arXiv:2305.04815v1 [math.PR] 8 May 2023

临界有向图中的直径与长路径

Arthur Blanc-Renaudie*

2023年5月9日

摘要

我们研究随机有向图 $\vec{G}(n,\ p)$，其中每条 $n(n-1)$ 条可能的有向边均以概率 p 出现。我们证明，在临界窗口内，$\vec{G}(n,\ p)$ 中最长的自避有向路径长度为 $O_{\mathbb{P}}(n^{1/3})$，因此 $\vec{G}(n,\ p)$ 的直径为 $O_{\mathbb{P}}(n^{1/3})$。

1 引言

自五十多年前引入以来，[9] 人们对Erdös–Rényi随机图的兴趣与日俱增。由于受到诸多批评，这一模型及其研究也在许多方面得到了推广。其中一个重要原因是，现实中的许多网络具有方向性。然而，随机有向图——也就是Erdös–Rényi随机图的自然有向版本——由于缺乏对称性，研究起来要困难得多，因此人们对它的了解也较少。

对于 $n \in \mathbb{N},\ p \in [0,1]$，随机有向图 $\vec{G}(n,\ p)$是一个定义在 $\{1,2,\dots,n\}$上的随机有向图，其中 $n(n-1)$条可能的有向边分别以概率 p独立出现。

本文关注随机有向图的相变。关于这一相变的首个结果由Karp [11] 和Luczak [12] 证明。随后，Luczak和Seierstad [13] 进一步改进了这些结果，他们证明随机有向图中强连通分量的规模与Erdös–Rényi随机图具有相同的临界窗口。之后，Goldshmidt和Stephenson [10] 证明，经过 $n^{1/3}$ 重整化后，强连通分量收敛。

这里我们通过研究整个有向图的直径和长路径来考察它。更准确地说，如果有向图 $\vec{G}$ 中的有向边 $(v_0,v_1)\dots(v_{k-1},v_k)$ 彼此不同且属于 $\vec{G}$，则称 $(v_0,v_1,\dots,v_k)$ 是 k 长的 SAOP（Self-Avoiding Oriented Path，即自避免有向路径）。对于每个 $i,j \in \vec{G}$，令 $d_{\rightarrow}(i,j)$ 表示从 i 到 j 的 SAOP 的最小长度（如果不存在这样的路径，则默认为 $-\infty$）。$\vec{G}$ 的直径为 $\mathrm{diam}(\vec{G}) := \max_{i,j\in\vec{G}} d_{\rightarrow}(i,j)$。

对于一列随机变量 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $f\colon n \mapsto \mathbb{R}^{+*}$，如果 $(X_n/f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 是紧的，则称 $X_n = O_{\mathbb{P}}(f(n))$；如果 $(X_n/f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 依概率收敛于 0，则称 $X_n = o_{\mathbb{P}}(f(n))$。

我们将在全文中假设处于临界窗口，也就是说 $p = 1/n + O(1/n^{4/3})$。本文的目标是证明以下结果：（关于更精确的界，另见定理4 ）

定理 1。当 $n \to \infty$时，直径$(\vec{G}(n,p)) = O_{\mathbb{P}}(n^{1/3})$。

定理 2. 当 $n \to \infty$ 时，$\vec{G}(n,p)$ 中的最长 *SAOP* 的长度为 $O_{\mathbb{P}}(n^{1/3})$。

上述定理的主要动机之一，是为 $\vec{G}$（$n,\ p$）证明标度极限，正如 Addario–Berry、Broutin 和 Goldshmidt 在 [1]中对 Erdös–Rényi随机图所证明的那样。然而，首先需要为有向度量空间建立拓扑理论，并将 Gromov-Hausdorff–Prokhorov 拓扑推广到这些空间。解决这一问题因此需要一整套全新的思想。

*以色列特拉维夫大学，ablancrenaudiepro@gmail.com

论文结构 在第 2 节中，我们在假设均匀有根树具有一个类似结果的前提下，证明定理 1 和 2。随后，我们在第 3 节中，利用链式方法和分支紧性证明这一结果。

致谢 本项目始于2022年巴巴多斯研讨会。在会上，我有机会结识了许多友善的人，并与他们讨论标度极限问题。感谢大家！我还想为之前错误地证明最长 SAOP 的长度会是 $\log(n)n^{1/3}$ 阶一事致歉。我获得了 ERC 协作研究者基金 101001124（UniversalMap）的资助。

