分布的。因此，

$$\mathbf{E}_{G_1,G_2\sim_{iid}\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\left[\psi_{\mathcal{H}}(G_1)\psi_{\mathcal{H}}(G_2)\right]=\mathbf{E}_{G\sim_{iid}\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\left[\psi_{\mathcal{H}\cup\mathcal{H}_1}(G)\right],$$

且 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{H}\cup\mathcal{H}_1$. 同构

注意到 $\mathcal{K}$ 至多有 $2k$ 条边。不失一般性，设 $V(\mathcal{K})=\{1,2,\ldots,s\}$，其中 $s\le 4k$.我们想要证明，对于 A，以高概率有 $\Psi(A)=\mathbf{E}_{G\sim_{iid}\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}[\psi_{\mathcal{K}}(G)]$ 很小。注意，根据构造（见式（18）），$0\le\Psi(A)$，因此我们可以使用马尔可夫不等式。现在，对 A取期望，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_A[\Psi(A)]&=\mathbf{E}_A\mathbf{E}_{G\sim_{iid}\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)}\left[\psi_{\mathcal{K}}(G)\right]\\&=\mathbf{E}_A\mathbf{E}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_s\sim_{iid}\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}\prod_{(i,j)\in E(\mathcal{K})}\frac{\mathbb{1}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1}\in A]-p}{\sqrt{p(1-p)}}\\&=\mathbf{E}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_s\sim_{iid}\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}\mathbf{E}_A\prod_{(i,j)\in E(\mathcal{K})}\frac{\mathbb{1}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1}\in A]-p}{\sqrt{p(1-p)}}.\end{aligned}\tag{19}$$

我们以类似于定理 5.1 的方式继续。令 $B\subseteq\mathcal{G}^s$ 为满足以下条件的向量 s 元组的子集。对于每个 $(i,j)\neq(i',j')$，其中 $(i,j)\in[s]\otimes[s]$ 且 $(i',j')\in[s]\otimes[s]$，$\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1}\neq\mathbf{x}_{i'}\mathbf{x}_{j'}^{-1}$ 且 $\mathbf{x}_j\mathbf{x}_i^{-1}\neq\mathbf{x}_{i'}\mathbf{x}_{j'}^{-1}$. 显然，这些等式中的每一个（ B 都必须避开）在 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}2,\ldots,\mathbf{x}_s\sim_{iid}$ 服从 $\mathsf{Unif}(\mathcal{G})$ 时发生的概率至多为 $\frac{1}{|\mathcal{G}|}$。由于需要避开的此类等式至多有 $2\binom{s}{2}^2\le O(k^4)$ 个，

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_s\sim_{iid}\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}\left[(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_s)\in B\right]\ge 1-O\left(\frac{k^4}{|\mathcal{G}|}\right).$$

注意，如果 $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}2,\ldots,\mathbf{x}s)\in B$, 那么

$$\mathbf{E}_{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}\prod_{(i,j)\in E(\mathcal{K})}\frac{\mathbb{1}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1}\in A]-p}{\sqrt{p(1-p)}}=\prod_{(i,j)\in E(\mathcal{K})}\frac{\mathbf{E}_{A\sim\mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)}\left[\mathbb{1}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1}\in A]-p\right]}{\sqrt{p(1-p)}}=0,$$

这里我们用到了 $p\le$。这直接由 AnteU 的定义可知，因为不同的项 $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1}$ 都属于不同的轨道（定义见 定义 1.14）。另一方面，每当 $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}2,\ldots,\mathbf{x}s)\notin B$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_A\prod_{(i,j)\in E(\mathcal{K})}\frac{\mathbb{1}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1}\in A]-p}{\sqrt{p(1-p)}}\\&\le\left\|\prod_{(i,j)\in E(\mathcal{K})}\frac{\mathbb{1}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1}\in A]-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right\|_\infty=\left(\max\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}},\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)\right)^{|E(\mathcal{K})|}\le\sqrt{n^3}^{2k}\le n^{3k},\end{aligned}$$

其中我们用到了以下事实：$p\in[\frac{1}{n^3},1-\frac{1}{n^3}]$. 结合这些观察结果，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_A[\Psi(A)]&=\mathbf{E}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_s\sim_{iid}\mathsf{Unif}(\mathcal{G})}\mathbf{E}_A\prod_{(i,j)\in E(\mathcal{K})}\frac{\mathbb{1}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^{-1}\in A]-p}{\sqrt{p(1-p)}}\\&\le(1-\mathbf{P}[B])n^{3k}=O\left(\frac{k^4n^{3k}}{|\mathcal{G}|}\right)<\frac{n^{4k}}{|\mathcal{G}|}\end{aligned}$$

当足够　　极大 n. 因此，由于 Ψ，根据马尔可夫不等式，我们得出　　t

$$\mathbf{P}[\Psi(A) \geq |\mathcal{G}|^{2/3} \times |\mathcal{G}|^{-1}] = \frac{n^{4k}}{|\mathcal{G}|^{2/3}} \leq \frac{\exp(4k \log n)}{|\mathcal{G}|^{2/3}}.$$

因此，以高概率 $1 - \exp(4k \log n)|\mathcal{G}|^{2/3}$除以 A，根据 式（18），我们得出

$$|\mathbf{E}_{G \sim \mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)} \psi_{\mathcal{H}}(G)| \leq |\mathcal{G}|^{-1/3},$$

这里用到了 $p = \Omega(n^{-2})$。对所有次数至多为 k的 $O(n^{2k})$ 个沃尔什多项式应用并集界，，可得

$$|\mathbf{E}_{G \sim \mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)} \psi_{\mathcal{H}}(G)| \leq |\mathcal{G}|^{-1/3}$$

以至少 $1 - O(n^{2k} \exp(4k \log n)|\mathcal{G}|^{2/3}) = 1 - \exp(6k \log n)|\mathcal{G}|^{2/3}$ 的概率，对所有至多有 k 条边的 $\mathcal{H}$都成立。结合式（17），可得以至少 $1 - \exp(6k \log n)|\mathcal{G}|^{2/3}$ 的概率，不等式

$$|\mathbf{E}_{G \sim \mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)} P(G) - \mathbf{E}_{H \sim \mathsf{G}(n,p)} P(H)| \leq \frac{n^{2k}}{|\mathcal{G}|^{1/3}}$$

对满足该定理假设的所有多项式 P都成立。 □

特别地，这意味着，如果 $|\mathcal{G}| = \exp(\omega(\log n))$，那么对于典型集合 $A \sim \mathsf{AnteU}(\mathcal{G}, p)$，使用常数次数多项式无法区分 $\mathsf{G}(n, p)$ 和 $\mathsf{RRAG}(n, \mathcal{G}, p_A, \sigma_A)$；如果 $|\mathcal{G}| = \exp(\omega(\log^2 n))$，那么使用次数为 $O(\log n)$ 的多项式无法区分这两种图模型。次数为 $O(\log n)$ 的多项式涵盖了非常广泛的算法，例如谱方法等[SW22]。

事实证明，对 $|\mathcal{G}|$ 的依赖基本上是紧的；多种简单算法都说明了这一点：对于大小至多为 $\exp(C \log n)$ 的群，只要常数 C. 取值适当，这些算法就能识别潜在空间结构 $= n^C$。事实上，其中一些算法甚至不使用代数结构，而是适用于具有指示连接函数的任意潜在空间图！下面介绍这样一种算法（它并非低次多项式的直接逆命题）。

定理 *7.3.* 设 Ω 是大小为 $o(n^2)$ 的任意有限潜在空间。令 σ 为任意指示连接函数，且 $\mathbb{E}_{\mathbf{x},\mathbf{y} \sim \mathsf{Unif}(\Omega)}[\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = p = \omega(\frac{\log n}{n})$。利用 $O(n^2)$ 个次数为 2 的多项式，可以在多项式时间内以高概率区分图 $G(n, p)$ 和 $PLSG(n, \Omega, Unif\ p, \sigma)$。具体而言，在 $PLSG(n, \Omega, Unif\ p, \sigma)$ 中，以高概率存在两个顶点 $u \neq v$，满足以下性质：对于任意 $w \notin \{v, u\}$，(v, w) 是一条边，当且仅当 (u, w) 是一条边。

证明。 若对于任意 $w \notin \{v, u\}$，(v, w) 是一条边当且仅当 (u, w) 是一条边，则称两个顶点 $u \neq v$ 邻域相同 。简单的并集界计算表明，在 $\mathsf{G}(n, p)$ 中，存在两个邻域相同的顶点的概率为 $O\left(\binom{n}{2}(1 - 2p + p^2)^n\right) = o(1)$。另一方面，根据生日悖论，只要 $|\mathcal{G}| = o(n^2)$，以高概率就存在两个整数 $u, v \in \{1, 2, \ldots, n\}$，使得$\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v$. 显然，只要 $\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v$，顶点 u 和 v 就邻域相同。

最后，我们需要将上述论证推广到二次多项式。一种简单的方法是分析所有数对 $(i, j) \in [n] \otimes [n]$ 上的上确界

$$P_{i,j}(G) := \sum_{k \notin \{i,j\}} (1 - G_{i,k} - G_{j,k})^2.$$

注意，$P_{i,j}$计　数　　顶点数量 u，使得当且仅当 (j, u) 是一条边时，(i, u) 才是一条边。 □

若要更直接地得到低次框架的逆向结论，例如可以对带符号四环进行计数。我们有如下命题，其证明因相对简单而留待附录 F 中给出。

定理 7.4。 假设Ω 是一个大小为 $o(n^{1/8})$ 的任意有限潜在空间。令 σ 为任意指示函数连接，其满足 $\mathbf{E}_{\mathbf{x},\mathbf{y}\sim\mathsf{Unif}(\Omega)}[\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})] = p > 0.$。利用带符号四环统计量，可以在多项式时间内以高概率区分图 $\mathsf{G}(n,p)$ 和 $\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathsf{Unif},p,\sigma)$。

如果考虑随机代数图，常数 $1/8$ 很容易改进为 $1/3$（或许还可以进一步改进）。我们不对此展开讨论。

7.3 统计检测

到目前为止，在本节中我们已经提供了有力证据，表明对于典型的 $A \sim \mathsf{AnteU}(\mathcal{G},p)$， $|\mathcal{G}| = \exp(\log^{O(1)} n)$ 是检测 $\mathsf{RRAG}(h,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)$ 的计算极限。这与上文定理 5.1 中的 $|\mathcal{G}| = \Omega(n\log\frac{1}{p})$ 之间存在很大差距；根据该定理，当超过这一界限时，我们证明了这两个图模型在统计上不可区分。因此，一个问题仍然存在：我们能否证明更好的统计检测率，理想情况下达到 $\exp(\Omega(n))$ 的量级？我们得到了如下下界；当 $p=\Omega(1)$ 时，它与我们的不可区分率相匹配。该结论在概率潜在空间图这一更一般的设置下成立。

定理 7.5。 存在一个绝对常数 C，具有以下性质。设 $\min(p,1-p) = \omega(\frac{1}{n^2})$，且 Ω 是一个大小至多为 $\exp(CnH(p))$ 的潜在空间，其中 $H(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$ 为二元熵。令 $\mathcal{D}$ 为 Ω 上的任意分布，并令 σ 为任意 $\{0,1\}$ 值连接函数。那么，

$$\mathsf{TV}\Big(\mathsf{G}(n,p),\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathcal{D},\sigma,p)\Big) = 1-o(1).$$

证明。 我们分析 $p \le \frac{1}{2}$,的情形，此时只需注意到 $|\Omega| \le \exp(C'p\log\frac{1}{p}n)$。 我们使用一个简单的熵论证。考虑这 n 个潜向量：$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n$。这个 n 元组 $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)$ 至多可取 $|\mathcal{G}|^n \le \exp(C'n^2p\log\frac{1}{p})$ 个值。由于边是潜向量的确定性函数（因为 σ 是$\{0,1\}$值的），$\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathcal{D},\sigma,p)$ 是一个支撑集大小至多为 $\exp(C'n^2p\log\frac{1}{p})$ 的分布。 将这个支撑集记为 S.

