arXiv:2305.04803v1 [math.GR] 8 May 2023

关于群扩张的 Bohr 紧化与前有限完备化

BACHIR BEKKA

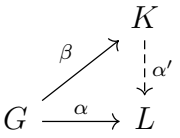
Abstract. 设 $G = N \rtimes H$ 为一个局部紧群，它是闭正规子群 N 与闭子群 H. 的半直积。群 G 的 Bohr 紧化 Bohr(G) 和前有限完备化 Prof(G) 分别同构于半直积 $Q_1 \rtimes$ Bohr(H) 和 $Q_2 \rtimes$ Prof(H)，其中 Q_1 是 Bohr(N) 的适当商， Q_2 是 Prof(N) 的适当商。我们根据 H 在 N 的对偶空间的适当子集上的作用，对 Q_1 和 Q_2 给出了精确描述。当 N 是阿贝尔群时，有 Bohr(G) $\cong A \rtimes$ Bohr(H) 和 Prof(G) $\cong B \rtimes$ Prof(H)，其中 A 是 N 的酉特征群中具有有限 H-轨道的特征所构成的群，而 B 是 A 中具有有限像的特征所构成的子群。我们推导出了 G 为极大几乎周期群或剩余有限群的充要条件。我们将这些结果应用于 $G = \Lambda \wr H$ 为可数群的 wreath 积的情形；特别地，我们证明 Bohr($\Lambda \wr H$) 同构于 Bohr($\Lambda^{\mathrm{Ab}} \wr H$)，且 Prof($\Lambda \wr H$) 同构于 Prof($\Lambda^{\mathrm{Ab}} \wr H$)，其中 $\Lambda^{\mathrm{Ab}} = \Lambda/[\Lambda, \Lambda]$ 是 Λ. 的阿贝尔化。作为例子，我们计算了当 G 为灯笼群以及当 G 为含幺交换环上的海森堡群时的 Bohr(G) 和 Prof(G)。

1. 引言

对于一般的拓扑群 $G.$，有两个与之相关的特殊紧群： G的Bohr紧化（分别地，前有限完备化）是由一个紧群（分别地，前有限群） K 和一个连续同态 $\beta : G \to K$组成的一对对象，其中该同态具有稠密像，并满足以下泛性质：对于任意紧群（分别地，前有限群） L以及任意连续同态 $\alpha : G \to L$，都存在一个连续同态

2000年数学主题分类：22D10；22D25；22E50；20G05。作者感谢法国国家研究署（ANR）通过 Lebesgue实验室项目（ANR-11-LABX-0020-01）提供的支持。

$\alpha'\colon K \to L$，使得图表



交换图表成立。Bohr紧化和前有限完备化（K、β）对于G 在以下意义下是唯一的：如果（K'、β'）是一对由紧群（分别为前有限群）K' 和连续同态 $\beta'\colon G \to K'$ 构成的对象，且该同态具有稠密像并满足相同的泛性质，那么就存在一个拓扑群同构 $f\colon K \to K'$，使得 $\beta' = f \circ \beta$。关于存在性，我们将在下文（命题3）给出Bohr紧化和前有限完备化的模型。有关Bohr紧化的更多内容，参见 [Dix77, 第§16], [BH，4.C]节，或 [Wei40，第VII章]；有关前有限完备化的更多细节，参见[RZ00]。

我们常用 (Bohr(G) β_G) 和 (Prof(G) α_G) 分别表示 G. 的Bohr紧化和前有限完备化。下文中，对于两个拓扑群 H 和 L，若 H 和 L 在拓扑上同构，我们记作 $H \cong L$ 。

Bohr(G) 的泛性质给出了一个连续满同态 α : Bohr(G) $\to$ Prof(G)，满足 $\alpha_G = \alpha \circ \beta_G$。容易看出（参见 [Bek23，命题 7]），$\alpha$ 的核是 Bohr$(G)_0$, Bohr(G) 的连通分支，因此

$$\mathrm{Prof}(G) \cong \mathrm{Bohr}(G)/\,\mathrm{Bohr}(G)_0.$$

每个拓扑群之间的连续同态 $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ 都会诱导连续同态

$$\mathrm{Bohr}(G_1) \xrightarrow{\mathrm{Bohr}(f)} \mathrm{Bohr}(G_2) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Prof}(G_1) \xrightarrow{\mathrm{Prof}(f)} \mathrm{Prof}(G_2)$$

满足 $\beta_{G_2} \circ f = $Bohr($f$) $\circ\, \beta_{G_1}$且 $\alpha_{G_2} \circ f = $Prof($f$) $\circ\, \alpha_{G_1}$.

考虑拓扑群范畴 TGrp，其对象为拓扑群，态射为拓扑群之间的连续同态。Bohr 紧化和前有限完备化是协变函子

$$\text{Bohr}\colon \text{TGrp} \to \text{CGrp} \text{ 和 } \text{Prof}\colon \text{TGrp} \to \text{PGrp}$$

从 TGrp 到紧群子范畴 CGrp 和前有限群子范畴 PGrp：

假设我们给定了一个扩张

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/N \longrightarrow 1.$$

拓扑群。函子 Bohr 和 Prof 是右正合的，因此图表

$$\mathrm{Bohr}(N) \xrightarrow{\mathrm{Bohr}(i)} \mathrm{Bohr}(G) \xrightarrow{\mathrm{Bohr}(p)} \mathrm{Bohr}(G/N) \longrightarrow 1.$$

and

$$\mathrm{Prof}(N) \xrightarrow{\mathrm{Prof}(i)} \mathrm{Prof}(G) \xrightarrow{\mathrm{Prof}(p)} \mathrm{Prof}(G/N) \longrightarrow 1.$$

是正合的；这意味着

- $\mathrm{Bohr}(p)$ and $\mathrm{Prof}(p)$ are surjective and
- $\mathrm{Ker}(\mathrm{Bohr}(p)) = \overline{\beta_G(N)}$ and $\mathrm{Ker}(\mathrm{Prof}(p)) = \overline{\alpha_G(N)}$,

其中 $\overline{A}$ 表示子集 A的闭包；这些事实广为人知且易于证明（例如参见 [HK01，引理 2.2] 以及 [RZ00，命题 3.2.5]；另见下文命题 6）。然而，函子 Bohr 和 Prof 并非左正合，也就是说，$\mathrm{Bohr}(i) : \mathrm{Bohr}(N) \to \mathrm{Bohr}(G)$ 和 $\mathrm{Prof}(i) : \mathrm{Prof}(N) \to \mathrm{Prof}(G)$ 通常并非单射（例如，参见下文推论F和G给出的例子）。

从现在起，我们只讨论局部紧群和分裂扩张。因此，我们将考察局部紧群 $G = N \rtimes H$，它们是正规闭子群 N 与闭子群 H的半直积。容易看出，$\mathrm{Bohr}(G)$（分别地，$\mathrm{Prof}(G)$）是 $\beta_G(N)$ 与 $\beta_G(H)$ 的半直积；相应地，$\mathrm{Prof}(G)$ 是 $\alpha_G(N)$ 与 $\alpha_G(H)$ 的半直积（参见 [Jun78], [GZ11]）。我们的结果精确描述了这些半直积的结构。

记N_{fd} 为 $\widehat{N}$的不可约有限维酉表示的等价类（模酉等价）集合。每个这样的表示 $\sigma : N \to U(n)$ 都产生 $\mathrm{Bohr}(\sigma)$ 的酉表示：$\mathrm{Bohr}(N) \to U(n)$；这里（以及下文中）我们将 $\mathrm{Bohr}(U(n))$ 与 $U(n)$ 视为相同。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$注意到，H 作用于 N_{fd}：对于 $\sigma \in N_{\mathrm{fd}}$ 和 $h \in H$，共轭表示 $\sigma^h \in \widehat{N}_{\mathrm{fd}}$ 由 $\sigma^h(n) = \sigma(h^{-1}nh)$ 定义，对所有 $n \in N$均成立 定义 $\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}{}_{\mathrm{fd}}$ 为具有有限 H-轨道的 $\sigma \in \widehat{N}_{\mathrm{fd}}$ 的集合。

注意，由于 $\mathrm{Bohr}(N)$ 的泛性质，群 H 通过自同构作用于 $\mathrm{Bohr}(N)$。然而，该作用通常无法扩展为 $\mathrm{Bohr}(H)$ 在 $\mathrm{Bohr}(N)$ 上的作用。

我们的第一个结果表明，$\mathrm{Bohr}(G)$ 是 $\mathrm{Bohr}(H)$ 被 $\mathrm{Bohr}(N)$ 的某个适当商扩张而成的分裂扩张。

定理A。设 $G = N \rtimes H$ 是局部紧群的半直积。设 $\varphi_N : \mathrm{Bohr}(N) \to \beta_G(N)$ 和 $\varphi_H : \mathrm{Bohr}(H) \to \beta_G(H)$ 是

满足 $\varphi_N \circ \beta_N = \beta_G|_N$ 和 $\varphi_H \circ \beta_H = \beta_G|_H$ 的映射。令

$$C := \bigcap_{\sigma \in \widehat{N}_{\mathrm{fd}}^{H-\mathrm{per}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{Bohr}(\sigma)).$$