2 化归为一个树问题

2.1 长路径概率，以及它为何蕴含定理1 和2

我们将在此证明，下一个技术命题蕴含定理1 和 2。在本节余下部分，我们将解释它为何可由均匀有根树的一个类似结果推出。对每个 n， $m \in \mathbb{N}$，令 $[\![n,\ m]\!] := [n,m] \cap \mathbb{N}$。对每个 $v \in [\![1,\ n]\!]$，我们将 $\mathcal{L}^{\uparrow}(v)$ (或 $\mathcal{L}^{\downarrow}(v)$) 记作 $\vec{G}(n,\ p)$ 中从（或到达） v的最长 SAOP 的长度。

命题 3。 对于每个 $\delta > 0$，都存在 $C \in \mathbb{R}^+$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$、 $v \in [\![1、\ n]\!]$，

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}^{\uparrow}(v) > \delta n^{1/3}) = \mathbb{P}(\mathcal{L}^{\downarrow}(v) > \delta n^{1/3}) \leq Cn^{-1/3}.$$

根据命题3，BK 不等式推出定理 2，进而推出定理 1：

定理 2 的证明。 若 (u,v) 满足以下条件，则称其为一条内部边：互不相交地，$(u,v) \in \vec{G}(n,p)$，存在一条长度至少为 $n^{1/3}$ 、终止于 u 的 saop，且存在一条长度至少为 $n^{1/3}$ 、起始于 v 的 saop。根据命题 3 以及 BK 不等式，对于某个常数 C，对于每个 $u,v \in [\![1,n]\!]$，

$$\mathbb{P}((u,v) \text{ is an inner edge}) \leq pC^2n^{-2/3}.$$

因此，由马尔可夫不等式，内部边的数量为 $O_{\mathbb{P}}(n^{1/3})$。定理 2 由此得证，因为在一条长度为 $Ln^{1/3}$ 的 saop 中，至少有 $(L-2)n^{1/3}-3$ 条内部边。 □

细化上述证明，BK 不等式还直接为$\mathcal{L}(\vec{G}(n,\ p))$中最长 SAOP 的长度提供次伽马上界，并且因此为 $\text{diam}(\vec{G}(n,\ p)) \leq \mathcal{L}(\vec{G}(n,\ p))$提供上界。

定理 4。 存在 $c, C > 0$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，对于每个 $x > C$，

$$\mathbb{P}(\text{diam}(\vec{G}(n,p)) > xn^{1/3}) \leq \mathbb{P}(\mathcal{L}(\vec{G}(n,p)) > xn^{1/3}) \leq e^{-cx\log x}.$$

备注。 我认为上述界并非最优，因为对于Erdös–Rényi随机图，Nachmias和Peres证明了一个界$e^{-cx^{3/2}}$ [14,命题 1。4]。

证明。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们称 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\ldots,(u_k,v_k) \in [\![1,n]\!]$ 是彼此不相交的内部边，如果对于 $1 \leq i \leq k$，(u_i,v_i) 是一条内部边，且这些边彼此不相交。由命题 3 和 BK 不等式可知，对于某个 $C \in \mathbb{R}^+$，对于每个 $k \in \mathbb{N}, u_1,v_1,u_2,v_2,\ldots,u_k,v_k \in [\![1,n]\!]$，

$$\mathbb{P}((u_1,v_1),\ldots,(u_k,v_k) \text{ are disjointly inner edges}) \leq p^kC^{2k}n^{-2k/3}. \tag{1}$$

给定一条长度为 L 的 SAOP 后，我们可以考察这条路径中由边组成的 k 元组，这些边彼此至少相隔 $2\lceil n^{1/3}\rceil$ 条边，且与 SAOP 的起点和终点至少相隔 $\lceil n^{1/3}\rceil$ 条边。根据计数论证可知，若 $L > 9kn^{1/3}$，则至少有 $(L/2)^k$ 个这样的边 k 元组。此外，注意这些边元组中的边两两不相交。