现在，考虑 $H \sim \mathsf{G}(n,p)$。 首先，根据标准切尔诺夫界，

$$\mathbf{P}\left[|E(H)| \le \frac{1}{2}\mathbf{E}[|E(H)|]\right] \le \exp(-\Omega(\mathbf{E}[|E(H)|])) = \exp(-\Omega(n^2p)) = o(1).$$

另一方面，对于任意一个至少有 $\frac{1}{2}\mathbf{E}|E(H)| = \frac{1}{2}\binom{n}{2}p$ 个顶点的固定图 K，我们有

$$\mathbf{P}[H=K] = p^{|E(K)|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E(K)|} \le p^{|E(K)|} \le \exp\left(\log p\frac{1}{2}\binom{n}{2}p\right) \le \exp\left(-\frac{1}{5}n^2p\log\frac{1}{p}\right).$$

结合这两个不等式，我们得出

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{H\sim\mathsf{G}(n,p)}[H\in S^c] &= 1-\mathbf{P}_{H\sim\mathsf{G}(n,p)}[H\in S]\\
&\ge 1-\mathbf{P}\left[|E(H)| \le \frac{1}{2}\binom{n}{2}p\right] - \mathbf{P}\left[|E(H)| > \frac{1}{2}\binom{n}{2}p, H\in S\right]\\
&\ge 1-o(1)-|S|\times \sup_{K\,:\,|E(K)|>\frac{1}{2}\binom{n}{2}p} \mathbf{P}[H=K]\\
&\ge 1-o(1)-\exp\left(-\frac{1}{5}n^2p\log\frac{1}{p}\right)\times|S|\\
&= 1-o(1)-\exp\left(-\frac{1}{5}n^2p\log\frac{1}{p}\right)\times\exp\left(C'n^2p\log\frac{1}{p}\right) = 1-o(1)
\end{aligned}$$

对于较小的 eno 唉 C'. 全变差的定义立即推出了所需的结论 . □

8 讨论与未来方向

我们引入了随机代数图，结果发现它们构成了一类表达能力很强的随机图模型。特别是，它涵盖了研究已久的单位球面上的随机几何图（其连接函数取决于潜向量的内积）、随机块模型，以及凯莱图的膨胀和随机子图。我们深入研究了潜在空间为群 $\{\pm 1\}^d$. 时的模型。超立方体尤其值得关注，因为它既能刻画像球面那样“均匀排列”的方向几何结构，又具有阿贝尔群结构。利用超立方体的这种二重性，我们运用布尔傅里叶分析研究了种类广泛的非单调和／或非对称连接函数，其中许多问题似乎无法通过以往研究随机几何图的技术解决。有些连接函数揭示了新的现象。其中或许最引人关注的是：对于几乎所有具有指定密度的指示连接函数，在超立方体上检测几何结构时，可能存在近乎指数级的统计计算鸿沟。我们将这一结果推广到大小适当的任意群，并用随机凯莱图的语言对相应结果作出阐释。

正如我们在开篇所承诺的，下面简要讨论我们关于超立方体的哪些结果可归因于 $\{\pm 1\}^d$ 的代数结构，哪些可归因于其几何性质。

1. 代数方面。我们的两项结果明显体现了代数性质。首先，关于 s 区间指示函数的结果表明，当 s 足够大时，尽管 σ 仅取决于潜向量的内积，但要发生向 Erdős-Rényi 相变，维数可能需要是 n 的任意大的函数（推论 4.14 和 6.8）。正如注 6.5 中所讨论的，这是超立方体特有的现象，因为它体现了奇偶性的算术性质。根据定理 1.2，对于高斯潜向量的随机几何图，当 σ仅依赖于内积，且 $d = \omega(n^3)$时，无论 σ. 的具体形式如何，该图都无法与 Erdős-Rényi 图区分。其次，我们关于典型指示函数连接的结果（定理 4.19）不仅依赖于超立方体是一个群这一事实，也利用了它是有限潜在空间这一事实。当潜在空间是球面时，要如何定义“典型稠密指示连接”并不显而易见。在定理 5.1 中，我们将定理 4.19 推广到了大小适当的一般群，这进一步证明了该结果取决于底层的群结构。

2. **几何性质**。 我们认为，其他大多数结果都源于 $(\{\pm 1\}^d, \mathsf{Unif}\ \sigma)$的几何性质，因此很可能可以推广到其他随机几何图，例如定义在球面上的随机几何图。首先，我们将 Liu 和 Racz 关于 Lipschitz 连接的结果 推论 4.4 推广到了非单调连接；我们认为，这一推广也可以在球面或高斯空间中实现（可能可以采用与 [LR21b]中相近的论证）。接下来，我们证明，如果 σ 是偶函数——也就是说，取决于 $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|$ ——那么相变发生在 $d = \tilde{\Theta}(n^{3/2})$ ，而不是 $d = \tilde{\Theta}(n^3)$ (推论 4.5、4.10和 4.14）。同样，这种行为似乎完全源于几何性质，我们预计它可以推广到高斯空间和单位球面。

由于这项工作首次明确研究随机代数图，并将布尔傅里叶分析工具应用于高维随机几何图，因此为许多令人振奋的新研究方向打开了大门。

8.1 关于 Liu 和 Racz 的不可区分性论证

我们的不可区分性结果基于断言 1.5 ，该断言由 Liu 和 Racz 提出。遗憾的是，正如作者本人在 [LR21b], 中所指出的，该断言的表述并不理想。我们与 Liu 和 Racz 一同提出改进断言 1.5的任务。

本文表明，这种改进除了弥合定理 1.4中的差距之外，还能带来其他有趣的推论。尤其值得关注的是，它与猜想 1.1的布尔类比之间的关联，这一点已在推论 4.8中得到证明。鉴于这种连接，人们可以期待通过改进断言 1.5来解决猜想 1.1。与本文相关的进一步应用还包括猜想 4.16 以及区间并情形下的差距（推论 4.14和6.8）、低次多项式（第 4.1.5 节和第 6.1.4 节）、系数收缩与排斥-吸引扭曲（第 4.2 节 和 第 6.2 节），以及典型随机代数图的统计相变（定理 5.1 和 7.5）。

在这里，我们正式证明 断言 1.5 的两个局限性。

1. 指示连接函数的次线性维数。 首先，我们证明，若 σ 是一个期望为 $p < 1/2$ 的指示函数，则无法指望使用 $d = o(n)$ 在超立方体上通过断言 1.5证明不可区分性。假设 $n > 8d$ 且 σ 是 $\{0,1\}$值的，此时

$$\sup_{\mathbf{g}} \gamma(\mathbf{g}) = \sup_{\mathbf{g}} \sum_{S\neq\emptyset} \widehat{\sigma}(S)^2 \omega_S(\mathbf{g}) = \sum_{S\neq\emptyset} \widehat{\sigma}(S)^2 = \mathbf{Var}[\sigma] = p(1-p).$$

考虑项 $t = 2d$ 对于 $k = 4d$ 在 公式（4）中。利用 $\|\gamma\|_t^t \geq \frac{1}{2^d}\|\gamma\|_\infty^t = \frac{1}{2^d}$**方差**$[\sigma]^t = \frac{p^t(1-p^t)}{2^d}$，并结合 命题 3.2中的正性，我们得出

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{4d} \binom{4d}{t} \frac{\mathbf{E}[\gamma^t]}{p^t(1-p)^t} \\
&\geq \binom{4d}{2d} \frac{\mathbf{E}[\gamma^{2d}]}{p^{2d}(1-p)^{2d}} \\
&\geq \binom{4d}{2d} \times \frac{p^{2d}(1-p)^{2d}}{2^d} \frac{1}{p^{2d}(1-p)^{2d}} \\
&\geq \binom{4d}{2d} \frac{1}{2^d} \geq 2^d.
\end{aligned}$$

这表明，断言 1.5 中使用的界给出的 KL 散度至少为 d 因此无法得到非平凡的界˜来约束全变差。请注意，与 $d = \Omega(np)$ 的熵界相比，差距很大；当 $p = o(1)$定理 7.5。

2. KL 凸性的低效性。 利用我们关于 Wishart 矩阵之差的观察（见 第 4.2 节），我们正式证明，Racz 和 Liu 在推导 断言 1.5时使用的 KL 凸性确实至少有时并非最优。考虑 $(\Omega\ \mathcal{D}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d))$，不失一般性地设$d$ 为偶数， $d = 2d_1$.考虑以下两个指示连接函数：

$$\begin{aligned}
\sigma_+(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \mathbb{1}[\sum_{i=1}^{d} x_i y_i \geq 0], \\
\sigma_{+,-}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \mathbb{1}[\sum_{i=1}^{d_1} x_i y_i - \sum_{i=d_1+1}^{2d_1} x_i y_i \geq 0].
\end{aligned}$$

显然，二者的期望均为 $1/2.$。根据 BDE+14]，我们知道，当且仅当 $d = \omega(n^3)$. 时，随机几何图 RGG$(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d)\ \sigma_+, 1/2)$ 在全变差距离意义下收敛于 G$(n, 1/2)$。然而，定理 6.17 表明，当 $d = \omega(n^2)$.时，随机几何图 RGG$(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d)\ \sigma_{+,-}, 1/2)$ 就已经在全变差距离意义下收敛于 G$(n, 1/2)$。

尽管存在这种差异，一旦按照 [LR21b]，中的方法应用 KL 凸性，两个模型的界便变得完全相同。具体而言， [LR21b] 中的证明如下。设 A 为 RGG$(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d)\ \sigma, 1/2)$ 的邻接矩阵，B 为 G$(n, 1/2)$ 的邻接矩阵。设 A_k、B_k 为 k 阶主子式，a_k、b_k 分别为它们对应的最后一行。最后，设 X $=(x_1, x2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 为潜向量矩阵，X_k 为其前 k 行构成的 $k \times d$ 子矩阵。显然，X_k 决定了 A_k。随后，Racz 和 Liu 写道：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RGG}(n, \mathbb{R}^d, \mathcal{N}(0, I_d), \sigma, 1/2) \| \mathsf{G}(n, 1/2)\Big) &= \mathsf{KL}(\mathbf{A}\|\mathbf{B}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbf{A}_k} \mathsf{KL}\Big(\mathbf{a}_{k+1}|\mathbf{A}_k \| \mathbf{b}_{k+1}|\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbf{A}_k} \mathsf{KL}\Big(\mathbf{a}_{k+1}|\mathbf{A}_k \| \mathbf{b}_{k+1}\Big) \\
&\le \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbf{X}_k, \mathbf{A}_k} \mathsf{KL}\Big(\mathbf{a}_{k+1}|\mathbf{A}_k, \mathbf{X}_k \| \mathbf{b}_{k+1}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbf{X}_k} \mathsf{KL}\Big(\mathbf{a}_{k+1}|\mathbf{X}_k \| \mathbf{b}_{k+1}\Big).
\end{aligned}
$$

