arXiv:2305.04872v2 [math.FA] 9 Dec 2024

积分函数的交换规则*

Minh N. B`ui[1] 和 Patrick L. Combettes[2]

[1]大学¨格拉茨数学与科学计算研究所¨奥地利格拉茨
8010minh.bui@uni-graz.at

[2]北卡罗来纳州立大学数学系，美
国北卡罗来纳州罗利市
27695-8205plc@math.ncsu.edu

摘要

我们首先提出一个抽象原理，用于在取值于拓扑空间的映射空间上交换取下确界与积分。随后，我们引入关于底层空间和被积函数的新条件，将这一原理转化为具体情形，并证明这些情形涵盖了各种现有交换规则所适用的情形。借助这些结果，我们改进了用于计算积分函数的勒让德共轭、次微分、衰退函数、Moreau包络和邻近算子的先进交换规则，使相应运算可以移至积分号之下。

关键词。变分法、凸分析、积分函数。

MSC 分类. 46G12, 49J52, 46N10

*通讯作者：P. L. Combettes。电子邮箱：plc@math.ncsu.edu。电话： +1 919 515 2671。M. N. B`ui 的研究工作得到了 NAWI Graz 的支持，P. L. Combettes 的研究工作得到了美国国家科学基金会项目 DMS-1818946 的资助。

1 引言

本文探讨在以下假设下，取下确界与积分运算的交换问题。

假设 1.1

[A] X 是一个赋予苏斯林拓扑 $\mathcal{T}_X$ 及相应 Borel σσ-代数 $\mathcal{B}_X$的实向量空间。[B] 映射 (X $\times$ X $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_X$) $\to$ (X $\mathcal{B}_X$) : (x, y) $\mapsto$ x + y 是可测的。[C] 对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，映射 (X $\mathcal{B}_X$) $\to$ (X $\mathcal{B}_X$) : x $\mapsto \lambda$x 是可测的。[D] (Ω $\mathcal{F}, \mu$) 是一个 σ有限测度空间，满足 $\mu(\Omega) \neq 0$，而 $\mathcal{L}(\Omega; X)$ 表示从 (Ω $\mathcal{F}$) 到 (X $\mathcal{B}_X$) 的可测映射构成的向量空间。[E] $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{L}(\Omega; X)$ 的一个向量子空间。[F] φ: (Ω $\times$ X $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X$) $\to \overline{\mathbb{R}}$ 是一个被积函数，即它是可测的，并且对每个 $\omega \in \Omega$，都有 epi $\varphi_\omega \neq \varnothing$，其中 $\varphi_\omega = \varphi(\omega, \cdot)$。[G] 存在 $\overline{x} \in \mathcal{X}$使得 $\int_\Omega \max\{\varphi(\cdot, \overline{x}(\cdot)) \ 0\} d\mu < +\infty$。

按照惯例，给定可测函数 ϱ: (Ω $\mathcal{F}$) $\to \overline{\mathbb{R}}$, $\int_\Omega \varrho d\mu$ 表示通常意义下的勒贝格积分，除非勒贝格积分 $\int_\Omega \max\{\varrho, 0\} d\mu$ 为 $+\infty$，此时 $\int_\Omega \varrho d\mu = +\infty$。

分析及其应用中的许多问题都需要求函数 f: $x \mapsto \int_\Omega \varphi(\cdot, x(\cdot)) d\mu$关于 $\mathcal{X}$ 的下确界。一个较简单的任务是先计算函数 ϕ: $\omega \mapsto$ inf $\varphi(\omega, X)$，再计算 $\int_\Omega \phi d\mu$。一般而言，这只能给出下界，因为 inf $f(\mathcal{X}) \geqslant \int_\Omega \phi d\mu$。在 [15], [25], 和 [31] 中，针对 X、(Ω $\mathcal{F}, \mu$)、 $\mathcal{X}$和 φ的各种假设，已经建立了两个量相等的条件。由此得到的取下确界与积分交换规则，是塑性理论 [5], 、凸分析 [13], 、多元分析 [15], 、变分法[17], 、经济学 [18], 、随机过程 [22], 、最优传输 [23], 、随机优化 [24], 、金融学 [25], 、变分分析 [32], 和随机规划 [37]等领域中的核心工具。请注意，在假设 1.1[A]–[C], 中，为了适应某些应用，我们不要求 (X $\mathcal{T}_X$) 是拓扑向量空间。例如，在 [25], 中，X 是 $[0, 1]$ 上的 c`adl`ag 函数空间，而$\mathcal{T}_X$ 是 Skorokhod 拓扑。在此背景下，(X $\mathcal{T}_X$) 是波兰空间 [2, 第 3] 章，它不是拓扑向量空间[26] ，但满足假设 1.1[A]–[C]。

我们的首要贡献是下文的定理 1.2 。在假设 1.1的框架下，该定理为取下确界与积分的交换提供了一个广泛的适用条件。

定理 1.2（交换原理）假设 1.1 以及以下条件成立：

(i) inf$_{x \in X}$ $\varphi(\cdot, x)$ 是 $\mathcal{F}$-可测的。(ii) 存在一个序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{L}(\Omega; X)$,

满足以下条件：

(a) 下确界$_{x \in X}$ $\varphi(\cdot, x)$ = 下确界$_{n \in \mathbb{N}}$ $\varphi(\cdot, x_n(\cdot) + \overline{x}(\cdot))$ μ-几乎处处 (b) 存在一个递增序列$(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$，其元素是 $\mathcal{F}$ 中具有有限 μ-测度的集合，使得 $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k = \Omega$ 且

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \left\{1_A x_n \mid \mathcal{F} \ni A \subset \Omega_k \text{ and } \overline{x_n(A)} \text{ is compact}\right\} \subset \mathcal{X}. \tag{1.1}$$

Then

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \int_\Omega \varphi\big(\omega, x(\omega)\big) \mu(d\omega) = \int_\Omega \inf_{x \in X} \varphi(\omega, x) \, \mu(d\omega). \tag{1.2}$$

定理 1.2 在第 3 节中得到证明。第二项贡献是引入了两种新工具——合规空间和正规被积函数的扩展概念。这部分内容在第 4 节中展开，并通过各种实例对这些概念进行了说明。在第 5 节中，我们利用合规性和正规性，在定理1.2 的抽象交换原理与针对 $\mathcal{X}$ 和 φ 的独立条件之间建立了一条途径，从而涵盖各种应用场景。本节的主要结果是定理 5.1，它尤其涵盖了 [15, 25, 31], 中的交换规则，以及 [28, 29, 38]中隐含的交换规则。迄今为止，这些不同的理论框架尚未被整合在一起，而我们从多个方面对其进行了改进，例如，不再要求 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 完备，并放宽了对 X 的假设。这带来了新的具体情形，在这些情形下，(1.2) 成立。我们在第 6 节中介绍的第三项贡献，涉及积分函数上的凸分析运算。通过结合定理1.2、合规性和正规性，我们扩展了关于积分函数的勒让德共轭、次微分、衰退函数、Moreau包络和近端算子的求值条件，方法是将相应的运算移至积分号之下。这些结果改进了 [1, 22, 24, 29, 31, 38] 中最先进的凸分析运算规则。

2 符号与背景

2.1 测度论

令 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$。设 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 为一个可测空间，且令 A 为 Ω 的子集。 A 的示性函数记为 1_A ，而 A 的补集记为 $\complement A$。现在设 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 为一个豪斯多夫拓扑空间，其 Borel σ-代数为 $\mathcal{B}_X$。我们用 $\mathcal{L}(\Omega; X)$ 表示从 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 到 $(X\ \mathcal{B}_X)$ 的可测映射所构成的向量空间。给定 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的测度 μ， $\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbb{R})$ 是 $\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R})$ 中可积函数构成的子集，而 $\mathcal{L}^1(\Omega; \overline{\mathbb{R}})$ 类似定义。给定一个可分 Banach 空间 $(X\ \|\cdot\|_X)$，令 $\mathcal{L}^\infty(\Omega; X) = \{x \in \mathcal{L}(\Omega; X) \mid \sup \|x(\Omega)\|_X < +\infty\}$。

2.2 拓扑空间

给定拓扑空间 $(Y\ \mathcal{T}_Y)$ 和 $(Z\ \mathcal{T}_Z)$， $\mathcal{T}_Y \boxtimes \mathcal{T}_Z$ 表示标准的乘积拓扑 y.

设 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是一个豪斯多夫拓扑空间。$(X\ \mathcal{T}_X)$ 的博雷尔 σ-代数记为 $\mathcal{B}_X$。此外，$(X\ \mathcal{T}_X)$ 是：

- 正则 [7, 第 I.8 节。4] 若对于 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 的每个闭子集 C 和每个 $x \in \complement C$，都存在 $V \in \mathcal{T}_X$ 和 $W \in \mathcal{T}_X$，使得 $C \subset V$、$x \in W$，且 $V \cap W = \varnothing$;
- 波兰空间 [8, 第 IX.6 节。1] 若它是可分的，且存在 X 上的一个距离 d，它诱导的拓扑与 $\mathcal{T}_X$ 相同，并且 (X,d) 是一个完备度量空间;
- 苏斯林空间 [8, 第 IX.6 节2] 如果存在一个波兰空间 $(Y\ \mathcal{T}_Y)$，以及一个从 $(Y\ \mathcal{T}_Y)$ 到 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 的连续满射; ∼ ∼ ∼
- 卢津空间 [8, 第 IX.6 节4] 如果存在 X 上的一个拓扑 $\mathcal{T}_X$，使得 $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_X$，且 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是一个波兰空间;
- 弗雷歇空间 [9, 第 II.4 节1] 如果它是一个局部凸实拓扑向量空间，并且存在 X 上的距离 d，使其诱导的拓扑与 $\mathcal{T}_X$ 相同，且 (X,d) 是一个完备度量空间。

现在设 \(f : X \to \overline{\mathbb{R}}\)。\(f\) 的上图为

$$\operatorname{epi} f = \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant \xi\}, \tag{2.1}$$

f 是真函数 如果 $-\infty \notin f(X) \neq \{+\infty\}$，且当 epi f 为 $\mathcal{T}_X \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$-闭时，f 是 $\mathcal{T}_X$-下半连续。

2.3 对偶

实拓扑向量空间 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 的对偶，即 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 上连续线性泛函构成的向量空间，记作 $(X\ \mathcal{T}_X)^*$。

设 X 和 Y 是通过双线性形式构成分离对偶的实向量空间 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X,Y}: X \times Y \to \mathbb{R}$，即 [9,第 II.6 节。1],

$$\begin{cases} (\forall x \in X) \quad \langle x, \cdot\rangle_{X,Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ (\forall y \in Y) \quad \langle \cdot, y\rangle_{X,Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

此外，为 X 配备与配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X,Y}$ 相容的局部凸拓扑 $\mathcal{T}_X$，其含义是 $(X\ \mathcal{T}_X)^* = \{\langle\cdot, y\rangle_{X,Y}\}_{y\in Y}$；同样，为 Y 配备与配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X,Y}$ 相容的局部凸拓扑 $\mathcal{T}_Y$，其含义是 $(Y\ \mathcal{T}_Y)^* = \{\langle x\ \cdot\rangle_{X,Y}\}_{x\in X}$ [9,第四节.1.1]。根据 [20], 函数 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ 的勒让德共轭是

$$f^*: Y \to \overline{\mathbb{R}}: y \mapsto \sup_{x\in X} \big(\langle x, y\rangle_{X,Y} - f(x)\big) \tag{2.3}$$

且 $g: Y \to \overline{\mathbb{R}}$ 的勒让德共轭为

$$g^*: X \to \overline{\mathbb{R}}: x \mapsto \sup_{y\in Y} \big(\langle x, y\rangle_{X,Y} - g(y)\big). \tag{2.4}$$

设 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$。若 f 为真函数，则其次微分是集值算子

$$\begin{aligned} \partial f: X &\to 2^Y \\ x &\mapsto \big\{y \in Y \mid (\forall z \in X)\ \langle z - x, y\rangle_{X,Y} + f(x) \leqslant f(z)\big\} = \big\{y \in Y \mid f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle_{X,Y}\big\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

此外，若 epi f 是 $X \times \mathbb{R}$ 的凸子集，则 f 为凸函数； $\Gamma_0(X)$ 表示从 X 到 $]-\infty,+\infty]$ 的真下半连续凸函数类。设 $f \in \Gamma_0(X)$，且 $z \in \operatorname{dom} f$。f 的衰退函数是 $\Gamma_0(X)$ 中定义如下的函数

$$\operatorname{rec} f: X \to]-\infty,+\infty]: x \mapsto \lim_{0<\alpha\uparrow+\infty} \frac{f(z+\alpha x) - f(z)}{\alpha}. \tag{2.6}$$

现在进一步假设 $X = Y$ 是希尔伯特空间的，且 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X,\ Y}$ 是 X 的内积，并设 $\gamma \in]0,+\infty[$。f 的指标为 γ 的莫罗包络是 $\Gamma_0(X)$ 中定义如下的函数

$${}^{\gamma}f: X \to \mathbb{R}: x \mapsto \min_{y\in X} \left(f(y) + \frac{1}{2\gamma}\|x - y\|_X^2\right) \tag{2.7}$$

a且相对于 γf，$x \in X$ 的近端点是满足以下条件的唯一点 $\operatorname{prox}^{\gamma f} x \in X$ t

$${}^{\gamma}f(x) = f(\operatorname{prox}_{\gamma f} x) + \frac{1}{2\gamma}\|x - \operatorname{prox}_{\gamma f} x\|_X^2. \tag{2.8}$$

如此定义的邻近算子 $\operatorname{prox}^{\gamma f}: X \to X$ 可表示为

$$\operatorname{prox}_{\gamma f} = (\mathrm{Id} + \gamma\partial f)^{-1}. \tag{2.9}$$

3 交换原理的证明

定理证明1.2 需要一些技术性事实。

引理 3.1 设$(\Omega\ \mathcal{F})$ 是一个可测空间，设 n 为严格正整数，且$(\varrho_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ 是 $\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R})$中的一个族。那么存在一个族$(B_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ 属于 $\mathcal{F}$，使得

$$(B_i)_{0\leqslant i\leqslant n}\ \textit{are pairwise disjoint},\quad \bigcup_{i=0}^{n} B_i=\Omega,\quad \textit{and}\quad \min_{0\leqslant i\leqslant n}\varrho_i=\sum_{i=0}^{n}1_{B_i}\varrho_i. \tag{3.1}$$

证明。我们对 n进行归纳证明。若 $n=1$，则通过选取3.1，可得到（ $B_0=[\varrho_0\leqslant\varrho_1]$ 和$B_1=\complement B_0$。现在假设该结论对 n成立，令 $\varrho_{n+1}\in\mathcal{L}$（$\Omega$；$\mathbb{R}$），并令

$$\varrho=\min_{0\leqslant i\leqslant n}\varrho_i,\quad D=[\varrho\leqslant\varrho_{n+1}],\quad C_{n+1}=\complement D,\quad \text{and}\quad \big(\forall i\in\{0,\dots,n\}\big)\ C_i=B_i\cap D. \tag{3.2}$$

