arXiv:2305.04882v2 [math.AG] 9 Oct 2024

L-克洛斯特曼层的 L 函数

YICHEN QIN

摘要。本文研究了由 Fresán、Sabbah 和 Yu 构造的克洛斯特曼层对称幂相关的一族动机 M^k_{n+1}。他们证明，对于 $n=1$，M^k_2 的 L-函数可亚纯地延拓至 $\mathbb{C}$，并满足 Broadhurst 和 Roberts 猜想的函数方程。我们的工作旨在将这些结果推广至某些动机 M^k_{n+1} 的 L-函数（其中 $n>1$），以及其他相关的二维动机。具体而言，我们证明了若干埃文斯型猜想，这些猜想联系了克洛斯特曼层的矩与模形式的傅里叶系数。

目录

1. 引言2. 克洛斯特曼层的性质 3. 与克洛斯特曼 1
矩相关的动机 4. L-克洛斯特曼层的L函数 5. 5
Evans型猜想 A. 矩的计算 参考文献 17
20
29
35
37

1. 引言

克洛斯特曼和是有限域上的指数和，对每个素数的幂$q=p^r$ 及每个 $a\in\mathbb{F}_q$定义为

$$\mathrm{Kl}_2(a;q):=\sum_{x\in\mathbb{F}_q^\times}\exp\Big(2\pi i/p\cdot\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\Big(x+\frac{a}{x}\Big)\Big),$$

其中 $\mathrm{Tr}^{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ 是 从 $\mathbb{F}_q$ 到 $\mathbb{F}_p$的迹。这些和可以看作贝塞尔函数的有限域版本， ns,

$$\mathrm{Be}(z):=\oint_{S^1}\exp\Big(x+\frac{z}{x}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

它们满足贝塞尔微分方程（$z\partial_z$）$^2-z=0$。

当 $a\neq 0$时，Weil 在[39]证明了 $\mathrm{Kl}_2(a;\ q)=-(\alpha_a+\beta_a$对于某些代数数 α_a，β_a 其复范数为 $q^{1/2}$。对于 $k\geq 1$，克洛斯特曼和的 k次对称幂矩 是整数 $m_2^k(q$，定义为

$$m_2^k(q)=\sum_{a\in\mathbb{F}_q}\sum_{i=0}^{k}\alpha_a^i\beta_a^{k-i}.$$

为了汇总这些 矩的信息，考察 q 在 p的所有幂之间变化时的生成级数 ies

$$\exp\left(\sum_{r\geq 1}\frac{m_2^k(p^r)}{r}T^r\right),$$

它可视为有限域上的簇的哈斯–韦伊 zeta 函数的类比。

我们通过考察欧拉乘积来定义与克洛斯特曼层的 k 次对称幂矩相关的（部分） L-函数 k-函数，记作 $L_k^S(s)$，其中 p 处的局部因子由上述生成级数构成。根据构造以及 Fu–Wan [17]的工作，这些 L-函数先验定义在定义域 $\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)>1+\frac{k+1}{2}\}$ 上。因此，自然会问这个 L-函数能否亚纯延拓到复平面，以及它是否满足函数方程。

2020 数学主题分类。 主要分类 11G40；次要分类 11F30、11F80、11L05。

例 1.1. 对于 $k \leq 8$ 的情形，已有间接证明：克洛斯特曼和的矩的表达式由 p 中的多项式、狄利克雷特征以及模形式（全纯尖点 Hecke 特征形式）的傅里叶系数组成。

- 当 $k \leq 4$ 时，矩 $m_2^k(p)$ 可以显式计算。我们发现， L-函数在$k=1$、2、或 4 时是平凡的，而在 $k=3$ 时则是狄利克雷 L-函数 $L(s, (\frac{\bullet}{3}))$。
- 当 $k=5$，存在一个全纯尖点Hecke特征形式 $f \in S_3(\Gamma_0(15), (\frac{\bullet}{15}))$ 使得

$$a_f(p) = -\frac{1}{p^2}(m_2^5(p)+1)$$

若 $p \nmid 15$, 由 Peters 等人证明 . [31] 和 Livné [28].
- 当 $k=6$ 时，存在一个全纯尖点 Heck 特征形式 $f \in S_4(\Gamma_0(6))$，使得

$$a_f(p) = -\frac{1}{p^2}(m_2^6(p)+1)$$

如果 $p \nmid 6$，由 Hulek等人证明。[22]。
- 当 $k=7$ 时，存在一个全纯尖点Hecke特征形式 $f \in S_3(\Gamma_0(525), (\frac{21}{\cdot}))$ ϵ_5 ϵ_f $\epsilon_f = \epsilon_5$, 其中 $\cdot$, 且 是一个导子为 的四次特征。

$$a_f(p)^2\epsilon_f(p)^{-1} - p^2 = -\frac{1}{p^2}\left(\frac{p}{105}\right)(m_2^7(p)+1)$$

对于 $p>7$，由 Evans [12] 提出猜想，并由 Yun [41]证明。
- 当 $k=8$ 时，存在一个全纯尖点Hecke特征形式 $f \in S_6(\Gamma_0(6))$，使得

$$a_f(p) = -\frac{1}{p^2}(m_2^8(p)+1)$$

对于 $p \nmid 6$，这一猜想由 Evans [13] 提出，并由 Yun 和 Vincent [41]证明。

根据所讨论的例子，我们推得 $L_k^S(s)$ 可以亚纯地延拓到 $\mathbb{C}$，并且当 $k \leq 8$ 时满足一个函数方程。对于一般的 k, Broadhurst 和 Roberts 在 [6, 7] 中预言了 $L_k^S(s)$ 的函数方程的精确公式。随后，Fresán–Sabbah–Yu 建立了以下定理：

定理1.2 (Fresán–Sabbah–Yu)。 部分 L 函数 $L_k^S(s)$ 可以亚纯地延拓到复平面。此外，我们可以将 $L_k^S(s)$ 补全为一个全纯函数 $\Lambda_k(s)$，使得

$$\Lambda_k(s) = \epsilon_k \Lambda_k(k+2-s),$$

其中 $\epsilon_k \in \{\pm 1\}$，并且当 k 为奇数时， ϵ_k 是 1 。

本文的主要目的是将上述定理推广到与矩（超出 L-函数 对称幂 矩）相关的多变量克洛斯特曼和。

1.1. 克洛斯特曼层。 n 变量的克洛斯特曼和是有限域上的指数和，对每个素数幂 $q=p^r$ 以及每个 $a \in \mathbb{F}_q^\times$，定义为

$$\mathrm{Kl}_{n+1}(a;q) := \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_q^\times} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \cdot \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\left(x_1+\ldots+x_n+\frac{a}{x_1\cdots x_n}\right)\right).$$

固定一个素数 $\ell \neq p$ 和一个嵌入 $\iota: \overline{\mathbb{Q}}_\ell \to \mathbb{C}$后，Deligne 构造了定义在$\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}\backslash\{0\}$上的光滑 ℓ-进层 Kl_{n+1}，这些层的权为 n 且秩为 $n+1$，见 [9, Sommes. Trig. Thm. 7.8]。此外，对每个$a \in \mathbb{F}_q^\times = \mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q)$以及每个定位于 a处的几何点 $\overline{a}$，我们有

$$\iota \circ \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q, (\mathrm{Kl}_{n+1})_{\overline{a}}) = (-1)^n \mathrm{Kl}_{n+1}(a;q).$$

因此， ℓ-进层 Kl_{n+1} 可视为克洛斯特曼和的层版本，我们称之为克洛斯特曼层。

在他们的工作中，[20], Heinloth、Ngô 和 Yun 运用几何朗兰兹纲领中的方法，构造了一大类 ℓ-进层，称为约化群的克洛斯特曼层。对于每个分裂约化群 G，他们都构造了一个张量函子

$$\mathrm{Kl}_G : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Loc}_{\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q}} \tag{1.3}$$

从具有 $\mathbb{Q}_\ell(\mu_p)$ 中系数的 G 有限维表示范畴到 $\mathbb{G}_m$ 上的 lisseℓ-进层，$_{\mathbb{F}_q}$。我们主要关注 $G = \mathrm{SL}_{n+1}$ 的情形。特别地，分别取 V 为 SL_{n+1} 的标准表示 Std 和 Sym^kStd 时，我们得到经典克洛斯特曼层 $\mathrm{Kl}_{n+1}(\frac{n}{2})$ 及其对称幂 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}(\frac{nk}{2})$。

令 $V = V_\lambda$ 为 SL_{n+1} 的最高权为 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n)$ 的表示。我们将 $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$和 $\mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda$ 记作层 $\mathrm{Kl}_{\mathrm{SL}_{n+1}(V_\lambda)}(-\frac{n|\lambda|}{2})$。我们使用 Weyl 构造对 $\mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda$ 作出了明确描述，详见第 2.1节。下文中，我们将为 $\mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda$-函数的矩 L作出类比表述。

定义 1.4. 对每个 λ，克洛斯特曼层的矩$\mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda$ 定义为整数

$$m_{n+1}^\lambda(q) := -\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times} \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q, (\mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda)_{\overline{a}}).$$