我们声称，此时没有任何东西能区分 σ_+ 和 $\sigma_{+,\ -}$. 也就是说，我们声称，对于任意固定的 k （下标表示它们对 σ 的依赖），$\mathbf{a}_{k+1}^{(+)}|\mathbf{X}_k$ 和$\mathbf{a}_{k+1}^{(+,-)}|\mathbf{X}_k$ 具有相同的分布。这可由以下简单事实说明。任取$\mathbf{v} \in \{0,1\}^k$. 那么，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}[\mathbf{a}_{k+1}^{(+)} = \mathbf{v}|\mathbf{X}_k] \\
&= \mathbf{P}\left[\mathbb{1}\left[\sum_{i=1}^{d} (\mathbf{x}_{k+1})_i (\mathbf{x}_j)_i\right] = \mathbf{v}_j\ \forall j \in [k]\right] \\
&= \mathbf{P}\left[\mathbb{1}\left[\sum_{i=1}^{d_1} (\mathbf{x}_{k+1})_i (\mathbf{x}_j)_i - \sum_{i=d_1}^{2d} (-(\mathbf{x}_{k+1})_i)(\mathbf{x}_j)_i\right] = \mathbf{v}_j\ \forall j \in [k]\right] \\
&\mathbf{P}[\mathbf{a}_{k+1}^{(+,-)} = \mathbf{v}|\mathbf{X}_k],
\end{aligned}
$$

这由以下事实推出：

是 $\left(\mathbb{R}^d,\ \mathcal{N}(0,\ I_d)\right)$. 上的保测映射 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_1+1}, \mathbf{x}_{d_1+2}, \ldots, \mathbf{x}_d) \longrightarrow (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{d_1}, -\mathbf{x}_{d_1+1}, -\mathbf{x}_{d_1+2}, \ldots, -\mathbf{x}_d)$

事实上，断言 1.5 无法区分 σ_+ 和 $\sigma_{+,\ -}$ 这一事实在超立方体情形下也有自然的解释。注意，σ_+ 只是**Maj** 连接函数，而 $\sigma_{+,\ -}$ 是**HNMaj** 连接函数（见第 6.2 节）。然而，这两个函数仅在其傅里叶系数的符号上有所不同。不过，分析相应的自相关 γ 时，符号信息会丢失，因为傅里叶系数会被平方（见第 2.2 节）。

8.2 超立方体之外的群

如前所述，随机代数模型具有很强的表达能力，因此，进一步考察它的其他实例将会很有趣，尤其是在除 $\{\pm 1\}^d$. 之外的群上。不过，这些其他群仍然具有挑战性且值得研究，尤其是在具体连接函数而非典型连接函数的情况下。

1. 阿贝尔群。 我们认为，小型（例如，大小为常数）的循环群的乘积，几乎可以用处理超立方体的同样方式来处理。特别是，对于这类群，存在一个非常强的超收缩性结果，类似于定理 2.7（见 [ODo14，第 10]章）。然而，即使在有限情形下，分析更一般的群似乎也颇具挑战。如果选择通过傅里叶分析来研究这些群，这可能会促成对复 Wishart 矩阵的深入研究，因为有限群上的函数由其在复平面上的表示张成。类似地，在研究有限维环面上的连接函数时，也会遇到复表示。例如， [FGK+23]研究了环面上的高维随机几何图。

2. 非阿贝尔群。即使在有限情形下，非阿贝尔群的情况似乎也更具挑战性，因为一维特征标不足以张成所有函数。几种替代方向似乎都可行。首先，可以研究仅依赖于共轭类的连接函数，这类函数由一维特征标张成。或者，也可以尝试像 [FKL+20]中那样，在非阿贝尔情形下发展超集中工具。即使不考虑随机几何图，这看起来也是一项困难但极有价值的工作。最后，在有限情形下，可以基于第 1.3 节所概述的随机代数图与凯莱图之间的关系，采用纯组合方法进行研究。

在无限情形下，研究正交群或许尤其有益，因为它与球面随机几何图有关（参见第 1.3 节）。

8.3 统计计算鸿沟

在第 7 节中，我们给出了存在一种新的统计计算鸿沟的证据。我们提出了若干进一步研究这一鸿沟的方向。

问题 8.1。 找出明确的群 $\mathcal{G}$ 和集合 $A \subseteq \mathcal{G}$，使得当 $|\mathcal{G}| = \exp(\log^{O(1)} n)$时，无法使用低次多项式区分$\mathsf{G}(n,p)$ 和$\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)$。是否存在这样一对 $\mathcal{G}, A$，且具有简短的（关于 n 的多项式）描述？

需要注意的是，我们的论证仅表明典型集合 A 满足所需性质，但并未提供构造此类集合 A. 的方法。类似地，当 $\mathcal{G}$ 不是超立方体时，我们关于统计不可区分性的证明也不是构造性的，这引出了以下问题。

问题 8.2. 给定 是一个数 n 以及一个大小为$\exp(\Omega(n))$的群 $\mathcal{G}$。找出一个显式集合 $A \subseteq \mathcal{G}$，满足... h

$$\mathsf{TV}\Big(\mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A),\mathsf{G}(n,p)\Big) = o(1).$$

是否存在这样一个 A 集合，且它有简短的（关于 n的多项式）描述？

基于我们在注 4.21中对超立方体的构造，我们认为，对于一般群，存在性问题的答案应当是肯定的。

另一个自然的研究方向，是针对低次多项式以外的计算模型证明困难性结果。我们注意到，当前的结果并未涵盖许多可能的多项式时间算法，例如基于算术的方法。域 $\mathbb{F}_2$ 上的低次多项式不一定是 $\mathbb{R}$ 上的低次多项式（参见 [ODo14]）。由于随机代数图中蕴含的算术结构，通过基于算术的多项式时间算法推翻我们针对一般群提出的统计计算鸿沟，似乎并非完全不可行。

8.4 布尔傅里叶分析与概率

我们最后提出几个与本文相关的布尔傅里叶分析和概率方向，这些方向可能具有独立的研究价值。

1. Wishart 矩阵。定理 6.17 表明 Wishart 矩阵之差的表现可能与 Wishart 矩阵大不相同。研究 Wishart 矩阵更一般的线性组合或许很有意思。具体来说，研究以下寻找最接近高斯正交系综的线性组合的问题或许很有意思。

问题8.3。 给定 $n, d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{N}.$。令 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 为 k 独立高斯矩阵，其中， $X_i \sim \mathcal{N}(0, I_{d_i})^{\otimes n} \in \mathbb{R}^{n \times d_i}$. 求

$$\mathbf{a} \in \arg\min_{\mathbf{a}\,:\,\|\mathbf{a}\|_2=1} \mathsf{TV}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i X_i^T, \sqrt{\sum_{i=1}^{k} d_i}\, M(n) + \Big(\sum_{i=1}^{k} d_i \alpha_i\Big) I_n\Big).$$

与 [KC20] 中针对复数情形开发的类似 Wishart 矩阵特征值的工具或许会有用。

2. 超收缩性。 在 定理3.5中，据我们所知，我们在某些范围内为 Rademacher变量初等对称多项式的矩得到了新颖的界。如前所述，通过标准高斯和均匀球面论证，这些结论同样成立。我们指出，由于相应多项式的谱 ∞范数较小，这些界优于定理 2.7 的经典超收缩性结果。我们想知道，这种现象能否推广到（带符号的）初等对称多项式之外。

3. Bohnenblust-Hille 和层级k 不等式。 在 第 4.1.5 节中，我们结合使用了层级k不等式定理 2.8 以及 推论 2.10中给出的 Bohnenblust-Hille 不等式推论。我们想知道是否存在一个更强的结果，能够在二者之间进行插值。具体而言，对于对称多项式，我们提出以下问题。

问题8.4。 是否存在一个普适常数 $c > 0$ ，使得对于任意次数为常数的对称多项式f: $\{\pm 1\}^d \longrightarrow [0,1]$，若 $\mathbf{E}[f] = p$，则不等式 **方差**$[f] = O\binom{p^c}{d}$ 成立？ _

这样的不等式尤其能够改进我们推论 4.17中的界。

4. 不含低次项和高次项的可解释布尔函数。 在 命题6.13中，我们构造了一个函数 σ: $\{\pm 1\}^d \longrightarrow [0,1]$，其在层级 1、2、.....、 $m-1$、 $d-m+1$、 $d-m+2$、.....、 d 上的权重为 0，且方差为 Ω(1) ， 当 m 为常数时。我们想知道，当 $m > 3$.

致谢

我们谨向 Miklos Racz 致谢，感谢他提供的有益讨论。

参考文献

[AD86] David Aldous 和 Persi Diaconis。《洗牌与停止时刻》。载于：《美国数学月刊》93.5（1986），第 333–348 页。网址：https://doi.org/10.1080/00029890.1986.11971821。

[Alo13] Noga Alon。《随机凯莱图的色数》。载于：European Journal of Combinatorics 34.8（2013）。纪念 Yahya Ould Hamidoune 专刊，第 1232–1243 页。ISSN：0195-6698。网址：https : / / www . sciencedirect . com / science / article/pii/S019566981300084X.[AR94] Noga Alon 和 Yuval Roichman。《随机凯莱图与扩张子》。载于：Random Structures & Algorithms 5.2（1994），第 271–284 页。网址：https : / / onlinelibrary . wiley.com/doi/abs/10.1002/rsa.3240050203.[BB19] Matthew Brennan 和 Guy Bresler。《从弱假设到强困难性：稀疏 PCA 的最优平均情形归约》。载于：第 32 届年度学习理论会议。PMLR。2019 年，第 469–470 页。[BBH21] Matthew Brennan、Guy Bresler 和 Brice Huang。《Wishart 矩阵的 de Finetti 式结果：组合结构与相变》。2021 年 3 月。arXiv：2103.14011。[BBH22] Matthew Brennan、Guy Bresler 和 Brice Huang。《在各向异性随机几何图中检测高维几何的阈值》。即将发表于 Random Structures and Algorithms。2022 年。网址：10.48550/arXiv.2206.14896。[BBN20] Matthew Brennan、Guy Bresler 和 Dheeraj Nagaraj。《随机图中检测潜在几何的相变》。载于：Probability Theory and Related Fields 178（2020 年 12 月），第 1215–1289 页。[BDE+14] S´ebastien Bubeck、Jian Ding、Ronen Eldan 和 Mikl´os R´acz。《随机图中的高维几何检验》。载于：Random Structures & Algorithms 49（2014 年 11 月）。[BG15] S´ebastien Bubeck 和 Shirshendu Ganguly。《高维 Wishart 矩阵中的熵中心极限定理与相变》。载于：International Mathematics Research Notices（2015 年 9 月）。[Bon70] Aline Bonami。《函数傅里叶系数的研究´Etude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$》。法语。载于：Annales de l’institut Fourier 20.2（1970），第 335–402 页。网址：http://eudml.org/doc/74019。[Con17] David Conlon。《由凯莱图构造超图扩张子》。载于：Israel Journal of Mathematics 233（2017 年 9 月）。[CW17] Didier Ch’etelat 和 Martin T. Wells。《Wishart 矩阵的中尺度渐近性质》。载于：The Annals of Statistics（2017 年）。网址：https : / / www . jstor . org / stable / 26784041.[DC22] Quentin Duchemin 和 Yohann de Castro。《随机几何图：近期进展与展望》。2022 年。arXiv：2203.15351。[DGL+11] Luc Devroye、Andr´as Gy¨orgy、G´abor Lugosi 和 Frederic Udina。《高维随机几何图及其团数》。载于：Electronic Journal of Probability 16（2011），第 2481–2508 页。网址：https://doi.org/10.1214/EJP.v16-967。[DH96] Carl Dou 和 Martin Hildebrand。《有限群上的计数与随机随机游走》。载于：The Annals of Probability 24.2（1996），第 987–1000 页。网址：https://doi.org/10.1214/aop/1039639374。[EAG+20] Vittorio Erba、Sebastiano Ariosto、Marco Gherardi 和 Pietro Rotondo。《高维随机几何图》。载于：Phys. Rev. E 102（2020 年 7 月 1 日），第 012306 页。网址：https: //link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.012306。