(i) 我们有 $\mathrm{Ker}\varphi_N = C$，因此 φ_N 诱导出一个拓扑同构 $\overline{\varphi_N}$: $\mathrm{Bohr}(N)/C \to \beta_G(N)$。(ii) $\varphi_H : \mathrm{Bohr}(H) \to \beta_G(H)$ 是一个拓扑同构。(iii) H 通过自同构在 $\mathrm{Bohr}(N)$ 上的作用，诱导出 $\mathrm{Bohr}(H)$ 通过自同构在 $\mathrm{Bohr}(N)/C$ 上的作用，而映射 $\overline{\varphi_N}$ 和 φ_H 导出一个同构。

$$\mathrm{Bohr}(G) \cong (\mathrm{Bohr}(N)/C) \rtimes \mathrm{Bohr}(H).$$

下面转而描述 $\mathrm{Prof}(G)$。令 N_{finite} 为 N 的不可约酉表示 σ 的集合，这些表示具有有限像 $\sigma(N)$。注意，H 对 $\widehat{N}_{\mathrm{fd}}$ 的作用保持 $\widehat{N}_{\mathrm{finite}}$。令 $\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}$ 有限为 N_{finite} 中具有有限 H-轨道的表示的子集。每个 $\sigma \in N_{\mathrm{finite}}$ 都会导出 $\mathrm{Prof}(\sigma)$ 的酉表示 $\mathrm{Prof}(N)$。

与定理A完全类似的结果也适用于 $\mathrm{Prof}(G)$。

定理 B. 设 $G = N \rtimes H$ 是局部紧群的半直积。设 ψ_N: $\mathrm{Prof}(N) \to \alpha_G(N)$ 和 ψ_H: $\mathrm{Prof}(H) \to \alpha_G(H)$ 是满足 $\psi_N \circ \alpha_N = \alpha_G|_N$ 和 $\psi_H \circ \alpha_H = \alpha_G|_H$ 的映射。令

$$D := \bigcap_{\sigma \in \widehat{N}_{\mathrm{finite}}^{H-\mathrm{per}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{Prof}(\sigma)).$$

(i) 我们有 $\mathrm{Ker}\psi_N = D$，因此 ψ_N 诱导出一个拓扑同构 $\overline{\psi_N}$: $\mathrm{Prof}(N)/D \to \alpha_G(N)$。(ii) $\psi_H : \mathrm{Prof}(H) \to \alpha_G(H)$ 是一个拓扑同构。(iii) H 通过自同构作用于 $\mathrm{Prof}(N)$，从而诱导出 $\mathrm{Prof}(H)$ 通过自同构作用于 $\mathrm{Prof}(N)/D$，并且映射 $\overline{\psi_N}$ 和 ψ_H 导出一个同构

$$\mathrm{Prof}(G) \cong (\mathrm{Prof}(N)/D) \rtimes \mathrm{Prof}(H).$$

当 N 是有限生成的（离散）群时，我们得到以下众所周知的结果（参见 [GZ11，命题 2.6]）。

推论 C. 假设 N 是有限生成的。那么 $\mathrm{Prof}(G) \cong \mathrm{Prof}(N) \rtimes \mathrm{Prof}(H)$。

当 N 为阿贝尔群时，我们可以更明确地描述定理 A 和 B 中出现的商群 $\mathrm{Bohr}(N)/C$ 和 $\mathrm{Prof}(N)/D$。回顾一下，在这种情况下，对偶群 N 是由

从 N 到圆群 S[1]的连续同态。我们还将$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$考虑 $\chi \in A$ 的子群 N_{fin}，其具有有限像 $\chi(N)$，也就是说，其值位于 m 的子群中——对于某个整数 $m \geq 1.$，即 C 中的单位根。另请注意， $\widehat{N}^{H-\text{per}}$和 $\widehat{N}^{H-\text{per}}$ finite 是$\widehat{\ }N$的子群。

推论 D. 假设 N 是一个阿贝尔局部紧群。令$\widehat{N}^{H-\text{per}}$和 $\widehat{N}^{H-}$有限配备离散拓扑。令 A和B 分别为它们的对偶群。那么

$$\text{Bohr}(G) \cong A \rtimes \text{Bohr}(H) \qquad and \qquad \text{Prof}(G) \cong B \rtimes \text{Prof}(H).$$

$\widehat{\ }$回顾一下，若 G_{fd}能分离 G 中的点（等价地，若 $\beta_G : G \to$ Bohr(G) 是单射），则称 G 是极大几乎周期的，或称 MAP；$\widehat{\ }$还要回顾一下，若 G_{finite} 能分离 G 中的点（等价地，若 $\alpha_G : G \to$ Prof(G) 是单射），则称 G 是剩余有限的，或称 RF。

推论 E. 设 $G = N \rtimes H$ 是局部紧群的半直积。

(i) 当且仅当 H 是 MAP 且 $\widehat{N}^{H-\text{per}}{}_{\text{fd}}$ 能分离 N.中的点时，G 是 MAP。(ii) 当且仅当 H 是 RF 且 $\widehat{N}^{H-\text{per}}$ 有限能分离 N.中的点时， G 是 RF。

我们将我们的结果应用于 $G = \Lambda \wr H$ 是可数群 Λ 和 $H.$ 的 wreath 积的情形。回顾一下，G 是半直积 $(\oplus_{h\in H}\Lambda) \rtimes H$，其中 H 通过平移指标作用于 $\oplus_{h\in H}\Lambda$。

我们将 Λ^{Ab} 记为 $\Lambda/[\Lambda,\Lambda]$ 的阿贝尔化。注意，$\Lambda^{\text{Ab}} \wr H$ 是 $\Lambda \wr H$ 的商。

推论 F. 设 Λ 和 H 为可数群。

(i) 当 H 有限时，我们有 Bohr($\Lambda \wr H$) $\cong$ ($\oplus_{h\in H}$ Bohr(Λ)) $\rtimes$ Bohr(H)，且 Prof($\Lambda \wr H$) $\cong$ ($\oplus_{h\in H}$ Prof(Λ)) $\rtimes$ Prof(H)】【。

(ii) 当 H 为无限时，商映射 $\Lambda \wr H \to \Lambda^{\text{Ab}} \wr H$ 诱导出同构。

Bohr($\Lambda \wr H$) $\cong$ Bohr($\Lambda^{\text{Ab}} \wr H$) 和 Prof($\Lambda \wr H$) $\cong$ Prof($\Lambda^{\text{Ab}} \wr H$)

特别地，如果 Λ 是完美的（即 $\Lambda = [\Lambda,\Lambda]$），商映射 $\Lambda \wr H \to H$ 诱导同构。

Bohr($\Lambda \wr H$) $\cong$ Bohr(H) 和 Prof($\Lambda \wr H$) $\cong$ Prof(H)。

以下结果的 (ii) 项即为 [Gru57] 中的定理 3.2。

推论 G. 设 Λ 和 H 为可数群。假设 Λ 至少包含两个元素。

(i) $\Lambda \wr H$是最大阿贝尔商，当且仅当 Λ是最大阿贝尔商且 H是残余有限，并且 H 是有限群或 Λ 是阿贝尔群。(ii) [Gru57] $\Lambda \wr H$ 是残余有限，当且仅当 Λ和 H均为残余有限，并且 H 是有限群或 Λ 是阿贝尔群。

注 1. (i) 阿贝尔局部紧群 A 的 Bohr 紧化很容易描述：Bohr(A) 可以被识别为 Γ，其中 $\Gamma = A$ 被视为离散群；当 A是有限生成时，Bohr(A) 有更精确的描述（参见 [Bek23，命题 11]）。(ii) 在已知 Bohr(H) 和 Prof(H) 的情况下，推论 F 与推论 D 结合起来，根据 (i)，给出了任意 wreath 积 $\Lambda \wr H$ 的 Bohr 紧化和前有限完备化的完整描述，其中 H 是无限群。(iii) 群扩张和半群扩张的 Bohr 紧化已由多位作者在更抽象且不那么明确的框架下进行研究（[DL83], [JL 81], [Jun78], [JM02], [Lan72], [Mil83]）；群扩张的前有限完备化则在文献中的许多地方都有涉及（[GZ11], [RZ00]）。

本文安排如下。第 2 节介绍有关 Bohr紧化和前有限完备化的一些一般事实，并回顾射影表示。第 3 节给出定理 A 和 B 的证明。第 4 节给出各推论的证明。第 5 节专门计算两个群的 Bohr紧化和前有限完备化：灯笼群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$，以及任意交换环 R. 上的海森堡群 $H(R)$

2. Preliminaries

2.1. Bohr紧化和序有限完备化的模型。设 G 为一个拓扑群。我们给出Bohr(G)和Prof(G)的众所周知的模型。为此，我们使用 G的有限维酉表示，即连续同态 $\pi : G \to U(n)$，其中 $n \geq 1$. 为某个整数。我们用 G_{fd} 表示$\widehat{\ }$的不可约有限维酉表示的等价类集合。设 G_{finite}为 G_{fd} 的子集，它由具有有限像π(G)的表示 π 组成。

$\widehat{}$对于一个紧群（分别为序有限群） K，集合 K_{fd} （分别为 K_{finite}）与对偶空间 K重合，即 K.的酉表示的等价类集合。

以下命题为识别 Bohr(G) 或 Prof(G) 提供了一个有用的工具；简单的证明可参见 [Bek23] 中的命题 5 和 6。

命题 2。(i) 设 K 是紧群，且 $\beta : G \to K$ 是具有稠密像的连续同态；那么 (K, β) 是 G 的$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$Bohr 紧化，当且仅当由 $\beta(\pi) = \pi \circ \beta$ 给出的映射 $\beta : K \to G_{\mathrm{fd}}$,$\widehat{}$ 是满射。(ii) 设 L a 是前有限群，且 $\alpha : G \to L$ 是具有稠密像的连续同态；那么 (L, α) 是 G 的前有限群完备化，当且仅当由$\frown\beta(\pi) = \pi \circ \beta$ 给出的映射 $\beta : L \to G_{\mathrm{finite}}$ 是满射。

