arXiv:2305.04806v1 [math.GR] 8 May 2023

SQU交错群 An 中的共轭类 S

MICHAEL LARSEN 和 PHAM HUU TIEP

Abstract. 我们将关于对称群的若干结果推广到交错群 A_n ： 这些结果断言，在共轭类，或更一般地说，正规子集满足 S_n 的各种条件时，有 $C^2 \supseteq A_n \smallsetminus \{1\}$。

1. Introduction

设 S_n 表示一个对称群，A_n 表示其偶置换子群。设 C 是 S_n 中 n-循环的共轭类。Andrew Gleason [8] 似乎是第一个注意到 $C^2 = A_n$ 的人。这一结果已通过多种方式得到推广（例如参见 [1, 3, 4, 7, 10]）。现在我们知道，对于 S_n 的一个共轭类而言，条件 $C^2 = A_n$ 按任何合理的定义都属于典型行为。

本文聚焦于交错群中的共轭类。A_n 中的大多数共轭类都是 S_n中偶置换的共轭类；新意在于理解与由互不相同的奇数部件构成的 n 的分拆相关联的 A_n-共轭类会发生什么。一个关键工具是 Frobenius 公式，它用于计算乘积为 1 的三元组 (x_1, x_2, x_3) 的数量，其中对于每个 i， x_i 都属于给定的共轭类 C_i。要使用这种方法，我们需要关于 A_n的不可约特征标值的良好上界。关于对称群的此类上界已有大量文献（例如参见 [2, 5, 11, 15, 16, 17] 及其中所列的参考文献），因此我们需要的是专门针对那些不是 S_n的特征标限制的 A_n 的不可约特征标的上界。

我们的主要结果如下。通过改进 Gleason [8], 的结果，我们得到

定理 1. 设 C 和 D 是 A_n, $2 \nmid n \geq 7$的（可能相同的）共轭类，且每个共轭类都由n-循环组成。那么 $CD \supseteq A_n \smallsetminus \{1\}$。

我们对 [11] 的主定理的补充如下：

定理 2. 对所有 $\epsilon > 0$，存在 $N = N(\epsilon) > 0$，使得若 $n > N$ 且 $x \in A_n$ 是满足 $x^{A_n} \neq x^{S_n}$的一个元素，则对 A_n的每个不可约特征 χ，都有 $|\chi(x)| \leq \chi(1)^{\epsilon}$。

由此我们得出以下三个推论。

定理 3. 对所有充分大的 n，若 $x, y \in A_n$ 是 S_n 中共轭的元素，但满足 $x^{A_n} \neq x^{S_n}$，则 $x^{A_n} y^{A_n} \supseteq A_n \smallsetminus \{1\}$。

定理 4. 对每个 $0 < \alpha < 1/4$，存在 $N = N(\alpha) > 0$，使得若 $n \geq N$ 且 $W \subseteq A_n$是满足 $|W| \geq e^{-n^{\alpha}}|A_n|$的正规子集，则 $W^2 \supseteq A_n \smallsetminus \{1\}$。

定理 4 在思想上与 [13, 定理 6.4] 相似，但给出了大幅改进的界。在预印本 [12], 中，我们曾声称得到了这一更强的界，但未能对其给出充分的论证。这里我们给出该论证的修正版。

第一位作者部分得到美国国家科学基金会（NSF）资助项目 DMS-2001349 和西蒙斯基金会研究员资助（编号 917214）的支持。第二位作者谨此感谢美国国家科学基金会（NSF）（资助项目 DMS-1840702 和 DMS-2200850）、西蒙斯基金会研究员资助（编号 918093）以及 Joshua Barlaz 数学讲席的支持。

下一个推论关注覆盖数 $\mathrm{cn}(C) = \mathrm{cn}(C, G)$，它是满足 $C^k = G$ 的最小正整数 k，其中给定的共轭类 C 位于有限群 G 中。

定理 5. 设 $C = g^{\mathsf{A}_n}$ 是任意元素 $g \in \mathsf{A}_n$（满足 $g^{\mathsf{A}_n} \neq g^{\mathsf{S}_n}$）的 A_n共轭类。则以下结论成立。

(i) 设 $2 \nmid n \geq 5$，且 g 是一个 n-循环。若 $n \equiv 1$（模 4）且 $n \geq 7$，则 $\mathrm{cn}(C) = 2$；否则 $\mathrm{cn}(C) = 3$。(ii) 设 n 充分大，并令 $\kappa(g)$表示 g 中长度与 3（模 4）同余的不相交循环的数量。若 $2|\kappa(g)$，则 $\mathrm{cn}(C) = 2$；若 $2 \nmid \kappa(g)$，则 $\mathrm{cn}(C) = 3$。

2. Classes of n-cycles

设 n 是一个正整数，$\lambda \vdash n$ 是一个分拆。若对任意 A_n共轭类 C 和 D，只要它们在 S_n 中的循环结构由 λ 给出，就有 $g \in CD$，则称元素 $g \in \mathsf{A}_n$ 被 λ 覆盖。

除记号 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k)$ 外，我们还用记号 $1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$表示这样一个分拆：对于 $1 \leq i \leq n$，有 m_i 个部分等于 i；特别地，n^1 是 n 的单部分‾分拆。若 λ_k 是 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k)$ 的最小（正）部分，我们用 λ 表示 $n - \lambda_k$ 的分拆，其部分为 $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$。

‾引理 2.1. 按照上述记号，若 $\mathsf{A}_{n-\lambda_k}$ 的每个非平凡元素都被 λ 覆盖，则 A_n 中至少有 λ_k 个不动点的每个非平凡元素都被 λ 覆盖。

证明. 不失一般性，我们可以假设 $n, n-1, \dots, n-\lambda_k+1$ 中的每个元素都被g固定。若 C 和 D 是 A_n 中与分拆 λ相关联的共轭类，则 $\mathsf{A}_{n-\lambda_k}$ 中存在共轭类 C' 和 D'，使得对每个 $c' \in C'$，

$$c := c'z \in C \text{ for } z := (n, n-1, \cdots, n-\lambda_k+1)$$

并且对于每个 $d' \in D'$，

$$d := d' \cdot z^{-1} \in D.$$

根据假设，g（视为 A_{n-k} 中的元素）属于 $C'D'$，因此对于某个 $c' \in C$ 和某个 $d' \in D$，有 $g = c'd'$。现在 $g = cd \in CD$。□。