[EI22] Alexandros Eskenazis 和 Paata Ivanisvili。“通过对数数量的随机查询学习低阶函数”。载于：第54届年度 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集。STOC 2022。计算机协会，2022，页码 203–207。ISBN：9781450392648。网址：https : / / doi . org / 10 . 1145 / 3519935.3519981.[EM20] Ronen Eldan 和 Dan Mikulincer。“各向异性随机几何图的信息与维数”。载于：《泛函分析的几何方面：以色列研讨会（GAFA）2017–2019》第一卷。Bo’az Klartag 和 Emanuel Milman 编。Cham：Springer International Publishing，2020，页码 273–324。ISBN：978-3-030-36020-7。网址：https : / / doi . org/10.1007/978-3-030-36020-7_13.[EMP22] Ronen Eldan、Dan Mikulincer 和 Hester Pieters。“几何背景下的社区检测与信息渗流”。载于：组合学、概率与计算 31（2022年5月），页码 1–22。网址：https://doi.org/10.1017/S0963548322000098.[ES16] Ernesto Estrada 和 Matthew Sheerin。“随机矩形图上的共识动力学”。载于：Physica D：非线性现象 323-324（2016）。互联网络上的非线性动力学，页码 20–26。ISSN：0167-2789。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278915002171.[FGK+23] Tobias Friedrich、Andreas Göbel、Maximilian Katzmann 和 Leon Schiller。《高维几何非齐次随机图中的团》。2023。arXiv：2302.04113。[FKL+20] Yuval Filmus、Guy Kindler、Noam Lifshitz 和 Dor Minzer。《对称群上的超收缩性》。2020。arXiv：2009.05503。[Hae12] Martin Haenggi。“随机几何图与连续渗流”。载于：《无线网络随机几何》。剑桥大学出版社，2012，页码 221–245。网址：https://doi.org/10.1017/CBO9781139043816.012.[Han] Ramon van Handel。《高维概率讲义》。网址：https : / / web.math.princeton.edu/~rvan/APC550.pdf。[HO21] Jonathan Hermon 和 Sam Olesker-Taylor。《阿贝尔群上几乎所有随机游走的截断》。2021。arXiv：2102.02809。[HRP08] Desmond J. Higham、Marija Raˇsajski 和 Nataˇsa Prˇzulj。“将几何图拟合到蛋白质—蛋白质相互作用网络”。载于：生物信息学 24.8（2008年3月），页码 1093–1099。ISSN：1367-4803。网址：https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btn079。[JL13] Tiefeng Jiang 和 Danning Li。“矩形 Beta-Laguerre系综的逼近与大偏差”。载于：理论概率学杂志 28（2013），页码 804–847。网址：https : / / ideas . repec . org / a / spr / jotpro / v28y2015i3d10 . 1007 _ s10959-013-0519-7.html。[KC20] Santosh Kumar 和 S Sai Charan。“两个 Wishart 矩阵之差的谱统计”。载于：Journal of Physics A：Mathematical and Theoretical 53.50（2020年11月）。网址：https://doi.org/10.1088%5C%2F1751-8121%5C%2Fabc3fe。[KKL88] Jeff D. Kahn、Gil Kalai 和 Nathan Linial。“变量对布尔函数的影响”。载于：第29届年度计算机科学基础研讨会（1988），页码 68–80。网址：https://ieeexplore.ieee.org/document/21923。[KS06] Michael Krivelevich 和 Benny Sudakov。“伪随机图”。载于：《更多集合、图与数：向 Vera Sós 和 András Hajnal 致敬》。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg，2006，页码 199–262。ISBN：978-3-540-32439-3。网址：https : / / doi .org / 10.1007/978-3-540-32439-3_10.

[KTW14] Subhash Khot、Madhur Tulsiani 和 Pratik Worah。《强近似抗性的刻画》。载于：第四十六届年度 ACM计算理论研讨会论文集。STOC '14。纽约州纽约市：计算机协会，2014 年，第 634–643 页。ISBN：9781450327107。网址：https://doi.org/10.1145/2591796. 2591817.[LMS+22a] Siqi Liu、Sidhanth Mohanty、Tselil Schramm 和 Elizabeth Yang。随机几何图中的局部与全局扩张。2022 年。arXiv：2210.00158.[LMS+22b] Siqi Liu、Sidhanth Mohanty、Tselil Schramm 和 Elizabeth Yang。《高维稀疏随机几何图的检验阈值》。纽约州纽约市：计算机协会，2022 年。ISBN：9781450392648。网址：https://doi.org/ 10.1145/3519935.3519989.[LR21a] Suqi Liu 和 Miklos Racz。含噪高维随机几何图中的相变。2021 年。arXiv：2103.15249.[LR21b] Suqi Liu 和 Mikl´os Z. R´acz。潜在空间图与相变的概率视角。2021 年。arXiv：2110.15886.[ODo14] Ryan O'Donnell。《布尔函数分析》。剑桥大学出版社；2014 年。网址：https://arxiv.org/abs/2105.10386.[Pen03] Mathew Penrose。《随机几何图》。牛津大学出版社，2003 年 5 月。ISBN：9780198506263。网址：https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198506263

001.0001.[PWng] Yuri Polianskiy 和 Yihong Wu。《信息论：从编码到学习》。剑桥大学出版社，即将出版。网址：https : / / people . lids . mit . edu / yp / homepage/data/itbook-export.pdf.[RB17] Mikl´os Z. R´acz 和 S´ebastien Bubeck。"统计网络分析中的基本模型与问题"。载于：《统计调查》11（2017），第 1–47 页。网址：https : / / doi . org / 10. 1214/17-SS117.[RR19] Miklos Racz 和 Jacob Richey。"从 Wishart 到高斯正交系综的平滑过渡"。载于：《理论概率学杂志》32（2019 年 6 月）。网址：https://doi.org/10.1007/s10959- 018-0808-2.[SA17] Stanislaw Szarek 和 Guillaume Aubrun。《Alice 与 Bob 遇见巴拿赫：渐近几何分析与量子信息论的交汇》。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，2017 年 9 月。ISBN：978-1470434687。网址：https : / / www . ams.org/books/surv/223/surv223-endmatter.pdf.[SAC19] Anna L. Smith、Dena M. Asta 和 Catherine A. Calder。"网络数据连续潜在空间模型的几何"。载于：《统计科学》34.3（2019），第 428–453 页。网址：https://doi.org/10.1214/19-STS702.[SS05] Elias M. Stein 和 Rami Shakarchi。《实分析：测度论、积分与希尔伯特空间》。普林斯顿大学出版社，2005 年。ISBN：9780691113869。网址：http : / / www . jstor.org/stable/j.ctvd58v18.[SW22] Tselil Schramm 和 Alexander S. Wein。"低次数多项式估计中的计算障碍"。载于：《统计年刊》50.3（2022 年 6 月）。网址：https://doi. org/10.1214%2F22-aos2179。

带符号三角形统计量的一种方差

命题 2.13 的证明。记 $\tau_{(i,j,k)}(G) = (G_{i,j} - p)(G_{j,k} - p)(G_{k,i} - p)$。对于$G \sim \mathrm{RAG}(n, \{\pm 1\}^d, p, \sigma)$, 如 [LR21b], 中所示，我们有

$$\mathbf{Var}[\tau_3(G)] = \binom{n}{3}\mathbf{Var}[\tau_{(1,2,3)}(G)]^2 + O\left(\binom{n}{4}\right)\mathbf{Cov}[\tau_{(1,2,3)}(G), \tau_{(1,2,4)}(G)] + O\left(\binom{n}{5}\right)\mathbf{Cov}[\tau_{(1,2,3)}(G), \tau_{(1,4,5)}(G)] + O\left(\binom{n}{6}\right)\mathbf{Cov}[\tau_{(1,2,3)}(G), \tau_{(4,5,6)}(G)].$$

我们分别对这四项进行界定。

情形 1) 两个三角形的重叠大小为 3 时的协方差。利用每条边都是一个指示函数,

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[\tau_{(1,2,3)}(G)^2] = \mathbf{E}[(G_{1,2}-p)^2(G_{2,3}-p)^2(G_{3,1}-p)^2]\\ &= \mathbf{E}[(1-2p)(G_{1,2}-p) + (p-p^2)][(1-2p)(G_{2,3}-p) + (p-p^2)][(1-2p)(G_{3,1}-p) + (p-p^2)]\\ &= (1-2p)^3\tau_{(1,2,3)}(G) + (p-p^2)^3.\end{aligned}$$

我们利用了以下简单观察：$\mathbf{E}[G_{i,j} - p] = 0$ 且

$$\mathbf{E}[(G_{i,j}-p)(G_{j,k}-p)] = \mathbf{E}[(\sigma(\mathbf{x_i^{-1}x_j})-\mathbf{p})(\sigma(\mathbf{x_j^{-1}x_k})-\mathbf{p})] = \mathbf{E}_{\mathbf{g},\mathbf{h}\sim\mathbf{iid}\,\mathsf{Unif}(\{\pm\mathbf{1}\}^\mathbf{d})}[(\sigma(\mathbf{g})-\mathbf{p})(\sigma(\mathbf{h})-\mathbf{p})] = \mathbf{0}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\binom{n}{3}\mathbf{Var}[\tau_{(1,2,3)}(G)^2] = \binom{n}{3}\left((p-p^2)^3 + (1-2p)^3\mathbf{E}[\tau_{(1,2,3)}(G)] - \mathbf{E}[\tau_{(1,2,3)}(G)^2]\right)\\ &= \binom{n}{3}\left((p-p^2)^3 + (1-2p)^3\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^3 - \left(\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^3\right)^2\right) = O\left(n^3p^3 + n^3\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^3\right).\end{aligned}$$

情形 2) 当两个三角形的重叠大小为 2。

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[\tau_{(1,2,3)}(G)\tau_{(1,2,4)}(G)] =\\ &\mathbf{E}[(G_{1,2}-p)^2(G_{1,3}-p)(G_{2,3}-p)(G_{1,4}-p)(G_{2,4}-p)] =\\ &\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[(G_{1,2}(1-2p)+p^2)(G_{1,3}-p)(G_{2,3}-p)(G_{1,4}-p)(G_{2,4}-p)|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5\right]\right] =\\ &\mathbf{E}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_2)(1-2p)+p^2)(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_3)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_3)-p)(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_4)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_4)-p)\right] =\\ &\mathbf{E}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_2)(1-2p)+p^2)\mathbf{E}_{\mathbf{x}_3}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_3)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_3)-p)\right]\mathbf{E}_{\mathbf{x}_4}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_4)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_4)-p)\right]\right].\end{aligned}$$

现在，注意到

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\mathbf{x}_3}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_3)-p)\right]\mathbf{E}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_4)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_4)-p)\right]\\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{x}}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x})-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x})-p)\right]^2 \geq 0.\end{aligned}$$

因此，当 $(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_2)(1-2p) + p^2) \in [0,1]$（当 σ取值于 0，1 时），上式有界于

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{\mathbf{x}_3}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_3)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_3)-p)\right]\mathbf{E}_{\mathbf{x}_4}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_4)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_4)-p)\right]\right]\\ &= \mathbf{E}\left[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_3)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_3)-p)(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_4)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_4)-p)\right]\\ &= \sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^4,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 观察 2.12得出。因此，这种情况下对方差的总贡献为 $O\left(n^4\sum_{S\neq\emptyset}\widehat{\sigma}(S)^4\right)$.