以下命题是命题 2 的直接推论。

命题3。选择族

$$(\pi_i : G \to U(n_i))_{i \in I} \quad and \quad (\sigma_j : G \to U(n_j))_{j \in J}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$分别为集合 G_{fd} 和 G_{finite} 的代表元。

(i) 设 $\beta : G \to \prod_{i \in I} U(n_i)$ 由 $\beta(g) = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(g)$ 给定，并令 K 为 $\beta(G)$ 的闭包。那么 (K, β) 是 G.的 Bohr 紧化。(ii) 设 $\alpha : G \to \prod_{j \in J} U(n_j)$ 由 $\alpha(g) = \bigoplus_{j \in J} \sigma_j(g)$ 给定，并令L 为 $\alpha(G)$ 的闭包。那么 (L, α) 是 G.的前有限完备化。

我们注意到，对于 G 的前有限完备化，更常见的定义是射影极限 $\varprojlim G/H$，其中 H 遍历 G 的所有有限指数正规子群，并配有自然的同态 $G \to \varprojlim G/H$ （参见例如 [RZ00, 2.1.6]）。

2.2. 表示的扩张。我们还将使用射影表示的概念。设 G 是一个局部紧群。映射 $\pi : G \to U(n)$ 是 G 的射影表示，若满足以下条件：

- $\pi(e) = I$,
- 对任意 g_1、$g_2 \in G$，存在 $c(g_1, g_2) \in \mathbb{S}^1$，使得 $\pi(g_1 g_2) = c(g_1, g_2)\pi(g_1)\pi(g_2)$,
- π 是可测的。

映射 $c\colon G\times G\to \mathbf{S}^1$ 是一个取值于单位圆 $\mathbf{S}^1$. 的 2-余循环。共轭表示 $\overline{\pi}\colon G\to U(n)$ 是另一个射影表示，定义为 $\overline{\pi}(g) = J\pi(g)J$，其中 $J:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 是由坐标共轭给出的反线性映射，

以下引理的证明很直接。

引理4. 设 $\pi\colon G\to U(n)$ 是 G 的射影表示，其关联的余循环为 $c\colon G\times G\to \mathbf{S}^1$。设 $\pi'\colon G\to U(m)$ 是 G 的另一个射影表示，其关联的 2-余循环为 2-余循环$c'\colon G\times G\to \mathbf{S}^1$。

(i) $\overline{\pi}\colon G\to U(n)$ 是 G 的射影表示，其关联余循环为 $\overline{c}$ 。

(ii) 张量积

$$\pi\otimes\pi' : G\to U(nm),\qquad g\mapsto \pi(g)\otimes\pi'(g)$$

是 G 的射影表示，其关联余循环为 cc' 。

设 N 是 $G.$ 的一个闭正规子群。回顾一下，不可约酉表示 π 在 G 中的稳定子 G_π 是由所有满足 π^g 等价于 $\pi.$ 的 $g\in G$ 所构成的集合。注意， G_π 包含 N。

以下命题是群扩张的酉表示的克利福德–麦基理论中的一个众所周知的事实（参见 [CR62，第1章，第§11]节和 [Mac58]）。

命题5. 设 $G = N\rtimes H$ 为局部紧群 H和 N的半直积。设 $\pi\colon N\to U(m)$是 N 的一个不可约酉表示 π ，并假设 $G = G_\pi$. 存在一个射影表示 $\widetilde{\pi}\colon G\to U(m)$，具有以下性质：

- $\widetilde{\pi}$ 延拓了 π，即，对于每个 $n\in N$， $\widetilde{\pi}(n) = \pi(n)$;
- 与 $\widetilde{\pi}$ 相关联的 2-余循环 $\widetilde{c}\colon G\times G\to \mathbf{S}^1$ 具有如下形式$\widetilde{c} = c\circ(p\times p)$，其中 $c\colon H\times H\to \mathbf{S}_1$ 是一个映射， $p\colon G\to H$ 是典范同态。

证明。设 $S\subset U(m)$ 为商空间$PU(m) = U(m)/\mathbf{S}^1$的一个博雷尔截面，其中 $I_n\in S.$令 $h\in H$。由于 $G = G_\pi$且由于π 是不可约的，存在唯一的矩阵 $\widetilde{\pi}(h)\in S$，使得

$$\pi(hnh^{-1}) = \widetilde{\pi}(h)\pi(n)\widetilde{\pi}(h)^{-1}\qquad \text{for all}\quad n\in N.$$

定义 $\widetilde{\pi}\colon G\to U(n)$ 为

$$\widetilde{\pi}(nh) = \pi(n)\widetilde{\pi}(h)\qquad \text{for all}\quad n\in N, h\in H.$$

显然， $\widetilde{\pi}|_N = \pi$ 并且】【。

$$\pi(gng^{-1}) = \widetilde{\pi}(g)\pi(n)\widetilde{\pi}(g)^{-1}\qquad \text{for all}\quad g\in G, n\in N.$$

可以证明（参见 [Mac58] 中定理 8.2 的证明），$\widetilde{\pi}$ 是可测映射。

设 $g_1, g_2 \in G$。对于每个 $n \in N$，一方面有，

$$\pi(g_1 g_2 n g_2^{-1} g_1) = \widetilde{\pi}(g_1 g_2)\pi(n)\widetilde{\pi}(g_1 g_2)^{-1}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\pi(g_1 g_2 n g_2^{-1} g_1) &= \widetilde{\pi}(g_1)\pi(g_2 n g_2^{-1})\widetilde{\pi}(g_1)^{-1} \\ &= \widetilde{\pi}(g_1)\widetilde{\pi}(g_2)\pi(n)\widetilde{\pi}(g_1)^{-1}\widetilde{\pi}(g_2)^{-1}.\end{aligned}$$

由于 π 不可约，因此

$$\widetilde{\pi}(g_1 g_2) = \widetilde{c}(g_1, g_2)\widetilde{\pi}(g_1)\widetilde{\pi}(g_2)$$

对于某个标量 $\widetilde{c}(g_1, g_2) \in \mathsf{S}^1$。

此外，对于 $g_1 = n_1 h_1, g_2 = n_2 h_2$，一方面有，

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(g_1 g_2) &= \widetilde{c}(g_1, g_2)\widetilde{\pi}(g_1)\widetilde{\pi}(g_2) \\ &= \widetilde{c}(n_2 h_1, n_2 h_1)\pi(n_1)\widetilde{\pi}(h_1)\pi(n_2)\widetilde{\pi}(h_2)\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(g_1 g_2) &= \widetilde{\pi}(n_1(h_1 n_2 h_1^{-1})h_1 h_2) \\ &= \pi(n_1(h_1 n_2 h_1^{-1}))\widetilde{\pi}(h_1 h_2) \\ &= \pi(n_1)\pi(h_1 n_2 h_1^{-1})\widetilde{\pi}(h_1 h_2) \\ &= \pi(n_1)\widetilde{\pi}(h_1)\pi(n_2)\widetilde{\pi}(h_1)^{-1}\widetilde{\pi}(h_1 h_2) \\ &= \widetilde{c}(h_1, h_2)\pi(n_1)\widetilde{\pi}(h_1)\pi(n_2)\widetilde{\pi}(h_1)^{-1}\widetilde{\pi}(h_1)\widetilde{\pi}(h_2) \\ &= \widetilde{c}(h_1, h_2)\pi(n_1)\widetilde{\pi}(h_1)\pi(n_2)\widetilde{\pi}(h_2);\end{aligned}$$

这表明 $\widetilde{c}(n_2 h_1, n_2 h_1) = \widetilde{c}(h_1, h_2)$。 □

2.3. 商群的 Bohr紧化与前有限完备化。设 G 为一个拓扑群，N 为 $G.$ 的闭正规子群。令 (Bohr(G) β_G) 和 (Prof(G) α_G) 分别为 $G.$ 的 Bohr紧化和前有限完备化。令 Bohr(p) : Bohr(G) $\to$ Bohr(G/N) 以及 Prof(p) : Bohr(G) $\to$ Bohr(G/N) 为由典范满同态 $p : G \to G/N$ 诱导的态射。以下命题是众所周知的（参见 [HK01，引理 2.2]；或 [Bek23，命题 10]，对于 (i)；以及 [RZ00，命题 3.2.5]，对于 (ii)）。为方便读者，我们针对 (ii) 给出一个不同于 [RZ00] 中证明的证明。

命题 6。（i）Bohr(p) 是满射，其核为 $\beta_G(N)$。（ii）Prof(p) 是满射，其核为 $\alpha_G(N)$

证明。为证明（ii），设 $K := \overline{\alpha_G}(N)$。令 (Prof($G/N$) $\overline{\alpha}$) 为 $G/N.$ 的 Bohr紧化。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad p \quad} & G/N \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_G} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\alpha}} \\ \mathrm{Prof}(G) & \xrightarrow{\mathrm{Prof}(p)} & \mathrm{Prof}(G/N) \end{array}$$