By the Grothendieck 迹公式 [9, 报告。定理 3。1] 和定理 4.5，生成级数

$$Z(\lambda, n+1, p; T) := \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{m_{n+1}^\lambda(p^r)}{r}\cdot T^r\right).$$

是一个有理函数

$$\prod_{i=0}^{2} \det(1 - \mathrm{Frob}_p T \mid \mathrm{H}^i_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda))^{(-1)^{i+1}} \in \mathbb{Q}(T).$$

为了将与 $\mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda$ 相关的部分 L-函数定义为欧拉乘积，不宜直接将 $Z(\lambda, n+1, p;\ T)$ 用作 p 处的局部因子，因为 $Z(\lambda, n+1, p;\ T)$ 的根与极点的复范数落在集合 $\{p^{-i/2} \mid 0 \leq i \leq n|\lambda|+1\}$ 内。受 Fu–Wan [17, 18] 关于层 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}$ 的工作的启发，我们从 $Z(\lambda, n+1, p;\ T)$ 中去除一些“平凡因子”。由正合列 (2.5) 和 Weil II 的主定理 [10, 3.3.1], ，我们需要舍弃 Kloosterman 层在 0 和 ∞ 处的不变量与余不变量的贡献。因此，p 处局部因子的理想候选是

$$M(\lambda, n+1, p; T) := \det(1 - \mathrm{Frob}_p T \mid \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda)),$$

其中

$$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda) = \mathrm{im}\Big(\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda) \xrightarrow{\text{forget support}} \mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda)\Big)$$

是 $\mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda$ 的中间 ℓ-进上同调。

定义 1。 5. 附属于 $\mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda$ 的部分 L-函数 $L^S(\lambda, n+1; s)$ 定义为欧拉乘积

$$L^S(\lambda, n+1; s) := \prod_{s\notin S(\lambda,n+1)} M(\lambda, n+1, p; p^{-s})^{-1}.$$

这里，集合 $S(\lambda, n+1)$ 是一个有限的素数集合，仅取决于 λ 和 $n+1$ （见定理 4.5），使得 $M(\lambda, n+1, p;\ T)$ 的次数对 $p \notin S(\lambda, n+1)$ 保持不变。

L-函数先验是定义域为 $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{n|\lambda|+1}{2}\}$ 上的全纯函数，因为 $M(\lambda, n+1, p;\ T)$ 的根的复范数为 $p^{-\frac{n|\lambda|+1}{2}}$。然而，单凭定义并不能提供更多信息。和之前一样，我们可以问：部分 L-函数 $L^S(\lambda, n+1; s)$ 是否可以亚纯延拓到整个复平面，并满足函数方程。

1.2. 主要结果。 我们在此介绍主要结果。为简单起见，当 $\lambda = (k, 0, \ldots, 0)$ 时，我们将 $L^S(k, n+1;\ s)$ 记作 $L^S((k, 0, \ldots, 0)\ n+1;\ s)$。

定理 1.6。 对于下表中给出的$(n+1, k)$ 的取值，

$n+1$	k
3	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
5	$1, 2, 3, 4$
$4, 7, 8, 10, 11, 13$	$1, 2, 3$

部分 L 函数 $L^S(k, n+1; s)$ 可亚纯地延拓到复平面。此外，它可以补全为一个满足函数方程的全纯函数 $\Lambda(k, n+1; s)$

$$\Lambda(k, n+1; s) = \pm\Lambda(k, n+1; nk+2-s).$$

在例 1.1中，我们看到，某些明确确定的模形式的傅里叶系数与克洛斯特曼和的对称幂矩之间存在一些关系。Yun 在 [41], 中提出了*Evans*型猜想，预言了约化群的克洛斯特曼层存在新的关系。为简便起见，本文中所说的模形式均指归一化全纯尖点海克特征形式。

这些关系 s 表明，这些层的 L-函数是相应模形式的 L-函数。 ar 形式。

定理 1.7。 克洛斯特曼层的 L-函数 $\mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_3$, $\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4$, $\mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_4$, $\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5$, $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$ 和 $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$ 都源自模形式。此外，我们明确确定了这些模形式，以及它们的傅里叶系数与克洛斯特曼层的矩之间的关系。

这些模形式 $f \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 的信息总结如下表格。

层函	N	k	ϵ	*LMFDB* 中的标签 [37]
$\mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_3$	14	4	1	*14.4.a.b*
$\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4$	15	3	$\left(\frac{\bullet}{15}\right)$	*15.3.a.b.*
$\mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_4$	10	6	1	*10.6.a.a.*
$\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5$	33	4	1	$33.4.a.b$
$\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$	14	2	1	*14.2.a.a*
$\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$	6	4	1	*6.4.a.a*

除了确立主要定理外，我们还成功证明了若干关于克洛斯特曼层的新结果。例如，我们在定理 3 中计算了 Kl ∞ 在 $p = 3$ 时的局部单值群2.24。当 $n \geq 3$ 时，Kl_{n+1} 在 ∞ 处、 $p \mid n+1$ 时的局部单值群仍然未知。

此外，我们观察到，与层 $\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_2$ 和 $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$ 的矩相关联的模形式完全相同，在 LMFDB 中的标签为 $6.4.a.a$ ，这得益于定理1.7 和 [22]。特别地，我们从而得到 $\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_2$ 和 $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$ 的矩之间的一个恒等式，见（5.18）。这促使我们思考，是否存在对这一现象的几何解释，正如猜想 5.19中所猜测的那样。

1.3. **证明思路**。 我们证明定理1.6 和定理 1.7 的策略如下。首先，我们构造几何起源的伽罗瓦表示族，使其 L-函数恰好对应于$L(\lambda, n+1; s)$，这是对 [16, (3.1)]中构造的推广。然后，我们从这些伽罗瓦表示族中剥离几何信息，以便应用自守方面的一些定理。一旦证明这些伽罗瓦表示是势自守的， L-函数 $L(\lambda, n+1; s)$ 便相应地亚纯延拓至 $\mathbb{C}$ ，并满足函数方程。最后，对于定理1.7，还需要额外的数值结果，以便在 LMFDB 中定位这些模形式。

1.3.1. 由几何产生的伽罗瓦表示。 受克洛斯特曼和与贝塞尔函数之间类比的启发，Fresán、Sabbah 和 Yu 研究了 克洛斯特曼联络，它是秩 $n+1$ 上的联络$\mathbb{G}_{m,\ \mathbb{C}}$ 对应于贝塞尔微分方程 $(z\partial_z)^{n+1} - z = 0$。他们将联络 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}$ 的中间德拉姆上同调（即从紧支撑上同调到通常上同调的遗忘支撑态射的像）解释为 $\mathbb{Q}$ 上的指数动机的德拉姆实现，其含义见 [15]。这个指数动机是经典的，也就是说，它与有理数域 $_{n+1}^{k}$ 上的诺里动机 M 同构 $\mathbb{Q}$。

这个动机同构于 $\mathrm{H}_c^{nk-1}(\mathrm{K})(-1)$ 的一个子商，其中 K 是由劳朗多项式 $g_{n+1} = \sum_{j=1}^n y_j + 1/\prod_{j=1}^n y_j$ 的 k 次迭代托姆–塞巴斯蒂亚尼和所定义的超曲面，而该劳朗多项式为

$$g_{n+1}^{\boxplus k} = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{i,j} + \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} y_{i,j}}\right) \tag{1.8}$$

在环面上 $\mathbb{G}_m^{nk}$。我们将他们的方法推广，利用韦伊构造，为定义λ_{n+1} 3.3 $\lambda \in \mathbb{N}^n$ 中每个构造一个动机 M。当 $\lambda = (k, 0, \ldots, 0)$ 时，我们得到 Fresán–Sabbah–Yu 构造的动机 M_{n+1}^k。

对于每个动机 $\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda}$，其 ℓ-进实现 $(\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_\ell$ 是 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的连续 ℓ-进表示，系数取自 $\mathbb{Q}_\ell$，且同构于 $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{n|\lambda|-1}$,c $(\mathrm{K}_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)(-1)$ 的子商。根据定理 4.5，我们证明 $\{(\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_\ell\}_\ell$ 构成一个伽罗瓦表示相容族，其中 $(\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_\ell$ 作为 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 的表示，在除有限多个素数 $S(\lambda, n+1)$ 以外的素数 p 处非分歧。此外，存在一个 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-表示的同构

$$(\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_\ell[\zeta_p] \simeq \mathrm{H}_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}^1(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda}). \tag{1.9}$$

随后，我们观察到，这族 ℓ-进伽罗瓦表示的部分 L-函数与 $\mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda}$ 的 L-函数 $L^S(\lambda, n+1; s)$ 相同。我们将 $\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda}$ 称为附属于层 $\mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda}$的动机。

为研究这些相容的伽罗瓦表示族，如(1.9)所示，有必要研究克洛斯特曼层的上同调。然而，$\mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda}$ 所带来的挑战，明显比在 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_2$ 中 [41, 16]遇到的相对简单的情形更为复杂。值得注意的是，