那么，$(C_i)_{0\leqslant i\leqslant n+1}$ 是 $\mathcal{F}$中的一个两两不交集族。此外，

$$\bigcup_{i=0}^{n+1}C_i=C_{n+1}\cup\bigcup_{i=0}^{n}C_i=\big(\complement D\big)\cup\bigcup_{i=0}^{n}(B_i\cap D)=\big(\complement D\big)\cup D=\Omega \tag{3.3}$$

and

$$\min_{0\leqslant i\leqslant n+1}\varrho_i=\min\{\varrho,\varrho_{n+1}\}=1_D\varrho+1_{\complement D}\varrho_{n+1}=1_D\sum_{i=0}^{n}1_{B_i}\varrho_i+1_{C_{n+1}}\varrho_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}1_{C_i}\varrho_i, \tag{3.4}$$

由此完成归纳论证。 □

引理 3.2 设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，使得 $\mu(\Omega)\neq0$，并设 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{L}(\Omega;\overline{\mathbb{R}})$的一个非空子集。那么存在一个属于 $\mathcal{L}(\Omega;\overline{\mathbb{R}})$的元素，记作 本质下确界 $\mathcal{R}$，且在相差一个μ-零测集的意义下唯一，使得

$$\big(\forall\vartheta\in\mathcal{L}(\Omega;\overline{\mathbb{R}})\big)\quad\big[\ (\forall\varrho\in\mathcal{R})\ \ \vartheta\leqslant\varrho\ \mu\text{-a.e.}\ \big]\quad\Leftrightarrow\quad\vartheta\leqslant\operatorname{ess\,inf}\mathcal{R}\ \mu\text{-a.e.} \tag{3.5}$$

此外，存在一个序列 $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$，属于 $\mathcal{R}$，使得 本质下确界 $\mathcal{R}=$下确界$_{n\in\mathbb{N}}\varrho_n$。

证明。使用假设 1.1[D], 构造 $0<\chi\in\mathcal{L}^1(\Omega;\mathbb{R})$，使得 $\int_\Omega\chi d\mu=1$，并定义 $\mathrm{P}:\mathcal{F}\to[0,1]$: $A\mapsto\int_A\chi d\mu$。那么 $(\forall A\in\mathcal{F})\ \ \mu(A)=0\Leftrightarrow\mathrm{P}(A)=0$。因此，结论可由[21, 命题 II-4-1 及其证明] 应用于概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathrm{P})$ 得出。 □

引理 3.3 设$(\Omega\ \mathcal{F},\mu)$ 是一个测度空间，设$(\mathsf{X}\ \mathcal{T}_{\mathsf{X}})$ 是一个苏斯林空间，设 $z\colon(\Omega\ \mathcal{F})\to(\mathsf{X}\ \mathcal{B}_{\mathsf{X}})$ 可测，并设 $E\in\mathcal{F}$ 满足 $\mu(E)<+\infty$。那么存在一个序列$(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{F}$，使得

$$\big[\ (\forall n\in\mathbb{N})\ \ E_n\subset E\ \textit{and}\ \overline{z(E_n)}\ \textit{is compact}\ \big]\quad\textit{and}\quad\mu(E)=\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\Big). \tag{3.6}$$

证明。对 [38, 引理 5], 的证明进行简单调整即可，其中 $(\mathsf{X}\ \mathcal{T}_{\mathsf{X}})$ 是一个局部凸的 Souslin拓扑向量空间。 □

引理 3.4 假设 1.1[A]–[D] 均成立。设 $\psi\colon (\Omega \times \mathsf{X}\ \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{\mathsf{X}}) \to \overline{\mathbb{R}}$ 可测，设$\mathcal{Z}$ 是 $\mathcal{L}(\Omega;\mathsf{X})$的非空至多可数子集，并设 $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是有限μ-测度集的递增序列，且位于 $\mathcal{F}$ 中，使得 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k = \Omega$。定义

$$\mathcal{D} = \bigcup_{z\in\mathcal{Z}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{1_A z \mid \mathcal{F}\ni A\subset\Omega_k \text{ and } \overline{z(A)} \text{ is compact}\} \tag{3.7}$$

and

$$\mathcal{R} = \{\varrho\in\mathcal{L}^1(\Omega;\mathbb{R}) \mid (\exists x\in\mathcal{D})\ \psi\big(\cdot,x(\cdot)\big)\leqslant\varrho(\cdot)\ \mu\text{-a.e.}\}. \tag{3.8}$$

假设

$$\psi(\cdot,0)\leqslant 0. \tag{3.9}$$

那么 $\mathcal{R}\neq\varnothing$ 且 ess inf $\mathcal{R}\leqslant\inf_{z\in\mathcal{Z}}\psi(\cdot,z(\cdot))$ μ-几乎处处。

证明。取 $z\in\mathcal{Z}$ 并注意到 $(\forall A\in\mathcal{F})$ $1_A z\in\mathcal{L}(\Omega;\mathsf{X})$。由于 $z(\varnothing) = \varnothing$ 是紧的，由 (3.7) 可得 $0 = 1_\varnothing z\in\mathcal{D}$。因此，由 (3.9)， $0\in\mathcal{R}$。接下来，根据假设 1.1[D], 存在$\chi\in\mathcal{L}^1(\Omega;\mathbb{R})$ 使得 $\chi>0$。令

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad A_n = \Omega_n\cap\big[\psi\big(\cdot,z(\cdot)\big)\leqslant n\chi(\cdot)\big]. \tag{3.10}$$

引理 3.3断言存在一个族 $(A_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ 属于 $\mathcal{F}$，使得

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad \begin{cases} (\forall k\in\mathbb{N})\ \ A_{n,k}\subset A_n \text{ and } \overline{z(A_{n,k})} \text{ is compact} \\ \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k}\Big). \end{cases} \tag{3.11}$$

反过来，由 (3.7) 和 (3.10),

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall k\in\mathbb{N})\quad 1_{A_{n,k}} z\in\mathcal{D}. \tag{3.12}$$

定义

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall k\in\mathbb{N})(\forall m\in\mathbb{N})\quad \varrho_{n,k,m}(\cdot) = \max\big\{\psi\big(\cdot,1_{A_{n,k}}(\cdot)z(\cdot)\big),-m\chi(\cdot)\big\}. \tag{3.13}$$

暂时固定 $(n,k,m)\in\mathbb{N}^3$。由式（3.11）、（3.10）和（3.9）可推得

$$\begin{aligned} (\forall\omega\in\Omega)\quad \psi\big(\omega,1_{A_{n,k}}(\omega)z(\omega)\big) &= \begin{cases} \psi\big(\omega,z(\omega)\big), & \text{if } \omega\in A_{n,k}; \\ \psi(\omega,0), & \text{otherwise} \end{cases} \\ &\leqslant \begin{cases} n\chi(\omega), & \text{if } \omega\in A_{n,k}; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ &\leqslant n\chi(\omega). \end{aligned} \tag{3.14}$$

因此，$-m\chi\leqslant\varrho_{n,k,m}\leqslant n\chi$，这意味着 $\varrho_{n,k,m}\in\mathcal{L}^1(\Omega;\mathbb{R})$。进而，由（3.13）、（3.12）和（3.8）可得 $\varrho_{n,k,m}\in\mathcal{R}$。因此，引理 3.2 保证存在 $B_{n,k,m}\in\mathcal{F}$，使得$\mu(B_{n,k,m}) = 0$ 并且

$$\big(\forall\omega\in\complement B_{n,k,m}\big)\quad (\operatorname{ess\,inf}\mathcal{R})(\omega)\leqslant\varrho_{n,k,m}(\omega). \tag{3.15}$$

现在令

$$A = \bigcap_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} \complement A_{n,k}, \quad B = \bigcup_{(n,k,m)\in\mathbb{N}^3} B_{n,k,m}, \quad \text{and} \quad C = \big[\psi\big(\cdot, z(\cdot)\big) < +\infty\big] \cap (A \cup B). \tag{3.16}$$

于是 $\mu(B) = 0$。此外，由于（3.10）可得 $[\psi(\cdot, z(\cdot)) < +\infty] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$，由（3.16）和（3.11）可知

$$\mu\Big(\big[\psi\big(\cdot, z(\cdot)\big) < +\infty\big] \cap A\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\Big(A_n \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \complement A_{n,k}\Big) = 0. \tag{3.17}$$

因此，利用（3.16），得到

$$\mu(C) = 0 \quad \text{and} \quad \complement C = \big[\psi\big(\cdot, z(\cdot)\big) = +\infty\big] \cup \big(\complement A \cap \complement B\big). \tag{3.18}$$

现在假设 $\omega \in \complement A \cap \complement B$。由（3.16）可知，存在 $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ 使得$\omega \in A_{n,k} \cap \complement B$。因此，由（3.16）、（3.15）和（3.13）可得

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \quad (\operatorname{ess\,inf} \mathcal{R})(\omega) \leqslant \varrho_{n,k,m}(\omega) = \max\big\{\psi\big(\omega, 1_{A_{n,k}}(\omega) z(\omega)\big), -m\chi(\omega)\big\}. \tag{3.19}$$

因此，令 $m \uparrow +\infty$，得到 $(\operatorname{ess\,inf} \mathcal{R})(\omega) \leqslant \psi(\omega, 1_{A_{n,k}}(\omega) z(\omega)) = \psi(\omega, z(\omega))$。由此我们证明了 $\operatorname{ess\,inf} \mathcal{R} \leqslant \psi(\cdot, z(\cdot))$ μ-几乎处处成立。由于 $\mathcal{Z}$至多可数，证明完毕。 □

定理的证明1.2。定义

$$\Phi\colon \mathcal{L}(\Omega; X) \to \mathcal{L}(\Omega; \overline{\mathbb{R}})\colon x \mapsto \varphi\big(\cdot, x(\cdot)\big) \tag{3.20}$$

并注意到，由于假设1.1[G]，

$$\int_\Omega \inf \varphi(\cdot, X)\, d\mu \leqslant \inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Phi(x) d\mu \leqslant \int_\Omega \Phi(\overline{x}) d\mu < +\infty. \tag{3.21}$$

因此，当 $\inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Phi(x) d\mu = -\infty$ 时，交换规则（1.2）成立，并且以下我们假设

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Phi(x) d\mu \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

现在定义

$$\vartheta = \max\big\{\Phi(\overline{x}), 0\big\} \tag{3.23}$$

and

$$\psi\colon \Omega \times X \to \overline{\mathbb{R}}\colon (\omega, x) \mapsto \begin{cases} \varphi\big(\omega, x + \overline{x}(\omega)\big) - \vartheta(\omega), & \text{if } \vartheta(\omega) < +\infty; \\ -\infty, & \text{if } \vartheta(\omega) = +\infty. \end{cases} \tag{3.24}$$

于是由假设1.1[G] 可得

$$\vartheta \in \mathcal{L}^1(\Omega; \overline{\mathbb{R}}) \tag{3.25}$$

因此，

$$\mu\big([\vartheta = +\infty]\big) = 0. \tag{3.26}$$

另一方面，假设 1.1[B] 保证映射 $(\Omega \times \mathsf{X}\ \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{\mathsf{X}}) \to (\mathsf{X}\ \mathcal{B}_{\mathsf{X}})\colon (\omega,\mathsf{x}) \mapsto \mathsf{x}+\overline{x}(\omega)$ 是可测的。因此，由假设 1.1[F], (3.25) 和 (3.24) 可得

$$\psi \text{ is } \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{\mathsf{X}}\text{-measurable.} \tag{3.27}$$

与此同时，由于

$$\inf_{\mathsf{x}\in\mathsf{X}} \psi(\cdot,\mathsf{x}) = \inf_{\mathsf{x}\in\mathsf{X}} \varphi\big(\cdot,\mathsf{x}+\overline{x}(\cdot)\big) - \vartheta(\cdot) = \inf_{\mathsf{x}\in\mathsf{X}} \varphi(\cdot,\mathsf{x}) - \vartheta(\cdot) \tag{3.28}$$

并且，由于假设 1.1[F] 给出 $\inf\ \varphi(\cdot,\ \mathsf{X}) < +\infty$，由 (i) 可得

$$\inf \psi(\cdot,\mathsf{X}) \in \mathcal{L}(\Omega;\overline{\mathbb{R}}). \tag{3.29}$$

令

$$\Psi\colon \mathcal{L}(\Omega;\mathsf{X}) \to \mathcal{L}(\Omega;\overline{\mathbb{R}})\colon x \mapsto \psi\big(\cdot,x(\cdot)\big). \tag{3.30}$$

由 (3.24) 和 (3.26),

$$\big(\forall\omega\in\complement[\vartheta=+\infty]\big)(\forall x\in\mathcal{X})\quad \big(\Psi(x)\big)(\omega) = \big(\Phi(x+\overline{x})\big)(\omega) - \vartheta(\omega). \tag{3.31}$$

因此，利用 (3.25)，由假设 1.1[E]&[G] 可得

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Psi(x)d\mu &= \inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \big(\Phi(x+\overline{x}) - \vartheta\big)d\mu\\ &= \inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Phi(x+\overline{x})d\mu - \int_\Omega \vartheta d\mu\\ &= \inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Phi(x)d\mu - \int_\Omega \vartheta d\mu\end{aligned} \tag{3.32}$$

同理，由 (3.28) 可得

$$\int_\Omega \inf \psi(\cdot,\mathsf{X})\, d\mu = \int_\Omega \inf \varphi(\cdot,\mathsf{X})\, d\mu - \int_\Omega \vartheta d\mu. \tag{3.33}$$

现在令

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \big\{1_A x_n \mid \mathcal{F}\ni A\subset\Omega_k \text{ and } \overline{x_n(A)} \text{ is compact}\big\} \tag{3.34}$$

and

$$\mathcal{R} = \big\{\varrho\in\mathcal{L}^1(\Omega;\mathbb{R}) \mid (\exists\, x\in\mathcal{D})\ \Psi(x)\leqslant\varrho\ \mu\text{-a.e.}\big\}, \tag{3.35}$$

并注意到（ii）（b）指出

$$\mathcal{D}\subset\mathcal{X}. \tag{3.36}$$

利用（3.24）和（3.23），由引理 3.4 应用于 $\mathcal{Z} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 可推得，$\operatorname{essinf}\mathcal{R} \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\Psi(x_n)$ μ-几乎处处成立。进而，由（3.31）、(ii)(a)以及（3.28）可得

$$\operatorname{ess\,inf}\mathcal{R} \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \Psi(x_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(x_n+\overline{x}) - \vartheta = \inf\varphi(\cdot,\mathsf{X}) - \vartheta = \inf\psi(\cdot,\mathsf{X})\ \mu\text{-a.e.} \tag{3.37}$$

另一方面，（3.35）意味着 $(\forall \varrho \in \mathcal{R})\ \inf \psi(\cdot, X) \leqslant \varrho(\cdot)$ μ-几乎处处成立。因此，（3.29）和引理 3.2 保证 $\inf \psi(\cdot, X) \leqslant \operatorname{ess\,inf} \mathcal{R}$ μ-几乎处处成立。综上，$\operatorname{ess\,inf} \mathcal{R} = \inf \psi(\cdot, X)$ μ-几乎处处成立。因此，由引理 3.2 可推得，存在一个序列 $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{R}$，使得