由此可知， $\alpha_G(N)$，因此 K 包含于 Ker(Prof(p))。于是，我们得到诱导同态 β : $G/N \to$ Prof(G)/K 和 β' : Prof(G)/$K \to$ Prof(G/N)，从而得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} & & G/N \\ & \swarrow^{\beta} & \downarrow{\scriptstyle \overline{\alpha}} \\ \text{Prof}(G)/K & \xrightarrow{\beta'} & \text{Prof}(G/N) \end{array}$$

由此可知，(Prof(G)/K, β) 对 G/N具有与 (Prof(G/N) $\overline{\alpha}$) 相同的泛性质；因此，它是 $G/N.$ □的一个前有限完备化

3. 定理 A 和 B 的证明

3.1. 定理A的证明。令 $K := \beta_G(N)$，其中 $\overline{\beta_G}$ 是从局部紧群 $G = N \rtimes H$ 到 Bohr(G) 的典范映射。

- 第一步。我们断言

$$\left\{\widehat{\sigma} \circ (\beta_G|_N) : \widehat{\sigma} \in \widehat{K}\right\} \subset \widehat{N}_{\mathrm{fd}}^{H-\mathrm{per}}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 事实上，令 $\widehat{\sigma} \in K$。那么 $\sigma := \widehat{\sigma} \circ (\beta_G|_N) \in N_{\mathrm{fd}}.$ 令 $\widehat{\rho} \in$ Bohr(G) 为诱导表示 $\mathrm{Ind}_K^{\mathrm{Bohr}(G)} \widehat{\sigma}.$ 的一个不可约子表示。于是，根据 Frobenius互反律， $\widehat{\sigma}$ 等价于 $\widehat{\rho}|_K.$ 的一个子表示。因此， σ 等价于 $(\widehat{\rho} \circ \beta_G)|N.$ 的一个子表示。将有限维表示 $(\widehat{\rho} \circ \beta_G)|_N$ 分解为同型分量可知， σ 有一个有限的 H-轨道（参见 Bek23，命题 12]）。

- 第二步。我们断言

$$\widehat{N}_{\mathrm{fd}}^{H-\mathrm{per}} \subset \left\{\widehat{\sigma} \circ (\beta_G|_N) : \widehat{\sigma} \in \widehat{K}\right\}.$$

事实上，设 σ : $N \to U(m)$ 是 N 的一个具有有限 H-轨道的表示。根据命题5，存在一个射影表示 $\widetilde{\sigma}$ ，它是 $G_\sigma = NH_\sigma$ 的射影表示，且扩张了 σ ；其关联余循环 c : $G_\sigma \times G_\sigma \to \mathsf{S}^1$,可通过 $H_\sigma \times H_\sigma$分解。

定义 G_σ 的一个射影表示 $\tau\colon G_\sigma \to U(m)$ 如下：

$$\tau(hn) = \overline{\widetilde{\sigma}}(h) \qquad \text{for all} \quad nh \in NH_\sigma.$$

注意， τ 在 N 上是平凡的，且其关联的余循环为 $\overline{c}$。考虑 G_σ. 的张量积表示 $\widetilde{\sigma}\otimes\tau$。引理4表明， $\widetilde{\sigma}\otimes\tau$是余循环为$c\overline{c} = 1$. 的射影表示。因此， $\widetilde{\sigma}\otimes\tau$是从 $G_\sigma \to U$到(m)的可测同态。这意味着$\widetilde{\sigma}\otimes\tau$ 是连续的（见 [BHV08，引理 A.6.2]），因此 $\widetilde{\sigma}\otimes\tau$ 是 G_σ的普通表示。

显然， $\widetilde{\sigma}\otimes\tau$是有限维的。注意， $\widetilde{\sigma}\otimes\tau$在 N上的限制$(\widetilde{\sigma}\otimes\tau)|_N$是 σ. 的一个倍数。令

$$\rho := \mathrm{Ind}_{G_\sigma}^{G}(\widetilde{\sigma}\otimes\tau).$$

那么 ρ 是有限维的，因为 $\widetilde{\sigma}\otimes\tau$ 是有限维的，且 G_σ在 G中的指数有限。由于 G_σ 在 G中是开集， $\widetilde{\sigma}\otimes\tau$ 等价于 ρ 在 G_σ 上的限制 $\rho|_{G_\sigma}$ 的一个子表示（例如见 [BH, 1.F]）；因此， σ 等价于 $\rho|_N$的一个子表示。由于 ρ 是 G的有限维酉表示，存在 Bohr(G)的酉表示 $\widehat{\rho}$，使得 $\widehat{\rho}\circ\beta_G = \rho.$。因此， σ 等价于$(\widehat{\rho}\circ\beta_G)|_N$的一个子表示；也就是说，存在 $\widehat{\rho}$ 的表示空间中的一个子空间 V，该子空间在 $\beta_G(N)$作用下不变，并定义了一个与 σ. 等价的 N 的表示。那么 V 在$K = \beta_G(N)$作用下不变，因此定义了 K 的一个不可约表示 $\widehat{\sigma}$ ，且满足$\widehat{\sigma}\circ(\beta_G|_N) = \sigma$。

令 $\varphi_N\colon$ Bohr$(N) \to K = \overline{\beta_G(N)}$ 为满足$\varphi_N\circ\beta_N = \beta_G|_N$的同态。

- 第三步。我们断言，

$$\mathrm{Ker}\varphi_N = \bigcap_{\sigma\in\widehat{N}_{\mathrm{fd}}^{H-\mathrm{per}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{Bohr}(\sigma)),$$

其中 Bohr(σ) 是 Bohr(N) 的表示，使得 Bohr(σ) $\circ\beta_N = \sigma$.

事实上，根据第一步和第二步，我们有

$$\widehat{N}_{\mathrm{fd}}^{H-\mathrm{per}} = \left\{\widehat{\sigma}\circ(\beta_G|_N) : \widehat{\sigma}\in\widehat{K}\right\} = \left\{(\widehat{\sigma}\circ\varphi_N)\circ\beta_N : \widehat{\sigma}\in\widehat{K}\right\};$$

因为显然对于 $\sigma = \widehat{\sigma}\circ\varphi_N$， $\widehat{\sigma}\circ\varphi_N =$ Bohr(σ)，所以

$$\bigcap_{\sigma\in\widehat{N}_{\mathrm{fd}}^{H-\mathrm{per}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{Bohr}(\sigma)) = \bigcap_{\widehat{\sigma}\in\widehat{K}} \mathrm{Ker}(\widehat{\sigma}\circ\varphi_N).$$

由于 $\varphi_N(\mathrm{Bohr}(N)) = K$ 且 K 能区分 K 中的各点，因此我们有 $\bigcap_{\widehat{\sigma}\in\widehat{K}} \mathrm{Ker}(\widehat{\sigma}\circ\varphi_N) = \mathrm{Ker}\varphi_N$，命题得证。

令 $L := \overline{\beta_G(H)}$。

• 第四步。我们断言，由关系 $\varphi_H \circ \beta_H = \beta_G|_H$ 定义的映射 $\varphi_H : \mathrm{Bohr}(H) \to L$ 是一个同构。事实上，典范同构 $H \to G/N$ 诱导出同构 $\mathrm{Bohr}(H) \to \mathrm{Bohr}(G/N)$。利用命题 6.i.，我们得到一个连续满同态

$$f : L \to \mathrm{Bohr}(H)$$

使得对所有 $h \in H.$，都有 $f(\beta_G(h)) = \beta_H(h)$。于是，$\varphi_H \circ f$ 在 $\beta_G(H)$ 上是恒等映射，因此由稠密性可知，它在 L 上也是恒等映射。这意味着 f 是一个同构。

注意，由 $\mathrm{Bohr}(N)$ 的泛性质，每个元素 $h \in H$ 都定义了 $\mathrm{Bohr}(N)$ 的一个连续自同构 $\theta_b(h)$，使得

$$\theta_b(h)(n) = \beta_N(hnh^{-1}) \qquad \text{for all} \quad n \in N.$$

相应的同态 $\theta_b : H \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Bohr}(N))$ 定义了 H 在紧群 $\mathrm{Bohr}(N)$ 上的一个作用。由对偶性，我们得到一个 $\frown$ 作用，仍记为 θ_b，它是 H 在 $\mathrm{Bohr}(N)$ 上的作用，并且有

$$\mathrm{Bohr}(\sigma^h) = \theta_b(h)(\mathrm{Bohr}(\sigma)) \qquad \text{for all} \quad \sigma \in \widehat{N}_{\mathrm{fd}}, h \in H.$$

这意味着正规子群

$$\mathrm{Ker}\varphi_N = \bigcap_{\sigma\in\widehat{N}_{\mathrm{fd}}^{H-\mathrm{per}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{Bohr}(\sigma)).$$

$\mathrm{Bohr}(N)$ 中的子群是 H-不变的。因此，我们得到一个诱导作用 $\overline{\theta_b}$ of H on $\mathrm{Bohr}(N)/\mathrm{Ker}\varphi_N$.。注意，同构

$$\mathrm{Bohr}(N)/\mathrm{Ker}\varphi_N \to K$$

由 φ_N 诱导的映射对于 $\overline{\theta_b}$ 是 H-等变的，而 H 在 K 上的作用由与 $\beta_G(h)$ 的共轭作用给出，其中 $h \in H.$