我们采用复杂的组合公式来描述 $\mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda}$，而对于 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_2$，这些公式都会变得简单（例如，参见命题 3.8）。此外，$\mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda}$ 还有一个令人困扰的新特征：其零次上同调可能非零，这与 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_2$ 的情形相反，后者的零次上同调始终为零。这一现象使得定理3.11 和定理 4.15 的证明在技术上更加复杂，因此有必要通过引入某些技术性限制来作出一定程度的妥协。

1.3.2. 潜在自守性。我们通过应用 Patrikis–Taylor 的一个定理来证明定理 1.6，该定理适用于 [30] $\{(\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_{\ell}\}_{\ell}$。要应用这一结果，我们必须验证一个称为 正则性 的关键条件。通过 p-进比较定理，该条件意味着 M 的德拉姆实现的霍奇数$_{n+1}^{\lambda}$ 只能是 0 或 1。根据作者先前论文中的结果 [32]（另见推论3.6），定理 1.6所述情形均满足正则性。

请注意，定理 $n+1$，k）中具体取值的表格1.6 经过选择，使得 M 的霍奇数$_{n+1}^{k}$ 满足正则性，见推论3.6。Boxer–Calegari–Gee–Pilloni 等人在（潜在）自守性方面的最新进展 [5], 为进一步探索提供了有希望的途径。这些进展有望将定理 1.6 的结果推广到超出当前霍奇数范围的情形。

1.3.3. *Evans*型猜想。设 M 是定理 1.7中某个层所附带的动机。要证明所述的 Evans 型猜想，只需证明 M 的 ℓ-进实现是模形式的，也就是说，它同构于 $\rho_{f,\ell}(h)$，其中 f 是某个模形式，h是某个整数。这里，$\rho_{f,\ell}$ 表示附属于 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的二维伽罗瓦表示，该表示附属于 f，其构造见 [8, 11]。为证明这一点，我们采用与 [41, 定理 4.61] 类似的论证来证明模性；这一论证最初由 Serre 提出，见 [34, §4。8] 亦可见 [25, 定理 1.4。3]这一论证的关键要素是 Serre模性猜想。

确立模性之后，剩下的任务是尽可能明确地确定模形式的相关信息。我们可以先从 M 的几何性质中提取信息。在第 4.1 节，我们研究伽罗瓦表示的相容族 M_{ℓ}，并分析其导子 N。这为我们提供了有关模形式级的大小及其素因子的一些信息。此外，我们利用 $_{\mathrm{dR}}$ 中德拉姆实现 M [32] 的霍奇数计算结果，来确定模形式的权。

然而，由于某些“坏”素数处的信息不足，或缺少霍奇数的计算，我们只能部分了解这些模形式的权和级。为获得相应模形式的傅里叶系数，我们借助 Sagemath，利用弗罗贝尼乌斯迹的数值结果进行计算 [38]。随后，我们得以确定命题5.6 和命题 5.11中的模形式的实际级，以及命题5.9 和命题 5.16中的实际权。特别是，我们得到了一些无法通过 [32] 中的方法获得的霍奇数新结果。

最后，我们结合几何与计算所得的信息，在 LMFDB 数据库中确定相应的模形式。

1.4. 文章结构。第 2 节研究克洛斯特曼层的性质，主要关注定理 1.6 和 1.7 中出现的克洛斯特曼层，包括它们在 0 和 ∞ 处的局部结构，以及其 ℓ-进上同调的维数公式。第 3 节构造与克洛斯特曼层相关的动机，并探讨其德拉姆实现、ℓ-进实现以及在特征 $p>0$ 下的其他实现的性质。第 4 节首先研究伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_{\ell}$ 的分歧性质，详见定理 4.5 和定理 4.15。随后证明定理 1.6。第 5 节通过在命题 5.5、5.6、5.9、5.11、5.14 和 5.16 中逐一证明各层的模性，来证明定理 1.7。附录 A 概述克洛斯特曼层矩的计算过程。

致谢。本文基于作者在 École Polytechnique 的 Centre de Mathématiques Laurent Schwartz 撰写的博士论文。作者谨向导师 Javier Fresán 和 Claude Sabbah 致谢，感谢他们提出这一问题，并给予许多有益的讨论与建议。他还感谢 Lei Fu 和 Christian Sevenheck 对本文早期版本提出的意见，以及 Jochen Heinloth、Gabriel Ribeiro、Bin Wang、Ping Xi 和 Daxin Xu 提供的宝贵讨论。最后，作者感谢匿名审稿人提出的诸多建议，这些建议帮助纠正了本文中的不准确之处，并改进了论文的表达。

2. 克洛斯特曼层的性质

<escape>本节主要关注定理 1.6 和 1.7 中出现的克洛斯特曼层。在回顾有关 Weyl 构造和 ℓ-进层的一些预备知识后，我们在命题2.13 中给出克洛斯特曼层的几何描述。随后，我们在第 2.4 节和第 2.5 节中描述它们在 0 和 ∞ 处的局部结构。最后，我们在第 2.6 节中给出克洛斯特曼层的 ℓ-进上同调的维数公式。</escape>

2.1. **Weyl 构造**。 我们回顾 [19, §6, §15 & §17]中的一些预备知识。一个 分拆 是整数k的一个由非负整数组成的序列，其形式为 $\mu:=(\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ldots,\ \mu_m)$，满足 $\mu_1 \geq \mu_2 \cdots \geq \mu_m$ 且$\sum_i \mu_i = k$。对于 k的一个分拆，我们可以将其与一个杨图（Young diagram）对应起来，其中 μ_i 是第 i行的长度。例如，分拆 $(3,\ 2,\ 1)$ 的杨图如下图所示。

1	2	3
4	5	
6		

对于 μ of k 的一个分拆，我们在群环 $\mathbb{Z}[S_k]$ 中定义两个元素 a_μ and b_μ 如下。首先，我们用 $\{1,\ldots,k\}$ 中的指标标记杨图中的每个方块。令 $P_\mu:=\{\sigma\in S_k \mid \sigma$ 保持每一行不变$\}$，并令$Q_\mu:=\{\tau\in S_k \mid \tau$ 保持每一列不变$\}$。设 sign: $S_k\to\{\pm 1\}$ 为 S_k 的符号特征。然后我们定义

$$a_\mu := \sum_{\sigma\in P_\mu} \sigma, \quad b_\mu := \sum_{\tau\in Q_\mu} \mathrm{sign}(\tau)\tau$$

以及群环 $\mathbb{Z}[S_k]$ 中的 $c_\mu = a_\mu \cdot b_\mu$。

设 K 是一个特征为 0 的域， $V=K^{n+1}$ 是 SL_{n+1} 的标准表示。群 S_k 在张量积 $V^{\otimes k}$ 上的作用为

$$\sigma\cdot v_1\otimes\cdots\otimes v_k := v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(k)}.$$

那么，我们得到有限维表示范畴的端函子 $\mathbb{S}_\mu$ ，它由$\mathbb{S}_\mu V:=V^{\otimes k}\cdot c_\mu$. 定义。为方便起见，我们也写作

$$(V^{\otimes k})^{P_\mu\times Q_\mu,\,1\times\mathrm{sign}} := V^{\otimes k}\cdot c_\mu. \tag{2.1}$$

设 $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots\ldots,\ \lambda_n)$ 为一个非负整数序列。令 V 为标准表示 K^{n+1}，其配备了 SL_{n+1} 的自然作用，并令 V_λ 为最高权 $\sum_i \lambda_i(L_1+\ldots+L_i)$ 的唯一不可约子表示。

$$\mathrm{Sym}^{\lambda_1}V\otimes\mathrm{Sym}^{\lambda_2}\wedge^2 V\otimes\cdots\otimes\mathrm{Sym}^{\lambda_n}\wedge^n V.$$

在这种情况下 SL_3，的最高权 $\lambda_1L_1+\lambda_2(L_1+L_2)$ 表示可描述为

$$\ker(\mathrm{Sym}^{\lambda_1}V\otimes\mathrm{Sym}^{\lambda_2}\wedge^2 V\xrightarrow{\pi_{\lambda_1,\lambda_2}}\mathrm{Sym}^{\lambda_1-1}V\otimes\mathrm{Sym}^{\lambda_2-1}\wedge^2 V), \tag{2.2}$$

其中 $\pi_{\lambda_1,\lambda_2}$ 将 $v_1\otimes\cdots\otimes v_{\lambda_1}\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_{\lambda_2}$ 映射到

$$\frac{1}{(\lambda_1)!(\lambda_2)!}\sum_{\sigma\in S_{\lambda_1},\tau\in S_{\lambda_2}} <v_{\sigma(1)},w_{\tau(1)}>\cdot v_{\sigma(2)}\cdots v_{\sigma(\lambda_1)}\otimes w_{\tau(2)}\cdots w_{\tau(\lambda_2)}$$