引理 2.2. 假设 $n - r$ 是奇数，且 A_{n-r} 中的非平凡元素 h 被分拆 $(n-r)^1$ 覆盖。那么，将 h 视为 A_n 中固定 n、$n-1$、.....、$n-r+1$ 各点的元素时，它被分拆 n^1 覆盖。特别地，若 $n - r$ 是奇数，且 A_{n-r} 的每个非平凡元素都被分拆 $(n-r)^1$, 覆盖，那么 A_n 中至少有 r 个不动点的每个非平凡元素都被 n^1 覆盖。

证明。设 C' 和 D' 为交错群 A_{n-r} 中与分拆 $(n-r)$ 相关的共轭类。根据假设，$h = c'd'$，其中 $c' \in C'$ 且 $d' \in D'$。我们可以将 $c' \in C'$ 写成如下形式

$$c' = (c_1, \dots, c_{n-r-1}, n-r).$$

对于任意这样的 c'，我们关联一个元素

$$c := (c_1, \dots, c_{n-r-1}, n-r, \dots, n-1, n) \in \mathsf{A}_n$$

其在 S_n 中的共轭类由分拆 n^1 给出。由于 $n - r$ 是奇数，c 在 A_n 中的共轭类仅取决于 c' 在 A_{n-r} 中的共轭类 C'。

同样地，我们可以将 $d' \in D'$ 写成

$$d' = (n-r, d_1, \dots, d_{n-r-1}),$$

并且，对于这样的 d'，我们关联了

$$d := (n, n-1, \dots, n-r, d_1, \dots, d_{n-r-1}).$$

现在注意到，$c'd' = h$ 在 A_{n-r} 中，这意味着 $cd = g$ 在 A_n中。 □

我们用 $\chi = \chi_\lambda$ 表示与分拆 $\lambda \vdash n$相关联的 S_n 的不可约特征。我们称 λ 的杨图为钩形图，并称 χ_λ 为钩特征标，当且仅当 $\lambda_2 \le 1$；等价地说， λ 的杨图中的每个方格都位于第一行或第一列。钩特征标的大小，是指其图形的第一行和第一列中较短者的长度。根据 Murnaghan–Nakayama 规则，如果 χ 是 S_n 的任意不可约特征，且 g 是一个 n-循环，那么当 χ 为钩特征标时，$\chi(g) \in \{\pm 1\}$；否则， $\chi(g) = 0$。

引理 2.3. 设 $g \in S_n$ 是一个至多有一个不动点的元素。设 χ 是 S_n 的一个大小为 k的钩特征标。那么

$$|\chi(g)| \le \sum_{0 \le i < k/2} \binom{\lceil n/2 \rceil - 1}{i}.$$

证明. 由于 g 至多有一个不动点，若 m 是其对应分拆$\mu = (\mu_1 \ge \mu_2 \ge \cdots \ge \mu_m)$的部分数，则 $m \le \lceil n/2 \rceil$，且 $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1} \ge 2$。我们应用 Murnaghan–Nakayama 规则，注意对于每个 $r \ge 1$ 以及每个方格数大于 r 的钩形图，至多有两个长度为 r 的边钩可以从图中移除，一个来自第一行，另一个来自第一列。移除这样的边钩会使第一行或第一列缩短 r。移除 $m-1$ 个长度均为 $\mu_j \ge 2$的边钩后，剩下的仍是一个钩形图。不失一般性，我们可以假设 λ 有 k 行。那么，从第一列移除的边钩数目 i 至多为 $(k-1)/2$，而从前 $m-1$ 个边钩中选出从第一列移除的那些，至多有 $\binom{\lceil n/2 \rceil - 1}{i}$ 种方式（指定这些 i 个边钩各自最低的节点即可）。□

命题 2.4. 对于奇数 $n \ge 5$， A_n 中至多有一个不动点的每个元素都被分拆 n^1 覆盖，但 A_5 中有一个不动点的元素除外。

证明. 令 x 和 y 表示 A_n 中任意两个 n-循环，并令 z 为一个至多有一个不动点的任意元素。由 Frobenius 公式，只需证明

$$\sum_{\chi} \frac{\chi(x)\chi(y)\chi(z)}{\chi(1)} \neq 0, \tag{2.1}$$

其中求和遍及 A_n 的所有不可约特征标 χ。当 $5 \le n \le 11$ 为奇数时，我们使用 GAP [6] 检查 A_n 中所有非平凡共轭类；除 $n = 5$ 且 z 是两个不相交对换之积的情形外，和式 (2.1) 均非零。

现在假设 $n \ge 13$。在 (2.1) 中，我们只需对满足 $\chi(x) \neq 0$ 的特征标求和。任何能扩张为 S_n 的特征标的此类特征标都必须是钩特征标。根据 [9, 定理 2.5.13],，任何不能扩张到 S_n 的此类特征标，都必须是大小为 $(n+1)/2$ 的唯一钩特征标限制到 A_n 后的两个不可约因子 φ_1、φ_2 之一。此外， $|\varphi_i(x)|$ 和 $|\varphi_i(y)|$ 均以上界 $\sqrt{n}+1$ 为界。若 z 是一个 n-循环，则 $|\varphi_i(z)| \le \sqrt{n}+1$。否则，由引理 2.3 和 [9,定理 2.5.13] 得到上界

$$|\varphi_i(z)| \le \frac{1}{2} \sum_{0 \le i < n/4} \binom{(n-1)/2}{i}.$$

我们将和式 (2.1) 分解为平凡特征标、大小为 ≥ 2 的钩特征标，以及 φ_i。当 χ 遍历大小为 ≥ 2 的钩特征标时， $|\chi(x)\chi(y)\chi(z)/\chi(1)|$ 的绝对值之和有如下上界

$$\Sigma =: \sum_{k=2}^{(n-1)/2} \sum_{0 \le i < k/2} \frac{\binom{(n-1)/2}{i}}{\binom{n-1}{k-1}}.$$

注意，对于每个 k，内和 Σ_k 中的各项随 i 单调递增。此外，当我们从 k 变为 $k+2$ 时， Σ_k 的首项（其中 $i = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$）会减小。对于 $k = 6$，该首项为 $15/(n-2)(n-4)(n-5)$；对于 $k = 7$，则为 $15/(n-2)(n-4)(n-6)$。

因此，双重求和 Σ 可表示为

$$\frac{1}{n-1} + \Big(\frac{2}{(n-1)(n-2)} + \frac{1}{n-2}\Big) + \frac{3}{(n-2)(n-3)} + \frac{3}{(n-2)(n-4)}$$