• 第五步。我们断言，作用 $\overline{\theta_b}$ 在 $\mathrm{Bohr}(H)$ 上诱导出一个由自同构构成的作用，该作用作用于 $\mathrm{Bohr}(N)/\mathrm{Ker}\varphi_N$，并且映射

$$(\mathrm{Bohr}(N)/\mathrm{Ker}\varphi_N) \rtimes \mathrm{Bohr}(H) \to \mathrm{Bohr}(G), (x\mathrm{Ker}\varphi_N, y) \mapsto \varphi_N(x)\varphi_H(y)$$

是一个同构。

确实，$\overline{\beta_G(N)}$ 是 $\mathrm{Bohr}(G)$ 的正规子群，因此 $\beta_G(H)$ 通过共轭作用于 $K.$ 根据第三步和第四步，映射

$$\overline{\varphi_N} : \mathrm{Bohr}(N)/\mathrm{Ker}\varphi_N \to K, \qquad x\mathrm{Ker}\varphi_N \mapsto \varphi_N(x)$$

and

$$\varphi_H : \mathrm{Bohr}(H) \to L$$

是同构。我们定义一个作用

$$\widehat{\theta} : \mathrm{Bohr}(H) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Bohr}(N)/\mathrm{Ker}\varphi_N)$$

by

$$\widehat{\theta}(y)(x\mathrm{Ker}\varphi_N) = (\overline{\varphi_N})^{-1}\left(\varphi_H(y)\varphi_N(x)\varphi_H(y)^{-1}\right)$$

对于 $x \in \mathbf{Bohr}(N)$ 和 $y \in \mathbf{Bohr}(H)$。结论随即成立。

3.2. 定理 B 的证明。证明与定理A的证明类似。现在， N_{fd} 由 N_{finite} 的有限像有限维不可约表示空间 N 取代。我们将快速回顾定理A证明中的各个步骤；在某些地方（尤其是第二步）会有一些关键变化和新的论证，我们将着重说明。

令 $L := \overline{\alpha_G(N)}$，其中 $\alpha_G : G \to \mathbf{Prof}(G)$ 是典范映射。注意， L 是前有限的。

- 第一步。我们断言 $\left\{\widehat{\sigma} \circ (\alpha_G|_N) : \widehat{\sigma} \in \widehat{L}\right\} \subset \widehat{N}^{H-\text{有限}\cdot}$事实上，令 $\widehat{\sigma} \in \widehat{L}$。那么 $\sigma := \widehat{\sigma} \circ (\alpha_G|_N) \in \widehat{N}$ 有限，因为 L 是前有限的。令$\widehat{\rho}$为 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{Prof}(G)\ L}$ $\widehat{\sigma}$. 的一个不可约子表示。由于 $\mathbf{Prof}(G)$ 是紧的， $\widehat{\rho}$ 是有限维的。由于 σ 等价于 $\widehat{\rho} \circ (\alpha_G)|N)$ 的一个子表示，因此它有一个有限的 H-轨道。
- 第二步。我们断言 $\widehat{N}^{H-\text{有限}} \subset \left\{\widehat{\sigma} \circ (\alpha_G|_N) : \widehat{\sigma} \in \widehat{L}\right\}$. 确实，设 $\sigma : N \to U(m)$ 是一个像有限的不可约表示。根据命题5，存在一个 $\widetilde{\sigma}$ 的射影表示，它扩张了 σ ，且其关联余循环$c : G_\sigma \times G_\sigma \to \mathbf{S}_1$ 可经由 $H_\sigma \times H_\sigma$ 分解。我们需要证明，可以选择 $\widetilde{\sigma}$ ，使得 $\widetilde{\sigma}(G_\sigma)$ 有限。

选择一个如上的射影表示 $\widetilde{\sigma} : G_\sigma \to U(m)$，并按如下方式修改 $\widetilde{\sigma}$ ：定义

$$\widetilde{\sigma}_1(hn) = \frac{1}{(\det \widetilde{\sigma}(h))^{1/m}}\widetilde{\sigma}(h)\sigma(n) \qquad \text{for all} \quad h \in H_\sigma, n \in H.$$

那么， $\widetilde{\sigma}_1$ 再次是 $G_\sigma = NH_\sigma$ 的一个射影表示，它扩张了 σ，且相应的余循环 c: $G_\sigma \times G_\sigma \to \mathbf{S}^1$ 可通过 $H_\sigma \times H_\sigma$ 分解；此外，对于每个 $h \in H_\sigma$., $\widetilde{\sigma}_1(h) \in SU(m)$。

每个 $h \in H_\sigma$ 都诱导出一个双射 φ_h ，其定义于 $\sigma(N)$上，具体为

$$\varphi_h : \sigma(n) \mapsto \widetilde{\sigma}_1(h)\sigma(n)\widetilde{\sigma}_1(h)^{-1} = \sigma(hnh^{-1}) \qquad \text{for all} \quad n \in N.$$

因此，我们有一个映射

$$\varphi : \widetilde{\sigma}_1(H_\sigma) \to \mathrm{Sym}(\sigma(N)), \quad \widetilde{\sigma}_1(h) \mapsto \varphi_h$$

其中 $\mathrm{Sym}(\sigma(N))$ 是 $\sigma(N)$ 的双射集合。对于 $h_1, h_2 \in H_\sigma$，当且仅当存在标量 $\lambda \in$ ，使得 $\varphi_{h_1} = \varphi_{h_2}(h_2) = \lambda\widetilde{\sigma}_1(h_1)$ 时， $\widetilde{\sigma}_1$；由 σ 的不可约性可知 $\lambda \in \mathrm{S}^1$,。由于 $\det(\widetilde{\sigma}_1(h_1)) = 1$ 且 $\det(\widetilde{\sigma}_1(h_2)) = 1$，因此 λ 是一个 m 次单位根。这说明映射 φ 的纤维是有限的。由于 $\sigma(N)$ 是有限的，$\mathrm{Sym}(\sigma(N))$ 因而 $\widetilde{\sigma}_1(H_\sigma)$ 也是有限的。因此， $\widetilde{\sigma}_1(G_\sigma) = \widetilde{\sigma}_1(H_\sigma)\sigma(N)$ 是有限的。

令 τ: $G_\sigma \to U(m)$ 为 G_σ 的射影表示，定义如下:

$$\tau(hn) = \overline{\widetilde{\sigma_1}}(h) \qquad \text{for all} \quad nh \in NH_\sigma.$$

那么 $\widetilde{\sigma}_1 \otimes \tau$ 是 G_σ 的普通表示，且具有有限像。诱导表示 $\rho := \mathrm{Ind}_{G_\sigma}^{G}(\widetilde{\sigma}_1 \otimes \tau)$ 具有有限像，因为 G_σ 在 G 中具有有限指标。由于 $\widetilde{\sigma}_1 \otimes \tau$ 等价于 ρ 在 G_σ 上的限制 $\rho|_{G_\sigma}$ 的一个子表示，因此表示 σ 等价于 $\rho|_N$ 的一个子表示。由于 $\rho(G)$ 具有有限像，存在 $\mathrm{Prof}(G)$ 的酉表示 $\widehat{\rho}$，使得 $\widehat{\rho} \circ \alpha_G = \rho.$。因此，存在 $\widehat{\rho}$ 的表示空间中的一个子空间 V，它在 $\alpha_G(N)$ 作用下不变，并定义了 N 的一个表示，该表示等价于 $\sigma.$。于是， V 定义了 L 的一个不可约表示 $\widehat{\sigma}$，满足 $\widehat{\sigma} \circ (\alpha_G|_N) = \sigma$。

令 ψ_N: $\mathrm{Prof}(N) \to L$ 为满足 $\psi_N \circ \alpha_N = \alpha_G|_N$ 的同态。

- 第三步。我们断言:

$$\mathrm{Ker}\psi_N = \bigcap_{\sigma \in \widehat{N}_{\mathrm{finite}}^{H-\mathrm{per}}} \mathrm{Ker}(\mathrm{Prof}(\sigma)).$$

事实上，证明与定理A第三步的证明类似

- 第四步。我们断言，由关系 $\varphi_H \circ \alpha_H = \alpha_G|_H$ 定义的映射 $\overline{\psi_H}$: $\mathrm{Prof}(H) \to \alpha_G(H)$ 是一个同构。事实上，证明与定理A第四步的证明类似。

每个元素 $h \in H$ 都定义了 $\mathrm{Prof}(N)$ 的一个连续自同构 $\theta_p(h)$。令

$$\theta_p : H \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Prof}(N))$$

为相应的同态；与定理A中一样，我们得到 H 在 $\mathrm{Prof}(N)/\mathrm{Ker}\psi_N$. 上诱导的作用 $\overline{\theta_p}$

- 第五步。我们断言， H 的作用 $\overline{\theta_p}$ 诱导出 $\mathrm{Prof}(H)$ 在 $\mathrm{Prof}(N)/\mathrm{Ker}\psi_N$ 上的自同构作用，并且映射

$$(\mathrm{Prof}(N)/\mathrm{Ker}\psi_N) \rtimes \mathrm{Prof}(H) \to \mathrm{Prof}(G), (x\mathrm{Ker}\psi_N, y) \mapsto \psi_N(x)\psi_H(y)$$

是一个同构。

事实上，其证明与定理 A 第五步的证明类似。

4. 推论的证明

4.1. 推论 C 的证明。 假设 N 是有限生成的。根据定理 B，我们需要证明 $\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}{}_{\text{有限}} = \widehat{N}_{\mathrm{finite}}$.