由（1）以及马尔可夫不等式可知，对每个 $k \in \mathbb{N}$， $L > 9kn^{1/3}$，

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(\vec{G}(n,p)) \geq L) \leq n^{2k}p^kC^{2k}n^{-2k/3}/(L/2)^k = (2pn^{-2/3}C/L)^k.$$

所需结果可由取 $L = \lceil xn^{1/3}\rceil$ 和 $k = \lfloor x/9\rfloor$得出。 □

2.2 深度优先搜索（DFS）探索

为证明命题 3 我们需要从 [10] 针对 $\vec{G}(n,\ p)$构造一个对象。由于我们只关注通向 1的路径，因此只需要其中一部分。为了简洁起见，详情请参见 [10]。我们将图的 DFS 探索定义如下：对于 $i \in [\![0,\ n]\!]$ 我们归纳地定义一个有序集合（或栈） $\mathcal{O}_i$，表示时刻 i的开放顶点，以及一个集合 $\mathcal{A}_i$，表示时刻 i已经探索过的顶点。

算法 1. 在 $[\![1、\ n]\!]$ 上的图的深度优先搜索（*DFS*）探索。

- 集合 $\mathcal{O}_0 = (1),\ \mathcal{A}_0 = \emptyset$。
- 对于 $0 \le i \le n-1$：令 v_{i+1} 为 $\mathcal{O}_i$ 的第一个顶点。令 $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i \cup \{v_{i+1}\}$。令 $\mathfrak{N}_i$ 为 v_i 中不属于 $\mathcal{O}_i \cup \mathcal{A}_i$ 的邻居集合。通过从 $\mathcal{O}_i$ 的开头移除 v_i，并按递增顺序将 $\mathfrak{N}_i$ 添加到 $\mathcal{O}_i \backslash \{v_i\}$ 的开头，构造 $\mathcal{O}_{i+1}$。如果此时 $\mathcal{O}_{i+1} = \emptyset$，则将 $[\![1$ 中标签最低的元素添加到其中 $, n]\!] \backslash \mathcal{A}_i$。

请注意，在进行探索的同时，我们还构造了一个 $[\![1\ n]\!]$ 的排列 $(v_i)_{1 \le i \le n}$，称为 DFS 序。我们采用这种 DFS 探索方式的主要动机在于接下来的构造：

算法 2. 根据 [10] 的命题 2.1 (iii) 对 $\vec{G} = \vec{G}(n,p)$ 进行分解：

- 设 $G(n,p)$ 是一个 Erdös–Rényi 随机图。
- 设 $(v_i)_{1 \le i \le n}$ 是 $G(n,p)$ 的 DFS 顺序。•对于每个 $i < j$，当且仅当 $\{v_j, v_i\} \in G(n,p)$ 时，将 (v_j, v_i) 放入 $\vec{G}(n,p)$。
- 对于每个 $i < j$，独立地以概率 p 将 (v_i, v_j) 放入 $\vec{G}(n,p)$。

在此构造过程中，我们将 $\vec{G}(n,p)$ 中的有向边分为三类（见图 1）：

•向下边：令 $\downarrow(\vec{G}) := \{(v_i, v_j)\ i \in [\![1,n]\!], j \in \mathfrak{N}_i\}$ 为 $\vec{G}$ 的向下边集合。注意，$([\![1,n]\!], \downarrow(\vec{G}))$ 是一棵从叶节点指向根节点的森林。•多余边：令 $\hookleftarrow(\vec{G}) := \{(v_j, v_i)\ i < j\} \backslash \downarrow(\vec{G})$ 为 $\vec{G}$ 的多余边集合。通过去除 $\downarrow(\vec{G}) \cup \hookleftarrow(\vec{G})$ 中的方向，可以还原 $G(n,p)$。•向右边：令 $\rightsquigarrow(\vec{G}) := \{(v_i, v_j)\ i < j\}$ 为向右边集合。