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \varrho_n(\cdot) = \inf \psi(\cdot, X) \ \mu\text{-a.e.} \tag{3.38}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，由（3.35）和（3.34）可知，存在 $\ell_n \in \mathbb{N}$，$k_n \in \mathbb{N}$，以及 $\mathcal{F} \ni A_n \subset \Omega_{k_n}$使得

$$\overline{x_{\ell_n}(A_n)} \text{ is compact} \quad \text{and} \quad \Psi\big(1_{A_n} x_{\ell_n}\big) \leqslant \varrho_n \ \mu\text{-a.e.} \tag{3.39}$$

令我们设定

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \chi_n = \min_{0\leqslant i\leqslant n} \varrho_i. \tag{3.40}$$

暂时固定 $n \in \mathbb{N}$。引理 3.1断言，存在一个族 $(B_{n,i})_{0\leqslant i\leqslant n}$，属于 $\mathcal{F}$，使得

$$(B_{n,i})_{0\leqslant i\leqslant n} \text{ are pairwise disjoint}, \quad \bigcup_{i=0}^{n} B_{n,i} = \Omega, \quad \text{and} \quad \chi_n = \sum_{i=0}^{n} 1_{B_{n,i}} \varrho_i. \tag{3.41}$$

现在令

$$y_n = \sum_{i=0}^{n} 1_{A_i \cap B_{n,i}} x_{\ell_i}. \tag{3.42}$$

对于每个 $i \in \{0, \dots, n\}$，由于 $A_i \cap B_{n,i} \subset A_i \subset \Omega_{k_i}$，(3.39) 表明 $x_{\ell_i}(A_i \cap B_{n,i})$ 是紧的，因此 (3.34) 和 (3.36) 得出 $1_{A_i\cap B_{n,i}} x_{\ell_i} \in \mathcal{D} \subset \mathcal{X}$。因此，(3.42) 和假设 1.1[E]确保 $y_n \in \mathcal{X}$。与此同时，由 (3.42)、(3.41) 和 (3.39) 可得

$$\Psi(y_n) = \sum_{i=0}^{n} 1_{B_{n,i}} \Psi\big(1_{A_i} x_{\ell_i}\big) \leqslant \sum_{i=0}^{n} 1_{B_{n,i}} \varrho_i = \chi_n \ \mu\text{-a.e.} \tag{3.43}$$

因此，由于 $y_n \in \mathcal{X}$，

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Psi(x) d\mu \leqslant \int_\Omega \Psi(y_n) d\mu \leqslant \int_\Omega \chi_n d\mu. \tag{3.44}$$

另一方面，由 (3.32)、(3.22) 和 (3.25) 可得 $\inf^{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Psi(x) d\mu \in \mathbb{R}$。因此，由于 $\chi_n \downarrow \inf_{i\in\mathbb{N}} \varrho_i(\cdot) = \inf \psi(\cdot, X)$ μ-a.e.，根据 (3.40) 和 (3.38)，(3.44) 以及单调收敛定理 [4, 定理 2.8.2 和推论 2.8.6]，可知

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Psi(x) d\mu \leqslant \lim \int_\Omega \chi_n d\mu = \int_\Omega \lim \chi_n \, d\mu = \int_\Omega \inf \psi(\cdot, X) \, d\mu. \tag{3.45}$$

因此，由于 $\int_\Omega \inf \psi(\cdot, X) \, d\mu \leqslant \inf^{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Psi(x) d\mu$，我们得出

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \Psi(x) d\mu = \int_\Omega \inf \psi(\cdot, X) \, d\mu. \tag{3.46}$$

鉴于（3.32）、（3.33）和（3.25），证明完毕。 □

注 3.5 将 φ 替换为 $-\varphi$，应用于假设 [F] 和 [G] 中的各项，以及定理 1.1 和定理 1.2，可得到满足以下条件的情形

$$\sup_{x\in\mathcal{X}}\int_\Omega \varphi\big(\omega,x(\omega)\big)\mu(d\omega)=\int_\Omega \sup_{\mathsf{x}\in\mathsf{X}}\varphi(\omega,\mathsf{x})\,\mu(d\omega), \tag{3.47}$$

按照如下约定：给定一个可测函数 $\varrho\colon(\Omega,\mathcal{F})\to\overline{\mathbb{R}}$，$\int_\Omega \varrho d\mu$ 表示通常的勒贝格积分，但若勒贝格积分 $\int_\Omega \min\{\varrho,0\}d\mu$ 为 $-\infty$，则 $\int_\Omega \varrho d\mu=-\infty$。

注 3.6 在定理 1.2 中，假设 $\inf^{x\in\mathcal{X}}\int_\Omega \varphi(\cdot,x(\cdot))d\mu>-\infty$，并令 $z\in\mathcal{X}$。则

$$\int_\Omega \varphi\big(\omega,z(\omega)\big)\mu(d\omega)=\min_{x\in\mathcal{X}}\int_\Omega \varphi\big(\omega,x(\omega)\big)\mu(d\omega)\quad\Leftrightarrow\quad \varphi\big(\cdot,z(\cdot)\big)=\min\varphi(\cdot,\mathsf{X})\ \mu\text{-a.e.} \tag{3.48}$$

4 合规空间与正规被积函数

本节旨在建立一些工具，将定理 1.2 中的交换原理转化为以环境空间 $\mathcal{X}$ 和被积函数φ的显式条件表述的交换规则。我们的框架基于合规空间这一概念，以及广义意义下正规被积函数这一概念。

4.1 合规空间

我们引入如下合规空间概念，它推广并统一了[24, 25, 29, 31, 32, 37, 38]中交换规则所采用的可分解性概念。

定义 4.1（**合规性**）假设 1.1[A]–[E] 成立。那么，$\mathcal{X}$ 是合规的，如果对于每个 $A\in\mathcal{F}$ 满足 $\mu(A)<+\infty$ 以及每个 $z\in\mathcal{L}(\Omega;\mathsf{X})$ 满足 $z(A)$ 是紧的，$1_Az\in\mathcal{X}$。

命题 4.2 假设 1.1[A]–[E] 成立，且以下条件之一成立：

(i) $(X,\mathcal{T}_X)$ 是苏斯林拓扑向量空间，并且对于每个 $A\in\mathcal{F}$ 满足 $\mu(A)<+\infty$，以及每个$z\in\mathcal{L}(\Omega;X)$ 满足 $z(A)$ 是 $\mathcal{T}_X$-有界（即，对于每个 0 的邻域 $V\in\mathcal{T}_X$，存在 $\alpha\in]0,+\infty[$ 满足 $z(A)\subset\bigcap_{\beta>\alpha}\beta V$ [33]），$1_Az\in\mathcal{X}$。(ii) X 是带强拓扑 $\mathcal{T}_X$ 的可分 Banach 空间，并且对于每个 $A\in\mathcal{F}$ 满足 $\mu(A)<+\infty$，以及每个 $z\in\mathcal{L}^\infty(\Omega;X)$，$1_Az\in\mathcal{X}$。(iii) X 是带强拓扑 $\mathcal{T}_X$ 的可分 Banach 空间，$\mu(\Omega)<+\infty$，且 $\mathcal{L}^\infty(\Omega;X)\subset\mathcal{X}$。(iv) X 是带强拓扑 $\mathcal{T}_X$ 的可分 Banach 空间，且 $\mathcal{X}$ 是 Rockafellar 可分解的 [29]，即对于每个 $A\in\mathcal{F}$ 满足 $\mu(A)<+\infty$，每个 $z\in\mathcal{L}^\infty(\Omega;X)$，以及每个 $x\in\mathcal{X}$,$1_Az+1_{\complement A}x\in\mathcal{X}$。(v) $(X,\mathcal{T}_X)$ 是苏斯林局部凸拓扑向量空间，且 $\mathcal{X}$ 是 Valadier 可分解的 [38]，即对于每个 $A\in\mathcal{F}$ 满足 $\mu(A)<+\infty$，每个 $z\in\mathcal{L}(\Omega;X)$ 满足 $z(A)$ 是紧的，以及每个 $x\in\mathcal{X}$, $1_Az+1_{\complement A}x\in\mathcal{X}$。(vi) X 是标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$，并且对于每个 $A\in\mathcal{F}$ 满足 $\mu(A)<+\infty$，以及每个$z\in\mathcal{L}^\infty(\Omega;X)$，$1_Az\in\mathcal{X}$。

那么 $\mathcal{X}$ 合规。

证明。 (i)：设 $A \in \mathcal{F}$ 满足 $\mu(A) < +\infty$，并设 $z \in \mathcal{L}(\Omega;X)$ 满足 $z(A)$ 是紧的。由 [33, 定理 1.15(b)] 可知 $z(A)$ 是 $\mathcal{T}_X$-有界的。因此 $1_A z \in \mathcal{X}$。

(iii)⇒(ii)⇒(i)：显然。

(iv)⇒(ii)：显然。

(v)：显然。(vi)⇒

(ii)：显然。 □

4.2 正规被积函数

我们引入正规被积函数的概念，以统一并推广[28, 29, 31, 38]中的概念。

定义 4.3（正规性） 设 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 为苏斯林空间，$(\Omega\ \mathcal{F})$ 为可测空间，设φ: $(\Omega \times X\ \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X) \to \overline{\mathbb{R}}$可测，并在 $X \times \mathbb{R}$ 上赋予拓扑 $\mathcal{T}_X \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$。若存在序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其取值于 $\mathcal{L}(\Omega; X)$，以及序列 $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其取值于 $\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R})$，使得

$$(\forall\omega\in\Omega)\quad \big\{\big(x_n(\omega),\varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{epi}\varphi_\omega \quad\text{and}\quad \overline{\operatorname{epi}\varphi_\omega} = \overline{\big\{\big(x_n(\omega),\varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}}. \tag{4.1}$$

以下定理给出了正规被积函数的例子。

定理 4.4 设 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 为苏斯林空间，设 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 为可测空间，并设 φ: $\Omega \times X \to \overline{\mathbb{R}}$满足 $(\forall\omega\in\Omega)$ 上图 $\varphi_\omega \neq \varnothing$。假设下列条件之一成立：

(i) φ 是 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X$-可测的，且满足以下条件之一：

(a) 存在一个测度 μ，使得$(\Omega\ \mathcal{F},\mu)$ 是完备且 σ-有限的。(b) Ω 是 $\mathbb{R}^M$ 的博雷尔子集，且 $\mathcal{F}$ 是相应的勒贝格 σ-代数。(c) 对于每个 $\omega\in\Omega$，都存在$\mathbf{V}_\omega \in \mathcal{T}_X \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$，使得$\mathbf{V}_\omega \subset$ 上图 φ_ω且$\mathbf{V}_\omega =$上图 φ_ω。(d) 函数$(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是上半连续的。

(ii) 函数$(\varphi(\cdot,x))_{x\in X}$是 $\mathcal{F}$-可测的，且满足以下条件之一：

*(a) $(X\ \mathcal{T}_X)$*是可度量化的，并且对于每个 $\omega\in\Omega$，都存在$V_\omega \in \mathcal{T}_X\boxtimes\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$，使得$V_\omega \subset$ 上图 $\varphi_\omega = V_\omega$。*(b) $(X\ \mathcal{T}_X)$*是弗雷歇空间，并且对于每个 $\omega\in\Omega$，$\varphi_\omega \in \Gamma_0(X)$和有效定义域 $\varphi_\omega \neq \varnothing$。*(c) $(X\ \mathcal{T}_X)$*是标准欧几里得直线 $\mathbb{R}$，并且对于每个 $\omega\in\Omega$，$\varphi_\omega \in \Gamma_0(\mathbb{R})$且有效定义域 φ_ω 不是单点集。

(iii) $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是正则苏斯林空间，函数 $(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是连续的，并且函数$(\varphi(\cdot,x))_{x\in X}$是 $\mathcal{F}$-可测的。

(iv) 对于某个可分*Fr´echet*空间 $(Y\ \mathcal{T}_Y)$，$X = (Y\ \mathcal{T}_Y)^*$，$\mathcal{T}_X$ 是弱拓扑，函数$(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是 $\mathcal{T}_X$-下半连续的，并且以下条件之一成立：

(a) 对于 $(X\times\mathbb{R},\ \mathcal{T}_X\boxtimes\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$的每个闭子集$\mathbf{C}$，$\big\{\omega\in\Omega \mid \mathbf{C}\cap$上图 $\varphi_\omega \neq \varnothing\big\} \in \mathcal{F}$。(b) $(\Omega\ \mathcal{T}_\Omega)$ 是豪斯多夫拓扑空间，$\mathcal{F} = \mathcal{B}_\Omega$，且 φ 是 $\mathcal{T}_\Omega\boxtimes\mathcal{T}_X$- 下半连续的。(c) $(\Omega\ \mathcal{T}_\Omega)$ 是卢津空间，$\mathcal{F} = \mathcal{B}_\Omega$，且 φ 是 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X$-可测的。

(v) X 是可分自反 *Banach* 空间，$\mathcal{T}_X$ 是弱拓扑，$(\Omega\ \mathcal{T}_\Omega)$ 是豪斯多夫拓扑空间，$\mathcal{F} = \mathcal{B}_\Omega$，函数$(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是 $\mathcal{T}_X$-下半连续的，并且满足以下条件之一：

(a) φ 是 $\mathcal{T}_\Omega\boxtimes\mathcal{T}_X$-下半连续的。

(b) $(\Omega\ \mathcal{T}_\Omega)$ 是一个卢津空间，且 φ 是 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X$-可测的。

(vi) $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$，Ω 是 $\mathbb{R}^M$ 的博雷尔子集，$\mathcal{F}=\mathcal{B}_\Omega$ φ 是 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X$-可测的，且函数 $(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是下半连续的。

(vii) $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是波兰空间，函数 $(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是下半连续的，并且满足以下条件之一：

(a) 对于每个 $V\in\mathcal{T}_X\boxtimes\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\{\omega\in\Omega\mid V\cap\text{上图}\,\varphi_\omega\neq\varnothing\}\in\mathcal{F}$.(b) $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$，并且对于 X 的每个闭子集 $C\times\mathbb{R}$,$\{\omega\in\Omega\mid C\cap\text{上图}\,\varphi_\omega\neq\varnothing\}\in\mathcal{F}$。

(viii) 存在一个可测函数 $f\colon(X\ \mathcal{B}_X)\to\overline{\mathbb{R}}$，使得 $(\forall\omega\in\Omega)\ \varphi_\omega=f$。那么 φ 是正规的。

证明。令 $G=\{(\omega,x\ \xi)\in\Omega\times X\times\mathbb{R}\mid\varphi(\omega,x)\leqslant\xi\}$。那么

$$G=\{(\omega,x,\xi)\in\Omega\times X\times\mathbb{R}\mid(x,\xi)\in\operatorname{epi}\varphi_\omega\}. \tag{4.2}$$

此外，[4, 引理 6.4.2(i)]得出

$$\varphi\text{ is }\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X\text{-measurable}\quad\Leftrightarrow\quad G\in\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{X\times\mathbb{R}}. \tag{4.3}$$

我们还注意到，$(X\times\mathbb{R},\mathcal{T}_X\boxtimes\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ 是一个苏斯林空间 [8, 命题 IX.6.7]。