其中 $<\cdot,\ \cdot>\colon V\times\wedge^2 V\to K$ 是自然配对。

一般而言，我们可以如下利用舒尔函子构造表示 V_λ。令

$$\begin{aligned}\mu(\lambda) &:= \Big(\sum_{j=1}^n\lambda_j,\sum_{j=2}^n\lambda_j,\ldots,\lambda_n\Big),\\ G_\lambda &:= P_{\mu(\lambda)}\times Q_{\mu(\lambda)}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

将 $\mathbb{S}_{\mu(\lambda)}$ 应用于 $V^{\otimes|\lambda|}$，所得表示不过是 V_λ。更准确地说，我们有 $V_\lambda=(V^{\otimes|\lambda|})^{G_\lambda,\ 1\times\text{符号}}$。例如，若 $\lambda=(k,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$，则 $P_\lambda=S_k$ 且 Q_λ 是平凡的。因此， $\mathbb{S}_\lambda(V^{\otimes k})=(V^{\otimes k})^{S_k}=\mathrm{Sym}^k V$。

2.2. **关于 ℓ-进层的一些一般性内容**。 令 $p\neq\ell$ 为两个素数， q 为 p的一个幂， $\iota\colon\overline{\mathbb{Q}}_\ell\hookrightarrow\mathbb{C}$ 一个嵌入。我们将 E 记为 $\mathbb{Q}_\ell$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$，或记为 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$内 $\mathbb{Q}_\ell$ 的一个有限扩张。对于在连通分离诺特概形 X 上、相对于 $\mathbb{F}_q$的ℓ-进层，我们指的是 X 上的一个可构造 E-层。

2.2.1. 曲线上的 ℓ-进层的上同调。设 C 是 $\mathbb{F}_q$ 上一条几何连通的光滑射影曲线。C 上的 $\mathscr{F}$ 层的 ℓ-进上同调 $\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(C_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F})$ 是有限维 E-向量空间，并配备了 Frobenius 作用。

设 $\mathscr{F}$ 是 C 的仿射开子集 U 上的一个光滑 ℓ-进层。我们将对应的连续 ℓ-进表示 $\rho_{\mathscr{F}}$ 记为 $\pi_1^{\acute{e}t}(U, \overline{\eta}_U)$，并将 $\mathscr{F}$ 的几何单值群记为 G_{geom}，即 $\pi_1^{\acute{e}t}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\eta}_U)$ 在 $\rho_{\mathscr{F}}$ 作用下于 $\mathrm{GL}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})$ 中像的扎里斯基闭包。于是

$$\mathrm{H}^2_{\acute{e}t}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^0_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}) = 0,$$

$$\mathrm{H}^0_{\acute{e}t}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}) = (\mathscr{F}\mid_{\overline{\eta}_U})^{G_{\mathrm{geom}}}, \quad \text{and} \quad \mathrm{H}^2_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}) = (\mathscr{F}\mid_{\overline{\eta}_U})_{G_{\mathrm{geom}}}(-1),$$

其中，$(\mathscr{F}\mid_{\overline{\eta}_U})^{G_{\mathrm{geom}}}$ 和 $(\mathscr{F}\mid_{\overline{\eta}_U})_{G_{\mathrm{geom}}}$ 分别是 $\mathscr{F}$ 在 G_{geom} 作用下的不变量和余不变量。

2.2.2. 格罗滕迪克–奥格–沙法列维奇公式。对于每个闭点 $x \in |C|$，我们将 C 在 x 处的局部化（分别为严格局部化）记为 $C_{(x)}$（分别为 $C_{(\overline{x})}$）。$C_{(x)}$ 和 $C_{(\overline{x})}$ 的特殊点与泛点分别记为 s_x, η_x 和 $s_{\overline{x}}, \eta_{\overline{x}}$。

设 $\mathscr{F}$ 是 C 上的一个 ℓ-进层，并且在开子集 $U \subset C$ 上光滑。记 $\mathrm{rk}(\mathscr{F}) = \mathrm{rk}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}})$、$\mathrm{rk}_x(\mathscr{F}) = \mathrm{rk}(\mathscr{F}_{\overline{s}_x})$，以及 $\mathrm{Sw}_x(\mathscr{F}) = \mathrm{Sw}(\mathscr{F}_{\overline{\eta}_x})$。那么，欧拉示性数 $\chi(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}|_U) = \sum_{i=0}^{2}(-1)^{i+1}\dim \mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}|_U)$ 可由格罗滕迪克–奥格–沙法列维奇公式计算：

$$\chi(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}|_U) = \Big(2 - 2g - \sum_{x \in |C\setminus U|} \deg(x)\Big) \cdot \mathrm{rk}(\mathscr{F}) - \sum_{x \in |C\setminus U|} \deg(x) \cdot \mathrm{Sw}_x(\mathscr{F}). \tag{2.4}$$

参见 [2, X. 定理 7。1] 或 [26, （2.2）]。右端的和是有限和，因为当 $\mathrm{Sw}_x(\mathscr{F}) = 0$时，$x \in U$。

2.2.3. 中间 ℓ-进上同调。设 C 是如上的一条曲线，$j\colon U \hookrightarrow C$ 是一个开浸入，且 $\mathscr{F}$ 是 U 上的一个 ℓ-进上同调。$\mathscr{F}$ 的中间 ℓ-进上同调 是遗忘支撑态射的像

$$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(C_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(C_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}),$$

记作 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(C_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F})$，它与（非导出范畴的）直接像$j_*\mathscr{F}$的 ℓ-进上同调相对应。根据 [24, 2.0,7], ，我们有一个长正合列。

$$\begin{aligned} 0 \to (\mathscr{F}\mid_{\overline{\eta}_U})^{G_{\mathrm{geom}}} \to & \bigoplus_{x \in |C\setminus U|,\ \overline{x} \text{ over } x} (\mathscr{F}|_{\overline{\eta}_x})^{I_{\overline{x}}} \to \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,c}(U_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{F}) \\ \to & \mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(U_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{F}) \to \bigoplus_{x \in |C\setminus U|,\ \overline{x} \text{ over } x} (\mathscr{F}|_{\overline{\eta}_x})_{I_{\overline{x}}}(-1) \to (\mathscr{F}\mid_{\overline{\eta}_U})_{G_{\mathrm{geom}}}(-1) \to 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中，$\eta_{\overline{x}}$ 是 C 在$\overline{x}$处的严格 Hensel化的泛点，$I_{\overline{x}}$ 群是$\overline{x}$处的惯性群，$(\mathscr{F}|_{\overline{\eta}_x})^{I_{\overline{x}}}$是 $I_{\overline{x}}$的不变量，而$(\mathscr{F}|_{\overline{\eta}_x})^{I_{\overline{x}}}$是$I_{\overline{x}}$的余不变量。A

ssume t hat $\mathscr{F}$ 权纯 w。根据 Weil II 的主定理 [10, 3.3。1] 和（2.5），我们得出结论： at

$$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{gr}^W_{w+1}\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,c}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{gr}^W_{w+1}\mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}).$$

特别地，中间 ℓ-进上同调的维数为

$$\dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,c}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathscr{F}) - \sum_{x \in |C\setminus U|,\ \overline{x} \text{ over } x} \dim(\mathscr{F}|_{\overline{\eta}_x})^{I_{\overline{x}}} + \dim \mathscr{F}^{G_{\mathrm{geom}}}. \tag{2.6}$$

2.3. **克洛斯特曼层**。设 p 和 ℓ 是两个不同的素数，$\mathbb{F}_q$ 是含有 $q = p^r$个元素的有限域。设 ζ_p 是 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$中一个本原 p次单位根 ζ_p，记为 $E = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)$。我们固定一个非平凡加法特征 $\psi_p\colon \mathbb{F}_p \to E^\times$，并将特征 $\psi_p \circ \mathrm{Tr}^{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ 记为 ψ_q。阿廷–施赖尔层 $\mathscr{L}_{\psi_q}$是定义在 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$上、系数取自 E 的一个光滑 ℓ-进层，其迹函数由 ψ_q给出。我们将阿廷–施赖尔层沿正则函数 $f\colon X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ 的逆像 $f^*\mathscr{L}_{\psi_q}$ 记为 $\mathscr{L}_{\psi_q(f)}$。

考虑以下图表

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{G}_m^{n+1} & & \\ & \swarrow^{\pi} & & \searrow^{\sigma} & \\ \mathbb{G}_m & & & & \mathbb{A}^1 \end{array} \tag{2.7}$$

其中 σ 表示坐标之和， π 表示坐标之积。我们将 $\mathbb{G}_m$ 上的克洛斯特曼层 $_{,\mathbb{F}_q}$ 定义为

$$\mathrm{Kl}_{n+1} := \mathrm{R}^n\pi_!\sigma^*\mathscr{L}_{\psi_q}. \tag{2.8}$$

Deligne 在 [9,《三角和定理》第 7 节。8] 中证明，Kl_{n+1} 是一个光滑的 ℓ-进层，秩为 $n+1$，权纯n，在 0 处温和分歧，具有单个 Jordan块，并且在 ∞ 处完全野分歧，斯旺导子为 1。此外，我们有一个同构

$$\mathrm{Kl}_{n+1}^\vee \simeq \iota_{n+1}^*\mathrm{Kl}_{n+1}$$

其中 $\mathrm{Kl}_{n+1}^\vee$ 是 Kl_{n+1} 的对偶，且 ι_{n+1}: $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ 由 $(-1)^{n+1}$ 的乘法定义。