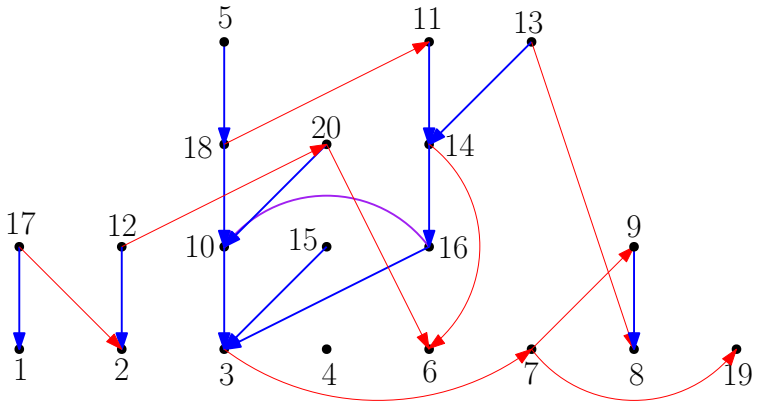


图 1：随机有向图 $\vec{G}$ 在 $[\![1,\ 20]\!]$ 上的 DFS 分解。$\vec{G}$ 的 DFS 顺序为 $1 \prec 17 \prec 2 \prec 12 \prec 3 \prec 10 \prec 18 \prec 5 \prec 20 \prec 15 \prec 14 \prec 11 \prec 13 \prec 16 \prec 4 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 19$。下行边 $\downarrow(\vec{G})$ 为蓝色，剩余边 $\hookleftarrow(\vec{G})$ 为紫色，右边 $\rightsquigarrow(\vec{G})$ 为红色。最长 SAOP 长度为 9，为 (5，18，11，14，16，10，3，7，9，8)。

2.3 均匀根树的类比问题，以及它为何蕴含命题 3

回顾算法 2。我们将 $\mathcal{C}(1)$ 记为 G中 $G(n,p)$中包含 $G1$ 的连通分量。注意，在 $\vec{G}$ 中以 1 为终点的所有 SAOP都必须始于 $\mathcal{C}(1)$。因此我们可以只关注 $\mathcal{C}(1)$。由于 $\mathcal{C}(1)$包含环的概率很小，我们可以将情况限制为 $\mathcal{C}(1)$ 是一棵树。此时，给定 $\#\mathcal{C}(1)$后，众所周知

$\mathcal{C}(1)$ 是一棵均匀有根树。基于这些原因，要证明命题 3，只需证明以下类似问题（更多细节请参见本节末尾）：

对于 $m \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$，我们按如下方式构造随机有向图 $\vec{\mathcal{T}}_{m,p}$：令 $\mathcal{T}_m$ 为一个顶点为 $[\![1,m]\!]$ 的均匀树。将 1 设为 $\mathcal{T}_m$ 的根。令 $\vec{\mathcal{T}}_m$ 为边朝向 1 的 $\mathcal{T}_m$。令 $\rightsquigarrow(\vec{\mathcal{T}}_{m,p})$ 为 $\vec{G}(m,p)$ 的一个独立副本。令 $\vec{\mathcal{T}}_{m,p}$ 为 $\vec{\mathcal{T}}_m$ 与 $\rightsquigarrow(\vec{\mathcal{T}}_{m,p})$ 的并集。

We 写作 $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}_{m,p})$，表示最长 SAOP 的长度；在 $\vec{\mathcal{T}}_{m,p}$。我们需要以下结果：

命题 5. 存在一些常数 $C > 0$，使得对于每个 $m \in \mathbb{N}$、$p > 0$、$x > 0$，

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}_{m,p}) > x\sqrt{m}) \le C(1/x^2 + p^{2/3}m).$$

注释。 证明方法可以得到好得多的界，但我认为没有必要这样做。

命题的证明 3 根据命题 5。 通过并集界，我们得到：

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}^{\uparrow}(1) > \delta n^{1/3}) \le \mathbb{P}(\mathcal{C}(1) \text{ is not a tree}) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{L}^{\uparrow}(1) > \delta n^{1/3}, \mathcal{C}(1) \text{ is a tree}, \#\mathcal{C}(1) = m\right). \tag{2}$$

根据 Erdős–Rényi 随机图的经典结果，在临界窗口中，$\mathcal{C}(1)$ 不是树的概率为 $O(n^{-1/3})$（例如参见 Aldous [4]）。根据命题 5，存在某个普适常数 C，使得对每个 $m \ge 1$，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathcal{L}^{\uparrow}(1) > \delta n^{1/3}, \mathcal{C}(1) \text{ is a tree}, \#\mathcal{C}(1) = m\right) &\le \mathbb{P}(\mathcal{C}(1) \text{ is a tree}, \#\mathcal{C}(1) = m)\mathbb{P}(\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}_{m,p}) > \delta n^{1/3}) \\ &\le \mathbb{P}(\#\mathcal{C}(1) = m)Cm(1/(\delta^2 n^{2/3}) + p^{2/3}).\end{aligned}$$