(i)(a)：应用 [11, 定理 III。22] 到映射 $\Upsilon\colon\Omega\to 2^{X\times\mathbb{R}}\colon\ \omega\mapsto$上图 φ_ω，由（4.2）和（4.3）可推知存在一个映射序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其映射从 Ω 到 X；以及一个函数序列$(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其函数从 Ω到 $\mathbb{R}$，使得

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad(\Omega,\mathcal{F})\to(X\times\mathbb{R},\mathcal{B}_{X\times\mathbb{R}})\colon\omega\mapsto\big(x_n(\omega),\varrho_n(\omega)\big)\text{ is measurable} \tag{4.4}$$

and

$$(\forall\omega\in\Omega)\quad\big\{\big(x_n(\omega),\varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\Upsilon(\omega)\quad\text{and}\quad\overline{\Upsilon(\omega)}=\overline{\big\{\big(x_n(\omega),\varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}}. \tag{4.5}$$

此外，由于 $\mathcal{B}_{X\times\mathbb{R}}=\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ [4, 引理 6.4.2(i)], 由（4.4）可知，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$x_n\colon(\Omega\ \mathcal{F})\to(X\ \mathcal{B}_X)$ 以及 $\varrho_n\colon(\Omega\ \mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 均为可测函数。综上，φ 是正规的。

(i)(b)⇒(i)(a)<style id='6'：取 μ 为 Ω 上的勒贝格测度。

(i)(c)设 $\{(x_n,\xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是 $(X\times\mathbb{R},\mathcal{T}_X\boxtimes\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ 中的一个稠密集，并定义

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad\Omega_n=\big[\varphi(\cdot,x_n)\leqslant\xi_n\big]. \tag{4.6}$$

另一方面，φ 的 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X$-可测性保证了$(\forall n\in\mathbb{N})\ \Omega_n\in\mathcal{F}$。另一方面，对于每个 $\omega\in\Omega$，由于 V_ω是开集，存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $(x_n,\xi_n)\in V_\omega\subset$上图 φ_ω，由此得到$\omega\in\Omega_n$，进而 $\Omega=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$。这给出了 $\mathcal{F}$ 中的一个两两不交集序列 $(\Theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\Theta_0=\Omega_0,\quad\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Theta_n=\Omega,\quad\text{and}\quad(\forall n\in\mathbb{N})\ \Theta_n\subset\Omega_n. \tag{4.7}$$

对于每个 $\omega\in\Omega$，都存在唯一的 $n_\omega\in\mathbb{N}$，使得$\omega\in\Theta_{n_\omega}$。现在定义

$$z\colon\Omega\to X\colon\omega\mapsto x_{n_\omega}\quad\text{and}\quad\vartheta\colon\Omega\to\mathbb{R}\colon\omega\mapsto\xi_{n_\omega}. \tag{4.8}$$

Then

$$(\forall V \in \mathcal{T}_X) \quad z^{-1}(V) = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ x_n\in V}} \Theta_n \in \mathcal{F}, \tag{4.9}$$

这意味着 $z \in \mathcal{L}(\Omega; X)$。同理，$\vartheta \in \mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R})$。接下来，定义

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \colon \Omega \to X \colon \omega \mapsto \begin{cases} x_n, & \text{if } \omega \in \Omega_n; \\ z(\omega), & \text{if } \omega \in \complement\Omega_n \end{cases} \tag{4.10}$$

and

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \varrho_n \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon \omega \mapsto \begin{cases} \xi_n, & \text{if } \omega \in \Omega_n; \\ \vartheta(\omega), & \text{if } \omega \in \complement\Omega_n. \end{cases} \tag{4.11}$$

那么 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都是 $\mathcal{L}(\Omega;X)$ 中的序列，而 $\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R})$是相应的序列。此外，由（4.10）、（4.11）、（4.6）和（4.7）可推得

$$(\forall \omega \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \big(x_n(\omega), \varrho_n(\omega)\big) \in \operatorname{epi} \varphi_\omega. \tag{4.12}$$

另一方面，对于每个 $\omega \in \Omega$，由于 $\{(x_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在$(X \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_X \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ 中稠密，且由于$\mathbf{V}_\omega$是开集，由 (4.10)、(4.11) 和 (4.6) 可得

$$\overline{\big\{\big(x_n(\omega), \varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{\{(x_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap \operatorname{epi} \varphi_\omega} \supset \overline{\{(x_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap \mathbf{V}_\omega} = \overline{\mathbf{V}_\omega} = \overline{\operatorname{epi} \varphi_\omega}. \tag{4.13}$$

因此，φ 是正规的。

(i)(d)⇒(i)(c)：令 $(\forall \omega \in \Omega)\, V_\omega = \{(x\ \xi) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(\omega, x) < \xi\}$。现在固定 $\omega \in \Omega$ 和 $(x\ \xi) \in$上图 φ_ω。由于序列 $(x\ \xi + 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$位于 V_ω中，且 $(x\ \xi + 2^{-n}) \to (x\ \xi)$，我们得到 $(x\ \xi) \in V_\omega$。因此 $V_\omega =$上图$\overline{\varphi_\omega}$同时，$\overline{\varphi_\omega}$ g 的上半连续性保证 V_ω 是开集。

(ii)(a)⇒(i)(c)：只需证明 φ 是 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X$-可测的。设 $\{(x_n,\ \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在$(X \times \mathbb{R},\ \mathcal{T}_X \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$中稠密，取$\mathbf{V} \in \mathcal{T}_X \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$，并令 $\mathbb{K} = \{n \in \mathbb{N} \mid (x_n,\ \xi_n) \in \mathbf{V}\}$。于是

$$\overline{\{(x_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{K}}} = \overline{\{(x_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap \mathbf{V}} = \overline{\mathbf{V}}. \tag{4.14}$$

假设存在 $\omega \in \Omega$，使得

$$\mathbf{V} \cap \operatorname{epi} \varphi_\omega \neq \varnothing \quad \text{and} \quad (\forall n \in \mathbb{K})\ (x_n, \xi_n) \notin \operatorname{epi} \varphi_\omega. \tag{4.15}$$

由于V是开集且$V_\omega =$上图 φ_ω，因此存在$(y\ \eta) \in V \cap V_\omega$。由此，我们从(4.14)推得存在$(x^{k(b)}, \xi_{k(b)})_{b\in B}$的一个子网$(x_n, \xi_n)_{n\in\mathbb{K}}$，使得$(x^{k(b)}, \xi_{k(b)}) \to (y\ \eta)$。这与(4.15)共同推出$(y\ \eta) \in \complement$上图 $\varphi_\omega = \complement V_\omega = \complement \operatorname{int} V_\omega$，这与包含关系$(y\ \eta) \in \overline{V_\omega}$矛盾。因此，函数$(\varphi(\cdot, x))_{x\in X}$的 $\mathcal{F}$-可测性推出

$$\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{V} \cap \operatorname{epi} \varphi_\omega \neq \varnothing\} = \bigcup_{n\in\mathbb{K}} \{\omega \in \Omega \mid (x_n, \xi_n) \in \operatorname{epi} \varphi_\omega\} = \bigcup_{n\in\mathbb{K}} [\varphi(\cdot, x_n) \leqslant \xi_n] \in \mathcal{F}. \tag{4.16}$$

因此，由于 $(X \times \mathbb{R},\ \mathcal{T}_X \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ 是可分度量空间，且集合 (上图 $\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是闭的，[16, 定理 3.5(i)] 和 (4.2) 表明 $\boldsymbol{G} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{X\times\mathbb{R}}$。因此，(4.3) 断言 φ 是$\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X$-可测的。

(ii)(b)⇒(ii)(a)：令 $(\forall\omega\in\Omega)\ \mathbf{V}_\omega=$上图的内部 φ_ω。对于每个 $\omega\in\Omega$，假设保证上图 φ_ω 是闭凸集，并且 $\mathbf{V}_\omega\neq\varnothing$ [40, 定理 2.2.20 和推论 2.2.10]。因此 [40,定理 1.1.2(iv)] 给出 $(\forall\omega\in\Omega)$ 上图$\varphi_\omega=\mathbf{V}_\omega$。

(ii)(c)⇒(ii)(b)：显然。

(iii)：由 [34] 可知，存在一个拓扑 $\mathfrak{T}_X$ 在X 上，使得

$$\mathfrak{T}_X\subset\widetilde{\mathfrak{T}_X} \tag{4.17}$$

and

$$(X\ \mathfrak{T}_X)\text{ 是一个可度量的苏斯林空间。} \tag{4.18}$$

令 $(\forall\omega\in\Omega)\ \mathbf{V}_\omega=\{(x\ \xi)\in X\times\mathbb{R}\mid\varphi(\omega,\ x)<\xi\}$。于是，由于 (4.17) 蕴含

$$(\forall\omega\in\Omega)\quad\varphi_\omega\text{ is }\widetilde{\mathfrak{T}_X}\text{-continuous,} \tag{4.19}$$

可得

$$(\forall\omega\in\Omega)\quad\mathbf{V}_\omega\in\widetilde{\mathfrak{T}_X}\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}\quad\text{and}\quad\overline{\mathbf{V}_\omega}^{\widetilde{\mathfrak{T}_X}\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}}=\overline{\operatorname{epi}\varphi_\omega}^{\widetilde{\mathfrak{T}_X}\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}}=\operatorname{epi}\varphi_\omega. \tag{4.20}$$

另一方面，由 (4.18)、(4.17) 和 [36, 第 2 推论，第 101] 页可得，$(X\ \mathfrak{T}_X)$ 的 Borel σ-代数是 $\mathcal{B}_{\widetilde{X}}$。综上，将 (ii)(a) 应用于可度量的苏斯林空间 $(X\ \mathfrak{T}_X)$，可推出 φ 是 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{\widetilde{X}}$-可测的，并且存在序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{L}(\Omega;X)$ 以及序列 $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于$\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R})$，使得

$$(\forall\omega\in\Omega)\quad\big\{\big(x_n(\omega),\varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\operatorname{epi}\varphi_\omega\quad\text{and}\quad\overline{\operatorname{epi}\varphi_\omega}^{\widetilde{\mathfrak{T}_X}\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}}=\overline{\big\{\big(x_n(\omega),\varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}}^{\widetilde{\mathfrak{T}_X}\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}}. \tag{4.21}$$

因此，根据（4.17）和（4.20），

$$\overline{\big\{\big(x_n(\omega),\varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}}\supset\overline{\big\{\big(x_n(\omega),\varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}}^{\widetilde{\mathfrak{T}_X}\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}}=\overline{\operatorname{epi}\varphi_\omega}^{\widetilde{\mathfrak{T}_X}\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}}=\operatorname{epi}\varphi_\omega. \tag{4.22}$$

因此，φ 是正规的。

（iv）：由 [9, 第 II.4 节3] 可知，$(Y\times\mathbb{R},\ \mathfrak{T}_Y\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}})$ 是一个可分的 Fr´echet 空间。此外，根据 [9, 命题 II.6，8], $X\times\mathbb{R}=(Y\times\mathbb{R},\ \mathfrak{T}_Y\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}})^*$ 且 $X\times\mathbb{R}$ 的弱拓扑是 $\mathfrak{T}_X\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}$。进而，按照[35, 第 IV-1 节 7], 中的论证，我们推得存在 $X\times\mathbb{R}$的一个覆盖 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其相应的 $\mathfrak{T}_X\boxtimes\mathfrak{T}_{\mathbb{R}}$诱导拓扑为 $(\mathfrak{T}_{\mathbf{C}_n})_{n\in\mathbb{N}}$，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$(C_n,\ \mathfrak{T}_{\mathbf{C}_n})$ 都是紧的可分度量空间，因而是波兰空间。我们还引入

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad Q_n\colon\Omega\times\mathbf{C}_n\to\Omega\colon(\omega,x,\xi)\mapsto\omega. \tag{4.23}$$

注意，对于 $X\times\mathbb{R}$ 的每个子集 $\mathbf{C}$,

$$\{\omega\in\Omega\mid\mathbf{C}\cap\operatorname{epi}\varphi_\omega\neq\varnothing\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\omega\in\Omega\mid\mathbf{C}\cap\mathbf{C}_n\cap\operatorname{epi}\varphi_\omega\neq\varnothing\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Q_n\Big(\boldsymbol{G}\cap\big(\Omega\times(\mathbf{C}\cap\mathbf{C}_n)\big)\Big). \tag{4.24}$$

(iv)(a)：对于每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$\Omega_n=\{\omega\in\Omega\mid\mathbf{C}_n\cap\operatorname{epi}\varphi_\omega\neq\varnothing\}, \tag{4.25}$$

用 $\mathcal{F}_n$ 表示 $\mathcal{F}$ 在 Ω_n 上的迹 σ-代数，并注意到

$$\Omega_n\in\mathcal{F}\quad\text{and}\quad\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}. \tag{4.26}$$

现在定义

$$\mathbb{K} = \{n \in \mathbb{N} \mid \Omega_n \neq \varnothing\} \quad \text{and} \quad (\forall n \in \mathbb{K}) \;\; K_n \colon \Omega_n \to 2^{\mathbf{C}_n} \colon \omega \mapsto \mathbf{C}_n \cap \operatorname{epi} \varphi_\omega. \tag{4.27}$$

Then

$$\mathbb{K} \neq \varnothing \quad \text{and} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{K}} \Omega_n = \Omega. \tag{4.28}$$

此外，(上图 $\varphi_\omega)_{\omega \in \Omega}$ 的 $\mathcal{T}_{\mathbf{X}} \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$-闭性保证了

$$(\forall n \in \mathbb{K})(\forall \omega \in \Omega) \quad K_n(\omega) \text{ is } \mathcal{T}_{\mathbf{C}_n}\text{-closed}. \tag{4.29}$$

另一方面，对于每个 $n \in \mathbb{K}$ 以及 $\mathbf{D}$ 的每个闭子集，其中 $(\mathbf{C}_n, \mathcal{T}_{\mathbf{C}_n})$，存在 $\mathbf{E}$ 的一个闭子集，其中 $(\mathbf{X} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbf{X}} \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$，使得 $\mathbf{D} = \mathbf{C}_n \cap \mathbf{E}$ [7, 第 I.3 节。1] 因此，由于 $\mathbf{C}_n$ 是 $\mathcal{T}_{\mathbf{X}} \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$-闭的，由（4.26）可得

$$\{\omega \in \Omega_n \mid \mathbf{D} \cap K_n(\omega) \neq \varnothing\} = \Omega_n \cap \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{C}_n \cap \mathbf{E} \cap \operatorname{epi} \varphi_\omega \neq \varnothing\} \in \mathcal{F}_n. \tag{4.30}$$

因此，对于每个 $n \in \mathbb{K}$，由于 $(\mathbf{C}_n, \mathcal{T}_{\mathbf{C}_n})$ 是一个波兰空间，由 [16, 定理 3.5(i)、定理 5.1 和定理 5.6] 可知，存在可测映射 $\boldsymbol{y}_n$ 和 $(\boldsymbol{z}_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ 从 $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ 到 $(\mathbf{C}_n, \mathcal{B}_{\mathbf{C}_n})$，使得

$$(\forall \omega \in \Omega_n) \quad \boldsymbol{y}_n(\omega) \in K_n(\omega) \quad \text{and} \quad K_n(\omega) = \overline{\{\boldsymbol{z}_{n,k}(\omega)\}_{k \in \mathbb{N}}}^{\mathcal{T}_{\mathbf{C}_n}} = \mathbf{C}_n \cap \overline{\{\boldsymbol{z}_{n,k}(\omega)\}_{k \in \mathbb{N}}}. \tag{4.31}$$