情况 3）当两个三角形的重叠部分大小为 1。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[\tau_{(1,2,3)}(G)\tau_{(1,4,5)}(G)]\\
&=\mathbf{E}[(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_2)-p)(\sigma(\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_3)-p)(\sigma(\mathbf{x}_3^{-1}\mathbf{x}_1)-p)(\sigma(\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_4)-p)(\sigma(\mathbf{x}_4^{-1}\mathbf{x}_5)-p)(\sigma(\mathbf{x}_5^{-1}\mathbf{x}_1)-p))]\\
&=\mathbf{E}[(\sigma(\mathbf{g})-p)(\sigma(\mathbf{h})-p)(\sigma(\mathbf{g^{-1}h^{-1}})-p)(\sigma(\mathbf{k})-p)(\sigma(\ell)-p)(\sigma(\mathbf{k^{-1}}\ell^{-1})-p))]\\
&=\mathbf{E}[(\sigma(\mathbf{g})-p)(\sigma(\mathbf{h})-p)(\sigma(\mathbf{g^{-1}h^{-1}})-p)]\mathbf{E}[(\sigma(\mathbf{k})-p)(\sigma(\ell)-p)(\sigma(\mathbf{k^{-1}}\ell^{-1})-p)]\\
&=\mathbf{E}[\tau_{(1,2,3)}(G)]\mathbf{E}[\tau_{(1,4,5)}(G)],
\end{aligned}$$

因此，在这种情况下协方差等于 0。

情况 4) 当两个三角形的重叠大小为 0。

$$\mathbf{E}[\tau_{(1,2,3)}(G)\tau_{(4,5,6)}(G)]=\mathbf{E}[\tau_{(1,2,3)}(G)]\mathbf{E}[\tau_{(4,5,6)}(G)],$$

因此，在这种情况下协方差也为零。将四个协方差相加即可得出结论。 □

B 傅里叶权重在 Level$d$

引理的证明 引理 *4.2*。假设 $f\colon\ \{\pm1\}^d\longrightarrow[0,1]$ 是一个对称函数。定义 f_i 为 f 恰有 i 个坐标等于 1时的值。令 $a_i=f_{i+1}-f_i$ 且 $a_0=f_0$，于是 $f_i=\sum_{j=0}^{i}a_j$.$\widehat{\ }$考虑 $f([d])$，它是 f 与奇偶函数 $\omega_{[d]}(\mathbf{x})$的相关性。根据定义，

$$\begin{aligned}
\widehat{f}([d])&=\mathbf{E}[f(\mathbf{x})\omega_{[d]}(\mathbf{x})]\\
&=\frac{1}{2^d}\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}(-1)^{d-i}f(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{i}\underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{d-i})\\
&=\frac{1}{2^d}\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}(-1)^{d-i}\sum_{j=0}^{i}a_j\\
&=\frac{1}{2^d}\sum_{j=0}^{d}a_j\sum_{i=j}^{d}\binom{d}{i}(-1)^{d-i}\\
&=\frac{1}{2^d}\sum_{j=0}^{d}a_j(-1)^{d-j}\binom{d-1}{j-1},
\end{aligned}\tag{20}$$

其中在最后一行，我们用到了一个简单的组合事实：$\sum_{i=j}^{d}\binom{d}{i}(-1)^{d-i}=(-1)^{d-j}\binom{d-1}{j-1}$，这可以通过归纳法和帕斯卡恒等式 $\binom{d-1}{j-1}-\binom{d}{j}=-\binom{d-1}{j}$. 轻松证明。我们进一步改写这个

表达式，得到

$$|\widehat{f}([d])| = \left|\frac{1}{2^d}\sum_{j=0}^{d} a_j(-1)^{d-j}\binom{d-1}{j-1}\right| = \frac{1}{2}\left|\mathbf{E}_{j\sim Bin(d-1,\frac{1}{2})}(-1)^{d-j}(f_{j+1}-f_j)\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\mathbf{E}_{j\sim Bin(d-1,\frac{1}{2})}|f_{j+1}-f_j| = O\left(\frac{\sum_{i=1}^{d}|f_{j+1}-f_j|}{\sqrt{d}}\right) = O\left(\frac{\mathsf{Fl}(f)}{\sqrt{d}}\right). \qquad \square$$

接下来，我们继续对$\widehat{\mathbf{T}_p}([d])$和$\widehat{\mathbf{D}^p}([d])$进行界定。为使表述简洁，下文省略所有向下取整和向上取整符号。显然，这不会影响渐近行为。

命题 *4.7* 的证明。注意，对于 $f=\mathbf{T}^p$，我们只有一个非负值 a，它对应于 $\sum_{i=1}^{d} x_i = \tau_p - 1$ 的情形，或者等价地说，向量 $x.$ 中恰好有 $t = \frac{\tau_p - 1 + d}{2}$ 个 **1**。因此，$a_t = 1$ 并且 $a_s = 0$ 当 $s \neq t$. 换言之，

$$|\widehat{\mathbf{T}_p}([d])| = \frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t-1}.$$

因此，我们只需给二项式系数 $\binom{d}{t}$. 作界。为此，我们先对 τ_p. 作界。由于每个 x_i 的支撑集为 $[-1,1]$，它是 **1**-次高斯的。因此，$\sum_{i=1}^{d} x_i$ 是 d-次高斯的[6]，于是，

$$p = \mathbf{P}\left[\sum x_i \geq \tau_p\right] \leq \exp\left(-\frac{\tau_p^2}{2d}\right),$$

因此 $\tau_p \leq \sqrt{2d\log\frac{1}{p}}$. 通过在 $O\left(\sqrt[p]{\log\frac{1}{p}}\right)$ 中取足够大的常数，我们还可以假设 $\tau_p \geq \sqrt{d}/10$. 确实如此，因为

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^{d} x_i \geq \sqrt{d}/10\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^d}\sum_{s=d/2}^{d/2+\sqrt{d}/10}\binom{d}{s} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^d}\times\frac{\sqrt{d}}{10}\binom{d}{d/2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^d}\times\frac{2^d}{\sqrt{d}}\frac{\sqrt{d}}{10} = \Omega(1).$$

现在，令 $\psi = \frac{d}{\tau_p} < 10\sqrt{d}$. 我们断言，对于某个绝对常数 C，该常数独立于 d 和 p. 确实，注意到

$$\frac{\binom{d}{t+\psi}}{\binom{d}{t}} = \prod_{i=0}^{\psi-1}\frac{d-t-i}{t+i+1} \geq \left(\frac{d-t-\psi}{t+\psi}\right)^{\psi}$$
$$\geq \left(\frac{\frac{d}{2}-\frac{\tau_p-1}{2}-\psi}{\frac{d}{2}+\frac{\tau_p-1}{2}+\psi}\right)^{\psi} = \left(1-\frac{\tau_p-1+2\psi}{\frac{d}{2}+\frac{\tau_p-1}{2}+\psi}\right)^{\psi} \geq \left(1-\frac{2\tau_p+4\psi}{d}\right)^{\psi}$$
$$\geq \exp\left(-\frac{2\tau_p\psi+4\psi^2}{d}\right) \geq \exp\left(-\frac{2d+100d}{d}\right) = \exp(-102),$$

如所期望的那样。

现在，根据 t 的定义，函数$\mathbf{T}^p$ 等于 **1**，当且仅当$x_1, x_2, \ldots, x_d.$ 中至少有 $\frac{\tau_p+d}{2}$ 个 **1**。因此可得

$$p = \frac{1}{2^d}\sum_{j=t}^{d}\binom{d}{j} \geq \frac{1}{2^d}\sum_{i=0}^{\psi-1}\binom{d}{t+i} \geq C\psi\frac{1}{2^d}\binom{d}{t}.$$

[6]关于次高斯集中性的这些简单应用，请参见 [Han，第3]章。

因此，

$$\frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t-1} \le \frac{1}{2^d}\binom{d}{t} = O\left(\frac{p}{\psi}\right) = O\left(\frac{p\tau_p}{d}\right) = O\left(\frac{p\sqrt{\log\frac{1}{p}}}{\sqrt{d}}\right). \qquad \square$$

命题4.9 的证明几乎是一个显而易见的推论。

证明命题 *4.9*。 注意， $\delta_p = \tau_{\frac{p}{2}}$. 对于函数 $f = \mathbf{D}^p$，我们很容易看出，若 $t = \frac{\tau_{p/2}-1+d}{2}$，则有 $a_0 = 1$, $a_{d-t} = -1$, $a_t = 1$，且其他所有差值都等于 0。因此，我们只需像上面那样对 $\frac{1}{2^d}\left(\binom{d}{t} + \binom{d}{d-t}\right)$ 进行界定。利用前一个证明的结果，这个表达式就是 $O\left(\sqrt[\frac{p}{2}]{\log \sqrt{d}^{\frac{2}{p}}}\right) = O\left(\sqrt[p]{\log \sqrt{d}^{\frac{1}{p}}}\right)$.