在 约化群的克洛斯特曼层 的广义构造中，[20], 可以得到一个张量函子（1.3），它将 SL_{n+1} 的有限维表示范畴映射到 ℓ 上的 -adic 局部系统范畴 $\mathbb{G}_m$。若取 V 为 SL_{n+1} 的标准表示 Std 及其对称幂 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Std}$，则 $\mathrm{Kl}_{\mathrm{SL}_{n+1}}(V)$ 分别为 $\mathrm{Kl}_{n+1}(\frac{n}{2})$ 和 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{SL}_{n+1}}(V) = \mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}(\frac{nk}{2})$。

若我们取 V 作为最高权为 λ 的不可约表示，便得到 $\left(\mathrm{Kl}_{n+1}^{\otimes|\lambda|}\right)^{G_\lambda}{}_{,\ 1\times符号}\left(\frac{n|\lambda|}{2}\right)$。为简便起见，我们记作

$$\mathrm{Kl}_{n+1}^\lambda := \mathrm{Kl}_{\mathrm{SL}_{n+1}}(V_\lambda)\left(-\tfrac{n|\lambda|}{2}\right). \tag{2.9}$$

或者，当 $n=2$ 时，我们使用 (2.2) 得出，层 $\mathrm{Kl}^{\mathrm{SL}_3}(V_{\lambda_1,\ \lambda_2})$ 是以下对象的核

$$\mathrm{Sym}^{\lambda_1}\mathrm{Kl}_3 \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_2}(\mathrm{Kl}_3)^\vee(\lambda_1+\lambda_2) \to \mathrm{Sym}^{\lambda_1-1}\mathrm{Kl}_3 \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_2-1}(\mathrm{Kl}_3)^\vee(\lambda_1+\lambda_2-2). \tag{2.10}$$

2.3.1. 几何解释。现在，我们从几何角度描述克洛斯特曼层 (2.9)。设 g: $\mathbb{G}_{m,\ \mathbb{F}_p}^n \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ 为劳朗多项式 $\sum_{i=1}^n y_i + \frac{1}{\prod_i y_i}$，且 $[n+1]$: $\mathbb{G}_{m,\ \mathbb{F}_p} \to \mathbb{G}_{m,\ \mathbb{F}_p}$ 为第 $(n+1)$ 次幂映射。

引理 2.11。我们有如下 ℓ-进层的同构

$$[n+1]^*\mathrm{Kl}_{n+1} \simeq \mathrm{FT}_{\psi_p}(\mathrm{R}^{n-1}g_!E)|_{\mathbb{G}_m},$$

其中 FT^{ψ_p} 是 *Deligne*-傅里叶变换 [26]。

证明。 证明与 [16, 命题 210]中的证明类似。令 $x_1,\dots,x_{n+1}$ 为图表（$\mathbb{G}_m^{n+1}$ 中的坐标，$\mathbb{F}_p$ 见（2.7）。我们进行变量替换 $z = \prod_{i=1}^n x_i$。令 j: $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_p} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$。于是我们可以将（2.8）改写为

$$\mathrm{Kl}_{n+1} = \mathrm{R}(\mathrm{pr}_z)_!\mathscr{L}_{\psi_p\left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{z}{\prod_{i=1}^n x_i}\right)}[n],$$

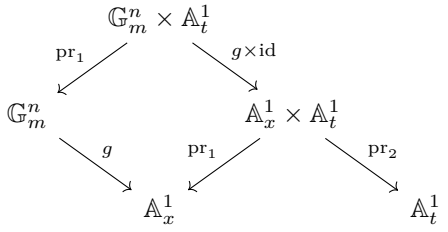
其中 pr_z 是 从 $\mathbb{G}_m^{n+1}$ 到 $\mathbb{G}_m$ 的投影，z。令 t 为映射 $[n+1]$ 的源的坐标。Th en

$$[n+1]^*\mathrm{Kl}_{n+1} \simeq \mathrm{R}(\mathrm{pr}_z)_!\mathscr{L}_{\psi_p\left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{t^{n+1}}{\prod_{i=1}^n x_i}\right)}[n] \simeq j^*\mathrm{R}(\mathrm{pr}_t)_!\mathscr{L}_{\psi_p(tg)}[n], \tag{2.12}$$

其中将 tg 视为定义在 $\mathbb{G}_m^n \times \mathbb{A}_t^1$ 上的函数，pr_t 是从 $\mathbb{G}_m^n \times \mathbb{A}_t^1$ 到 $\mathbb{A}_t^1$ 的投影，并且我们在最后一个同构中进行了变量替换 $y_i = x_i/t$。然后，通过计算 Deligne–Fourier变换，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{FT}_{\psi_p}(\mathrm{R}g_!E) \simeq& \mathrm{R}(\mathrm{pr}_2)_!(\mathrm{pr}_1^*\mathrm{R}g_!E \otimes \mathscr{L}_{\psi_p(xt)}[1]) \\
\simeq& \mathrm{R}(\mathrm{pr}_2)_!(\mathrm{R}(g\times\mathrm{id})_!\mathrm{pr}_1^*E \otimes \mathscr{L}_{\psi_p(xt)}[1]) \\
\simeq& \mathrm{R}(\mathrm{pr}_2)_!\mathrm{R}(g\times\mathrm{id})_!(\mathrm{pr}_1^*E \otimes \mathscr{L}_{\psi_p(tg)}[1]) \\
\simeq& \mathrm{R}(\mathrm{pr}_t)_!\mathscr{L}_{\psi_p(tg)}[1],
\end{aligned}$$

其中在第二个同构中使用了基变换定理，在第三个同构中使用了投影公式。上述计算中的态射由下图示出。



由上述同构可得 $[n+1]^*\mathrm{Kl}_{n+1} \simeq j^*\mathrm{FT}^{\psi_p}(\mathrm{R}g_!E)[n-1]$. □

考虑环面 $\mathbb{G}_m^{n|\lambda|+1,\mathbb{F}_p}$，其坐标为 $\{x_{i,j} \mid 1 \le i \le |\lambda|, 1 \le j \le n\}$ 和 z。设 $f_{|\lambda|}\colon \mathbb{G}_m^{n|\lambda|+1,\mathbb{F}_p} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$为劳朗多项式 $\sum_{i=1}^{|\lambda|}\left(\sum_{j=1}^n x_{i,j} + \frac{z}{\prod_j x_{i,j}}\right)$，$\mathrm{pr}_z$ 为从 $\mathbb{G}_m^{n|\lambda|+1,\mathbb{F}_p}$ 到 $\mathbb{G}_{m,z}$的投影。

类似地，考虑环面 $\mathbb{G}_m^{n|\lambda|+1,\mathbb{F}_p}$ 其坐标为 $\{x_{i,j} \mid 1 \le i \le |\lambda|, 1 \le j \le n\}$ 和 t。令$\widetilde{f}_{|\lambda|}\colon \mathbb{G}_m^{n|\lambda|+1,\mathbb{F}_p} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$为劳朗多项式 $\sum_{i=1}^{|\lambda|}\left(\sum_{j=1}^n x_{i,j} + \frac{t^{n+1}}{\prod_j x_{i,j}}\right)$，并令 pr_t 为从$\mathbb{G}_m^{n|\lambda|+1,\mathbb{F}_p}$ 到其 $\mathbb{G}_{m,t}$的投影。

命题 2.13。 我们有 ℓ-进层的同构

$$\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1} \simeq \left(\mathrm{R}^{n|\lambda|}\mathrm{pr}_{z*}\mathscr{L}_{\psi_p(f_{|\lambda|})}\right)^{G_\lambda,\mathrm{sign}^n\times\mathrm{sign}^{n+1}}$$

and

$$[n+1]^*\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1} \simeq \left(\mathrm{R}^{n|\lambda|}\mathrm{pr}_{t*}\mathscr{L}_{\psi_p(\widetilde{f}_{|\lambda|})}\right)^{G_\lambda,\mathrm{sign}^n\times\mathrm{sign}^{n+1}},$$

其中 $G_\lambda = P_{\mu(\lambda)} \times Q_{\mu(\lambda)}$ 是 (2.3) 中定义的群，而分量 $(G_\lambda,\ \mathrm{sign}^n \times \mathrm{sign}^{n+1})$ 表示关于 $\sum_{\sigma\in P_{\mu(\lambda)}} \mathrm{sign}^n(\sigma)\sigma \cdot \sum_{\tau\in Q_{\mu(\lambda)}} \mathrm{sign}^{n+1}(\tau)\tau$. 取等型分量