（计入 Σ_2、 Σ_3 以及 Σ_4 和 Σ_5 的首项）再加上 Σ_4 的剩余项、 Σ_5 的两个剩余项，以及当 $k \geq 6$ 时 Σ_k 的所有项的和，总计至多有 $(n+1)^2/16 - 6$ 项，每一项的上界为

$$\frac{15}{(n-2)(n-4)(n-6)}.$$

总之，我们得到一个上界

$$\frac{1}{n-1} + \Big(\frac{2}{(n-1)(n-2)} + \frac{1}{n-2}\Big) + \frac{3}{(n-2)(n-3)} + \frac{3}{(n-2)(n-4)} + \frac{15((n+1)^2/16 - 6)}{(n-2)(n-4)(n-6)} < \frac{1}{2}$$

$n \geq 13$ 的上界。

表达式

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{n}+1}{2}\right)^3}{\binom{n-1}{(n-1)/2}} = \Big(\frac{\sqrt{n}+1}{2}\Big)^3 \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{i}{4i-2}$$

对于 $n = 13$ ， 小于 $1/4$ ， 且随着 n 取遍奇整数 ≥ 13而单调递减。同样,

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{n}+1}{2}\right)^2 \sum_{0 \leq i < (n-1)/4} \binom{(n-1)/2}{i}}{\binom{n-1}{(n-1)/2}} \leq \frac{\left(\frac{\sqrt{n}+1}{2}\right)^2}{2} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{i}{2i-1}$$

对于 $n = 13$ ， 其小于 $1/4$ ， 并且随着 n 的增大而减小。根据三角不等式，和式 (2.1) 不可能为零。□

现在我们证明定理 1。

证明。设 g 是 A_n 中恰有 k 个不动点的任意非平凡元素。那么事实上我们有$k \leq n-3$。如果 $k \leq n-6$，我们令 $r := 2\lfloor k/2 \rfloor$。因此， $n-r$ 是大于 5 的奇数，所以可以应用命题 2.4，并推得将其视为 A_{n-r} 中的元素时， g 被 $(n-r)^1$ 覆盖。根据引理 2.2， g 被 n^1 覆盖。

这样还剩下三种情况。如果 $k = n-4$ 或 $k = n-5$，则令 $r := n-7$。我们在命题 2.4 的证明中观察到， A_7 的每个非平凡元素都被 7^1 覆盖。如果 $k = n-3$，则令 $r := n-5$。同样，我们在命题 2.4 的证明中观察到， A_5 中的 3-循环被 5^1 覆盖。在所有情况下，我们都可以应用引理 2.2 完成证明。□

3. Explicit products

以下结果是对 [11, 命题 6.1] 的细化。

定理 3.1. 设 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ 是一个含有 k 个部分的分拆。那么 λ 覆盖 A_n 中至少具有 $8k+9$ 个不动点的每个元素。

该证明背后的基本思路如下。假设我们试图用整数长度的小线段（包括许多长度为 1 的线段）填充长度分别为 λ_1、…、λ_k 的大线段。我们可以使用贪心算法来完成这一操作，即优先放入能够容纳的最大线段。利用这一方法和定理 1，我们可以证明，由许多短轨道和足够多的不动点组成的目标类可以被 λ 覆盖。（更准确地说，由于只有偶置换会被分拆 λ_i^1 覆盖，因此我们必须注意，每次成对填充长度为偶数的线段。）

给定一个具有足够多不动点的目标元素 $g \in A_n$，我们利用 g 的形状构造一个合适的乘积 $\gamma\delta$，其中有 $\gamma \in C$ 和 $\delta \in D$。然后，我们使用引理 3.3（见下文），通过一个对换将 δ 共轭，从而略微改变所得乘积 $\gamma\delta'$ 的形状；具体而言，将 $\gamma\delta$ 的一个 m-循环和两个不动点替换为一个 $(m+2)$-循环。通过按此形式依次进行修改，我们可以得到 g 的形状，从而证明每个具有足够多不动点的元素都包含在 λ 中。

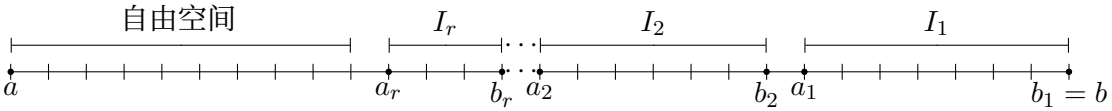
为实施这一计划，我们引入一些术语和记号。对于整数 $a \le b$，区间 $[a,b]$ 表示集合 $\{a, a+1, \dots, b\}$；其长度为 $\mathrm{len}[a,b] = 1+b-a$。一个（不一定是完整的）打包

$$I_1 = [a_1, b_1], \dots, I_r = [a_r, b_r]$$

$[a,b]$ 是一个子区间序列，使得

$$b_r = a_{r-1} - 1, b_{r-1} = a_{r-2} - 1, \dots, b_2 = a_1 - 1, b_1 = b.$$

特别地，并集 $I_1 \cup \cdots \cup I_r$ 是区间 $[a_r, b]$，而该集合的补集（我们称之为自由空间）是区间 $[a, a_r - 1]$（除非 $a = a_r$，在这种情况下不存在自由空间，且打包是满的）。



区间 $[a,b]$ 的有效序列是一个含有 $1+b-a$ 个整数的序列，其首项为 b，且区间中的每个整数都恰好出现一次。如果 S：$s_1, s_2, \dots, s_m$ 是任意一个正整数序列，我们用 (S) 表示置换 $(s_1, s_2, \dots, s_m)$。我们称 S 和 S 是 $[a,b]$ 的两个有效序列（即 S 和 S' 各自都恰好包含 $[a,b]$ 中的整数），若 $(S)^{-}$ 和 (S) 在 $\mathrm{Sym}([a,b])$ 中被一个奇置换共轭，则称它们互为相反序列。给定 $[a,b]$ 的一个打包 $I_1, \dots, I_r$，以及每个 I_i 的一个有效序列 S_i（即 S_i 恰好包含 I_i 中的整数），我们将（针对这些有效序列的）打包循环定义为一个 $\mathrm{len}[a,b]$-循环：按顺序并置 $S_1, \dots, S_r$，接着按降序附上自由空间中的项 $a_r - 1, a_r - 2, \dots, a$，再作用 $()$。这一构造的动机来自以下事实。