$\square$

最后，我们以一条注记作结。这条注记将在后文中发挥作用，并表明我们的估计对于 $\binom{d}{t}$ 而言是最优的，误差仅相差一个较小的对数因子。

推论 B.1. 当 $p = d^{O(1)}$,

$$\frac{1}{2^d}\binom{d}{\frac{d+\tau_p-1}{2}} = \Omega\left(\frac{p}{\sqrt{d}}\right).$$

证明。 再次，令 $t = \frac{d+\tau_p-1}{2}$. 注意到，根据关于 $p.$ 的假设， $t \in [d/2, 2d/3]$。我们首先证明，只要 $z \ge \frac{d}{2}$，就有

$$\binom{d}{z+2\sqrt{d}} \le C\binom{d}{z}$$

对于 $C = e^{-1/2} < 1$。事实上，这几乎是显然的，因为

$$\frac{\binom{d}{z+2\sqrt{d}}}{\binom{d}{z}} = \prod_{i=0}^{2\sqrt{d}-1}\frac{d-z-i}{z+i+1} \le \prod_{i=\sqrt{d}}^{2\sqrt{d}-1}\frac{d-z-i}{d/2} \le \left(\frac{d-\sqrt{d}}{d/2}\right)^{\sqrt{d}} = \left(1-\frac{1}{2\sqrt{d}}\right)^{\sqrt{d}} \le e^{-1/2}.$$

然而，这已经足够了，因为

$$p = \frac{1}{2^d}\sum_{j=t}^{d}\binom{d}{j} \le \frac{1}{2^d}\sum_{s=0}^{\infty}2\sqrt{d}\binom{d}{t+s2\sqrt{d}} \le \frac{1}{2^d}2\sqrt{d}\binom{d}{t}\sum_{s=0}^{\infty}C^s = O\left(\sqrt{d}\frac{1}{2^d}\binom{d}{t}\right),$$

由此即可得出结论。 $\square$

C 不含低次与高次项的布尔函数

命题 C.1。 对于每个整数 d 和整数 $m < d/2$，存在一个对称函数f： $\{\pm1\}^d \longrightarrow [-1,1]$，使得：

1. $\mathcal{W}^1(f) = \mathcal{W}^2(f) = \cdots = \mathcal{W}^{m-1}(f) = 0$,2.
   $\mathcal{W}^{d-m}(f) = \mathcal{W}^{d-m+1}(f) = \cdots = \mathcal{W}^d(f) = 0$,
3. $\mathcal{W}^m(f) = \Omega\left(\frac{1}{m^{13/2}\log^m d}\right)$.

我们只证明 d 和 m 均为奇数时的结论，但会说明如何去除这些奇偶性假设。我们的构造基于对多数函数 $\mathbf{Maj} = \mathbf{T}^{1/2}$, 的修改。关于该函数，我们首先回顾以下事实。

引理 C.2 ([ODo14])。 假设 d 为奇数，且 $k < d$. 若 k 为偶数， $\mathcal{W}^k(\mathbf{Maj}) = 0$. 若 k 为奇数且 $k < d/2$， $\mathcal{W}^k(\mathbf{Maj}) = \Theta(\frac{1}{k^{3/2}})$。

现在，定义实值函数在超立方体上的阈值算子 $T(\cdot)$ 如下。 $T(f)[\mathbf{x}] = \mathbf{min}(f(\mathbf{x}), 1)$，当 $f(\mathbf{x}) \geq 0$ 且 $T(f)[x] = \mathbf{max}(f(\mathbf{x}) - 1)$，当 $f(\mathbf{x}) < 0$.还定义作用于 $\{\pm 1\}^d$ 上实值函数的算子 R_m，用于移除层 $\{1, 2, \ldots, m-1\} \cup \{d-m, d-m+1, \ldots, d\}$.。形式化地，对任意 h,

$$R_m(h) = h - \sum_{i=1}^{m-1} h^{=i} - \sum_{j=d-m}^{d} h^{=j} = \sum_{S\,:\, m \leq |S| \leq d-m} \widehat{h}(S)\omega_S.$$

有了这个定义，我们就可以在命题 C.1 中 d和 m 均为奇数的情形下证明该命题。我们的目标是通过组合算子，大致构造一个满足所需性质的函数 T和 R_m 作用于 $\mathbf{Maj}$之上。

命题 *C.1* 的证明： 当 m 和 d 均为奇数时。令 $A = \left(e(4m+1)(2m+2)\log^{m/2} d\right)^{-1}$ （我们将在证明中解释这个数的含义）。我们将证明函数 $\frac{1}{2} R_m \circ T \circ (A \times R_m \circ \mathbf{Maj})$ 满足所需性质。我们分步进行，首先分析映射

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) :&= A \times R_m(\mathbf{Maj})[x] \\ &= A\left(\mathbf{Maj}(\mathbf{x}) - \sum_{0<i<m} \mathbf{Maj}^{=i}(\mathbf{x}) - \sum_{d-m\leq j\leq d} \mathbf{Maj}^{=j}(\mathbf{x})\right) \\ &= A\left(\mathbf{Maj}(\mathbf{x}) - \sum_{0<i<m} \widehat{\mathbf{Maj}}([i])p_i(\mathbf{x}) - \sum_{d-m\leq j\leq d} \widehat{\mathbf{Maj}}([j])p_j(\mathbf{x})\right). \end{aligned}$$

注意， $\mathcal{W}^m(g) = A^2\mathcal{W}^m(\text{多数}) = \Omega(\frac{1}{m^{11/2}\log^m d})$, 并且

$$\widehat{g}([m]) = \binom{d}{m}^{-1/2} \mathcal{W}^m(g)^{1/2} = \Omega\left(\binom{d}{m}^{-1/2} \frac{1}{m^{11/4}\log^{m/2} d}\right).$$

我们将证明 以概率至少为 $\frac{1}{d^{3m}}$， 有 $g(\mathbf{x}) \in [-1, 1]$.。事实上，注意到 at

$$|g(\mathbf{x})| \leq A|\mathbf{Maj}(\mathbf{x})| + A\sum_{1\leq i<m} |\widehat{\mathbf{Maj}}([i])| \times |e_i(\mathbf{x})| + A\sum_{d-m\leq j\leq d} |\widehat{\mathbf{Maj}}([j])| \times |e_j(\mathbf{x})|.$$

第一项显然有界于 A.。还要注意，对于每个 i， $\binom{d}{i}|\widehat{\mathbf{Maj}}([i])|^2 = \mathcal{W}^i(\mathbf{Maj}) \leq 1$，因此$|\widehat{\mathbf{Maj}}([i])| \leq \binom{d}{i}^{-1/2}$.。最后，我们利用矩方法和定理 2.7，以高概率对每个 $|e_i|$ 进行界定。首先假设 $i < m$.。对于 $t = (4m+1)\log d$ 且$a = A^{\frac{1}{(2m+2)}} = e(4m+1)\log^{m/2} d$,

$$\mathbf{P}\left[|e_i(\mathbf{x})| > a\sqrt{\binom{d}{i}}\right] \leq \frac{\|e_i(\mathbf{x})\|_t^t}{a^t\sqrt{\binom{d}{i}}^t} \leq \frac{\sqrt{t-1}^{it}\,\|e_i(\mathbf{x})\|_2^t}{a^t\sqrt{\binom{d}{i}}^t}.$$

现在，观察 erve that $\|e_i\|_2^2 = \mathbf{E}[\sum_{S,T\,|S|=|T|=i} \omega_S \omega_T] = \binom{d}{i}$. 因此，上述表达式变成 s

$$\left(\frac{(t-1)^{i/2}}{a}\right)^t \le \left(\frac{(t-1)^{m/2}}{a}\right)^t \le \left(\frac{(4m+1)^{m/2}\log^{m/2} d}{a}\right)^{(4m+1)\log d} \le e^{-(4m+1)\log d} \le \frac{1}{d^{4m+1}}.$$

通过注意到 $|e_i(\mathbf{x})| = |\omega_{[d]} e_i(\mathbf{x})| = |e_{d-i}(\mathbf{x})|$ 对所有$\mathbf{x}$均成立，可得到关于 $i \ge d-m$ 的相同结论。根据并集界，以至少 $1 - \frac{2m}{d^{4m+1}} \ge 1 - \frac{1}{d^{4m}}$ 的概率，事件

$$K = \left\{ \mathbf{x} \,:\, |e_i(\mathbf{x})| \le a\sqrt{\binom{d}{i}} \;\forall i \in \{1,2,\ldots,m-1\} \cup \{d-m, d-m+1, \ldots, d\} \right\}$$

发生。注意，在 K 上，然而，

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{x})| &\le A\left(1 + \sum_{1\le i<m} \binom{d}{i}^{-1/2} a\binom{d}{i}^{1/2} + \sum_{d-m\le j\le d} \binom{d}{j}^{-1/2} a\binom{d}{j}^{1/2}\right) \\ &\le A(1+(2m+1)a) \le Aa(2m+2) = 1. \end{aligned}$$

因此，在 K 上，函数 g 被 1 所界定。在 K 之外，我们只需将 g 界定为其 L_∞ nor m

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{x})| &\le A\left(\|\mathbf{Maj}\|_\infty + \sum_{1\le i<m} \binom{d}{i}^{-1/2} \|e_i\|_\infty + \sum_{d-m\le j\le d} \binom{d}{j}^{-1/2} \|e_j\|_\infty\right) \\ &\le A\left(1 + \sum_{1\le i<m} \binom{d}{j}^{-1/2}\binom{d}{i} + \sum_{d-m\le j\le d} \binom{d}{j}^{-1/2}\binom{d}{j}\right) \le d^m. \end{aligned}$$

现在，定义 $h(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) - T\circ g(\mathbf{x})$。注意， $h \equiv 0$ 在 K. 上。因此， h 的任意傅里叶系数都满足如下界。

$$\begin{aligned} |\widehat{h}(S)| &= |\mathbf{E}[h(\mathbf{x})\omega_S(\mathbf{x})]| = |\mathbf{E}[h(\mathbf{x})\omega_S(\mathbf{x})1_{K^c}(\mathbf{x})]| \\ &\le \mathbf{E}[|h(\mathbf{x})\omega_S(\mathbf{x})|1_{K^c}(\mathbf{x})] \le \|h\|_\infty \mathbf{E}[1_{K^c}] \\ &\le (\|g\|_\infty + \|T\circ g\|_\infty)\mathbf{P}[K^c] \\ &\le (d^m+1)\frac{1}{d^{4m}} < \frac{1}{d^{2m}}. \end{aligned}$$

因此，对于任意集合 S，我们有 $|[T\circ g - g](S)| \le \frac{1}{d^{2m}}$. 特别是，这意味着

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^m(T\circ g) &\ge \binom{d}{m}\left(\widehat{g}([i]) - \frac{1}{d^{2m}}\right)^2 \\ &= \Omega\left(\binom{d}{m}\left(\binom{d}{m}^{-1/2}\frac{1}{m^{11/4}\log^{m/2} d} - \frac{1}{d^{2m}}\right)^2\right) = \Omega\left(\frac{1}{m^{11/2}\log^{m/2} d} d\right). \end{aligned}$$

此外，对于 $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}\cup\{d-m, d-m+1,\ldots,d\}$， $|\widehat{T\circ g}([i])| = \|[\widehat{T\circ g - g}][i]\| \le \frac{1}{d^{2m}}$. 最后，我们将证明对称函数 $\frac{1}{2}R_m \circ T\circ g$满足所需的性质。首先，注意到 $\mathcal{W}^m(\frac{1}{2}R_m\circ T\circ g) = \frac{1}{2}\mathcal{W}^m(T\circ g) = \Omega(\frac{1}{m^{11/2}\log^{m/2} d})$。 由于 R_m是最后应用的算子，因此也

$\mathcal{W}^i(\frac{1}{2}R_m \circ T \circ g) = 0$对于 $i \in \{1,2,\dots,m-1\} \cup \{d-m, d-m+1, \dots, d\}$.最后，我们需要证明 $\frac{1}{2}R_m^{-} \circ T \circ g$在 $[-1,1]$.中有界。不过，这很简单。