此外，由于 [16, 定理 3.5(i)] 断言

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{K}) \quad & \{(\omega, \mathsf{x}, \xi) \in \Omega_n \times \mathbf{C}_n \mid (\mathsf{x}, \xi) \in \mathbf{C}_n \cap \operatorname{epi} \varphi_\omega\} \\ & = \{(\omega, \mathsf{x}, \xi) \in \Omega_n \times \mathbf{C}_n \mid (\mathsf{x}, \xi) \in K_n(\omega)\} \\ & \in \mathcal{F}_n \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{C}_n} \\ & \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{X} \times \mathbb{R}}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

由（4.2）可得

$$\boldsymbol{G} = \bigcup_{n \in \mathbb{K}} \{(\omega, \mathsf{x}, \xi) \in \Omega_n \times \mathbf{C}_n \mid (\mathsf{x}, \xi) \in \mathbf{C}_n \cap \operatorname{epi} \varphi_\omega\} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{X} \times \mathbb{R}}. \tag{4.33}$$

因此，根据（4.3），φ 是 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$-可测的。接下来，利用（4.28），我们构造一个 $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{K}}$中的两两不交集族 $\mathcal{F}$，使得

$$\Theta_{\min \mathbb{K}} = \Omega_{\min \mathbb{K}}, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{K}} \Theta_n = \Omega, \quad \text{and} \quad (\forall n \in \mathbb{K}) \;\; \Theta_n \subset \Omega_n. \tag{4.34}$$

反过来，对于每个 $\omega \in \Omega$，都存在唯一的 $\ell_\omega \in \mathbb{K}$ 使得 $\omega \in \Theta_{\ell_\omega}$。因此，利用（4.34），映射

$$\boldsymbol{y} \colon \Omega \to \mathbf{X} \times \mathbb{R} \colon \omega \mapsto \boldsymbol{y}_{\ell_\omega}(\omega) \tag{4.35}$$

有良好定义，并且根据（4.31），

$$(\forall \omega \in \Omega) \quad \boldsymbol{y}(\omega) = \boldsymbol{y}_{\ell_\omega}(\omega) \in K_{\ell_\omega}(\omega) \subset \operatorname{epi} \varphi_\omega. \tag{4.36}$$

令 $\mathbf{V} \in \mathcal{T}_{\mathsf{X}} \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$。那么，对于每个 $n \in \mathbb{K}$，$\mathbf{V} \cap \mathbf{C}_n$ 是 $\mathcal{T}_{\mathbf{C}_n}$-开集，因此，$\boldsymbol{y}_n$ 的可测性：$(\Omega_n, \mathcal{F}_n) \to (\mathbf{C}_n, \mathcal{B}_{\mathbf{C}_n})$ 以及 (4.26) 保证了 $\boldsymbol{y}_n^{-1}(\mathbf{V} \cap \mathbf{C}_n) \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$。因此，由 (4.34)、(4.35) 和 (4.31) 可推得，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^{-1}(\mathbf{V}) &= \bigcup_{n\in\mathbb{K}} \{\omega \in \Theta_n \mid \boldsymbol{y}(\omega) \in \mathbf{V}\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{K}} \{\omega \in \Theta_n \mid \boldsymbol{y}_n(\omega) \in \mathbf{C}_n \cap \mathbf{V}\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{K}} \left(\Theta_n \cap \boldsymbol{y}_n^{-1}(\mathbf{C}_n \cap \mathbf{V})\right) \\ &\in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

这就验证了 $\boldsymbol{y}\colon (\Omega\ \mathcal{F}) \to (\mathsf{X} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathsf{X}\times\mathbb{R}})$ 是可测的。现在定义

$$(\forall n \in \mathbb{K})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \boldsymbol{x}_{n,k}\colon \Omega \to \mathsf{X} \times \mathbb{R}\colon \omega \mapsto \begin{cases} \boldsymbol{z}_{n,k}(\omega), & \text{if } \omega \in \Omega_n; \\ \boldsymbol{y}(\omega), & \text{if } \omega \in \complement\Omega_n. \end{cases} \tag{4.38}$$

由（4.26）可知，$(\boldsymbol{x}_{n,k})_{n\in\mathbb{K},k\in\mathbb{N}}$ 是从 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 到 $(\mathsf{X} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathsf{X}\times\mathbb{R}})$的可测映射。此外，由（4.31）和（4.36）可得

$$(\forall n \in \mathbb{K})(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \Omega) \quad \boldsymbol{x}_{n,k}(\omega) \in \operatorname{epi}\varphi_\omega. \tag{4.39}$$

固定 $\omega \in \Omega$，并令 $\mathbf{x} \in$ 上图 φ_ω。由于 $\bigcup_{n\in\mathbb{K}}(\mathbf{C}_n \cap$ 上图 $\varphi_\omega) =$ 上图 φ_ω，因此存在 $N \in \mathbb{K}$ 使得 $\omega \in \Omega_N$且 $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_N \cap$ 上图 $\varphi_\omega = K_N(\omega)$。因此，由（4.31）和（4.38）可得

$$\mathbf{x} \in \overline{\{\boldsymbol{z}_{N,k}(\omega)\}_{k\in\mathbb{N}}} = \overline{\{\boldsymbol{x}_{N,k}(\omega)\}_{k\in\mathbb{N}}} \subset \overline{\{\boldsymbol{x}_{n,k}(\omega)\}_{n\in\mathbb{K},k\in\mathbb{N}}}. \tag{4.40}$$

因此，由于上图 φ_ω 是闭的，由（4.39）和 [7, 第一章第 3 节1] 可知

$$\operatorname{epi}\varphi_\omega = \overline{\{\boldsymbol{x}_{n,k}(\omega)\}_{n\in\mathbb{K},k\in\mathbb{N}}}. \tag{4.41}$$

同时，对任意的 $n \in \mathbb{K}$ 和任意的 $k \in \mathbb{N}$，由于 $\mathcal{B}_{\mathsf{X}\times\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathsf{X}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ [4, 引理 6.4.2(i)] 且由于 $\boldsymbol{x}_{n,\ k}\colon (\Omega\ \mathcal{F}) \to (\mathsf{X} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathsf{X}\times\mathbb{R}})$ 是可测的，因此存在 $x_{n,k} \in \mathcal{L}(\Omega; \mathsf{X})$ 和 $\varrho_{n,k} \in \mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R})$，使得 $(\forall \omega \in \Omega)\ \boldsymbol{x}_{n,k}(\omega) = (x_{n,k}(\omega)\varrho_{n,k}(\omega))$。综上，$\varphi$ 是正规的。

(iv)(b)⇒(iv)(a)：设 $\mathbf{C}$ 是 $(\mathsf{X} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathsf{X}} \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ 的一个非空闭子集。注意，φ 的下半连续性保证了 $\boldsymbol{G}$ 是闭的。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，由于 $\boldsymbol{G} \cap (\Omega \times (\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_n))$ 在 $(\Omega \times \mathbf{C}_n, \mathcal{T}_\Omega \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbf{C}_n})$ 中是闭的，因此由 (4.23) 以及 [7, Corollaire I.10.5 和 Th´eor`eme I.10.1] 可知，$Q_n(\boldsymbol{G} \cap (\Omega \times (\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_n)))$ 在 $(\Omega\ \mathcal{T}_\Omega)$ 中是闭的，因此属于 $\mathcal{B}_\Omega = \mathcal{F}$。于是，由 (4.24) 得，$\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{C} \cap$ 上图 $\varphi_\omega \neq \varnothing\} \in \mathcal{F}$。

⁀(iv)(c)⇒(iv)(a)：存在一个拓扑 $\mathcal{T}_\Omega$ 定义在 Ω 上，使得

$$\mathcal{T}_\Omega \subset \widetilde{\mathcal{T}_\Omega} \text{ and } \left(\Omega, \widetilde{\mathcal{T}_\Omega}\right) \text{ is a Polish space.} \tag{4.42}$$

⁀此外，根据 [36, 推论 2，第 101], 页，$(\Omega\ \mathcal{T}_\Omega)$ 的 Borel σ-代数是 $\mathcal{B}_\Omega = \mathcal{F}$。令 $\mathbf{C}$ 为 $(\mathsf{X} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathsf{X}} \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ 的一个闭子集，并暂时固定 $n \in \mathbb{N}$。由于 φ 的 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathsf{X}}$-可测性以及 (4.3) 确保了 $\boldsymbol{G} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathsf{X}\times\mathbb{R}}$，我们有 $\boldsymbol{G} \cap (\Omega \times (\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_n)) = \boldsymbol{G} \cap (\Omega \times \mathbf{C}) \cap (\Omega \times \mathbf{C}_n) \in \mathcal{B}_{\Omega\times\mathbf{C}_n}$。与此同时，对每个 $\omega \in \Omega$，

$$\left\{(\mathsf{x}, \xi) \in \mathsf{X} \times \mathbb{R} \mid (\omega, \mathsf{x}, \xi) \in \boldsymbol{G} \cap \left(\Omega \times (\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_n)\right)\right\}$$

$$= \{(x,\xi) \in X \times \mathbb{R} \mid (x,\xi) \in \mathbf{C} \cap \mathbf{C}_n \text{ and } (x,\xi) \in \operatorname{epi} \varphi_\omega\},$$
$$= \mathbf{C} \cap \mathbf{C}_n \cap \operatorname{epi} \varphi_\omega \tag{4.43}$$

$\widetilde{\ }$是紧空间 $(C_n, \mathcal{T}_{\mathbf{C}_n})$ 的一个闭子集。进而，由于 $(\Omega\ \mathcal{T}_\Omega)$ 和 $(C_n, \mathcal{T}_{\mathbf{C}_n})$ 是波兰空间，[10, 定理 1] 保证 $Q_n(\boldsymbol{G} \cap (\Omega\ \times (C \cap C_n))) \in \mathcal{B}_\Omega = \mathcal{F}$。因此，我们从 (4.24) 推得 $\{\omega \in \Omega \mid C \cap \text{上图}\, \varphi_\omega \neq \varnothing\} \in \mathcal{F}$。

(v)：令 $(Y\ \mathcal{T}_Y)$ 为 X 的强对偶。则 $(Y\ \mathcal{T}_Y)$ 是可分自反 Banach 空间。因此，(v)(a) 由 (iv)(b) 得出，而 (v)(b)由 (iv)(c) 得出。

(vi)⇒(v)(b)：令 $\mathcal{T}_\Omega$ 为 Ω 上由标准拓扑 $\mathbb{R}^M$诱导的拓扑。根据 [36,推论 1，第 102], $(\Omega\ \mathcal{T}_\Omega)$ 是卢津空间。

(vii)(a)：$(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 的下半连续性确保集合 $(\text{上图}\, \varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 是闭集。因此，由于 $(X\times\mathbb{R}, \mathcal{T}_X \boxtimes \mathcal{T}_\mathbb{R})$ 是波兰空间，[16, 定理 3.5(i)] 和 (4.2) 可得 $\boldsymbol{G} \in \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{X\times\mathbb{R}}$。因此，根据 (4.3)，$\varphi$ 是 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X$-可测的。因此，我们由 [16, 定理 5。6] 得出所述结论。

(vii)(b)⇒(vii)(a)：这由 [16, 定理 3.2(ii)]。

(viii)：f 的 $\mathcal{B}_X$-可测性意味着 φ 是 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X$-可测的。同时，由于 $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_X \boxtimes \mathcal{T}_\mathbb{R})$ 是一个苏斯林空间，我们由 [36, 命题 II.0] 推知，存在一个序列 $\{(x_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，其取值属于 epi f，使得 $\{(x_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}} =$ epi f。综上，令

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \colon \Omega \to X \colon \omega \mapsto x_n \quad \text{and} \quad \varrho_n \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon \omega \mapsto \xi_n, \tag{4.44}$$

我们由此得出，φ 是正规的。□

注 4.5 以下是关于定义 4.3 的几点观察。

(i) 定理4.4(vii)(b) 中的设定对应于 [31] 中正规性的定义。(ii) 定理 4.4(i)(a) 中的设定对应于 [38]，中正规性的定义，而后者本身又包含了 [29] 中的定义。(iii) 上述 (i) 和 (ii) 两种框架有所不同，因为前者并不要求 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$是完备的。定义 4.3 将二者统一起来，并且正如定理 4.4所示，其适用范围更广。关于非完备性在应用中的重要性，例如参见 [27] 和 [32, 第 649] 页。

5 合规空间和正规被积函数的交换规则

本节的主要结果是以下交换定理，它汇集了定理1.2的抽象原理、定义 4.1中的合规性概念，以及定义 4.3 中的正规性概念。

定理 5。 **1** 假设假设 1.1 成立，$\mathcal{X}$ 是合规的，并且 φ 是正规的。则

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \int_\Omega \varphi\big(\omega, x(\omega)\big)\mu(d\omega) = \int_\Omega \inf_{x\in X} \varphi(\omega, x)\, \mu(d\omega). \tag{5.1}$$

证明。我们应用定理 1.2。根据 φ 的正规性，依据定义 4.3，我们选取序列$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它属于 $\mathcal{L}(\Omega;X)$；并选取 $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它属于 $\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R})$，使得

$$(\forall \omega \in \Omega) \quad \big\{\big(z_n(\omega), \vartheta_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{epi} \varphi_\omega \quad \text{and} \quad \overline{\operatorname{epi} \varphi_\omega} = \overline{\big\{\big(z_n(\omega), \vartheta_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}}. \tag{5.2}$$

另一方面，假设 1.1[F] 保证 $(\forall \omega \in \Omega)\ \inf \varphi(\omega, X) < +\infty$。现在固定 $\omega \in \Omega$，并令 $\xi \in]\inf \varphi(\omega, X), +\infty[$。于是存在 $x \in X$，使得 $(x, \xi) \in$ 上图 φ_ω。因此，根据 (5.2)，我们可以得到 $(\vartheta_{k(b)}(\omega))_{b\in B}$ 的一个子网，它是 $(\vartheta_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 的子网，并且 $\vartheta_{k(b)}(\omega) \to \xi$。另一方面，

$$(\forall b \in B) \quad \inf \varphi(\omega, X) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi\big(\omega, z_n(\omega)\big) \leqslant \varphi\big(\omega, z_{k(b)}(\omega)\big) \leqslant \vartheta_{k(b)}(\omega). \tag{5.3}$$

因此，$\inf \varphi(\omega, X) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\omega, z_n(\omega)) \leqslant \xi$。反过来，令 $\xi \downarrow \inf \varphi(\omega, X)$，可得 $\inf \varphi(\omega, X) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\omega, z_n(\omega))$。因此，定理 1.2 中的性质 (ii)(a) 在 $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n = z_n - \overline{x}$ 下成立。同时，定理 1.2 中的性质 (ii)(b) 可由假设 1.1[D] 以及 $\mathcal{X}$ 的合规性推出。最后，由于根据假设 1.1[F],，函数 $(\varphi(\cdot, z_n(\cdot)))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{F}$-可测的，因此 $\inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\cdot, z_n(\cdot)) = \inf \varphi(\cdot, X)$ 也如此。□