引理 3.2. 假设 $I_1, \dots, I_r$ 是 $[a,b]$ 的一个打包，其对应的有效序列分别为 $S_1, \dots, S_r$，且 δ 是打包循环。对于 $1 \le i \le r$，令

$$\beta_i := (a_i, a_i + 1, \dots, b_i)(S_i)$$

那么，β_i 是互不相交的置换，并且

$$(a, a+1, \dots, b)\delta = \prod_{i=1}^{r} \beta_i.$$

证明。每个 β_i 都是 $[a_i, b_i]$中元素的一个置换，这些元素彼此不相交。为证明等式，我们比较两边对 $x \in [a,b]$的作用。如果 x 是序列 S_i 中的第 j^{th} 项 $s_{i,\,j}$，但不是序列的最后一项，那么两边都将 $x \mapsto s_{i,\,j+1} + 1$映射到。如果 x 是 S_i 中的最后一项，那么两边都将 $x \mapsto a_i$ 映射到（不过对于左边的 $i = r$，必须分别检查以下情况

$a_r > a$ 和 $a_r = a_\circ$ ）如果 $a \le x \le a_r$，那么两边都将 x 映射到其自身（不过对于左边，我们必须分别检查 $x > a$ 和 $x = a$ 这两种情况。）□

对于任意给定的置换 γ、δ，下面的引理允许我们对 δ 进行修改，从而使 $\gamma\delta$ 能够具有更长的循环。

引理 3.3。设 $\gamma, \delta \in \mathrm{Sym}(X)$，其中 X 是某个有限集合。假设 x, y 是 X 中的不同元素，并满足以下性质。
(a) δ 既不固定 x也不固定 y，(b) $\gamma(x)$ 属于 $\mathcal{O}_{\gamma\delta}(x)$，
即 x的 $\gamma\delta$-轨道，并且 (c) y 和 $\gamma(y)$ 均被 $\gamma\delta$固定。

那么，存在一个 $\delta' \in \mathrm{Sym}(X)$，它与 δ 在一个对换下共轭，使得 $\gamma\delta'$ 与 $\gamma\delta$ 重合，除去 $\mathcal{O}_{\gamma\delta}(x) \cup \{y, \gamma(y)\}$ 之外；后者在 $\gamma\delta'$ 作用下构成一个大小为 $2 + |\mathcal{O}_{\gamma\delta}(x)|$ 的单一轨道。

证明。由 (a) 和 (b)，$\mathcal{O}_{\gamma\delta}(x)$ 不可能只由 x 构成，因此该轨道中没有元素被 $\gamma\delta$ 固定。由此以及 (c) 可知，y 和 $\gamma(y)$ 都不可能属于 $\mathcal{O}_{\gamma\delta}(x)$。如果 γ 固定了 y，则 (c) 将推出 $\gamma\delta(y) = y = \gamma(y)$，这与 (a) 矛盾。我们已经证明了，

$$|\mathcal{O}_{\gamma\delta}(x) \cup \{y, \gamma(y)\}| = 2 + |\mathcal{O}_{\gamma\delta}(x)|. \tag{3.1}$$

我们定义 $\delta' := \epsilon\delta\epsilon$，其中 $\epsilon := (x, y)$，因此 δ' 可由一个对换与 δ 共轭。如果

$$z \notin \{x, y, \delta^{-1}(x), \delta^{-1}(y)\},$$

then

$$\gamma\delta'(z) = \gamma\epsilon\delta\epsilon(z) = \gamma\epsilon\delta(z) = \gamma\delta(z).$$

由 (b) 得，

$$\delta^{-1}(x) = (\gamma\delta)^{-1}(\gamma(x)) \in \mathcal{O}_{\gamma\delta}(x),$$

并由 (c) 得，

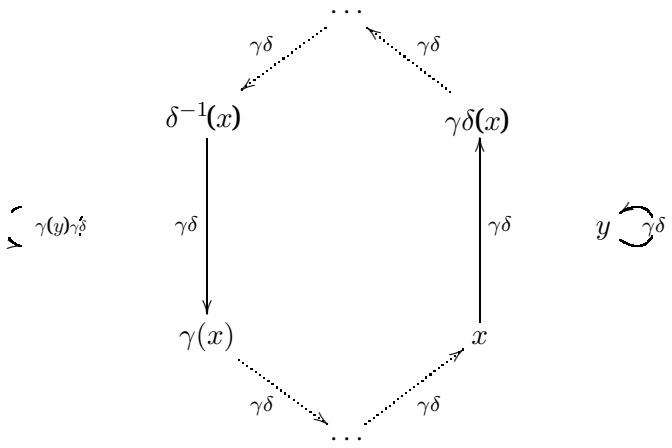
$$\delta^{-1}(y) = (\gamma\delta)^{-1}(\gamma(y)) = \gamma(y). \tag{3.2}$$

因此，在 $\mathcal{O}_{\gamma\delta}(x) \cup \{y, \gamma(y)\}$之外，将 $\gamma\delta$ 替换为 $\gamma\delta'$ 没有影响。

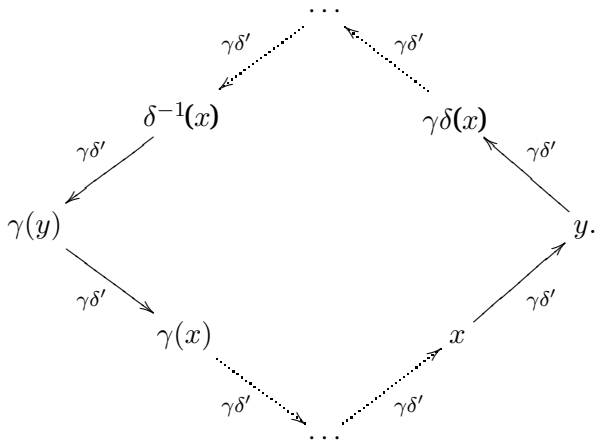
另一方面，注意到根据 (a)，$\delta(y) \neq y$；而 $\delta(y) \neq x$（否则，根据 (b)，我们将有$\gamma\delta(y) = \gamma(x) \in \mathcal{O}_{\gamma\delta}(x)$，从而 $y \in \mathcal{O}_{\gamma\delta}(x)$，这与 (3.1) 矛盾）。接下来，根据 (a)，$\delta(x) \neq x$；而$\delta(x) \neq y$（否则，我们将有 $\gamma(y) = \gamma\delta(x) \in \mathcal{O}_{\gamma\delta}(x)$，这同样与 (3.1) 矛盾）。由此可得，$\delta^{-1}(x) \neq x, y$。我们还可由 (3.1) 注意到，$\gamma(y) \neq x, y$。此外，根据 (3.2)，$\delta\gamma(y) = y$。现在我们可以验证

$$\begin{aligned}
\gamma\delta'(x) &= \gamma\epsilon\delta\epsilon(x) = \gamma\epsilon\delta(y) = \gamma\delta(y) = y, \\
\gamma\delta'(y) &= \gamma\epsilon\delta\epsilon(y) = \gamma\epsilon\delta(x) = \gamma\delta(x), \\
\gamma\delta'\delta^{-1}(x) &= \gamma\epsilon\delta\epsilon\delta^{-1}(x) = \gamma\epsilon\delta\delta^{-1}(x) = \gamma\epsilon(x) = \gamma(y), \\
\gamma\delta'\gamma(y) &= \gamma\epsilon\delta\epsilon\gamma(y) = \gamma\epsilon\delta\gamma(y) = \gamma\epsilon(y) = \gamma(x).
\end{aligned}$$