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2}R_m \circ T \circ g\right\|_\infty &= \frac{1}{2}\left\|T \circ g - \sum_{i=1}^{m-1}(T\circ g)^{=i} - \sum_{j=d-m}^{d}(T\circ g)^{=j}\right\|_\infty \\
&\le \frac{1}{2}\|T\circ g\|_\infty + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\left\|(T\circ g)^{=i}\right\|_\infty + \frac{1}{2}\sum_{j=d-m}^{d}\left\|(T\circ g)^{=j}\right\|_\infty \\
&\le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}|\widehat{T\circ g}([i])| \times \|e_i\|_\infty + \frac{1}{2}\sum_{j=d-m}^{d}|\widehat{T\circ g}([j])| \times \|e_j\|_\infty \\
&\le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{d^{2m}}\binom{d}{i} + \frac{1}{2}\sum_{j=d-m}^{d}\frac{1}{d^{2m}}\binom{d}{j} \le 1,
\end{aligned}$$

由此，证明完成。 □

备注 C.3 (去除奇偶性假设)。 去除关于 d 为奇数的假设很容易，因为我们只需考虑由偶数个元素构成的多数函数，该函数在 第 6.2 节中引入。去除关于 m 的奇偶性假设也不难。我们需要重复上述论证，但改用某个函数而非 $\mathbf{Maj}$， 该函数在偶数层级上也有 $\Omega(\frac{1}{m^{3/2}\log d})$ 的权重。运用与上文相同的推理，我们可以证明这样的函数是

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) := T\left(\mathbf{Maj}(\mathbf{x})\frac{\sum_{i=1}x_i}{\log d\sqrt{d}}\right) = T\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{d}x_i}{\sqrt{d}\log d}\right|\right)$$

现在，假设 f 满足 命题 C.1 中的条件，并令 $\alpha = \mathbf{E}[f]$. 那么， $h = \frac{f-\alpha}{2}$ 也满足 命题 C.1 中的条件，且均值为零。因此，对于任意 $p \le 1/2$，映射 $p(1+h)$的均值为 p，且取值于 $[0,1]$. 有了这些准备，我们可以陈述本附录的主要推论。

推论 C.4. 对于每个整数 d、整数 $m < d/2$ 和实数 $p \in [0,1]$，存在一个对称连接 $\sigma\colon \{\pm1\}^d \longrightarrow [0,1]$，使得:

1. $\mathcal{W}^1(\sigma) = \mathcal{W}^2(\sigma) = \cdots = \mathcal{W}^{m-1}(\sigma) = 0$,
2. $\mathcal{W}^{d-m}(\sigma) = \mathcal{W}^{d-m+1}(\sigma) = \cdots = \mathcal{W}^{d}(\sigma) = 0$,
3. $\mathcal{W}^m(\sigma) = \Omega\left(\frac{p^2}{m^{13/2}\log^m d}\right)$. 4. $\mathbf{E}[\sigma] = p$.

D 傅里叶系数的进一步计算

D.1 对称阈值情形

证明 of 命题 6.3。 假设 S 的大小为 2 或 $d-2$， 特别是 $|S|$ 为偶数。那么 ，

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{D}_p}(S) &= \mathbf{E}[\mathbf{D}_p(\mathbf{x})\omega_S(\mathbf{x})] = \mathbf{E}\left[\mathbb{1}[\sum x_i \ge \tau_{p/2}]\omega_S(\mathbf{x})\right] + \mathbf{E}\left[\mathbb{1}[\sum x_i \le -\tau_{p/2}]\omega_S(\mathbf{x})\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbb{1}[\sum x_i \ge \tau_{p/2}]\omega_S(\mathbf{x})\right] + \mathbf{E}\left[\mathbb{1}[\sum(-x_i) \ge \tau_{p/2}]\omega_S(-\mathbf{x})\right] \\
&= 2\mathbf{E}\left[\mathbb{1}[\sum x_i \ge \tau_{p/2}]\omega_S(\mathbf{x})\right] = 2\widehat{\mathbf{T}_{p/2}}(S),
\end{aligned}$$

其中用到了这样一个事实： $\mathbf{x}$ 和 $-\mathbf{x}$ 具有相同的分布，且 $|S|$ 为偶数。因此，就我们的目的而言，只需找出 $\mathbf{T}^{p/2}$ 的傅里叶系数。我们采用与 [ODo14 第 5]章类似的方法。具体而言，假设 $|S| = 2k$ 并且，由对称性，不失一般性地设 $S = \{d\} \cup S_1$， 其中 S_1的大小为 $2k-1$ 由此可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[\mathbf{T}_{p/2}(\mathbf{x})\omega_S(\mathbf{x})]\\&= \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\left(\mathbf{T}_{p/2}(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, 1) - \mathbf{T}_{p/2}(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, -1)\right)\omega_{S_1}\right] = \frac{1}{2}\mathbf{E}[J(\mathbf{y})\omega_{S_1}(\mathbf{y})] = \frac{1}{2}\widehat{J}(S_1),\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1})$ 且

$$J(\mathbf{y}) := \left(\mathbf{T}_{p/2}(y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}, 1) - \mathbf{T}_{p/2}(y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}, -1)\right) = \mathbb{1}\left[\sum_{i=1}^{d-1} y_i = \tau_{p/2} - 1\right].$$

现在，我们通过噪声稳定性算子求出 J 的系数。具体而言，取全1向量 $\mathbf{b} = \mathbf{1}$，并令$\mathbf{z}$ 为与 $\mathbf{b}$ 相关的 ρ–。一方面，

$$\mathbf{P}[J(\mathbf{z}) = 1] = \binom{d-1}{\frac{d-1+\tau_{p/2}-1}{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\rho}{2}\right)^{\frac{d-1+\tau_{p/2}-1}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2}\right)^{\frac{d-1-\tau_{p/2}+1}{2}}$$

因为我们需要 $\mathbf{y}$ 的坐标中恰有 $\frac{d-1+\tau_{p/2}-1}{2}$ 个等于 $\mathbf{1}$，且由于 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ 是 ρ–相关的，每个 y_i 都是独立同分布的 $Bernoulli(\frac{1}{2} + \frac{\rho}{2})$。另一方面，根据噪声算子的定义

$$\mathbf{P}[J(\mathbf{z}) = 1] = \mathbf{E}[J(\mathbf{z})] = T_\rho J(\mathbf{b}) = \sum_S \rho^{|S|}\widehat{J}(S)\omega_S(\mathbf{b}) = \sum_{s=0}^{d-1}\rho^s\binom{d}{s}\widehat{J}(S_1).$$

现在，只需比较这两个多项式表达式的系数，得到

$$\sum_{s=0}^{d-1}\rho^s\binom{d-1}{s}\widehat{J}([s]) = \binom{d-1}{\frac{d-1+\tau_{p/2}-1}{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\rho}{2}\right)^{\frac{d-1+\tau_{p/2}-1}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2}\right)^{\frac{d-1-\tau_{p/2}+1}{2}}$$

对所有 $\rho \in [-1, 1]$. 都成立。为方便记号，令 $t = \frac{d-1+\tau_{p/2}-1}{2}$.

情形 1) 当 $s = 1$. 时，则有

$$\begin{aligned}\binom{d-1}{1}\widehat{J}([1]) &= \frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t}(t - (d-t-1))\\&= \frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t}(2t - d + 1)\\&= \Omega\left(\frac{\sqrt{d}}{2^d}\binom{d}{t}\right) = \Omega(p),\end{aligned}$$

利用附录 B 中关于 t和 $\binom{d}{t}$.的界 $t = \frac{d}{2} + \Omega(\sqrt{d})$ 以及 $\frac{1}{2^d}\binom{d}{t} = \Omega(\frac{p}{\sqrt{d}})$，因此， $\widehat{J}([1]) = \Omega(\frac{p}{d})$，从而 $\widehat{\mathbf{D}}_p([2]) = \Omega(\frac{p}{d})$。利用界 $t = \frac{d}{2} + \tilde{O}(\sqrt{d})$ 和 $\frac{1}{2^d}\binom{d}{t} = \tilde{O}(\frac{p}{\sqrt{d}})$，我们同样得出 $\widehat{\mathbf{D}}_p([2]) = O(\frac{p}{d})$。

情形 2）当 $s = d - 3$时，我们同样有

$$\begin{aligned}
&\binom{d-1}{d-3}\widehat{J}([d-2]) \\
&= \frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t}\left(\binom{t}{t-2}(-1)^{d-t} + \binom{t}{t-1}\binom{d-1-t}{d-2-t}(-1)^{d-t-1} + \binom{d-1-t}{d-3-t}(-1)^{d-t-2}\right) \\
&= \frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t}O\left(\binom{t}{t-2} - \binom{t}{t-1}\binom{d-1-t}{d-2-t} + \binom{d-1-t}{d-3-t}\right) \\
&= \frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t}O\left(\frac{t(t-1)+(d-t-1)(d-t-2)-2t(d-1-t)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t}O\left(\frac{t(t-1)+(d-t-1)(d-t-2)-2t(d-1-t)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t}O\left(\frac{(\tau_{p/2}-1)^2-(d-1)}{2}\right) \\
&= \tilde{O}\left(\frac{p}{\sqrt{d}}d\right) = \tilde{O}\left(p\sqrt{d}\right),
\end{aligned}$$

其中我们利用了 $t = \frac{d-1+\tau_{p/2}-1}{2}$ 来展开该表达式，以及界 $\tau_{p/2} = \tilde{O}\left(\sqrt{d}\right)$ 和 $\frac{1}{2^d}\binom{d-1}{t} = \tilde{O}\left(\frac{p}{\sqrt{d}}\right)$。因此，我们知道 $\widehat{\mathbf{D}p}([d-2]) = \frac{1}{2}\widehat{J}([d-2]) = \tilde{O}\left(pd^{-3/2}\right)$，正如所需。 □

D.2 区间并

命题 *6.9* 的证明。 我们需要证明关于 ζ_s. 首先，注意到

$$\mathbf{E}[\zeta_s] \geq \mathbf{P}\left[\sum x_i \geq d_1 + \sqrt{d}\right] = \Omega(1).$$

其次，对于每个 ℓ，我们有

$$1 \geq \mathbf{E}[\zeta_s^2] \geq \mathcal{W}^\ell(\zeta_s) = \binom{d}{\ell}\widehat{\zeta_s}([\ell])^2,$$

由此可得层级 1、2、$d-1$、$d-2$ 上的系数界。 引理 4.2 意味着

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\zeta_s}\right| &= \left|\frac{1}{2^d}\sum_{j=0}^{s-2}(-1)^{d-d_1-2j}\binom{d-1}{d_1+2j-1} + (-1)^{d-d_1-\sqrt{d}}\binom{d-1}{d_1+\sqrt{d}-1}\right| \\
&= \Omega\left(\frac{s-1}{\sqrt{d}} + (-1)^{d_1-\sqrt{d}}\frac{1}{\sqrt{d}}\right) = \Omega\left(\frac{s}{\sqrt{d}}\right),
\end{aligned}$$

其中我们用到了以下事实：当 $\psi = O(\sqrt{d})$. 时，$\frac{1}{2^d}\binom{d-1}{d_1+\psi} = \Theta(\frac{1}{\sqrt{d}})$ □