在本节余下部分，我们将构造新的情形，作为定理5.1的具体实例，以说明交换规则成立的条件。

例 5.2 设 X 是一个带有强拓扑 $\mathcal{T}_X$ 的可分实 Banach 空间，设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，满足 $\mu(\Omega) \neq 0$；设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{L}(\Omega; X)$ 的向量子空间，并设 $\varphi: (\Omega \times X\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X) \to \overline{\mathbb{R}}$ 可测。假设满足以下条件：

(i) 对每个满足 $\mu(A) < +\infty$ 的 $A \in \mathcal{F}$ 以及每个 $z \in \mathcal{L}^\infty(\Omega; X)$，都有 $1_A z \in \mathcal{X}$。(ii) φ是正规的。(iii) 存在 $\overline{x} \in \mathcal{X}$，使得 $\int_\Omega \max\{\varphi(\cdot, \overline{x}(\cdot)) 0\} d\mu < +\infty$。

于是，交换规则 (5.1) 成立。

证明。注意，假设 1.1 满足。因此，结论由命题 4.2(ii) 和定理 5.1得出。□

例 5.3 假设 1.1 成立，且 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu)$ 是完备的，并且 $\mathcal{X}$是合规的。则交换规则（5.1）成立。

证明。结合定理 4.4(i)(a) 和定理5.1。□

将其专门应用于可分巴拿赫空间中的概率时，定理5.1 给出了取下确界与期望交换的条件。下面给出一个说明。

例 5.4 设 X 是一个可分实 Banach 空间，设 $(\Omega\ \mathcal{F},\ P)$ 是一个概率空间，设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{L}(\Omega; X)$ 的一个向量子空间，其中包含 $\mathcal{L}^\infty(\Omega; X)$，并设 $\varphi: (\Omega \times X\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X) \to \overline{\mathbb{R}}$ 是正规的。此外，令 $\phi = \inf \varphi(\cdot, X)$ 和 $\Phi: \mathcal{L}(\Omega; X) \to \mathcal{L}(\Omega; \overline{\mathbb{R}}): x \mapsto \varphi(\cdot, x(\cdot))$，并假设存在$\overline{x} \in \mathcal{X}$使得 $E \max\{\Phi(\overline{x})\ 0\} < +\infty$。则

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} E\Phi(x) = E\phi. \tag{5.4}$$

证明。这是例5.2的一个特例。□

例 5.5 假设 1.1 成立，$\mathcal{X}$是合规的，且函数 $(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$是上半连续的。那么交换规则 (5.1) 成立。

证明。由假设 1.1[F] 和定理4.4(i)(d) 可得 φ 是正规的。因此，结论可由定理5.1得出。□

例5.5 的一个重要实例是 Carath´eodory 被积函数的情形。

例5.6（Carath´eodory 被积函数）设 (X $\mathcal{T}_X$) 为 Souslin拓扑向量空间，设 (Ω $\mathcal{F}, \mu$) 为一个 σ-有限测度空间，使得 $\mu(\Omega) \neq 0$；设 $\mathcal{X}$ 为 $\mathcal{L}(\Omega; X)$ 的合规向量子空间，并设 $\varphi: \Omega \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ 为 Carath´eodory 被积函数，满足：对每个 (ω, x) $\in \Omega \times X$， $\varphi(\omega, \cdot)$ 连续且其上图为 $\varphi_\omega \neq \varnothing$，并且 $\varphi(\cdot, x)$ 是 $\mathcal{F}$-可测的。假设存在 $\overline{x} \in \mathcal{X}$，使得$\int_\Omega \max\{\varphi(\cdot, \overline{x}(\cdot)) \; 0\} d\mu < +\infty$。那么交换规则 (5.1) 成立。

证明。由于 (X $\mathcal{T}_X$) 是一个Souslin拓扑向量空间， [39, 第35F节，第 244] 表明它是一个正则Souslin空间。因此，由定理4.4(iii) 可推得 φ 是正规的，尤其是它是 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X$-可测的。因此，假设 1.1 成立。于是，例5.5 给出所需结论。 □

注 5.7 以下是与现有研究成果之间的联系。

(i) 例子 5.2统一并推广了经典结果 [15, 29, 31]:

- 它涵盖了 [31, 定理3A], 其中X 是一个欧几里得空间，并且 $\mathcal{X}$ 假设为 Rockafellar 可分解（定义见命题 4.2(iv) ）。
- 它涵盖了以下情形：[29], 其中 (Ω $\mathcal{F}$ μ) 被假设为完备，且 (i) 和(ii) 在例5.2 中被专门化为：(i') $\mathcal{X}$ 是 Rockafellar 可分解的。(ii') 函数 $(\varphi_\omega)_{\omega \in \Omega}$ 是下半连续的。当 (ii) 在例 5.2 中满足，且 (Ω $\mathcal{F}, \mu$) 完备时，这一点在定理4.4(i)(a)中得到了证明。

- 其表述为 [15, 定理 2.2], 其中 $\mathcal{X} = \left\{x \in \mathcal{L}(\Omega; X) \middle| \int_\Omega \|x(\omega)\|^p \times \mu(d\omega) < +\infty\right\}$ 满足 $p \in [1, +\infty[$。

(ii) 定理 5.1，尤其是例 5.2 的一项重要贡献在于，测度空间 (Ω $\mathcal{F}, \mu$) 不必是完备的。

(iii) 在 X 为巴拿赫空间这一特殊情形下， [15, 29, 31] 的积分交换规则的另一种理论框架由 [14, 定理 6.1], 提出，其中（1.2）右端被抽象本质下确界的积分所取代。然而， [14] 对于（1.2），除了巴拿赫空间中已知的情形外，并未提供新的情形。本文从偏序集之间单调关系的角度，对[14] 的理论框架作出一种阐释，见 [12]。

(iv) 例 5.3 涵盖了 [25, 定理 4], ，其中 $\mu(\Omega) < +\infty$ 且 $\mathcal{X}$ 是 Valadier 可分解的（定义见命题 4.2(v)）。它也涵盖了这样的情形： [38], 中 X 是苏斯林拓扑向量空间，且 $\mathcal{X}$ 是 Valadier 可分解的。(v) 例 5.4 包含了 [24, 37], 的交换规则，其中 X 是标准欧几里得空间$\mathbb{R}^N$，且 $\mathcal{X}$ 是 Rockafellar 可分解的。(vi) 例5.6 扩展了 [31, 定理3A], ，其中 X 是标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$，且 $\mathcal{X}$ 是 Rockafellar 可分解的。

6 凸分析运算与积分的交换

我们运用定理1.2的交换原理、合规性和正规性，来评估与积分函数相关的凸分析对象，即共轭函数、次微分算子、衰退函数、Moreau包络和邻近算子。该分析得出

积分函数凸微积分的新交换规则。本节中，我们采用以下记号。

记号 6.1 设 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是一个实拓扑向量空间，$(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，满足 $\mu(\Omega) \neq 0$，$\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{L}(\Omega; X)$ 的一个向量子空间，且 $\varphi: (\Omega \times X\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X) \to \overline{\mathbb{R}}$ 是一个被积函数。那么：

(i) $\widetilde{\mathcal{X}}$ 是 $\mathcal{X}$ 中按 μ-几乎处处相等的映射所构成的等价类的向量空间。(ii) $\widetilde{\mathcal{X}}$ 中 $x \in \mathcal{X}$ 的等价类记作 $\widetilde{x}$。反之，$\widetilde{\mathcal{X}}$ 中 $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$ 的任意代表元记作 x。(iii) $\mathfrak{I}_{\varphi,\ \widetilde{x}}: \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}: \widetilde{x} \mapsto \int_\Omega \varphi(\omega, x(\omega))\mu(d\omega)$。

我们需要以下结果。其第 (i) 项见 [38, 引理 4]，在$(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu)$ 完备时的特殊情形。

引理 6.2 设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，使得 $\mu(\Omega) \neq 0$，设 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是一个苏斯林局部凸实拓扑向量空间，设 $(Y\ \mathcal{T}_Y)$ 是一个可分局部凸实拓扑向量空间。假设 X 和 Y 通过双线性形式 $\langle\cdot, \cdot\rangle_{X,Y}: X \times Y \to \mathbb{R}$ 构成分离对偶，且该双线性形式与 $\mathcal{T}_X$ 和 $\mathcal{T}_Y$ 相容。则有以下结论：

(i) $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{X,\ Y}: (X \times Y\ \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y) \to \mathbb{R}$ 是可测的。

(ii) 设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}(\Omega; X)$ 和 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{L}(\Omega; Y)$ 为向量子空间，并满足以下条件：

(a) $(\forall x \in \mathcal{X})(\forall y \in \mathcal{Y}) \int_\Omega |\langle x(\omega)\ y(\omega)\rangle_{X,\ Y}|\mu(d\omega) < +\infty$。

(b) $\bigcup_{x\in X} \{1_A x \mid A \in \mathcal{F}$ 以及 $\mu(A) < +\infty\} \subset \mathcal{X}$。(c) $\bigcup_{y\in Y} \{1_A y \mid A \in \mathcal{F}$ 以及 $\mu(A) < +\infty\} \subset \mathcal{Y}$。

于是，$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 通过双线性形式 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 构成分离对偶，该形式定义为

$$(\forall \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{X}})(\forall \widetilde{y} \in \widetilde{\mathcal{Y}}) \quad \langle \widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle = \int_\Omega \big\langle x(\omega), y(\omega)\big\rangle_{X,Y} \mu(d\omega). \tag{6.1}$$

证明。（i）：由 [39, 第35F节，第 244] 页，我们可知 $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是一个正则苏斯林空间。另一方面，由于 $\mathcal{T}_Y$ 和 $\mathcal{T}_X$ 与 $\langle\cdot、\ \cdot\rangle_{X、Y}$ 相容，函数 $(\langle x\cdot\rangle_{X,Y})_{x\in X}$ 是 $\mathcal{B}_Y$-可测的，而函数 $(\langle\cdot, y\rangle_{X,Y})_{y\in Y}$ 是连续的。因此，定理 4.4(iii) 表明 $\langle\cdot, \cdot\rangle_{X,Y}: (X \times Y\ \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y) \to \mathbb{R}$ 是可测的。

（ii）：注意，（i）保证对于每个 $x \in \mathcal{X}$ 和每个 $y \in \mathcal{Y}$，$\langle x(\cdot)\ y(\cdot)\rangle_{X,Y}$ 都是 $\mathcal{F}$-可测的。现在取 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $(Y\ \mathcal{T}_Y)$ 的稠密子集，并取满足 $(\forall \widetilde{y} \in \mathcal{Y})\ \langle \widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle = 0$ 的 $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个满足 $\mu(A) < +\infty$ 的 $A \in \mathcal{F}$，由于 (ii)(c) 保证 $1_A y_n \in \mathcal{Y}$，由 (6.1) 可得 $\int_A \langle x(\omega), y_n\rangle_{X,Y}\mu(d\omega) = \int_\Omega \langle x(\omega)\ 1_A(\omega) y_n\rangle_{X,Y}\mu(d\omega) = 0$。因此，由于 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 是 σ-有限的，可知 $(\forall n \in \mathbb{N})\ \langle x(\cdot), y_n\rangle_{X,Y} = 0$ μ-几乎处处成立。因此 $\widetilde{x} = 0$。同理，$(\forall \widetilde{y} \in \mathcal{Y})\ \langle\cdot, \widetilde{y}\rangle = 0 \Rightarrow \widetilde{y} = 0$，证明完毕。□

本节的主要结果将在以下环境中陈述，借助引理6.2，该环境定义良好。

假设 6.3

[A] $(X\ \mathcal{T}_X)$ 是苏斯林局部凸实拓扑向量空间，且 $(Y\ \mathcal{T}_Y)$ 是可分局部凸实拓扑向量空间。此外，X 和 Y 通过双线性形式 $\langle\cdot, \cdot\rangle_{X,\ Y}: X \times Y \to \mathbb{R}$ 构成分离对偶，与之相容的是 $\mathcal{T}_X$ 和 $\mathcal{T}_Y$。

[B] $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，使得 $\mu(\Omega) \neq 0$。
[C] $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}(\Omega; X)$ 和 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{L}(\Omega; Y)$ 是向量子空间，满足 $(\forall x \in \mathcal{X})(\forall y \in \mathcal{Y}) \int_\Omega |\langle x(\omega)\ y(\omega)\rangle_{X, Y}| \mu(d\omega) < +\infty$。此外，

$$\mathcal{X} \text{ is compliant and } \bigcup_{y \in Y} \{1_A y \mid A \in \mathcal{F} \text{ and } \mu(A) < +\infty\} \subset \mathcal{Y}. \tag{6.2}$$

[~ ~D] $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$通过双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$构成分离对偶，该形式定义如下：

$$(\forall \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{X}})(\forall \widetilde{y} \in \widetilde{\mathcal{Y}}) \quad \langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle = \int_\Omega \big\langle x(\omega), y(\omega) \big\rangle_{X,Y} \mu(d\omega), \tag{6.3}$$

并且它们配备了与 $\langle \cdot, \cdot \rangle$相容的局部凸豪斯多夫拓扑。[E] φ: $(\Omega \times X\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X) \to]-\infty, +\infty]$是正规的，我们记作 φ^*: $\Omega \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$: $(\omega, y) \mapsto \varphi^*_\omega(y)$。[F] 有效定义域$\mathfrak{I}_{\varphi, \tilde{x}} \neq \varnothing$。

命题 6.4 假设 6.3 成立。那么 φ^* 是 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_Y$可测的。

证明。根据假设 6.3[E] 和定义 4.3，存在序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{L}(\Omega;X)$以及 $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R})$，使得

$$(\forall \omega \in \Omega) \quad \big\{\big(x_n(\omega), \varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{epi} \varphi_\omega \quad \text{and} \quad \overline{\operatorname{epi} \varphi_\omega} = \overline{\big\{\big(x_n(\omega), \varrho_n(\omega)\big)\big\}_{n \in \mathbb{N}}}. \tag{6.4}$$

Set

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \psi_n \colon \Omega \times Y \to \mathbb{R} \colon (\omega, y) \mapsto \langle x_n(\omega), y \rangle_{X,Y} - \varrho_n(\omega). \tag{6.5}$$

于是，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，假设 6.3[A]–[C] 和引理 6.2(i) 保证 ψ_n 是 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_Y$-可测的。另一方面，由于函数 $(\langle \cdot、 y\rangle_X、 Y)_{y \in Y}$连续，由假设 6.3[E], (2.3) 和 (6.4) 可得

$$\begin{aligned} \big(\forall (\omega, y) \in \Omega \times Y\big) \quad \varphi^*(\omega, y) &= \sup_{(x,\xi) \in \operatorname{epi} \varphi_\omega} \big(\langle x, y\rangle_{X,Y} - \xi\big) \\ &= \sup_{(x,\xi) \in \overline{\operatorname{epi} \varphi_\omega}} \big(\langle x, y\rangle_{X,Y} - \xi\big) \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \big(\langle x_n(\omega), y\rangle_{X,Y} - \varrho_n(\omega)\big) \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \psi_n(\omega, y). \end{aligned} \tag{6.6}$$