由此可得，求和后，记 S 为式（2）中的和，

$$S \le C(1/(\delta^2 n^{2/3}) + p^{2/3})\mathbb{E}[\#\mathcal{C}(1)].$$

此外，众所周知，在临界窗口中 $\mathbb{E}[\#\mathcal{C}(1)] = O(n^{1/3})$（例如参见 Aldous [4]）。因此 $S = O(n^{-1/3})$，命题 3 由（2）得证。 □

3 命题证明5

在本节中，m, p 是固定的，我们常在记号中省略对 m, p的依赖。

为了证明命题 5，我们采用基于叶节点紧性的链式方法。这一思想并非新颖，而是源自 Aldous [2, 3] 关于均匀有根树的开创性论文。近年来，这种方法在例如 [5, 8, 15, 7]，等文献中得到了进一步完善。关于这一主题的详细讨论，请参阅我的学位论文引言 [7]。

主要思想是，我们可以通过只考察从有限个顶点出发的路径，来近似从 $\mathcal{T}_{m,p}$ 出发的所有路径。具体来说，我们需要引入一些记号。对于 $i \in [\![1,m]\!]$，$\mathcal{L}(i)$，我们将其定义为从 i 在 $\vec{\mathcal{T}}_{m,p}$ 中出发的最长 SAOP 的长度。同样地，对于 $i \in [\![1,m]\!], S \subset [\![1,m]\!]$，令 $\mathcal{L}(i,S)$ 表示从 i 在 $\vec{\mathcal{T}}_{m,p} \cap S$ 中出发的最长 SAOP 的长度。令 $\mathfrak{h}(S) - 1$ 表示 $\vec{\mathcal{T}}_m \cap S$ 中最长 SAOP 的长度。还令 $\downarrow(i)$ 表示 i在 $\mathcal{T}_m$中的祖先集合。我们的链式论证基于以下结果：

引理 6. 对于所有 $S \subset [\![1,m]\!], j \in [\![1,m]\!]$，

$$\mathcal{L}(j) \le \mathcal{L}\left(j, [\![1,m]\!] \setminus \bigcup_{i \in S} \downarrow(i)\right) + 1 + \max_{i \in S} \mathcal{L}(i).$$

证明。注意，从 j 出发的一个 SAOP 最多必须经过 $\bigcup_{i\in S}\downarrow(i)$，且需要 $\mathcal{L}(S\setminus\bigcup_{i\in S}\downarrow(i))+1$ 步；在它经过例如 $\downarrow(i)$ 之后，它便与一条从 i 出发的路径的一部分重合，因此必须至少持续 $\mathcal{L}(i)$ 步。 □

从直观上说，前一个引理告诉我们，对于 S'，$S\subset[\![1,\ m]\!]$，若要在已知 $\max_{i\in S}\mathcal{L}(i)$ 的情况下估计 $\max_{i\in S'}\mathcal{L}(i)$，只需估计 $\vec{\mathcal{T}}_{m,\ p}$ 的一个小得多的子图中路径的长度。这些路径往往也短得多。这样一来，我们便能对精心选取的集合 $S_1\subset S_2\subset\cdots\subset S_K=[\![1,\ m]\!]$，归纳地估计 $\max_{i\in S}\mathcal{L}(i)$。为此，我们需要对 $i\in[\![1,\ m]\!]$，$S\subset[\![1,\ m]\!]$ 的 $\mathcal{L}(i,\ S)$ 给出一个上界。下一个引理给出了这个上界：

引理 7. 对于任意 $\mathcal{T}_m$-可测的随机变量 $S\subset[\![1,m]\!], i\in[\![1,m]\!], k\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(i,S)>(k+1)\mathfrak{h}(S)|\mathcal{T}_m)\le(p\mathfrak{h}(S)m)^k.$$