因此，在 $\mathcal{O}_{\gamma\delta}(x) \cup \{y, \gamma(y)\}$ 上，我们替换



by



□

如果对于 γ 和 δ， x 满足性质 3.3(b) 以及性质 3.3(a) 的第一部分（针对 x），则称 x 对 (γ, δ) 是特殊的。如果 x 对 (γ, δ) 是特殊的，那么对于利用引理 3.3 构造的 δ'，它也对 (γ, δ') 是特殊的。因此，如果我们有 N 个两两不相交的数对 $\{y_i, \gamma(y_i)\}$ 满足 ....., 就可以将这一过程迭代 N 次。

$$\delta(y_i) \neq y_i,\ \gamma\delta(y_i) = y_i,\ \text{and}\ \gamma\delta\gamma(y_i) = \gamma(y_i)$$

在 $X \setminus \mathcal{O}_{\gamma\delta}(x)$ 中。

现在我们证明定理 3.1。

证明。假设 $g \in \mathsf{A}_n$ 有 $\mathrm{fix}(g)$ 个 $\geq 8k+9$ 不动点。那么 $g^{\mathsf{A}_n} = g^{\mathsf{S}_n}$。由于 λ对应的唯一 A_n-共轭类已由 [11, 命题 6.1], 涵盖，因此只需证明在 C^2 和 CD 中分别存在 g 的 S_n-共轭元，其中 C 和 D 是与 λ对应的两个不同的 A_n-共轭类。

对于 $j = 1, 2, \ldots, k$，令 $J_j := [1, \lambda_j]$。我们选取 J_i 在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中的嵌入 $\iota_1, \ldots, \iota_k$，使其像两两不相交，并将杨子群

$$\mathsf{S}_\lambda = \mathrm{Sym}(J_1) \times \cdots \times \mathrm{Sym}(J_k)$$

通过 ι_j 视为 S_n 的一个子群。令

$$\gamma \in \mathsf{S}_\lambda < \mathsf{S}_n \tag{3.3}$$

表示其 j^{th} 因子为 λ_j 循环 $(1, 2, \dots, \lambda_j) \in \mathsf{Sym}(J_j)$ 的元素，其中 $1 \le j \le k$。不失一般性，我们可以假设 $\gamma \in C$。

接下来我们考虑这个分拆

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$$

与 g（的循环类型）相关联。我们可以将其拆分为若干子分拆，每个子分拆属于以下类型之一：

(1) 1 个 1 阶部分 (2) 4 个 1 阶部分和 1 个 3 阶部分 (3) 3 个 3 阶部分 (4) 1 个大小为 $m \ge 5$ 的奇数部分 (5) 2 个 2 阶部分 (6) 4 个 2 阶部分 (7) 1 个 2 阶部分和 1 个大小为 $m \ge 4$ 的偶数部分 (8) 每个偶数大小 $m_1 \ge m_2 \ge 4$ 各有 1 个部分（如果 $m_1 = m_2$，则有 2 个大小为 m_1 的部分）。

（这里，若 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s)$，则称 ν 的部分大小为 $\nu_1, \dots, \nu_s$。）

我们至多需要两个类型为 (2) 的子分拆，或一个类型为 (5) 的子分拆。特别地，由于大小为 1 的部分只出现在类型为 (1) 和 (2) 的子分拆中，类型为 (1) 的部分数量必须至少为 $\mathsf{fix}(g) - 8 \ge 8k + 1$。

我们定义一个作用于子分拆的函数 Φ，它分别将类型为 (1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7) 和 (8) 的分拆映射为空分拆 $\varnothing$、$1_4 3_1$、3_3、5_1、2_2、2_4、$2_1 4_1$，以及 4^2。除类型 (1) 外，Φ 的作用是将每个大小为 6 或更大的部分替换为集合 $\{4, 5\}$ 中奇偶性相同的整数；其他部分则保持不变。特别地，它保持类型为 (2)、(3)、(5) 和 (6) 的分拆不变。若将一个 n 的分拆拆分为若干子分拆，对每个子分拆应用 Φ，再重新组合，并按需添加大小为 1 的部分以得到一个新的 n 分拆，那么新分拆就是将旧分拆中的每个奇数部分 $m \ge 7$ 替换为 $1^{m-5}5^1$，并将每个偶数部分 $m \ge 6$ 替换为 $1^{m-4}4^1$ 后得到的。函数 Φ 将使我们能够通过迭代引理 3.3 中的构造，修改分别来自 C^2 和 CD 的置换乘积。

接下来，我们使用贪心算法为每个 J_j 进行装填，即优先装填最大的子区间；并将每个 J_j 中的每个子区间分配给 μ 中一个非类型 (1) 的子分拆，使每个子分拆恰好关联一个 J_j 和一个子区间。此外，与类型 (2) 的子分拆关联的子区间长度为 7；类型 (3) 的长度为 9；类型 (4) 的长度为 5；类型 (5) 的长度为 4；类型 (6) 的长度为 8；类型 (7) 的长度为 6；类型 (8) 的长度为 8。请注意，子区间的长度绝不会超过子分拆的大小。这样的分配总是可行的，因为装填一个区间后留下的自由空间（如果存在）总是一个左端点相同的区间。只要自由区间的长度为 ≥ 9，就有空间装填另一个与某个子分拆关联的子区间。因此，只要剩余的整数总数至少为 $8k + 1$，就有空间再装填一个与某个子分拆关联的子区间。这一点可以保证，因为至少有 $8k + 1$ 个类型 (1) 的子分拆，且它们不会被分配子区间。装填完成后，令 X_j 表示自由初始子区间，即它是 J_j 中所有属于其装填的子区间 I_i 之并集的补集。