因此，φ^* 是 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_Y$-可测的。 □

我们首先研究积分函数的共轭函数和次微分。

定理 6.5 假设 6.3 成立。则满足以下条件：
(i) $\mathfrak{I}^*_{\varphi,\ \tilde{x}} = \mathfrak{I}_{\varphi^*,\ \tilde{y}}$. (ii) 假设 $\mathfrak{I}_{\varphi,\ \tilde{x}}$是真，令 $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$，并令 $\widetilde{y} \in \mathcal{Y}$。则 $\widetilde{y} \in \partial \mathfrak{I}_{\varphi,\ \tilde{x}}(\widetilde{x}) \Leftrightarrow y(\omega) \in \partial \varphi_\omega(x(\omega))$ 对μ-几乎处处的 $\omega \in \Omega$成立。

证明。 (i)：根据假设 6.3[E] 和命题 6.4， $\mathfrak{I}_{\varphi,\,\widetilde{x}}$ 以及 $\mathfrak{I}_{\varphi^*,\,\widetilde{y}}$ 均定义良好。此外，存在序列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{L}(\Omega;X)$，以及序列 $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{L}(\Omega;\mathbb{R})$，使得

$$(\forall\omega\in\Omega)\quad \big\{\big(z_n(\omega),\vartheta_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}\subset \operatorname{epi}\varphi_\omega \quad\text{and}\quad \overline{\operatorname{epi}\varphi_\omega}=\overline{\big\{\big(z_n(\omega),\vartheta_n(\omega)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}}. \tag{6.7}$$

令 $\widetilde{y}\in\mathcal{Y}$，定义 $\psi\colon\Omega\times X\to\left]-\infty,+\infty\right]\colon(\omega,x)\mapsto\varphi_\omega(x)-\langle x\ y(\omega)\rangle_{X,Y}$，并注意到 $(\forall\omega\in\Omega)$ 上图 $\psi_\omega\neq\varnothing$。假设 6.3[E] 和引理 6.2(i) 意味着

$$\psi \text{ is } \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X\text{-measurable.} \tag{6.8}$$

此外，利用线性泛函的连续性 $(\langle\cdot,\ y\rangle_{X,\ Y})_{y\in Y}$，我们由（6.7）推得

$$\begin{aligned}(\forall\omega\in\Omega)\quad \inf\psi(\omega,X)&=\inf_{(x,\xi)\in\operatorname{epi}\varphi_\omega}\big(\xi-\langle x,y(\omega)\rangle_{X,Y}\big)\\&=\inf_{(x,\xi)\in\overline{\operatorname{epi}\varphi_\omega}}\big(\xi-\langle x,y(\omega)\rangle_{X,Y}\big)\\&=\inf_{n\in\mathbb{N}}\big(\vartheta_n(\omega)-\langle z_n(\omega),y(\omega)\rangle\big)\\&\geqslant\inf_{n\in\mathbb{N}}\big(\varphi_\omega\big(z_n(\omega)\big)-\langle z_n(\omega),y(\omega)\rangle\big)\\&=\inf_{n\in\mathbb{N}}\psi\big(\omega,z_n(\omega)\big)\\&\geqslant\inf\psi(\omega,X).\end{aligned} \tag{6.9}$$

因此，$(\forall\omega\in\Omega)\ \inf\psi(\omega,X)=\inf_{n\in\mathbb{N}}\psi(\omega,z_n(\omega))$。将此与 (6.8) 结合，我们推得 $\inf\psi(\cdot,X)$ 是 $\mathcal{F}$-可测的，且 ψ 满足定理 1.2 中的性质 (ii)(a)，其中 $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_n=z_n-\overline{x}$。另一方面，得益于假设 6.3[B] 以及 $\mathcal{X}$ 的合规性，定理 1.2 中的性质 (ii)(b) 得以满足。因此，根据 (6.3) 和定理 1.2，我们得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^*_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}(\widetilde{y})&=\sup_{\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{X}}}\big(\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle-\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}(\widetilde{x})\big)\\&=\sup_{x\in\mathcal{X}}\left(\int_\Omega\big\langle x(\omega),y(\omega)\big\rangle_{X,Y}\mu(d\omega)-\int_\Omega\varphi\big(\omega,x(\omega)\big)\mu(d\omega)\right)\\&=-\inf_{x\in\mathcal{X}}\int_\Omega\psi\big(\omega,x(\omega)\big)\mu(d\omega)\\&=-\int_\Omega\inf_{x\in X}\psi(\omega,x)\,\mu(d\omega)\\&=\int_\Omega\varphi^*_\omega\big(y(\omega)\big)\mu(d\omega),\end{aligned} \tag{6.10}$$

如所要求。

(ii)：由于函数 $(\varphi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 根据假设 6.3[E]，是真函数，我们由（2.5）、(i)、（6.3）以及 Fenchel–Young 不等式得到

$$\begin{aligned}\widetilde{y}\in\partial\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}(\widetilde{x})&\Leftrightarrow\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}(\widetilde{x})+\mathfrak{I}_{\varphi^*,\widetilde{\mathcal{Y}}}(\widetilde{y})=\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle\\&\Leftrightarrow\int_\Omega\varphi_\omega\big(x(\omega)\big)\mu(d\omega)+\int_\Omega\varphi^*_\omega\big(y(\omega)\big)\mu(d\omega)=\int_\Omega\big\langle x(\omega),y(\omega)\big\rangle_{X,Y}\mu(d\omega)\\&\Leftrightarrow\varphi_\omega\big(x(\omega)\big)+\varphi^*_\omega\big(y(\omega)\big)=\big\langle x(\omega),y(\omega)\big\rangle_{X,Y}\ \mu\text{-a.e.}\\&\Leftrightarrow y(\omega)\in\partial\varphi_\omega\big(x(\omega)\big)\ \mu\text{-a.e.},\end{aligned} \tag{6.11}$$

这就完成了证明。 □

定理 6.5(i) 的一个重要推论如下。

命题 6.6 假设 6.3 成立，$(\mathsf{Y}\ \mathcal{T}_{\mathsf{Y}})$ 是苏斯林空间，有效定义域 $\mathfrak{I}_{\varphi^*,\widetilde{\mathcal{Y}}} \neq \varnothing$，$\mathcal{Y}$ 是合规的，并且$(\forall \omega \in \Omega)$ $\varphi_\omega \in \Gamma_0(\mathsf{X})$。则满足以下条件：

(i) $\widetilde{\mathfrak{I}}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}} \in \Gamma_0(\mathcal{X})$。(ii) 设 递归函数 $\varphi\colon \Omega \times \mathsf{X} \to]-\infty,+\infty] : (\omega,\mathsf{x}) \mapsto$ (递归函数 φ_ω)(x)。则 递归函数 φ 是 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{\mathsf{X}}$-可测的，并且递归函数 $\widetilde{\mathfrak{I}}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}} = \widetilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{rec}\,\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}$。

证明。 (i)：设 $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$ 并令

$$\psi\colon \Omega\times\mathsf{Y}\to\,]-\infty,+\infty] : (\omega,\mathsf{y}) \mapsto \varphi_\omega^*(\mathsf{y}) - \langle x(\omega),\mathsf{y}\rangle_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} \quad \text{and} \quad \vartheta = \inf\psi(\cdot,\mathsf{Y}). \tag{6.12}$$

根据假设 6.3[E],

$$\varphi\big(\cdot,x(\cdot)\big) \text{ is } \mathcal{F}\text{-measurable}, \tag{6.13}$$

由命题6.4 和引理6.2(i) 可得

$$\psi \text{ is } \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{\mathsf{Y}}\text{-measurable}. \tag{6.14}$$

此外，对于每个 $\omega\in\Omega$，由于 $\varphi_\omega \in \Gamma_0(\mathsf{X})$，$\varphi_\omega^*$ 是真，因此是上图 $\psi_\omega \neq \varnothing$。另一方面，Fenchel–Moreau 双共轭定理给出

$$(\forall \omega\in\Omega)\quad \vartheta(\omega) = -\varphi_\omega^{**}\big(x(\omega)\big) = -\varphi_\omega\big(x(\omega)\big) \tag{6.15}$$

因此，由（6.13）可知，ϑ 是 $\mathcal{F}$-可测的。现在定义

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad M_n\colon \Omega\to 2^{\mathsf{Y}} : \omega \mapsto \begin{cases} \{\mathsf{y}\in\mathsf{Y} \mid \psi(\omega,\mathsf{y}) \leqslant -n\}, & \text{if } \vartheta(\omega) = -\infty; \\ \{\mathsf{y}\in\mathsf{Y} \mid \psi(\omega,\mathsf{y}) \leqslant \vartheta(\omega) + 2^{-n}\}, & \text{if } \vartheta(\omega)\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.16}$$

暂时固定 $n\in\mathbb{N}$。由 (6.14)，$\{(\omega,\mathsf{y}) \mid \mathsf{y}\in M_n(\omega)\} \in \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{\mathsf{Y}}$。因此，由于 $(\mathsf{Y}\ \mathcal{T}_{\mathsf{Y}})$ 是一个苏斯林空间，[16, 定理 5.7] 保证存在 $y_n \in \mathcal{L}(\Omega;\mathsf{Y})$ 和 $B_n\in\mathcal{F}$，使得 $\mu(B_n)=0$，且 $(\forall\omega\in\complement B_n)$ $y_n(\omega)\in M_n(\omega)$。现在令 $B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$。那么 $\mu(B)=0$，并且根据 (6.12) 和 (6.16),

$$\big(\forall\omega\in\complement B\big)(\forall n\in\mathbb{N})\quad \vartheta(\omega) \leqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} \psi\big(\omega,y_k(\omega)\big) \leqslant \psi\big(\omega,y_n(\omega)\big) \leqslant \begin{cases} -n, & \text{if } \vartheta(\omega)=-\infty; \\ \vartheta(\omega)+2^{-n}, & \text{if } \vartheta(\omega)\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.17}$$

因此，令 $n\uparrow+\infty$ 可得 $(\forall\omega\in\complement B)$ $\vartheta(\omega) =$ 下确界$_{n\in\mathbb{N}}\,\psi(\omega,\ y_n(\omega))$。因此，由于 $\mathcal{Y}$ 是合规的，定理 (ii) 1.2 中的性质 成立。进而，由（6.15）、定理 1.2、（6.3）以及定理 6.5(i)，我们推得

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}(\widetilde{x}) &= \int_\Omega \varphi\big(\omega,x(\omega)\big)\mu(d\omega) \\ &= -\int_\Omega \inf_{\mathsf{y}\in\mathsf{Y}} \psi(\omega,\mathsf{y})\,\mu(d\omega) \\ &= -\inf_{y\in\mathcal{Y}} \int_\Omega \psi\big(\omega,y(\omega)\big)\mu(d\omega) \\ &= \sup_{y\in\mathcal{Y}} \left(\int_\Omega \big\langle x(\omega),y(\omega)\big\rangle_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}\mu(d\omega) - \int_\Omega \varphi_\omega^*\big(y(\omega)\big)\mu(d\omega)\right) \\ &= \sup_{\widetilde{y}\in\widetilde{\mathcal{Y}}} \big(\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle - \mathfrak{I}^*_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}(\widetilde{y})\big) \end{aligned}$$

$$= \mathfrak{I}^{**}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}(\widetilde{x}). \tag{6.18}$$

~因此 $\mathfrak{I}_{\varphi,\ \widetilde{\mathcal{X}}} = \mathfrak{I}^{**}_{\varphi}$, $\widetilde{\mathcal{X}}$并且，由于 $\mathfrak{I}_{\varphi,\ \widetilde{\mathcal{X}}}$为真，我们得出 $\mathfrak{I}_{\varphi,\ \widetilde{\mathcal{X}}} \in \Gamma_0\ (\mathcal{X})$ 。

(ii)： φ 的正规性意味着它是 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X$-可测的，并且存在 $u \in \mathcal{L}(\Omega; X)$，使得$(\forall \omega \in \Omega)\ u(\omega) \in$有效定义域 φ_ω。因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$，函数 $(\Omega \times X\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X) \to]-\infty,+\infty] : (\omega, x) \mapsto \varphi_\omega(u(\omega) + nx) - \varphi_\omega(u(\omega))$ 是可测的。由于，根据(2.6),

$$(\forall \omega \in \Omega)(\forall x \in X)\quad (\operatorname{rec}\varphi)(\omega, x) = (\operatorname{rec}\varphi_\omega)(x) = \lim_{\mathbb{N} \ni n \uparrow +\infty} \frac{\varphi_\omega\big(u(\omega) + nx\big) - \varphi_\omega\big(u(\omega)\big)}{n}, \tag{6.19}$$

~由此可知，rec φ是 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_X$-可测的。现在设 $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$和 $\widetilde{z} \in \operatorname{dom} \mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{x}}$。那么，对于几乎处处的 μ, $\omega \in \Omega$, $z(\omega) \in \operatorname{dom} \varphi_\omega$，因此，由 φ_ω的凸性可知，函数 θ: $]0,+\infty[\to]-\infty,+\infty]$: $\alpha \mapsto (\varphi_\omega(z(\omega) + \alpha x(\omega)) - \varphi_\omega(z(\omega)))/\alpha$ 是递增的。因此，利用（2.6）和单调收敛定理，我们由(i)推得:

$$\begin{aligned}
\big(\operatorname{rec}\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}\big)(\widetilde{x}) &= \lim_{\alpha\uparrow+\infty} \frac{\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}(\widetilde{z} + \alpha\widetilde{x}) - \mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{\mathcal{X}}}(\widetilde{z})}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\uparrow+\infty} \int_\Omega \frac{\varphi_\omega\big(z(\omega) + \alpha x(\omega)\big) - \varphi_\omega\big(z(\omega)\big)}{\alpha} \mu(d\omega) \\
&= \int_\Omega \lim_{\alpha\uparrow+\infty} \frac{\varphi_\omega\big(z(\omega) + \alpha x(\omega)\big) - \varphi_\omega\big(z(\omega)\big)}{\alpha}\, \mu(d\omega) \\
&= \int_\Omega (\operatorname{rec}\varphi_\omega)\big(x(\omega)\big)\mu(d\omega),
\end{aligned} \tag{6.20}$$

如前所述。 □

希尔伯特空间凸分析中的两个关键要素是（2.7）的莫罗包络和（2.9）的近端算子 [1, 19]。为了计算积分函数的这些量，我们首先注意到，对于与其对偶空间相认同的希尔伯特空间，假设 6.3 可简化如下。

假设6.7

[A] X 是一个可分实希尔伯特空间，其内积为 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_X$，相应范数为 $\|\cdot\|_X$，强拓扑为 $\mathcal{T}_X$。[B] $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，满足 $\mu(\Omega) \neq 0$。