众所周知，对每个整数 $n \geq 1$， N. 中指数为 n 的子群只有有限多个。事实上，由于 N 是有限生成的， N 在集合 $\{1, \ldots, n\}$. 上的作用只有有限多个。每个指数为 n 的子群 M 都定义了 N 在 N/M 上的一个作用，因而也定义了其在 $\{1, \ldots, n\}$ 上的一个作用；在该作用下，例如 1 的稳定子是 M.。因此，这样的子群 M. 只有有限多个。

令 $\sigma \in N_{\mathrm{finite}}$，并设 $n := |\sigma(N)|$.。考虑 $N_\sigma = \cap_M M$，其中 M 遍历 N 中指数为 n. 的子群。则 N_σ 是 N 的一个有限指标正规子群，并且对每个 $h \in H$，表示σ^h 都可因子化为 N/N_σ. 的一个表示。由于 N/N_σ 是有限群，它只有有限多个互不等价的不可约表示，故结论得证。

4.2. 推论 D 的证明。我们假设 N 是阿贝尔群。Bohr(N) 的对偶群是 N，而 Prof(N) 的对偶是 N_{fin}，均视为离散群。采用定理 A 和 B 中的记号，子群C和 D分别是 Bohr(N) 和 Prof(N) 中闭子群 $\widehat{N}^{H-\text{每}}$ 及 $\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}{}_{\text{有限}}$ 的湮灭子。因此，Bohr(N)/C和 Prof(N)/D是 $\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}$和 $\widehat{N}^{H-}{}_{\text{每有限}}$ 的对偶群，均视为离散群。由此，结论可由定理 A 和 B 得出。

4.3. 推论 E 的证明。根据定理 A 和 B， G 是最大阿贝尔商，分别是残余有限，当且仅当

$$\mathrm{Ker}(\varphi_N \circ \beta_N) = \{e\} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Ker}(\varphi_H \circ \beta_H) = \{e\},$$

分别

$$\mathrm{Ker}(\psi_N \circ \alpha_N) = \{e\} = \{e\} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Ker}(\psi_H \circ \alpha_H) = \{e\}.$$

因此， G 是最大阿贝尔商，分别是残余有限，当且仅当

$$\beta_N^{-1}(C) = \{e\} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Ker}(\beta_H) = \{e\},$$

分别。

$$\alpha_N^{-1}(D) = \{e\} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Ker}(\alpha_H) = \{e\}.$$

这恰好意味着：当且仅当 $\widehat{N}^{H-\mathrm{per\,fd}}$ 分离 N 中的点时，G 是最大阿贝尔商；而当且仅当 $\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}$ 有限分离 N 中的点时，H 是最大阿贝尔商；此外，H 是残余有限。

4.4. 推论 F 的证明。假设 $G = \Lambda \wr H$ 是可数群 Λ 和 H 的 wreath 积，并令 $N := \oplus_{h\in H}\Lambda$.

(i) 假设 H 是有限的。那么，当然，$\widehat{N}^{H-\mathrm{per\ fd}} = \widehat{N}_{\mathrm{fd}}$ 且 $\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}$ 有限 $= \widehat{N}_{\mathrm{finite}}$；因此，定理 A 和 B 中的子群 C 和 D 都是平凡的。由于 $\mathrm{Bohr}(N) = \oplus_{h\in H}\mathrm{Bohr}(\Lambda)$ 且 $\mathrm{Prof}(N) = \oplus_{h\in H}\mathrm{Prof}(\Lambda)$，我们有

$$\mathrm{Bohr}(\Lambda \wr H) \cong (\oplus_{h\in H}\mathrm{Bohr}(\Lambda)) \rtimes \mathrm{Bohr}(H) \text{ and}$$
$$\mathrm{Prof}(\Lambda \wr H) \cong (\oplus_{h\in H}\mathrm{Prof}(\Lambda)) \rtimes \mathrm{Prof}(H).$$

(ii) 假设 H 是无限的。

• 第一步。我们断言，对于每个 $\sigma \in \widehat{N}^{H-}{}_{\mathrm{per\,fd}}$，都有 $\dim\,\sigma = 1$，也就是说，$\sigma(N) \subset U(1) = S_1$。

确实，反设 $\dim\sigma > 1$。令 $\mathcal{F}$ 为 H.的有限子集族。对于每个 $F \in \mathcal{F}$，令 $N(F)$ 为 N 的正规子群，其定义如下

$$N(F) := \oplus_{h\in F}\Lambda$$

$\sigma|_{N(F)}$ σ对 $N(F)$的限制可分解为同型分量:

$$\sigma|_{N(F)} = \oplus_{\pi\in\Sigma_F} n_\pi \pi,$$

其中 Σ_F是 $N(F)_{\mathrm{fd}}$的一个（有限）子集，而 n_π是一些正整数。众所周知（例如，参见 [Wei40，第 17]节），$N(F)_{\mathrm{fd}}$中的每个表示都是不可约表示 $\rho_h\widehat{}$的张量积 $\otimes_{h\in F}\rho_h$，其中这些不可约表示属于 Λ；因此，我们可以将 Σ_F 视为 $\prod_{h\in F}\Lambda_{\mathrm{fd}}$. 的子集。如果 $F \subset F'$，那么 $\widehat{}$ $\widehat{}$显然的映射 $\prod_{h\in F'}\Lambda_{\mathrm{fd}} \to \prod_{h\in F}\Lambda_{\mathrm{fd}}$ 限制为一个满射$\Sigma_{F'} \to \Sigma_F$。

由于 $\dim\sigma$ 是有限的，因此存在 $F_0 \in \mathcal{F}$，使得

$$\dim\pi = 1 \qquad \text{for all} \quad \pi \in \Sigma_F, F \in \mathcal{F} \quad \text{with} \quad F \cap F_0 = \emptyset$$

and

$$\dim\pi_0 > 1 \quad \text{for some} \quad \pi_0 \in \Sigma_{F_0}.$$

对于 $h \in H$ 和 $F \in \mathcal{F}$，注意到，对于 $\sigma^h|_{N(h^{-1}F)}$ 分解为同型分量的情形，我们有

$$\sigma^h|_{N(h^{-1}F)} = \oplus_{\pi\in\Sigma_F} n_\pi \pi.$$

因此，如果 $h^{-1}F_0 \cap F_0 = \emptyset$.，那么 σ^h 和 σ 不等价。

我们通过归纳法，选取一列由 H 中的 $h_0 = e$ 和... 组成的元素 $(h_n)_{n\geq 0}$。

$$h_{n+1}^{-1}F_0 \cap \bigcup_{0\leq m\leq n} h_m^{-1}F_0 = \emptyset \qquad \text{for all} \quad n \geq 0.$$

这些 σ^{h_n}两两不等价。这与 $\sigma \in \widehat{N}^{H-\mathrm{per}}$.fd

令 $p\colon \Lambda \wr H \to \Lambda^{\mathrm{Ab}} \wr H$ 为商映射，其定义为

$$p((\lambda_a)_{a\in H}, h) = ((\lambda_a[\Lambda,\Lambda])_{a\in H}, h).$$

- 第二步。我们声称，所诱导的映射

$$\mathrm{Bohr}(p) : \mathrm{Bohr}(\Lambda \wr H) \to \mathrm{Bohr}(\Lambda^{\mathrm{Ab}} \wr H)$$

and

$$\mathrm{Prof}(p) : \mathrm{Prof}(\Lambda \wr H) \to \mathrm{Prof}(\Lambda^{\mathrm{Ab}} \wr H)$$

是同构。

事实上，根据第一步，每个 $\sigma \in \widehat{N}^{H-\mathrm{per}}{}_{\mathrm{fd}}$ 都通过 N^{Ab}.分解。因此，根据定理 A 和 B， $[N,N]$ 包含于 $C =$ker φ_N，且$[N,N]$包含于 $D =$ker ψ_N。这意味着 β_G(ker p) $= \{e\}$且 α_G(ker p) $= \{e\}$。于是由命题 6 可得所述结论。

4.5. 推论 G 的证明。我们假设 G 是一个 wreath 积$G = \Lambda \wr H$，且 Λ 至少有两个元素。和之前一样，设$N = \oplus_{h\in H}\Lambda$.