证明。 由 [26, (1.2.2.7)], Deligne–Fourier变换将张量积与卷积互换。利用引理 2.11，可得

$$\begin{aligned}([n+1]^*\mathrm{Kl}_{n+1})^{\otimes|\lambda|} \simeq& j^*\mathrm{FT}_{\psi_p}\left(((\mathrm{R}g_!E)[n-1])^{\boxtimes|\lambda|}\right)[|\lambda|]\\ \simeq& j^*\mathrm{FT}_{\psi_p}\left((\mathrm{R}g_!^{\boxplus|\lambda|}E)\right)[n|\lambda|-1]\\ \simeq& \mathrm{R}(\mathrm{pr}_t)_!\mathscr{L}_{\psi_p(t\cdot g^{\boxplus|\lambda|})}[n|\lambda|-1]\\ \simeq& \mathrm{R}(\mathrm{pr}_t)_!\mathscr{L}_{\psi_p(\widetilde{f}_{|\lambda|})}[n|\lambda|-1],\end{aligned}$$

其中 $g^{\boxplus|\lambda|}$ 是（1.8）中的劳朗多项式；在第二个同构中我们使用了 Künneth公式，而在最后一个同构中我们进行了变量替换 $x_{i,j} = t\cdot y_{i,j}$。

注意，Deligne–Fourier变换保留对称群 $S_{|\lambda|}$ 的作用。然而，Künneth公式在右侧产生了一个额外的符号特征 sign^n 。取两侧相应的等型分量，即得第二个同构。

至于第一个同构，与注记 3.4类似，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Kl}^{\otimes|\lambda|}_{n+1} \simeq& \left([n+1]_*([n+1]^*\mathrm{Kl}_{n+1})^{\otimes|\lambda|}\right)^{\mu_{n+1}}\\ \simeq& \left(\mathrm{R}(\mathrm{pr}_t)_!\mathscr{L}_{\psi_p(\widetilde{f}_{|\lambda|})}\right)^{\mu_{n+1}}[n|\lambda|-1]\\ \simeq& \mathrm{R}(\mathrm{pr}_z)_!\mathscr{L}_{\psi_p(f_{|\lambda|})}[n|\lambda|-1].\end{aligned}$$

最后，我们将相应的等型分量加到两侧，得到第一个同构。 □

2.4. 克洛斯特曼层在 0 处的局部结构。令 $\mathbb{A}^1_{(0)} = \{s_0, \eta_0\}$ 为 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ 在 0 处的 Hensel化。惯性群 $I_{\overline{0}}$ 作用于一般纤维 $(\mathrm{Kl}_{n+1})_{\overline{\eta}_0}$。由 [24, 7.0.7]，的一个特殊情形，一般纤维 $V = (\mathrm{Kl}_{n+1})_{\overline{\eta}_0}$ 是 $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}_0/\eta_0)$ 的一个温和分歧 ℓ-进表示，其系数属于 $E = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)$。惯性群 $I_{\overline{0}}$ 通过单个 Jordan块幺幂地作用于 V。更精确地说，存在一组基 $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$，使得单值算子 N 的幂零部分： $V \to V(-1)$ 以及 Frob_0 的作用为

$$\mathrm{Frob}_0(v_i) = q^{n-i}v_i \quad \text{and} \quad N(v_i) = v_{i+1}$$

对于 $i = 0, \dots, n$ （为方便起见，我们令 $v_{n+1} = 0$）。

注记 2.14。 $\mathrm{Kl}_{n+1}|_{\eta_0}$ 的局部单值化不依赖于基域 $\mathbb{F}_q$ 的特征 p。因此，$(\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1})_{\overline{\eta}_0} = V^{\otimes|\lambda|}\cdot c_\lambda$ 的局部单值化也独立于 p。由此，$(\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1})_{\overline{\eta}_0}$ 的 $I_{\overline{0}}$不变量的维数仍然独立于 p。

$(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})_{\overline{\eta}_0}$ 的 $I_{\overline{0}}$不变量的维数在 [18, Thm. 0.1] 中计算。

定理 2.15 (Fu–Wan)。 作为一个Frob$_q$-模，$I_{\overline{0}}$不变量 $(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})_{\overline{\eta}_0}^{I_{\overline{0}}}$ 同构于

$$\bigoplus_{u=0}^{\lfloor\frac{nk}{2}\rfloor} E(-u)^{\bigoplus m_k(u)},$$

其中 $m_k(u)$ 是由生成级数刻画的数，

$$\sum_{u=0} m_k(u)x^u = \prod_{i=n+1}^{n+k}(1-x^i)\cdot\prod_{i=2}^{k}(1-x^i)^{-1}. \tag{2.16}$$

特别地，$(\mathrm{Sym}^k \mathrm{Kl}_{n+1})^{I_{\overline{0}}}_{\overline{\eta}_0}$ 的维数为 $\sum_{u=0}^{\lfloor \frac{nk}{2} \rfloor} m_k(u)$。

最后，我们给出 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}|_{\eta_0}$ 和 $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}|_{\eta_0}$ 的 $I_{\overline{0}}$不变量的维数公式。

命题 2.17。 *(1).* 作为一个 Frob_q-模，$\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}|_{\eta_0}$ 同构于

$$\bigoplus_{i=1}^{7} E(-i)\bigoplus\bigoplus_{i=2}^{6} E(-i)\bigoplus\bigoplus_{i=3}^{5} E(-i),$$

并且 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}|_{\eta_0}$ 的 $I_{\overline{0}}$不变量同构于

$$E(-1)\bigoplus E(-2)\bigoplus E(-3).$$

(2). 作为一个 Frob_q-模，$\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}|_{\eta_0}$ 同构于

$$\bigoplus_{i=2}^{10} E(-i)\bigoplus\bigoplus_{i=3}^{9} E(-i)\bigoplus\bigoplus_{i=4}^{8} E(-i)^{\oplus 2}\bigoplus E(-6),$$

而且 $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}|_{\eta_0}$ 的 $I_{\overline{0}}$不变量同构于

$$E(-2)\bigoplus E(-3)\bigoplus E(-4)^{\oplus 2}\bigoplus E(-6).$$

证明。 证明与定理 2.15 的证明类似。我们给出 (1) 的证明，而 (2) 的证明类似。

单值算子的幂零部分 N 作用于 $V = (\mathrm{Kl}_3)_{\overline{\eta}_0}$，可以提升为 sl_2，的李代数表示 ρ，使得 $\rho\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = N$。类似地，单值算子在 $(\mathrm{Sym}^k \mathrm{Kl}_3)_{\overline{\eta}_0}$ 上的幂零部分可以视为一个 sl_2-表示 ρ_k，其中 $\rho_k\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{Sym}^k N$。根据 sl_2, 的表示理论，我们可以将 $(\mathrm{Sym}^k \mathrm{Kl}_3)_{\overline{\eta}_0}$ 分解为 sl_2 的不可约表示，如下所示：$\bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{Sym}^{2k-2i} E^2$。此外，每个 $\mathrm{Sym}^{2k-2i} E^2$ 都同构于作为 Frob_q-模的 $\bigoplus_{j=i}^{2k-i} E(-j)$。至于 $(\mathrm{Sym}^k \mathrm{Kl}_{n+1})_{\overline{\eta}_0}$ 的 $I_{\overline{0}}$不变量子空间，它可识别为 $\mathrm{Sym}^k N$ 的核，即 $\bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} E(-i)$。

回到 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$，暂时省略 Tate 扭结。利用另一种描述（2.10），要确定 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$ 的局部结构，只需确定 $\mathrm{Sym}^2 \mathrm{Kl}_3 \otimes \mathrm{Kl}_3^\vee$的局部结构。作为 sl_2-表示，我们有如下同构：

$$V = V^\vee = \mathrm{Sym}^2 E^2 \text{ and } \mathrm{Sym}^2 V = \mathrm{Sym}^4 E^2 \bigoplus E.$$

由公式

$$\mathrm{Sym}^a E^2 \otimes \mathrm{Sym}^b E^2 = \mathrm{Sym}^{a+b} E^2 \bigoplus \mathrm{Sym}^{a+b-2} E^2 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{Sym}^{|a-b|} E^2$$

根据 [19, 练习 11，11], 可得

$$\mathrm{Sym}^2 V \otimes V^\vee = \mathrm{Sym}^6 E^2 \bigoplus \mathrm{Sym}^4 E^2 \bigoplus (\mathrm{Sym}^2 E^2)^{\oplus 2}.$$

从 $\mathrm{Sym}^2 E^2$ 中去掉一项，再从 $\mathrm{Sym}^2 V \otimes V^\vee$ 中加回 Tate 扭结，就得到 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}|_{\eta_0}$ 的表达式，以及 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}|^{I_{\overline{0}}}_{\overline{\eta}_0}$的表达式。□

2.5. **克洛斯特曼层在 ∞ 处的局部结构**。

2.5.1. 记号。 设 p, ℓ, $\mathbb{F}_q$, 以及 E 与第 2.3 节中的定义相同。我们固定一个本原的 $n+1$ 次单位根 $\zeta=\zeta_{n+1}$, 其属于 $\overline{\mathbb{F}}_p$。