¯接下来，对于每个子区间 I_i，我们选取一对互为相反的有效序列，S_i 和 S_i；但对于类型 (5)，我们只选取一个序列 S_i。这些序列具有如下性质：$(1, 2, \dots, \mathsf{len}(S_i))(S_i)$ 和 $(1, 2, \dots, \mathsf{len}(S_i))(S_i')$（类型 (5) 除外）的形状，是通过将相应的子分拆应用

Φ 于相应的子分拆得到的。对于长度 7 和 9 的情形，这可以做到是定理 1 的推论。对于长度 5 的情形，则是因为 5-循环被 5^1覆盖。对于偶数长度的情形，很容易找到可行的序列：类型 (5) 为 (4, 1, 2, 3)；类型 (6) 为 (8, 1, 2, 7, 4, 5, 6, 3) 和 (8, 1, 3, 5, 6, 2, 7, 4)；类型 (7) 为 (6, 1, 2, 4, 5, 3) 和 (6, 1, 3, 4, 5, 2)；类型 (8) 为 (8, 1, 2, 4, 7, 5, 3, 6) 和 (8, 1, 2, 5, 7, 3, 6, 4)。注意，(1, 2, . . . , len(S_i))(S_i) 中每个长度为 4 或 5 的轨道至少有一个特殊元素；对于类型 (4)，这一点显而易见，而对于类型 (7) 和 (8)，也很容易验证。

¯对于每个区间 J_j，考虑它的打包 I_1、.....、I_r。对每个 I_i，选择 S_i或 S_i（如果后者存在），并将这些序列的打包循环定义为 δ_j。例如，如果 $\lambda_j = 15$、_$r = 2$、 I_1 的类型为 (6)， I_2 的类型为 (5)，并且我们选择 S_1 而不是 S_1，那么就得到以下序列：

$$\delta_j = (\underbrace{15, 8, 10, 12, 13, 9, 14, 11}_{\bar{S}_1}, \underbrace{7, 4, 5, 6}_{S_2}, \underbrace{3, 2, 1}_{X_j}).$$

我们将 $\delta \in$A$_n$ 定义为

$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_k) \in \mathsf{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathsf{S}_{\lambda_k} \tag{3.4}$$

将其视为与 λ 相关联的 S$_n$ 中的一个元素。只要 μ 至少有一个子分拆不¯属于类型 (1) 或类型 (5)，就存在若干对选择 δ 和 δ，它们在 A$_n$ 中互不共轭。特别地， $\gamma\delta$和 $\gamma\bar{\delta}$ 中一个属于 C^2，另一个属于 CD。根据引理 3.2，乘积 $\gamma\delta$ 和 $\gamma\delta$ 的¯形状相同；这个形状由 g 的形状得到：将每个奇数部分 $\mu_i \geq 7$ 替换为 $1^{\mu_i-5}5^1$，并将每个偶数部分 $\mu_i \geq 6$ 替换为形状 $1^{\mu_i-4}4^1$。

对于每个包含自由空间子区间的区间 J_j，我们将 Y_j 定义为 $[1, F_j]$ 中严格小于 F_j的偶元素集合，因此 Y_j 是 0 与 $\lfloor (F_j - 1)/2 \rfloor$ 中较大的一个。如果 J_j 不包含自由空间，则 Y_j 为空集。我们将 Y 定义为对 $1 \leq j \leq r$ 中的所有元素取 $\iota_j(Y_j)$ 后所得集合的并集。令 X 为对所有满足 J_j 包含自由空间的 j 取 $\iota([0, F_j])$ 后所得集合的并集。因此， X 是所有自由空间的集合，并且

$$\frac{|X|}{2} = \sum_{j=1}^{k} \frac{F_j}{2} \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{2|Y_j| + 2}{2} = |Y| + k. \tag{3.5}$$

对于由 γ的选择确定的每个 $y \in Y$, $\gamma(y) \neq y$。接下来，当 y遍历 Y时，成对的集合 $\{y, \gamma(y)\}$ 彼此不相交，且与所有长度为 ≥ 2的 $\gamma\delta$-轨道都不相交。此外， $\delta(y) \neq y$ 且 $\gamma\delta$ 固定y 和 $\gamma(y)$，对所有 $y \in Y$均如此。由引理 3.3，我们可以重复至多 $|Y|$ 次修改过程：取任意包含特殊点的 $\gamma\delta$-轨道，将其长度增加 2，同时使 $\gamma\delta$的不动点数减少 2。对于_π的每个部分 π_i，我们需要重复 max(0, $\lfloor \pi_i/2 \rfloor - 2$) 次，因此重复次数不取决于我们选择 δ 还是 δ，而由此迭代修改过程得到的_δ 和 δ 的共轭元将由 S$_n$中的一个奇置换共轭。因此，在此过程的每一步，我们都会得到一对元素，其中一个属于 C^2，另一个属于 CD。

现在我们来验证 Y 足够大，可以逆转从 g 的形状到 $\gamma\delta$ 的形状这一过程，也就是说，

$$|Y| \geq \sum_i \max(0, \lfloor \mu_i/2 \rfloor - 2).$$

g 的自由空间量是

$$|X| = |\{i \mid \mu_i = 1\}| + \sum_i \max(2\lfloor \mu_i/2 \rfloor - 4, 0),$$

因此由 (3.5),

$$\begin{aligned}|Y| &\geq \frac{|\{i \mid \mu_i = 1\}| + \sum_i \max(2\lfloor \mu_i/2 \rfloor - 4, 0)}{2} - k \\ &> 3k + \frac{\sum_i \max(2\lfloor \mu_i/2 \rfloor - 4, 0)}{2} \\ &> \sum_i \max(0, \lfloor \mu_i/2 \rfloor - 2).\end{aligned}$$

我们能够从 g 的形状回到 $\gamma\delta$ 的形状，其中 γ 由 (3.3) 给出， δ 由 (3.4) 给出。这表明，在迭代修改过程结束时，我们得到 C^2 中的一个元素和 CD 中的另一个元素，它们都与 g 在 S_n 下共轭。

只要 μ 的子分拆中至少有一个不属于类型 (1) 或 (5)，证明即告完成。由于我们至多使用一个类型为 (5) 的子分拆，因此仍需考虑的唯一情形是： g 属于类型 1^n 的情形（根据假设，该情形已被排除），以及 g 属于类型 $1^{n-4}2^2$ 的情形。如果$n > 9$，则有 $\lambda_1 \geq 7$，因此最后一种情形可由引理 2.1 和定理 1 得出。□