(i) 假设 H 是有限的。那么 G 是最大阿贝尔商（分别地，残余有限），当且仅当 Λ 是最大阿贝尔商（分别地，残余有限）。

事实上， $\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}{}_{\mathrm{fd}} = \widehat{N}_{\mathrm{fd}}$ 分离了 $N.$ 的各个点。因此结论由推论 E 得出。

(ii) 假设 H 是无限的。若 G 是最大阿贝尔商，则由推论 F 可知 Λ 是阿贝尔的。因此，从现在起，我们可以并且将假设 Λ （从而N）是阿贝尔的。

- 第一步。我们断言，若 $\widehat{N}^{H-}{}_{\mathrm{per}}$ 分离了 N 的各个点，则 H 是残余有限的。

事实上，回想一下对偶群 $\widehat{\Lambda}$的Λ，赋予逐点收敛拓扑后，是一个紧群。借助对偶性，对偶群 N 的 N可以作为拓扑群与乘积群$\widehat{\prod}_{h\in H}\Lambda$同构，其中乘积群赋予乘积拓扑。

$$\left\langle \prod_{h\in H}\chi_h, \oplus_{h\in H}\lambda_h \right\rangle = \prod_{h\in H}\chi_h(\lambda_h) \quad \text{for all} \quad \prod_{h\in H}\chi_h \in \widehat{N}, \oplus_{h\in H}\lambda_h \in N.$$

（注意，右侧的乘积是良定义的，因为对于除有限多个 $h \in H.$ 之外的所有 $h \in H.$，$\backsim \lambda_h = e$ ） H 在 N 上的对偶作用由下式给出。

$$(\prod_{h\in H} \chi_h)^a = \prod_{h\in H} \chi_{a^{-1}h} \qquad \text{for all} \quad a \in H.$$

对于 $\Phi := \prod_{h\in H} \chi_h \in \widehat{N}$，我们有 $\Phi \in \widehat{N}^{H-\text{为}}$当且仅当存在 H 的一个有限指数子群 H_Φ ，使得

$$\chi_{ah} = \chi_h \qquad \text{for all} \quad a \in H_\Phi, h \in H.$$

根据假设， $\widehat{N}^{H-\text{per}}$ 将 N 中的点分离；等价地，$\widehat{N}^{H-\text{per}}$在 $\widehat{N}$中稠密。令 $h_0 \in H \setminus \{e\}.$由于 Λ至少有两个元素，我们可以找到 $\chi^0 \in \widehat{\Lambda}$ 和 $\lambda_0 \in \Lambda$ ，使得 $\chi^0(\lambda_0) \neq 1.$ 定义$\Phi_0 = \prod_{h\in H} \chi_h \in \widehat{N}$ 为 $\chi_{h_0} = \chi^0$ ，并且对 $h \neq h_0.$ 有 $\chi_h = 1_\Lambda$ 置

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \left|\chi^0(\lambda_0) - 1\right| > 0.$$

因为 $\widehat{N}^{H-\text{per}}$ 在其中稠密 $\widehat{N}$，我们可以找到 $\Phi' = \prod_{h\in H} \chi'_h \in \widehat{N}^{H-\text{per}}$ 使得 that

$$|\chi'_{h_0}(\lambda_0) - \chi_{h_0}(\lambda_0)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{and} \quad |\chi'_e(\lambda_0) - \chi_e(\lambda_0)| \leq \varepsilon/2$$

我们断言， h_0 不属于 $\Phi'.$ 的稳定子 $H_{\Phi'}$ 。事实上，反设 $h_0 \in H_{\Phi'}.$ ，则 $\chi'_{h_0} = \chi'_e$ ，因此

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= |\chi^0(\lambda_0) - 1| \\ &\leq |\chi^0(\lambda_0) - \chi'_{h_0}(\lambda_0)| + |\chi'_{h_0}(\lambda_0) - 1| \\ &= |\chi_{h_0}(\lambda_0) - \chi'_{h_0}(\lambda_0)| + |\chi'_e(\lambda_0) - \chi_e(\lambda_0)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。由于 $H_{\Phi'}$ 具有有限指标，我们已证明 H 是残余有限的。

• 第二步。我们断言，若 H 是残余有限的，则 $\widehat{N}^{H-\text{本身}}$能分离 N中的各点。

事实上，设 $\oplus_{h\in H}\lambda_h \in N \setminus \{e\}.$ 那么 $F = \{h \in H : \ \lambda_h \neq e\}$ 是 $H.$ 的一个有限非空子集。设 $(\chi_h^0)_{h\in F}$ 是 $\widehat{\Lambda}$ 中的一个序列，使得 $\prod_{h\in F} \chi_h^0(\lambda_h) \neq 1$ （这是可能的，因为阿贝尔群是最大阿贝尔商）。由于 H 是残余有限的，我们可以在 H 中找到一个有限指标子群 L，使得$\backsim Lh \neq Lh'$ 对所有满足 $h \neq h'.$ 的 h、$h' \in F$ 均成立。定义 $\Phi = \prod_{h'\in H} \chi_{h'} \in N$ 为

$$\chi_{h'} = \begin{cases} \chi_h^0 & \text{if} \quad h' \in Lh \quad \text{for some} \quad h \in F \\ 1_\Lambda & \text{if} \quad h' \notin \cup_{h\in F} Lh \end{cases}$$

显然， $L \subset H_\Phi$ ，因此 $\Phi \in \widehat{N}^{H-\mathrm{per}}$；此外，

$$\Phi\left(\oplus_{h\in H}\lambda_h\right) = \prod_{h\in F}\chi_h^0(\lambda_h) \neq 1.$$

因此， $\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}$ 分离了 $N.$ 的各点。

• 第三步。我们声称，如果 H 是残余有限的且 Λ 是残余有限的，那么 $\widehat{N}^{H-}$每个有限都能分离 N 的各个点。

证明与第二步的证明相同，只有一点不同：必须选择一个序列 $(\chi_h^0)_{h\in F}$ in$\chi_h^0 \in \widehat{\Lambda}_{\mathrm{finite}}$ ，使得 $\prod_{h\in F}\chi_h^0(\lambda_h) \neq 1$；这是可行的，因为我们假设 Λ 是残余有限。

• 第四步。我们断言， G 是最大阿贝尔商，当且仅当 H 是残余有限。事实上，这由推论 E 结合第一步和第二步即可得出。

• 第五步。我们声称，当且仅当 Λ 和 H 是残余有限时， G是残余有限。事实上，这由推论 E 结合第一步和第三步即可推出。

5. Examples

5.1. 灯笼群。对于 $m \geq 1$，记 C_m 为有限循环群 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$。回忆

$$\mathrm{Bohr}(\mathbf{Z}) \cong \mathrm{Bohr}(\Gamma)_0 \oplus \mathrm{Prof}(\Gamma).$$

并且

$$\mathrm{Prof}(\mathbf{Z}) = \varprojlim_m C_m \quad \text{and} \quad \mathrm{Bohr}(\mathbf{Z})_0 \cong \prod_{\omega\in\mathfrak{c}} \mathbf{A}/\mathbf{Q},$$

其中 A/Q 是 Q 的阿代尔环，而 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ （见 [Bek23，命题 11]）。

对于整数 $n_0 \geq 2$，令 $G = C_{n_0} \wr \mathbf{Z}$ 为灯笼群。我们断言

$$\mathrm{Bohr}(G) \cong \mathrm{Bohr}(\mathbf{Z})_0 \times \mathrm{Prof}(G)$$

and

$$\mathrm{Prof}(G) = \varprojlim_m C_{n_0} \wr C_m.$$

事实上，令 $N := \oplus_{k\in\mathbf{Z}} C_{n_0}.$ 。将 N 描述为映射集 $f : \mathbf{Z} \to C_{n_0}$ 会很方便，其中满足 $\mathrm{supp}(f) := \{k \in \mathbf{Z} : f(k) \neq 0\}$ 至多为有限集。 $m \in \mathbf{Z}$ 对 $f \in N$ 的作用由平移给出： $f^m(k) = f(k+m)$，对所有 $k \in \mathbf{Z}$ 均成立。

$\widehat{}$我们通过对偶性将 Λ 与 C 中的 n_0 次单位根群 μ_{n_0} 等同起来

$$\langle z, k\mathbf{Z}\rangle = z^k \qquad \text{for all} \quad z \in \mu_{n_0}, k \in \mathbf{Z}.$$

$\widehat{}$于是， N 可与映射集 $\Phi : \mathbf{Z} \to \mu_{n_0}$等同，对偶性由以下给出。

$$\langle \Phi, f\rangle = \prod_{k\in\mathbf{Z}} \langle \Phi(k), f(k)\rangle \qquad \text{for all} \quad \Phi \in \widehat{N}, f \in N.$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$注意到 $\Phi(N) \subset \mu_{n_0}$，因此 $N = N_{\text{finite}}$.

我们有 $\widehat{N}^{H-\text{per}} = \bigcup_{m\geq 1} \widehat{N}(m)$，其中 $\widehat{N}(m)$ 是子群

$$\widehat{N}(m) = \{\Phi : \mathbf{Z} \to \mu_{n_0} \ : \Phi(k+m) = \Phi(k) \quad \text{for all} \quad k \in \mathbf{Z}\}.$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$注意，我们有自然嵌入 $i_{m_2}^{m_1}$: $N(m_2) \to N(m_1)$，若 $m_1\widehat{}$是 m_2. 的倍数。 $N(m)$ 的对偶群 A可以通过对偶性与映射集 $\overline{f}$: $C_m \to C_{n_0}$ 等同起来。

$$\langle \overline{f}, \Phi\rangle = \prod_{k+m\mathbf{Z}\in C_m} \Phi(k)^{\overline{f}(k+m\mathbf{Z})} \rangle \qquad \text{for all} \quad \Phi \in \widehat{N}(m), \overline{f} \in A(m).$$

如果 m_1 是 m_2 的倍数，我们有一个投影 $p_{m_1}^{m_2} : A(m_1) \to A(m_1)$，由下式给出。

$$\langle p_{m_1}^{m_2}(\overline{f}), \Phi\rangle = \langle \overline{f}, \Phi \circ i_{m_2}^{m_1}\rangle.$$

A $\widehat{N}^{H-\text{每个}} = \bigcup_{m\geq 1} \widehat{N}(m)$的对偶群随后可识别为射影极限 $\lim_{\longleftarrow m} A(m)$。

Z 通过自同构对 A 的作用定义如下：对于 $r \in \mathbf{Z}$ 和$\overline{f} = (\overline{f}_m)_{m\geq 1} \in A$，有 $(\overline{f})^r = (\overline{g}_m)_{m\geq 1}$，其中

$$\overline{g}_m(k + m\mathbf{Z}) = \overline{f}_m(k + r + m\mathbf{Z}) \qquad \text{for all} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