[C] $\mathcal{X} = \big\{x \in \mathcal{L}(\Omega; X) \big| \int_\Omega \|x(\omega)\|_X^2\, \mu(d\omega) < +\infty\big\}$ 且 $\widetilde{\mathcal{X}}$是通常的实希尔伯特空间 $L^2(\Omega;X)$，其内积为

$$(\forall \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{X}})(\forall \widetilde{y} \in \widetilde{\mathcal{X}})\quad \langle \widetilde{x} \mid \widetilde{y} \rangle = \int_\Omega \langle x(\omega) \mid y(\omega) \rangle_X\, \mu(d\omega). \tag{6.21}$$

[D] φ: $(\Omega \times X\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X) \to]-\infty,\ +\infty]$ 是一个正规被积函数，使得 $(\forall \omega \in \Omega)\ \varphi_\omega \in \Gamma_0(X)$。[E] 有效定义域 $\mathfrak{I}_{\varphi,\ \widetilde{\mathcal{X}}} \neq \varnothing$ 且有效定义域$\mathfrak{I}_{\varphi^*,\ \widetilde{\mathcal{X}}} \neq \varnothing$。

命题6.8 假设 6.7 成立，并令 $\gamma \in]0,\ +\infty[$。则满足以下条件:

~ ~*(i)* 设 $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$和 $\widetilde{p} \in \mathcal{X}$。则 $\widetilde{p} = \mathit{prox}^{\gamma\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{x}}}\widetilde{x} \Leftrightarrow {}^{p}(\omega) = \mathit{prox}^{\gamma\varphi_\omega}(x(\omega))$ 对 μ-几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 成立。*(ii)* 设 ${}^{\gamma}\varphi: \Omega \times X \to]-\infty,+\infty]: (\omega, x) \mapsto {}^{\gamma}(\varphi_\omega)(x)$。则 ${}^{\gamma}\varphi$ 是正规且 ${}^{\gamma}\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{x}} = \mathfrak{I}_{{}^{\gamma}\varphi,\widetilde{x}}$。

证明。由于假设 6.7 是假设 6.3的一个特例，我们首先由命题 6.6(i)~推出 $\mathfrak{I}_{\varphi,\ \tilde{x}} \in \Gamma_0(\mathcal{X})$。

(i)：我们由（2.9）和定理6.5(ii) 推导出

$$\begin{aligned}\widetilde{p} = \operatorname{prox}_{\gamma\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{x}}}\widetilde{x} &\Leftrightarrow \widetilde{x}-\widetilde{p} \in \gamma\partial\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{x}}(\widetilde{p})\\ &\Leftrightarrow x(\omega)-p(\omega) \in \gamma\partial\varphi_\omega\big(p(\omega)\big) \text{ for } \mu\text{-almost every } \omega\in\Omega\\ &\Leftrightarrow p(\omega) = \operatorname{prox}_{\gamma\varphi_\omega}x(\omega) \text{ for } \mu\text{-almost every } \omega\in\Omega. \end{aligned} \tag{6.22}$$

(ii)：由于 $\mathcal{B}_{\mathsf{X}\times\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathsf{X}}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，由假设 6.7[D] 和定义 4.3 可知，存在一个序列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{L}(\Omega;\ \mathsf{X}\times\mathbb{R})$，使得

$$(\forall\omega\in\Omega)\quad \operatorname{epi}\varphi_\omega = \overline{\{\boldsymbol{x}_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}}. \tag{6.23}$$

设 $\mathbf{V} = \{(\mathrm{x}\ \xi) \in \mathsf{X}\times\mathbb{R} \mid \|\mathrm{x}\|_{\mathsf{X}}^2/(2\gamma) < \xi\}$。那么 $\mathbf{V}$ 是开集，因此，对于每个 $\mathbf{C} \subset \mathsf{X}\times\mathbb{R}$，$\mathbf{C}+\mathbf{V} = \mathbf{C}+\overline{\mathbf{V}}$。因此，由（2.7）和（6.23）可得

$$\begin{aligned}(\forall\omega\in\Omega)\quad \{(\mathrm{x},\xi)\in\mathsf{X}\times\mathbb{R} \mid {}^{\gamma}(\varphi_\omega)(\mathrm{x}) < \xi\} &= \{(\mathrm{x},\xi)\in\mathsf{X}\times\mathbb{R} \mid \varphi_\omega(\mathrm{x}) < \xi\} + \mathbf{V}\\ &= \overline{\{(\mathrm{x},\xi)\in\mathsf{X}\times\mathbb{R} \mid \varphi_\omega(\mathrm{x}) < \xi\}} + \mathbf{V}\\ &= \operatorname{epi}\varphi_\omega + \mathbf{V}\\ &= \overline{\{\boldsymbol{x}_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}} + \mathbf{V}\\ &= \{\boldsymbol{x}_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}} + \mathbf{V}\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\big(\boldsymbol{x}_n(\omega)+\mathbf{V}\big). \end{aligned} \tag{6.24}$$

因此，对于每个 \(x\) $\in$X 和每个 $\xi\in\mathbb{R}$，由于 \((x ξ)\) $-\mathrm{V} \in \mathcal{B}_{\mathsf{X}\times\mathbb{R}}$ 且 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset$ \(\mathcal{L}(\Omega;X $\times\mathbb{R}$)，我们得到

$$\{\omega\in\Omega \mid {}^{\gamma}(\varphi_\omega)(\mathrm{x}) < \xi\} = \left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; (\mathrm{x},\xi)\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\big(\boldsymbol{x}_n(\omega)+\mathbf{V}\big)\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\boldsymbol{x}_n^{-1}\big((\mathrm{x},\xi)-\mathbf{V}\big) \in \mathcal{F}, \tag{6.25}$$

这表明 $({}^{\gamma}\varphi)(\cdot,\mathrm{x})$ 是 $\mathcal{F}$-可测的。因此，由于 $(\mathrm{X}\ \mathcal{T}_{\mathsf{X}})$ 是 Fr´echet 空间，定理 4.4(ii)(b) 保证 ${}^{\gamma}\varphi$ 是正规的。还需证明 ${}^{\gamma}\mathfrak{I}_{\varphi,\tilde{x}} = \mathfrak{I}_{{}^{\gamma}\varphi,\tilde{x}}$。令 $\widetilde{x}\in\mathcal{X}$，并设 $\widetilde{p} =$近端算子$_{\gamma\mathfrak{I}_{\varphi,\tilde{x}}}\widetilde{x}$。那么，根据 (i)，对 μ-几乎处处的 $\omega\in\Omega$，有 $p(\omega) =$近端算子$_{\gamma\varphi_\omega}(x(\omega))$，因此，由 (2.8) 得 ${}^{\gamma}(\varphi_\omega)(x(\omega)) = \varphi_\omega(p(\omega)) + \|x(\omega) - p(\omega)\|_{\mathsf{X}}^2/(2\gamma)$。因此

$$\begin{aligned}{}^{\gamma}\mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{x}}(\widetilde{x}) &= \mathfrak{I}_{\varphi,\widetilde{x}}(\widetilde{p}) + \frac{1}{2\gamma}\|\widetilde{x}-\widetilde{p}\|_{\widetilde{x}}^2\\ &= \int_\Omega \varphi_\omega\big(p(\omega)\big)\mu(d\omega) + \frac{1}{2\gamma}\int_\Omega \|x(\omega)-p(\omega)\|_{\mathsf{X}}^2\mu(d\omega)\\ &= \int_\Omega {}^{\gamma}(\varphi_\omega)\big(x(\omega)\big)\mu(d\omega)\\ &= \mathfrak{I}_{{}^{\gamma}\varphi,\widetilde{x}}(\widetilde{x}), \end{aligned} \tag{6.26}$$

由此得证。 □

注 6.9 定理6.5、命题 6.6和命题 6.8 在多个方面拓展了当前研究成果，尤其是当 $(\Omega\ \mathcal{F},\mu)$ 时，不再要求其完备；当 X 为无限维时亦如此。

(i) 定理 6.5(i) 的结论最早出现在 [28, 定理 2]中，当时仅考虑 X 为标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 且 $\mathcal{X}$ 为 Rockafellar 可分解的特殊情形（定义见命题 4.2(iv)）。(ii) 根据命题 4.2(iv) 和定理 4.4(i)(a), 定理 6.5 涵盖了 [29, 定理 2 和公式 (25)]（另见 [30, 定理 21]）；其中 X 为可分 Banach 空间， $\mathcal{X}$ 为 Rockafellar 可分解，且 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 完备。(iii) 定理 6.5(i) 的结论见于 [38] ，当时仅考虑 $\mathcal{X}$ 为 Valadier 可分解（定义见命题4.2(v)）且 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 完备的特殊情形。(iv) 命题 6.6(i) 涵盖了 [29, 推论，第 227], 页；其中 X 为可分 Banach 空间， $\mathcal{X}$ 为 Rockafellar 可分解，且 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 完备。(v) 命题 6.6(ii) 的结论最早出现在 [3, 命题 1] 中，当时讨论的是 X 为可分自反 Banach 空间、 $\mathcal{X}$为 Rockafellar 可分解，且 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 为完备概率空间的情形。另一种特殊情形见于 [22, 定理 2], , 其中 $\mathcal{X}$ 为 Valadier 可分解，且 $X = \mathbb{R}^N$ 或 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 完备。(vi) 命题 6.8(i) 见于 [1, 命题 24.13] , 其特殊情形为 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 完备，对每个 $\omega \in \Omega\ \varphi_\omega = f$，且 $\mu(\Omega) < +\infty$ 或 $f \geqslant f(0) \geqslant 0$。

参考文献

[1] H. H. Bauschke 和 P. L. Combettes，《Hilbert 空间中的凸分析与单调算子理论》，第 2 版。Springer，纽约，2017。[2] P. Billingsley，《概率测度的收敛》。Wiley，纽约，1968。[3] J.-M. Bismut，《凸积分与概率》，J. Math. Anal. Appl.，第 42 卷，第 639–673 页，1973。[4] V. I. Bogachev，《测度论》，第 I 卷。Springer，柏林，2007。[5] G. Bouchitt´e 和 M. Valadier，《测度空间上凸泛函的积分表示》，J. Funct. Anal.，第 80 卷，第 398–420 页，1988。[6] N. Bourbaki，《积分论》第 9 章。Hermann，巴黎，1969。英文译本：《积分论》第 7–9 章。Springer，纽约，2004。[7] N. Bourbaki，《一般拓扑学》第 1–4 章。Hermann，巴黎，1971。英文译本：《一般拓扑学》第 1–4 章。Springer，纽约，1989。[8] N. Bourbaki，《一般拓扑学》第 5–10 章。Hermann，巴黎，1974。英文译本：《一般拓扑学》第 5–10 章。Springer，纽约，1989。[9] N. Bourbaki，《拓扑向量空间》第 1–5 章。Masson，巴黎，1981。英文译本：《拓扑向量空间》第 1–5 章。Springer，纽约，1987。[10] L. D. Brown 和 R. Purves，《极值的可测选择》，Ann. Statist.，第 1 卷，第 902–912 页，1973。[11] C. Castaing 和 M. Valadier，《凸分析与可测多值函数》。Springer，柏林，1977。[12] J.-P. Chancelier、M. De Lara 和 B. Tran，《偏序集上的最小化交换定理》，J. Math. Anal. Appl.，第 509 卷，文章编号 125927，2022。

[13] R. Correa、A. Hantoute 和 P. P´erez-Aros，《资格条件下凸积分函数次微分的刻画》，J. Funct. Anal.，第 277 卷，第 227–254 页，2019。[14] E. Giner，《下确界与积分符号交换的充要条件》，Set-Valued Var. Anal.，第 17 卷，第 321–357 页，2009。[15] F. Hiai 和 H. Umegaki，《多值函数的积分、条件期望与鞅》，J. Multivariate Anal.，第 7 卷，第 149–182 页，1977。[16] C. J. Himmelberg，《可测关系》，Fund. Math.，第 87 卷，第 53–72 页，1975。[17] A. D. Ioffe 和 V. M. Tihomirov，《极值问题理论》。莫斯科，1974。英文译本：《极值问题理论》。North-Holland，阿姆斯特丹，1979。[18] V. L. Levin，《可测函数空间中的凸分析及其在数学与经济学中的应用》。Nauka，莫斯科，1985。[19] J. J. Moreau，《希尔伯特空间中的近端算子与对偶性》，Bull. Soc. Math. France，第 93 卷，第 273–299 页，1965。[20] J. J. Moreau，《凸泛函》（Jean Leray 偏微分方程研讨班，第 2 期）。法兰西公学院，巴黎，1966–1967。[21] J. Neveu，《概率论的数学基础》，Masson 出版，巴黎，1970。[22] T. Pennanen 和 A.-P. Perkki¨o，《正则过程的凸积分泛函》，Stochastic Process. Appl.，第 128 卷，第 1652–1677 页，2018。[23] T. Pennanen 和 A.-P. Perkki¨o，《非线性最优传输中的凸对偶性》，J. Funct. Anal.，第 277 卷，第 1029–1060 页，2019。[24] T. Pennanen 和 A.-P. Perkki¨o，《凸随机优化——离散时间中的动态规划与对偶》，即将出版。[25] A.-P. Perkki¨o 和 E. Trevi˜no-Aguilar，《右连续有左极限过程的凸积分泛函》，预印本，2022。[26] W. R. Pestman，《Skorokhod 拓扑中线性算子的可测性》，Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin，第 2 卷，第 381–388 页，1995。[27] T. J. Ransford，《可预测集与集值过程》，载于：概率研讨班 XXIV，1988/89；载于：数学讲义，第 1426 卷，Springer，柏林，1990，第 41–45 页。[28] R. T. Rockafellar，《作为凸泛函的积分》，Pacific J. Math.，第 24 卷，第 525–539 页，1968。[29] R. T. Rockafellar，《凸积分泛函与对偶性》，载于：《非线性泛函分析论文集》，E. H. Zarantonello（编），第 215–236 页。Academic Press，纽约，1971。[30] R. T. Rockafellar，《共轭对偶性与优化》。SIAM，费城，宾夕法尼亚州，1974。[31] R. T. Rockafellar，《积分泛函、正规被积函数与可测选择》，载于：《非线性算子与变分法》，J. P. Gossez、E. J. Lami Dozo、J. Mawhin 和 L. Waelbroeck（编），第 157–207 页。Springer，柏林，1976。[32] R. T. Rockafellar 和 R. J. B. Wets，《变分分析》，第 3 次印刷。Springer，纽约，2009。[33] W. Rudin，《泛函分析》，第 2 版。McGraw-Hill，纽约，1991。[34] J. Saint-Pierre，《关于正则苏斯林空间的一点注记》，C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A，第 282 卷，第 1425–1427 页，1976。[35] H. H. Schaefer，《拓扑向量空间》，第 2 版。Springer，纽约，1999。

[36] L. Schwartz，《任意拓扑空间上的拉东测度与柱状测度》。塔塔基础研究所，孟买，1973年。[37] A. Shapiro、D. Dentcheva 和 A. Ruszczy´nski，《随机规划讲义》，第3版。SIAM，费城，宾夕法尼亚州，2021年。[38] M. Valadier，苏斯林局部凸空间上的凸被积函数，《太平洋数学杂志》，第59卷，267–276页，1975年。[39] S. Willard，《一般拓扑学》。Addison-Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1970年。[40] C. Z˘alinescu，《一般向量空间中的凸分析》。世界科技出版公司，里弗埃奇，新泽西州，2002年。