4. General classes

本节考虑乘积 $x^{\mathsf{A}_n} y^{\mathsf{A}_n}$，其中 x、$y \in \mathsf{A}_n$ 是这样的元素：它们在 A_n 中的共轭类严格包含于它们在 S_n 中的共轭类。

引理 4.1。对于所有 $\epsilon > 0$，存在 $N = N_1(\epsilon) > 0$，使得若 $n \geq N$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n$，其中 a_i 是两两不同的正整数，则 $a_1 \cdots a_m < e^{\epsilon n}$。

证明。根据算术-几何平均不等式，

$$a_1 \cdots a_m \leq (n/m)^m = \left((n/m)^{m/n}\right)^n.$$

由于 $n = \sum_{i=1}^m a_i$ 个 m 个互不相同的正整数之和至少为 $m(m+1)/2$，因此我们有 $m < \sqrt{2n}$，所以 $n/m > \sqrt{n/2}$。由于

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0,$$

对于足够大的 n，我们有

$$\frac{\log n/m}{n/m} < \epsilon,$$

因此

$$\left((n/m)^{m/n}\right)^n < \left(e^{\epsilon}\right)^n = e^{\epsilon n}.$$

□

命题 4.2. 对所有 $\epsilon > 0$，存在 $N = N_2(\epsilon) > 0$，使得如果 $n \geq N$ 且 χ 是交错群 A_n 的任意一个不可约特征，且它不是对称群 S_n 的任何不可约特征的限制，那么 $\chi(1) \geq e^{(\log 2 - \epsilon)n}$。

证明。设 λ 是 n 的分拆，其中 χ 是 χ_λ 从 S_n 限制到 A_n 后的一个不可约成分。由 [9, 定理 2.5， λ 的杨图必须等于其转置。设 m 是满足 $\lambda_m \geq m$ 的最大整数，并令 $a_i := \lambda_i$，其中 $1 \leq i \leq m$，于是 $(a_1, \ldots, a_m | a_1, \ldots, a_m)$ 是 λ 的弗罗贝尼乌斯符号。由 [10, 定理 2，当 N 充分大时，我们有

$$1 - \epsilon < \frac{\log(n-1)! - 2\sum_{i=1}^m \log a_i!}{\log \chi_\lambda(1)} < 1 + \epsilon.$$

由于 $a_1! \cdots a_m!$ 整除 $(a_1 + \cdots + a_m)!$，而后者又整除 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor !$，因此我们有

$$\frac{\log \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}}{\log \chi_\lambda(1)} < 1 + \epsilon,$$

so

$$\chi(1) = \frac{\chi_\lambda(1)}{2} > \frac{\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}^{1-\epsilon}}{2} > \frac{(2^n)^{1-\epsilon}}{4n} > e^{(\log 2 - \epsilon)n}$$

当 n 足够大时。 1 □

命题 4.3. 对于所有 $M \geq 1$，存在 $N = N_3(M)$，使得如果 $n \geq N$ 且 $x \in \mathsf{A}_n$，将其视为 S_n 的一个元素，其长度为 $\leq M$ 的循环至多有 M 个，那么对于 A_n 的所有不可约特征标 χ，

$$|\chi(x)| \leq \chi(1)^{1/M}.$$

证明。给定一个元素 $x \in \mathsf{S}_n$，根据 [10],，我们定义与 x 相关联的非负实数序列 $e_1, \ldots, e_n$，使得对于每个 $1 \leq k \leq n$， $n^{e_1 + \cdots + e_k}$ 等于 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中其 x-轨道长度为 $\leq k$的元素个数，假设至少存在一个。（如果每个 x-轨道长度均为 $> k$，则我们令 $e_1 = \cdots = e_k = 0$。）我们定义 E（或者当我们想明确指出 x 的选择时，定义为 $E(x)$）为 $e_1 + e_2/2 + \cdots + e_n/n$。注意 $e_1 + \cdots + e_n = 1$。如果长度为 $\leq M$的循环至多有 M个，那么 $e_1 + \cdots + e_M \leq \log_n M^2$。因此，

$$E = \sum_{i=1}^{M} e_i/i + \sum_{i=M+1}^{N} e_i/i \leq \log_n M^2 + \frac{1}{M+1}. \tag{4.1}$$

然后 [10, 定理 em 1.1] 断言，对于所有 $\epsilon > 0$，存在 $N = N_4(\epsilon)$，使得 $n > N$ 蕴含

$$|\chi(x)| \leq \chi(1)^{E+\epsilon}$$

对于 S_n 的所有不可约特征标 χ。固定 $\epsilon < 1/M - 1/(M+1)$，如果 N 相对于 M 和 $n \geq N$ 足够大，那么由 (4.1) 可得 $E < 1/M - \epsilon$。对于所有能够扩张为 S_n 的特征标的 A_n 的不可约特征标，该命题均成立。

因此，我们可以假设 $\lambda \vdash n$ 的杨图等于其转置，并且 χ 是将 χ_λ 从 S_n 限制到 A_n 后得到的两个不可约成分之一。根据 [9, 定理 2.5。13],对于每个 x，要么 $\chi(x) = \chi_\lambda(x)/2$ 或

$$|\chi(x)| \leq \frac{1 + \prod_{i=1}^{m} \sqrt{a_i}}{2},$$

其中整数 a_i 互不相同且均为奇数，其和为 n。在第一种情况下，该命题由 [10, 定理 1.1] 得出。在第二种情况下，该命题由引理 4.1 和命题 4.2 得出。□

定理 2 现在是一个直接推论。

证明。若 $x \in \mathsf{A}_n$ 在 S_n 中的共轭类严格包含其在 S_n 中的共轭类，则与 x 作为 S_n 中元素相对应的分拆由互不相同的奇数部件组成。取 $M = 1/\epsilon$，可知 x 至多有 M 个长度为 $\leq M$ 的循环，因此，由命题 4.3 应用于 x 可得结论。□

现在我们可以证明定理 3。

证明。根据定理 2，如果 n 足够大，则每个 $x \in \mathsf{A}_n$ 中其对应分拆 μ 具有互不相同的奇数部件的元素都满足

$$|\chi(x)| \leq \chi(1)^{1/18}$$

对于 A_n 的所有不可约特征标 χ。当然，对于任意元素 $y \in \mathsf{A}_n$，只要其对应的分拆为 μ，同样的界也成立。根据 [10, 定理 1.1], ，如果 n 足够大，且 $z \in \mathsf{A}_m$ 至多有 $n^{3/5}$ 个不动点，我们便有

$$|\chi(z)| \leq \chi(1)^{5/6}$$

对所有不可约 χ。因此，

$$\Big| \sum_{\chi} \frac{\chi(x)\chi(y)\chi(z)}{\chi(1)} \Big| \geq 1 - \sum_{\chi \neq 1_{\mathsf{A}_m}} \frac{|\chi(x)\chi(y)\chi(z)|}{\chi(1)} \geq 1 - \sum_{\chi \neq 1_{\mathsf{A}_n}} \chi(1)^{-1/18}.$$