证明。回想一下，在 S 中仅使用来自 $\vec{\mathcal{T}}_m$ 的有向边的 SAOP，其长度至多为 $\mathfrak{h}(S)-1$。因此，只需对 S 中存在一条从 i 出发、使用至少 k 条来自 $\rightsquigarrow(\vec{\mathcal{T}}_{m,p})$ 的边的路径这一事件的概率作上界。由并集界，该概率至多为

$$\sum\mathbb{P}(\forall i\in[\![0,k-1]\!],(j_a,i_{a+1})\in\rightsquigarrow(\vec{T}_{m,p})|\mathcal{T}_m),$$

其中，上述求和遍历所有满足 $(j_0,i_0)\neq(j_1,i_1)\neq\ldots(j_k,i_k)$ 的元组 $i_0,j_0,i_1,\ldots i_k$，并且对于每个 $a\in[\![0,k-1]\!]$，都存在一条从 i_a 到 j_a、位于 $\vec{T}_m\cap S$ 中的路径。注意，j_0 至多有 $\mathfrak{h}(S)$ 种选择，接着 i_1 至多有 m 种选择，然后 j_1 至多有 $\mathfrak{h}(S)$ 种选择，依此类推.....根据 $\rightsquigarrow(\vec{T}_{m,p})$ 的定义，上述概率为 p^k。所需结果由此得证。 □

为完成命题的证明 5，我们需要以下估计。对于 $\delta>0$，令 $N(\mathcal{T}_m,\ \delta)$ 为集合 $S\subset[\![1,\ m]\!]$ 的最小大小，使得 $\mathfrak{h}([\![1,\ m]\!]\setminus\bigcup_{i\in S}\downarrow(i))\le x$。这个覆盖数在直观上表示需要删除多少个分支，才能使 $\mathcal{T}_m$ 得到一棵高度至多为 x的森林。

引理 8. 存在一个常数 C，使得对于每个 $m\in\mathbb{N}$、$\delta>0$,

$$\mathbb{P}\left(N(\mathcal{T}_m,\delta\sqrt{m})\ge1/\delta^{100}\right)\le C\delta^4,$$

且对每一对 $m\in\mathbb{N}$、$x>0$,

$$\mathbb{P}\left(\mathfrak{h}([\![1,m]\!])\ge x\sqrt{m}\right)\le C/x^4.$$

证明。第二部分众所周知。第一部分可直接按照 Aldous 的方法证明 [2]。（Aldous 只证明了某些事件以高概率成立，但同样的方法仍然适用。）另见 [6] 其中在更广泛的背景下证明了类似的界。细节从略。 □

命题 5 的证明。固定 $m,\ p,\ x>0$。不失一般性，只需在命题 C 中取一个更大的 5，我们可以假设 $x,\ m$ 足够大且 $p^{2/3}m\ge1/x^2\ge1$。令 $l=(p^{2/3}m)^{-1/4}$。注意到 $l\ge1$。我们首先考虑以下事件：

$$\mathfrak{h}([\![1,m]\!])\le l\sqrt{m}\quad;\quad\forall i\ge1,\ N(\mathcal{T}_m,l\sqrt{m}/(2^i)\le(2^il)^{100}.\tag{E}$$

由引理 8，对于某个普适常数 C,

$$\mathbb{P}(\mathrm{E})\ge1-Cl^{-4}-C\sum_{i\ge1}2^{-4i}l^{-4}\ge1-2Cl^{-4}=1-2Cp^{2/3}m.\tag{3}$$

现在我们在 $\mathcal{T}_m$ 下工作，其中（E）。对于 $S\subset[\![1、\ m]\!]$，令 $\downarrow(S):=\bigcup_{i\in S}\downarrow(i)$。由（E），并且由于$l\ge1$，我们可以考虑一些递增集合 $\emptyset=S_0\subset S_1\subset S_2\subset\ldots$，使得对于每个 $i\ge1$,

$$\mathfrak{h}([\![1,m]\!]\setminus\downarrow(S))\le l\sqrt{m}/2^i\quad\text{and}\quad\#(S_{i+1}\setminus S_i)\le(2^il)^{100}.$$

另外，由于 $l \geq 1$，不妨设对于 $k \geq \log(m)$，$S_k = [\![1,\ m]\!]$。根据引理 6，对于每个 $k \geq 0$，

$$\max_{i \in S_{k+1}} \mathcal{L}(i) \leq 1 + \max_{i \in S_{k+1} \setminus S_k} \mathcal{L}\left(i, [\![1, m]\!] \setminus \downarrow (S_k)\right) + \max_{i \in S_k} \mathcal{L}(i).$$