此作用以显然的方式扩展为 $\text{Proj(Z)} = \lim_{\longleftarrow m} C_m$ 通过自同构对 A 的作用。根据推论 D，群 $\text{Prof}(G)$ 同构于相应的半直积 $A \rtimes \text{Prof(Z)}$，因此

$$\text{Prof}(G) \cong \varprojlim_m C_{n_0} \wr C_m.$$

再次根据推论 D，Z 对 A 的作用扩展为 Bohr(Z) 的自同构作用。由于 Bohr(Z)_0 是连通的，而 A 是全不连通的，Bohr(Z)_0 在 A. 上作用为恒等作用。由于 $\text{Bohr(Z)} \cong \text{Bohr(Z)}_0 \times \text{Proj(Z)}$，因此

$$\text{Bohr}(G) \cong (A \rtimes \text{Proj}(\mathbf{Z})) \times \text{Bohr}(\mathbf{Z})_0 \cong \text{Proj(G)} \times \text{Bohr}(\mathbf{Z})_0.$$

关于 $\text{Prof}(G)$ 的另一种描述，见 [GK14，引理 3.24]。

5.2. 海森堡群。设 R 是一个交换含幺环。海森堡群是如下的群

$$H(R) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in R \right\}$$

我们可以并且将把 $H(R)$ 识别为 R^3，其群运算为

$$(a, b, c)(a', b', c') = (a + a', b + b', c + c' + ab').$$

设 $\mathcal{I}_{\text{finite}}$ 为 R 的有限指标理想族。每个来自 $\mathcal{I}_{\text{finite}}$ 的理想 I都定义了两个海森堡型紧群 $H(\text{Bohr}(R)\ I)$ 和 $H(\text{Prof}(R)\ I)$，如下所示：

$$H(\text{Bohr}(R), I) := \text{Bohr}(R) \times \text{Bohr}(R) \times (R/I)$$

其群运算为

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + p_I(x)p_I(y'),$$

其中，$p_I : \text{Bohr}(R) \to R/I$ 是由典范映射 $R \to R/I$诱导的群同态；群 $H(\text{Prof}(R)\ I)$以类似方式定义。

注意，对于 $\mathcal{I}_{\text{finite}}$中的两个理想 I 和 J，我们有自然的满态射

$$H(\text{Bohr}(R), J) \to H(\text{Bohr}(R), I) \qquad and \qquad H(\text{Prof}(R), J) \to H(\text{Prof}(R), I).$$

我们断言，典范映射 $H(R) \to H(\text{Bohr}(R)\ I)$ 和$H(R) \to H(\text{Prof}(R)\ I)$ 诱导出同构

$$\text{Bohr}(H(R)) \cong \varprojlim_I H(\text{Bohr}(R), I),$$

and

$$\text{Prof}(H(R)) \cong \varprojlim_I H(\text{Prof}(R), I),$$

其中 I 遍历 $\mathcal{I}_{\text{finite}}$.

事实上，$H(R)$ 是一个半直积 $N \rtimes H$，其中

$$N = \{(0, b, c) : b, c \in R\} \cong R^2$$

and

$$H = \{(a, 0, 0) : a \in R\} \cong R.$$

设 $\chi \in \widehat{N}$。那么 $\chi = \chi_{\beta,\ \psi}$对应唯一的一对 $(\beta, \psi) \in (\widehat{R})^2$,，其中 $\chi_{\beta,\ \psi}$ 定义为

$$\chi_{\beta,\psi}(0, b, c) = \beta(b)\psi(c) \quad \text{for } b, c \in R.$$

对于 $h = (a, 0, 0) \in H$，我们有

$$\chi^h_{\beta,\psi}(0, b, c) = \beta(b)\psi(a^{-1}b)\psi(c) = \chi_{\beta\psi^a,\psi}(0, b, c) \quad \text{for } b, c \in R,$$

其中，$\psi^a \in \widehat{R}$ 由 $\psi^a(b) = \psi(a^{-1}b)$ 定义，其中 $b \in R$。由此可得，$\chi_{\beta,\psi}$ 的 H- 轨道为

$$\{\chi_{\beta\psi^a,\psi} : a \in R\},$$

并且$\chi_{\beta,\ \psi}$的稳定子仅取决于 ψ，其为

$$H_\psi = \{(a,0,0) \mid a \in I_\psi\},$$

其中 I_ψ 是由 R 定义的理想

$$I_\psi = \{a \in R \mid aR \subset \ker\psi\}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$令 R_{per} 为所有可经由某个理想 $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{finite}}$. 对应的商 R/I 进行分解的 $\psi \in R$ 组成的子群。于是

$$\widehat{N}^{H-\mathrm{per}} = \{\chi_{\beta,\psi} : \beta \in \widehat{R}, \psi \in \widehat{R}_{\mathrm{per}}\} \cong \widehat{R} \times \widehat{R}_{\mathrm{per}}.$$

R_{per} 的对偶群可识别为 $\varprojlim_I R/I$，其中 I 遍历 $\mathcal{I}_{\mathrm{finite}}$. 。因此，$\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}$ 的对偶群 A 可识别为 $\varprojlim_I \mathrm{Bohr}(R) \times (R/I)$。

$\mathrm{Bohr}(H) \cong \mathrm{Bohr}(R)$ 在每个 $\mathrm{Bohr}(R)\times(R/I)$ 上的作用由下式给出

$$x \cdot (y,z) = (y, z + p_I(x)p_I(y')) \qquad \text{for all} \quad x,y \in \mathrm{Bohr}(R), z \in R/I,$$

对于自然映射 $p_I : \mathrm{Bohr}(R) \to R/I$。这表明

$$\mathrm{Bohr}(H(R)) \cong \varprojlim_I H(\mathrm{Bohr}(R), I).$$

类似地，$\widehat{N}^{H-\mathrm{per}}{}_{\text{有限}}$ 的对偶群 B 可识别为 $\varprojlim_I \mathrm{Prof}(R) \times (R/I)$，并且我们有

$$\mathrm{Prof}(H(R)) \cong \varprojlim_I H(\mathrm{Prof}(R), I).$$

References

[Bek23]B. Bekka，《算术群的Bohr紧化》，arXiv:2304.09045（2023年）。↑2, 6, 7, 9, 10, 19[BHV08] B. Bekka、P. de la Harpe 和 A. Valette，《Kazhdan性质（T）》，《新数学专著》，第11卷，剑桥大学出版社，剑桥，2008年。↑11[BH] B. Bekka 和 P. de la Harpe，《群的酉表示、对偶与特征标》，《数学研究生丛书》，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛。↑2, 11[CR62] C. Curtis 和 I. Reiner，《有限群表示论与结合代数》，《纯粹与应用数学》，第XI卷，Interscience出版社（John Wiley & Sons, Inc.旗下），纽约—伦敦，1962年。↑8[DL83] F. Dangello 和 R. Lindahl，《半直积紧化》，《加拿大数学杂志》35（1983），第1期，1–32。↑6

[Dix77] J. Dixmier, 《 C^*-代数》，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约—牛津，1977年。 ↑2[GK14] R. Grigorchuk 和 R. Kravchenko, 《关于灯笼人群的子群格》，《国际代数与计算杂志》24（2014），第6期，837–877。 ↑20[Gru57] K. W. Gruenberg, 《无限可解群的剩余性质》，《伦敦数学学会会刊》（第3辑）7（1957），29–62。 ↑6[GZ11] F. Grunewald 和 P. Zalesskii, 《群的属》，《代数杂志》326（2011），130–168。 ↑3，4，6[HK01] J. E. Hart 和 K. Kunen, 《非阿贝尔群的Bohr紧化》，《第16届广义拓扑及其应用暑期会议论文集》（纽约），2001/02，第593–626页。 ↑3，9[JL81] H. D. Junghenn 和 B. T. Lerner, 《半直积的半群紧化》，《美国数学会汇刊》265（1981），第2期，393–404。 ↑6[Jun78] H. D. Junghenn, 《变换半群半直积上的几乎周期函数》，《太平洋数学杂志》79（1978），第1期，117–128。 ↑3，6[JM02] H. D. Junghenn 和 P. Milnes, 《群扩张的几乎周期紧化》，《捷克斯洛伐克数学杂志》52(127)（2002），第2期，237–254。 ↑6[Lan72] M.. Landstad, 《关于变换群的Bohr紧化》，《数学杂志》127（1972），167–178。 ↑6[Mac58] G.. Mackey, 《群扩张的酉表示。I》，《数学学报》99（1958），265–311。 ↑8，9[Mil83] P. Milnes, 《直积与半直积的半群紧化》，《加拿大数学通报》26（1983），第2期，233–239。 ↑6[RZ00] L. Ribes 和 P. Zalesskii, 《有限群》，《数学及其边界领域成果》。第3辑，《现代数学综述丛书》 [《数学及其相关领域成果》。第3辑，《现代数学综述丛书》], 第40卷，施普林格出版社，柏林，2000年。 ↑2，3，6，7，9[Wei40] A. Weil, 《拓扑群上的积分及其应用》，《科学与工业实用文献》 ´《科学与工业实用文献》 ´《当前科学与工业专题》 [《当前科学与工业专题》],第869号，赫尔曼出版公司，巴黎，1940年。 ↑2，16

Bachir Bekka, Univ Rennes, CNRS, IRMAR–UMR 6625, Campus Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France电子邮箱：bachir.bekka@univ-rennes1.fr