根据 [14, 推论 2.7], ，当 n充分大时，右侧为正。因此，A_n 中不动点至多为 $n^{3/5}$ 的每个元素，都被 n 的每个具有互不相同的奇数部件的分拆 μ 所覆盖。

另一方面， n 的一个具有互不相同的奇数部件的分拆至多有 $\sqrt{n}$ 个这样的部分；特别地，对于 λ也成立。因此，若 n 充分大，则对于 λ 以及每个不动点至少为 $n^{3/5}$ 的元素，定理 3.1 的假设均成立。定理得证。□

接下来我们证明定理 4。

证明。若 W 含有某个元素，使得其 A_n-共轭类是其 S_n-共轭类的真子集，则根据定理 3，有 $W^2 \supseteq \mathsf{A}_n \smallsetminus \{1\}$。因此，我们可以假设它是若干 S_n-共轭类的并集。

固定 $\epsilon \in (0, 1/4 - \alpha)$ 和 $\beta \in (\alpha, 1/4 - \epsilon)$。根据 [10, 推论 6，5], 存在 N，使得对于所有 $n > N$，满足 $E(x) \geq 1/4 - \epsilon$的元素 $x \in \mathsf{S}_n$的数量小于 $e^{-n^\beta} n!$，我们可以假设该数量小于 $e^{-n^\alpha}|\mathsf{A}_n|$。因此，我们可以假设 W 包含一个形如 x^{S_n}的子集，其中 $E(x) < 1/4 - \epsilon$。根据 [10, 推论 1，11], 这意味着 W^2 包含 A_n。□

我们以定理 5 的证明作结。

证明。 $n = 5$ 中 (i) 的情形可以利用 [6]验证。对于 $n \geq 7$ 的 (i) 以及 (ii)，定理 1 和定理 3 分别表明 $C^2 \supseteq \mathsf{A}_n \smallsetminus \{1\}$。给定任意 $x \in \mathsf{A}_n$，我们可以找到 $y \in C$，使得 $y \neq x$。因此， $xy^{-1} \in C^2$，从而 $x = (xy^{-1})y \in C^3$，这表明 $C^3 = \mathsf{A}_n$，因而 $\mathsf{cn}(C) \leq 3$。显然，$\mathsf{cn}(C) > 1$。因此我们证明了：$\mathsf{cn}(C) = 2$ 当且仅当 $1 \in C^2$，即 g 是 A_n 中的实元素。根据假设， $g^{\mathsf{A}_n} \neq g^{\mathsf{S}_n}$，所以 g 是由不同奇数长度的循环组成的不相交乘积。要完成证明，只需注意：给定任意 m-循环 $h \in \mathsf{A}_m$ （因此 $2 \nmid m$），S_m 中将 h 共轭为 h^{-1} 的任意置换，在 $m \equiv 1$ （模 4）时为偶置换，在 $m \equiv 3$（模 4）时为奇置换。□

References

[1] E. Bertram, 《偶置换作为两个共轭循环的乘积》。 *J. Comb. Th. Ser. A* **12** （1972），368–380。[2] P. Biane, 《对称群的表示与自由概率》。 *Adv. Math.* **138** （1998），第1期，126–181。[3] J. L. Brenner, 《有限非阿贝尔单群的覆盖定理。IX. 具有两个非平凡轨道的类的平方如何覆盖》。 *S_n A_n Ars Combinatorica* **4** （1977），151–176。[4] J. L. Brenner 和 J. Riddell, 《有限非阿贝尔单群的覆盖定理。VII. 交错群中的渐近性质》， *Ars Combinatorica* **1** （1976），77–108。[5] S. Fomin 和 N. Lulov, 《关于边钩杨表的数量》。 *J. Math. Sci. (New York)* **87** 1997 6, 4118 4123

（），第 – 期。[6] GAP 小组, 《GAP——群、算法与编程》。4.4版，2004年，http://www.gap-system.org。[7] C. Hsu, 《交错群的交换子》。 *Sci. Sinica* **14** （1965），339–342。[8] D. Husemoller, 《黎曼曲面的分歧覆盖》。 *Duke Math. J.* **29** （1962），167–174。

[9] G. James 和 A. Kerber, 《对称群的表示论》。P. M. Cohn 撰写前言。Gilbert de B. Robinson 撰写导言。《数学及其应用百科全书》第16卷。Addison-Wesley Publishing Co., 马萨诸塞州雷丁, 1981年。[10] M. Larsen 和 A. Shalev, 《对称群的特征标：精确界与应用》。

Invent. Math. ( ), **174** 2008 3, 645 687
第 期, 第 – 页。[11] M. Larsen 和 A. Shalev, 《词映射与华林型问题》。 *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009年 2, 第437–466页), 第 期, 第 – 页。[12] M. Larsen、A. Shalev 和 Pham Huu Tiep, 《正规子集的乘积与错排》, arXiv: 2003.12882。[13] M. Larsen、A. Shalev 和 Pham Huu Tiep, 《正规子集的乘积》, *Trans. Amer. Math. Soc.* (即将出版)。[14] M. W. Liebeck 和 A. Shalev, 《福克斯群、黎曼曲面的覆盖、子群增长、随机商与随机游走》。 *J. Algebra* **276** (2004年), 第2期, 第552–601页。[15] T. W. M¨uller 和 J-C. Schlage-Puchta, 《对称群的特征标理论、福克斯群的子群增长与随机游走》。 *Adv. Math.* **213** (2007年), 第2期, 第919–982页。[16] A. Rattan 和 P. ´Sniady, 《平衡杨图对应的对称群特征标上界与广义弗罗贝尼乌斯公式》。 *Adv. Math.* **218** (2008年), 第673–695页。[17] Y. Roichman, 《对称群的特征标上界》。 *Invent. Math.* **125** (1996年), 第451–485页。*Email address*: mjlarsen@indiana.edu

Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington, IN 47405, U.S.A.

Email address: pht19@math.rutgers.edu

Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854-8019, U.S.A.