E. Cayley 图生成元的分布

在这里，我们证明，关于典型凯莱图的统计不可区分性和计算不可区分性结果定理 5.1 和 7.2 在以下意义下，对于生成元的底层分布具有鲁棒性：只要该分布满足以下“小尺度条件独立性”性质，即使它不是AnteU，这些结果仍然成立（但常数可能有所不同）。

定义 E.1.（小尺度条件独立性）给定一个群 $|\mathcal{G}|$、一个概率 $p \in (0,1)$，以及一个整数 $N = o(|\mathcal{G}|)$。如果满足以下条件，我们称一个分布 $\mathsf{D}(\mathcal{G}, p)$ 满足"针对 $(\mathcal{G}, N, p)$ 的 (c_1, c_2)-小尺度条件独立性性质"，其中 $c_1, c_2 \in (0, 1)$ 为常数。存在一个大小至多为 $|\mathcal{G}|^{c_1}$ 的集合 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$，使得所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{L}$ 均满足以下条件：对于任意基数为 $0 \leq |M| \leq N$ 的集合 $M \subseteq \mathcal{G} \backslash \{\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}\}$ 以及任意 $I \subseteq M$，

$$\left| \mathbf{P}_{A \sim \mathsf{D}(\mathcal{G},p)}[\mathbf{x} \in A | A \cap M = I] - p \right| \leq \frac{1}{|\mathcal{G}|^{c_2}}.$$

需要特别指出的是，如果底层群对于某个 $c < 1$ 至多有 $|\mathcal{G}|^c$ 个二阶元素，或者相应地，对于某个 $c < 1$. 至多有 $|\mathcal{G}|^c$ 个阶至少为三的元素，那么很容易看出，该定义涵盖了 PostU。我们的定理可改述如下。

断言 *E.2*。（见定理 *5.1*）给定一个整数 n 和一个实数 $p \in [0, 1]$. 。设 $\mathcal{G}$ 为任意一个大小至少为 $\exp(Cn \log \frac{1}{p})$ 的有限群，其中 C. 为某个普适常数。设 $D(\mathcal{G}, p)$ 为定义在 $\mathcal{G}$ 的子集上的分布，满足"对于 $(\mathcal{G}, n^3, p)$ 的 (c_1, c_2)-小尺度条件独立性"，其中 c_1、c_2 是与 $|\mathcal{G}|$、n、p. 独立的常数。那么，以至少 $1 - |\mathcal{G}|^{-D}$ 的高概率（关于 $A \sim D(\mathcal{G}, p)$），有

$$\mathsf{KL}\Big(\mathsf{RAG}(n, \mathcal{G}, \sigma_A, p_A) \| \mathsf{G}(n, p)\Big) = o(1),$$

其中 $p_A = \mathbf{E}_{\mathbf{g} \sim \mathsf{Unif}(\mathcal{G})}[\sigma_A(\mathbf{g})]$ 且 $D > 0$ 仅取决于 c_1, c_2.

断言 *E.3.*（参见定理 *7.2*）给定一个整数 $k = o(n)$ 和一个实数 $p \in [\frac{1}{n^3}, 1 - \frac{1}{n^3}]$。假设 $\mathcal{G}$ 是一个大小至少为 $\exp(Ck \log n)$ 的任意群，其中 C. 是某个普适常数。设 $D(\mathcal{G}, p)$ 是 $\mathcal{G}$ 的子集上的一个分布，满足针对 $(\mathcal{G}, n^3, p)$ 的'(c_1, c_2)-小尺度条件独立性性质'，其中 c_1, c_2 是与 $|\mathcal{G}|, n, p$. 独立的常数。令 $A \sim D(\mathcal{G}, p)$。考虑连接函数 $\sigma_A(x, y) := \mathbb{1}[xy^{-1} \in A]$，其中 $E[\sigma_A] = p_A$. 。那么，在以下意义上，通常无法使用低次多项式区分 $G(n, p)$ 和 $RRAG(n, \mathcal{G}, p_A, \sigma_A)$。以高概率，$1 - \exp(-Dk \log n)$ 关于 A,

$$|\mathbf{E}_{G \sim \mathsf{RRAG}(n,\mathcal{G},p_A,\sigma_A)} P(G) - \mathbf{E}_{H \sim \mathsf{G}(n,p)} P(H)| = \exp(-Dk \log n)$$

对于满足 $\mathbf{方差}_{H \sim \mathsf{G}(n,p)}[P(H)] \leq 1$. 的输入图的边上的变量，所有次数至多为 k 的多项式 P 都同时成立。这里，$D > 0$ 是仅依赖于 c_1、c_2. 的常数

对于这两个陈述，证明分别是对定理 5.1和定理 7.2的简单修改。我们仅概述第一个证明需要如何修改，因为这些修改是相同的。

断言 *E.2* 的证明概要：按定理 5.1中的相同步骤进行，只需从 B 中移除以下事件：其中某个 $\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1}$、$\mathbf{z}_i^{(1)}$、$\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_i^{(2)})^{-1}$、$\mathbf{z}_i^{(2)}$ 属于集合 $\mathcal{L}$，该集合见定义 E.1。由并集界，得到的事件 B_1 满足

$$\mathbf{P}[B_1] \geq \mathbf{P}[B] - 4t\frac{|\mathcal{L}|}{|\mathcal{G}|} = 1 - O(|\mathcal{G}|^{-D_1})$$

对于某个固定常数 D_1. 因此，同样地，在 B_1^c，公式（15）的期望 公式（15） 至多为 $O(|\mathcal{G}|^{-D_1})$。另一方面，在 B_1^c，我们有

$$\left| \mathbf{E}_{A \sim \mathsf{D}(\mathcal{G},p)} \left[\prod_{i=1}^{t} (\sigma_A(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1}) - p) \prod_{i=1}^{t} (\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(1)}) - p) \prod_{i=1}^{t} (\sigma_A(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_i^{(2)})^{-1}) - p) \prod_{i=1}^{t} (\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(2)}) - p) \right] \right| \leq |\mathcal{G}|^{-c_2},$$

其中最后一个不等式 性直接由 定义 E.1 应用于$\mathbf{x} = \mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_1^{(1)})^{-1}$ 以及这一事实可知 t

$$\left\| \prod_{i=2}^{t} (\sigma_A(\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{z}_i^{(1)})^{-1}) - p) \prod_{i=1}^{t} (\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(1)}) - p) \prod_{i=1}^{t} (\sigma_A(\mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{z}_i^{(2)})^{-1}) - p) \prod_{i=1}^{t} (\sigma_A(\mathbf{z}_i^{(2)}) - p) \right\| < 1$$

以概率1 在 A. 使用这些界于公式（15）中，我们以类似方式完成证明。 □

F Sig概率潜在空间图上的四环数目歉缺了开头的标题片段。

定理 7.4 的证明。我们需要对 $H \sim \mathsf{G}(n, p)$ 和 $H \sim \mathsf{PLSG}(n, \Omega, \mathsf{Unif}\ p, \sigma)$ 中的 $\mathbf{E}[\tau_4(H)]$,方差$[\tau_4(H)]$ 进行界定。我们首先考虑 $\mathbf{E}_{H\sim\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathsf{Unif},p,\sigma)}[\tau_4(H)]$.。由于 σ 是一个期望值为正的指示函数 p，因此存在某个 y_1, $\mathrm{y}_2 \in \Omega$，使得 $\sigma(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2) = 1$.。特别地，这意味着 $p \geq |\Omega|^{-2}$.。考虑有向符号环 (1, 2, 3, 4)。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{H\sim\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathsf{Unif},p,\sigma)}[(H_{1,2} - p)(H_{2,3} - p)(H_{3,4} - p)(H_{4,1} - p)] \\
&= \mathbf{E}[(\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - p)(\sigma(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - p)(\sigma(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) - p)(\sigma(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_1) - p)] \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3}\left[\mathbf{E}_{\mathbf{x}_2}[(\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - p)(\sigma(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2) - p)|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3]\mathbf{E}_{\mathbf{x}_4}[(\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) - p)(\sigma(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) - p)|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3]\right] \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3}\left[\mathbf{E}_{\mathbf{x}_2}[(\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - p)(\sigma(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2) - p)|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3]^2\right] \\
&\geq \left[\mathbf{E}_{\mathbf{x}_2}[(\sigma(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2) - p)(\sigma(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2) - p)]\right]^2 \times \mathbf{P}[\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3 = \mathbf{y}_1] \\
&\geq \frac{1}{|\Omega|^2}\left[\mathbf{E}_{\mathbf{x}_2}[(\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - p)^2]^2\right] \\
&\geq \frac{1}{|\Omega|^2}[(1-p)^2\mathbf{P}[\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2]]^2 \\
&= \frac{1}{|\Omega|^4}(1-p)^4.
\end{aligned}$$

尤其是，这意味着

$$\mathbf{E}_{H\sim\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathsf{Unif},p,\sigma)}[\tau_4(H)] = \Omega(n^4)|\mathcal{G}|^{-3}(1-p)^4 = \Omega(n^4|\Omega|^{-4}).$$

现在，我们将证明:

$$\mathbf{Var}_{H\sim\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathsf{Unif},p,\sigma)}[\tau_4(H)] = O(n^7).$$

为简洁起见，记

$$\tau_{(i_1,i_2,i_3,i_4)}(H) = (H_{i_1,i_2} - p)(H_{i_2,i_3} - p)(H_{i_3,i_4} - p)(H_{i_4,i_1} - p).$$

在此记号下，显然 $\tau_4(H) = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} \tau_{(i_1,i_2,i_3,i_4)}(H)$. 现在,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Var}_{H\sim\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathsf{Unif},p,\sigma)}[\tau_4(H)] \\
&= \mathbf{Var}_{H\sim\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathsf{Unif},p,\sigma)}\left[\sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)} \tau_{(i_1,i_2,i_3,i_4)}(H)\right] \\
&= \sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)} \mathbf{Var}_{H\sim\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathsf{Unif},p,\sigma)}[\tau_{(i_1,i_2,i_3,i_4)}(H)] \\
&+ \sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)\neq(j_1,j_2,j_3,j_4)} \mathbf{Cov}_{H\sim\mathsf{PLSG}(n,\Omega,\mathsf{Unif},p,\sigma)}[\tau_{(i_1,i_2,i_3,i_4)}(H), \tau_{(j_1,j_2,j_3,j_4)}(H)].
\end{aligned}$$

关键观察是，如果 (i_1, i_2, i_3, i_4) 和 (j_1, j_2, j_3, j_4) 互不相交，那么协方差为零，因为这两个函数分别依赖于互不相交的潜向量集合。否则，由于 τ 仅取 $[0, 1]$. 中的值，因此协方差至多为 1。然而，在 $[n]$, 的元素中，选取两个不互不相交的四元组共有 $O(n^7)$ 种方式，因此结论得证。最后，注意到类似地还有一个结论。

$$\mathbf{E}_{H\sim\mathsf{G}(n,p)}[\tau_4(H)] = 0, \mathbf{Var}_{H\sim\mathsf{G}(n,p)}[\tau_4(H)] = O(n^7).$$

因此，带符号四环统计量以高概率区分这两种图分布的一个充分条件是 $n^4|\Omega|^{-4} = \omega(\sqrt{n^7})$，而 $|\Omega| = o(n^{1/8})$。 □