将最后一个不等式对所有 $1 \leq k \leq \log(m)$求和，可得

$$\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}_{m,p}) \leq \log m + \sum_{k=0}^{\log m} \max_{i \in S_{k+1} \setminus S_k} \mathcal{L}\left(i, [\![1, m]\!] \setminus \downarrow (S_k)\right). \tag{4}$$

此外，根据引理 7 中的并集界，对于每个 $k \geq 0$，记 $S'_k := [\![1,\ m]\!] \setminus \downarrow (S_k)$，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists i \in S_{k+1} \setminus S_k,\ \mathcal{L}(i, S'_k) > 102\mathfrak{h}(S'_k) | \mathcal{T}_m) &\leq \#(S_{k+1} \setminus S_k)(p\mathfrak{h}(S'_k)m)^{101} \\ &\leq (2^k l)^{100} (pm^{3/2} l / 2^k)^{101}. \\ &\leq 2^{-k} p^{2/3} m, \end{aligned}$$

在最后一个不等式中使用 $l = (p^{2/3}m)^{-1/4}$ 和 $p^{2/3}m \leq 1$。对所有 $k \geq 1$应用并集界可得：给定 $\mathcal{T}_m$，以至少 $1 - 2p^{2/3}m$ 的概率，对于每个 $k \geq 0$，$i \in S_{k+1} \setminus S_k$，都有$\mathcal{L}(i, S'_k) \leq 3\mathfrak{h}(S'_k)$。因此，根据 (4)，给定满足 (E) 的 $\mathcal{T}_m$，以至少 $1 - 2p^{2/3}m$ 的概率，

$$\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}_{m,p}) \leq \log m + \sum_{k=0}^{\log m} \max_{i \in S_{k+1} \setminus S_k} \mathcal{L}\left(i, S'_k\right) \leq \log m + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{102\sqrt{m}l}{2^i} \leq \log m + 102\sqrt{m}l \leq x\sqrt{m},$$

其中，当 $p^{2/3}m \geq 1/x^2$ 和 x, m 足够大时，最后一个不等式成立。结合 (3) 和上述不等式，即得所需结果。 □

参考文献

[1] L. Addario-Berry、N. Broutin 和 C. Goldschmidt。《临界随机图的连续统极限》。概率论与相关领域，152(3-4):367–406，2012。[2] D. Aldous。《连续随机树 I》。概率年刊，19:1–28，1991。[3] D. Aldous。《连续随机树 III》。概率年刊，21:248–289，1993。[4] D. Aldous。《布朗游程、临界随机图与乘法凝聚过程》。概率年刊，25(2):812–854，1997。[5] O. Amini、L. Devroye、S. Griffiths 和 N. Olver。《无限树中的爆炸与线性传输时间》。概率论与相关领域，167:325–347，2017。[6] A. Blanc-Renaudie。《固定度序列树的极限》。arxiv:2110.03378，2021年10月。[7] A. Blanc-Renaudie。《非齐次连续随机树与图的标度极限。》博士论文，索邦大学，2022。[8] N. Curien 和 B. Haas。《通过聚合构造的随机树》。傅里叶研究所年刊，67(5):1963–2001，2017。[9] P. Erdös 和 P. Rényi。《随机图 I》。数学出版物，第290–297页，1959。

[10] C. Goldshmidt 和 R. Stephenson。《临界随机有向图的标度极限》。即将发表（arXiv:1905.05397）。[11] R. M. Karp。《随机有向图的传递闭包》。*Random Structures and Algorithms*，1(1):73–93，1990。[12] Luczak。《随机有向图演化中的相变》。*RandomStructuresandAlgorithms*，14(2):217–223，1990。[13] T. Luczak 和 T.G. Seierstad。《随机有向图的临界行为》。*Random Structuresand Algorithms*，35(3):271–293，2009。[14] A. Nachmias 和 Y. Peres。《临界随机图：直径与混合时间》。*AnnalsofProbability*，36(4):1267–1286，2008。[15] D. Sénizergues。《度量空间的随机粘合》。概率年刊，47(6):3812–3865，2019。