(1). 对于多重指标 $\underline{I}\in\mathbb{N}^{n+1}$, 我们用 $C_{\underline{I}}=\sum_{i=0}^{n} I_i\cdot\zeta^i$ 和 $m_{\underline{I}}=\sum_{i=0}^{n} i\cdot I_i$表示。(2). 设 $v_0,\dots,v_n$ 是 E^{n+1}的一组基。我们用 $\sigma=(01\cdots n)\in S_{n+1}$表示, 其通过 $\sigma v_i:=v_{\sigma(i)}$作用于 v_i。对于多重指标 $\underline{I}\in\mathbb{N}^{n+1}$, 我们用 $v^{\underline{I}}=v_0^{I_0}\cdots v_n^{I_n}$表示。(a) 令 $d(k,n+1,p)$ 表示集合 $A_k^0:=\{\underline{I}\mid|\underline{I}|=k,\ C_{\underline{I}}=0\}$ 的基数。(b) 我们用 $a(k,n+1,p)$ 表示 A_k^0中 σ-轨道的集合的基数。(c) 我们用 $b(k,n+1,p)$ 表示 A_k^0中满足轨道张成的子空间非零的 σ-轨道。(d) 我们分别用 $d(k,n+1)$、$a(k,n+1)$ 和 $b(k,n+1)$ 表示当 p 变化时, $d(k,n+1,p)$、$a(k,n+1,p)$ 和 $b(k,n+1,p)$ 的一般值。

Fu 和 Wan 部分确定了 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}$ 在 [17, 定理 2.5 和定理 3.1]中的局部结构。

定理 2.18 (Fu–Wan)。 *(1)* 若 $p\nmid n+1$ 且 $2n\mid q-1$, 则有一个 Frob$_q$-模的同构

$$(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}\mid_{\eta_\infty\otimes\mathbb{F}_q})^{I_\infty}\left(\tfrac{nk}{2}\right)\simeq\begin{cases}E^{\bigoplus a(k,n+1,p)} & 2\mid n,\\ 0 & 2\nmid nk,\\ E^{\bigoplus b(k,n+1,p)} & 2\nmid n\ and\ 2\mid k.\end{cases}$$

(2) $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}$ 在 ∞ 处的斯旺导子为 $\frac{1}{n+1}\left(\binom{n+k}{n}-d(k,n+1,p)\right)$。

与命题2.17类似, 我们研究 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$ 和 $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$ 在 ∞处的局部结构。

P命题 2.19。 *1.* $Kl_3^{(2,1)}$ 在 ∞ 处的斯旺导子在 $p\neq 2$时为5, $p\neq 23$, 7; 在 $p=2$时为4, $p=27$。不变量 $(Kl_3^{(2,1)}\mid_{\overline{\eta}_\infty})^{I_\infty}$的维数在 $p\neq 2$时为0, $p\neq 2$, 7; 在 $p=2$时为1, $p=2$, 7。*2.* $Kl_3^{(2,2)}$ 在 ∞ 处的斯旺导子在 $p\neq 2$时为8, $p\neq 23$; 在 $p=2$时为6。不变量的维数$(\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}\mid_{\overline{\eta}_\infty})^{I_\infty}$在 $p\neq 2$时为1, $p\neq 2\,3$; 在 $p=2$时为3。

证明。 证明与 [17, 定理 31]的证明类似。我们给出第一个结论的证明, 略去第二个结论的证明。

斯旺导子: 根据另一种描述（2.10）, 只需计算 $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Kl}_3\otimes\mathrm{Kl}_3^\vee$和 Kl_3的斯旺导子。当 $3\neq p$时, 经过有限扩张 k of $\mathbb{F}_q$后, 根据同上文献中的引理 1.5, 我们有

$$[3]^*\mathrm{Kl}_3|_{\eta_\infty\otimes k}(1)=\mathscr{L}_{\psi_k(3t)}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi_k(3\zeta_3 t)}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi_k(3\zeta_3^2 t)},$$

其中 $[3]$: $\mathbb{G}_m\to\mathbb{G}_m$ 是三次映射, ζ_3 是 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 中的一个本原三次单位根.

于是, 对于某个 $N\in\mathbb{N}$ 和某个 $C_i\in\overline{\mathbb{F}}_p$, 我们可以得到 $[3]^*(\mathrm{Sym}^{\lambda_1}\mathrm{Kl}_3\otimes\mathrm{Sym}^{\lambda_2}\mathrm{Kl}_3^\vee)$ 的局部结构为 $\bigoplus_{i=1}^N\mathscr{L}_{\psi(C_i t)}$。由于当 $C_i\neq 0$ 时, 每个 $\mathscr{L}_{\psi(C_i t)}$ 的斯旺导子为 1, 而当 $C_i=0$ 时为 0, 因此我们得出

$$\mathrm{Sw}_\infty([3]^*(\mathrm{Sym}^{\lambda_1}\mathrm{Kl}_3\otimes\mathrm{Sym}^{\lambda_2}\mathrm{Kl}_3^\vee))=\{i\mid C_i\neq 0\}.$$

根据 [24, 1.13.1], , $\mathrm{Sym}^{\lambda_1}\mathrm{Kl}_3\otimes\mathrm{Sym}^{\lambda_2}\mathrm{Kl}_3^\vee$的斯旺导子因此为$\{i\mid C_i\neq 0\}/3$。

通过直接计算, 我们得到

$$\begin{aligned}[3]^*(\mathrm{Sym}^2\mathrm{Kl}_3\otimes\mathrm{Kl}_3^\vee|_{\eta_\infty\otimes k})(3)=&\mathscr{L}_{\psi(3t)}^{\bigoplus 3}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(3\zeta_3 t)}^{\bigoplus 3}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(3\zeta_3^2 t)}^{\bigoplus 3}\\ &\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(-6t)}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(-6\zeta_3 t)}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(-6\zeta_3^2 t)}\\ &\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(3(2-\zeta_3)t)}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(3\zeta_3(2-\zeta_3)t)}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(3\zeta_3^2(2-\zeta_3)t)}\\ &\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(3(2\zeta_3-1)t)}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(3\zeta_3(2\zeta_3-1)t)}\bigoplus\mathscr{L}_{\psi(3\zeta_3^2(2\zeta_3-1)t)}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

根据 p 的取值, $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$ 的斯旺导子可按如下方式计算。

- 若 $p\neq 2$, 7, 则分量 C 中出现的数 $\mathscr{L}_{\psi(Ct)}$ 在 (2.20) 中均非零。因此 $\mathrm{Sw}_\infty(\mathrm{Kl}_{(2,1)\,3})=\mathrm{rk}(\mathrm{Sym}^2\mathrm{Kl}_3\otimes\mathrm{Kl}_3^\vee)/3-\mathrm{Sw}_\infty(\mathrm{Kl}_3)=6-1=5$。
- 若 $p=2$, 则在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 中只有 6, $6\zeta_3$ 和 $6\zeta_3^2$ 为 0。因此 $\mathrm{Sw}_\infty(\mathrm{Kl}_{(2,1)\,3})=4$。
- 如果 $p=7$, 我们可以取 $\zeta_3=2$。因此, 在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 中只有 $2-\zeta_3$, $\zeta_3(2-\zeta_3)$ 和 $\zeta_3^2(2-\zeta_3)$ 为 0。所以, $\mathrm{Sw}_\infty(\mathrm{Kl}_{(2,\ 1)\,3})=4$。

不变量的维数: 设 k 是包含 ζ_3的 $\mathbb{F}_q$ 的有限扩张。考虑扩域 $k(t)=k(z)[t]/(t^3-z)$ 的 $k(z)$, 以及扩张 $k(y)=k(t)[y]/(y^q-y-t)$ 属于 $k(t)$。伽罗瓦群

H =Gal($k(y)/k(t)$) 同构于 $\mathbb{F}_q$，并且是 $G=\mathrm{Gal}(k(y)/k(z))$ 的正规子群。商群 G/H为 $\mathrm{Gal}(k(t)/k(z))=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

对于每个 $a\in\mathbb{F}_q$，我们将 H 中满足 $g_a\cdot y=y-a.$ 的元素记为 g_a。我们选取一个元素 $g\in G$，使得 $g\cdot y=\zeta_3 y$。由此可得 $g^3=g_0=\mathrm{id}$ 和 $g\notin H$。

设 W 是一个一维 E-向量空间，并选取 v_0 作为一组基。我们定义 H 在 W 上的作用如下：

$$g_a\cdot v_0=\psi_k(-3a)v_0.$$

根据构造，作为一个 H-表示， W 同构于 $\mathscr{L}_{\psi_k(3t)}$。于是诱导出的 G-表示

$$V:=\mathrm{Ind}_H^G W=\bigoplus_{i=0}^{2} g^iW,$$

可识别为 $[3]_*\left(\mathscr{L}_{\psi_k(3t)}\big|_{\eta_\infty\otimes k}\right)$。设 $v_i:=g^iv_0$。集合 $\{v_0,v_1,v_2\}$ 构成 V 的一组基，而作用 of$H$ 在 v_i 上的表达式为 b

$$g_a\cdot v_i=g^i\cdot g^{-i}g_{a,\mu}g^i\cdot v_0=g^i\cdot g_{\zeta_3^i a}\cdot v_0=\psi_k(-3\zeta_3^i a)v_i,$$

且 g 在 V 上的作用由 $gv_i=v_{i+1}$ 给出，其中 $v_3=v_0$。

由此可得，$\{v_av_b\otimes v_c^\vee\mid a\le b,\ \ 0\le a,\ \ b,\ \ c\le 2\}$ 构成 $\mathrm{Sym}^2V\otimes V^\vee=\mathrm{Sym}^2\mathrm{Kl}_3\otimes\mathrm{Kl}_3^\vee|_{\eta_\infty\otimes k}(3)$ 的一组基。要计算 $(\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}|_{\overline{\eta}_\infty})^{I_\infty}$的维数，只需计算 G-不变子空间的维数。

$$(\mathrm{Sym}^2V\otimes V^\vee)^G.$$

令 $w=\sum_{a,b,c}\alpha_{a,b,c}v_av_b\otimes v_c^\vee$，则

$$g_a\cdot w=\sum_{a,b,c}\psi_k(-3(\zeta_3^a+\zeta_3^b-\zeta_3^c)a)\alpha_{a,b,c}v_av_b\otimes v_c^\vee,$$

and

$$g\cdot w=\sum_{a,b,c}\alpha_{a+1,b+1,c+1}v_av_b\otimes v_c^\vee.$$

- 如果 $p\neq 2$，3，7，那么 $(\zeta_3^a+\zeta_3^b-\zeta_3^c)$ 在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 中永远不为 0。因此，$\mathrm{Sym}^2V\otimes V^\vee$ 中没有不动向量。
- 如果 $p=2$，那么 $w=\sum_{i=0}^2 v_iv_{i+1}\otimes v_{i+2}^\vee$ 张成 $(\mathrm{Sym}^2V\otimes V^\vee)^G$。
- 如果 $p=7$，那么在此情形下 $\zeta_3=2$，且 $w=\sum_{i=0}^2 v_iv_i\otimes v_{i+2}^\vee$ 张成 $(\mathrm{Sym}^2V\otimes V^\vee)^G$。

总之，当 $p\neq 2$、3、7 时，$(\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}|_{\overline{\eta}_\infty})^{I_\infty}$ 的维数为 0；当 $p=2$、7 时，其维数为 1。 □

注 2.21. 在第 2.6.2 节中，我们将确定 Kl_3 在 $p=3$ 处的局部单值群。因此，我们可以证明，当 $p=3$ $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$ 在 ∞ 处的斯旺导子为 5，且不变量 $(\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}|_{\overline{\eta}_\infty})^{I_\infty}$ 的维数为 0。论证与命题 2.32 和命题 2.33 的论证类似。

2.6. **中间 ℓ-adic 上同调的维数。** 本小节旨在计算 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}$. 的中间 ℓ-adic 上同调的维数。命题 2.22 给出了当p 与 $n+1$互素时的维数。

然而， $p\mid n+1$ 的情形仍然令人费解，因为 Kl_{n+1} 的局部单值群仍然未知。当 $n=1$时， $p=2$ 的情形的维数已在 [41, 推论 4.35]中计算得出。沿用他的方法，我们在第 $n=2$ 且 $p=3$ 的情形下，在第 2.6.2 节给出维数公式。关键思路是利用 SL_3 的有限子群的完整分类，求出 Kl ∞ 在 $_3$处的局部单值群。

2.6.1. 当 gcd(p, $n+1$) $=1$时。

命题 2.22。 当 p与 $n+1$互素时，中间 ℓ-进上同调$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})$ 的维数公式为

$$\frac{1}{n+1}\left(\binom{k+n}{n}-d(k,n+1,p)\right)-\sum_{u=0}^{\lfloor\frac{nk}{2}\rfloor}m_k(u)+2\delta(k,p)-\begin{cases}a(k,n+1,p) & 2\mid n,\\ 0 & 2\nmid nk,\\ b(k,n+1,p) & else,\end{cases}$$

其中，数值 $\delta(k,p)$ 在 $\begin{cases}1 & p=2\end{cases}$ 和 $2\mid k$ 时为 $\begin{cases}1 & p=2\end{cases}$，否则为 0；数值 $m_k(u)$ 定义于 (2.16)；数值 $d($ $k,n+1,p)$、 $a(k,n+1,p)$ 和 $b(k,n+1,p)$ 定义于第 2.5.1 节。

证明。 根据长正合列（2.5），$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})$ 的维数由下式给出。

$$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})+\dim\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}^{G_{\mathrm{geom}}}-\dim\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}^{I_0}-\dim\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}^{I_\infty}.$$

由 (2.4)，$\dim\mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})-\mathrm{H}^0_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})=\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})$，其计算见定理 2.18。至于整体单值群的不变量，结合 [24, Thm. 11.1] 和 [18, Lem. 0.2]可知，当 $p=2$ 且 k 为偶数时，其为 $E(nk/2)$，否则为 0。接下来，定理 2.15 和定理 2.18 总结了 $p\nmid n+1$时，0 和 ∞ 处惯性群不变量的维数。最后，综合以上结果，我们得到中间上同调的维数。□

2.6.2. 当 $n=2$ 和 $p=3$。
SL_3 的有限子群分类。设 ζ_9 为单位根的一个本原九次根，并令 $\omega=\zeta_9^6$ 和$\varepsilon=\zeta_9^4$。我们在 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ 中定义以下矩阵

$$S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&\varepsilon&0\\0&0&\varepsilon\omega\end{pmatrix},\ V=\frac{1}{\omega-\omega^2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{pmatrix}.$$

Let

$$G_{108}=<S,T,V>\subset\mathrm{SL}_3,$$

$$G_{216}=<S,T,V,UVU^{-1}>\subset\mathrm{SL}_3,$$

and

$$G_{648}=<S,T,V,U>\subset\mathrm{PGL}_3.$$

我们在以下定理中总结 $_3(\mathbb{C})$ 中可解有限子群的完整分类，该分类见 [29, 第 XII 章] 。

定理 2.23。 若 G 是 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ 的有限可解子群，则它同构于以下群之一：

(A). 对角阿贝尔群，*(B).* 由 GL_2,*(C)* 的有限子群导出的群。*(C).* 由 *(A)* 型群和元素 T生成的群，*(D).* 由 *(C)* 型群和一个形如以下形式的矩阵生成的群

$$Q_{a,b,c}:=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&0&b\\0&c&0\end{pmatrix}$$

对于满足 $abc=-1$ 的某些单位根，

(E). 群 G_{108}，*(F).*群 G_{216}，*(G).* 群 G_{648}。

当 $p=3$ 时，∞ 处的局部单值。令 $j\colon\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_3}\hookrightarrow\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_3}$ 为包含映射。将 ℓ-进层$j_*\mathrm{Kl}_3$ 限制到 η_∞ 上，我们得到惯性群在 ∞ 处的一个表示 $\rho\colon I_\infty\to\mathrm{SL}_3(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。回顾一下，$\mathrm{Kl}_3$ 在 ∞ 处是完全野分歧的，其斯旺导子为 1。我们希望确定 Kl_3 在 ∞处的局部单值群，即 SL_3 的有限可解子群 $D_0=\rho(I_\infty)$。该群具有一个下编号滤过 $\{D_i\}$，其终止于 D_N，满足 $\#D_0/D_1$ 与 3 互素，D_1 是 D_0 的 3- 西洛子群，并且当 $i\geq1$ 时，D_i/D_{i+1} 是阶为 3 的循环阿贝尔群。

定理 2.24. I_∞ 在 ρ 下的像同构于 G_{108}，其下编号滤过为

$$D_0\rhd D_1=<S,T>\rhd D_2=\cdots=D_4=<\omega\mathrm{I}_3>\rhd\{1\}.$$

证明。由 [24, 引理 1.19], ，局部单值群 $D_0=\rho(\infty)$ 满足以下条件：

(a). D_0 不可约地作用于 $V=\mathrm{Kl}_3\mid_{\eta_\infty}$ 不可约地，

(b). D_0 不存在维数小于 3 的忠实 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-线性表示。

(A) 型群是阿贝尔群。由于阿贝尔群的不可约表示都是一维的，根据条件 (a)，群 D_0 不可能与 (A) 型群同构。(B) 型群是由 GL_2, 的子群诱导而来的群，这些子群具有忠实的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-线性二维表示，这违反了条件 (b)。

我们建立以下引理，以排除更多可能性。

L引理 2.25. 设 $V = \mathrm{Kl}_3 \mid_{\overline{\eta}_\infty}$。则 $\mathrm{Sym}^3 V$ 的斯旺导子为 $2 + \dim(\mathrm{Sym}^3 V)^{I_\infty}$.

证明。 由于 SL_3 的标准表示的对称幂是不可约的，不变量 $(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3)^{\mathrm{SL}_3}$(同构于 $\mathrm{H}^0_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_3)$) 为 0。根据格罗滕迪克–奥格–沙法列维奇公式，$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3)$ 的维数等于 $\mathrm{Sym}^3 V = (\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3)_{\overline{\eta}_\infty}$的斯旺导子，该导子小于或等于$\left\lfloor \frac{1}{3} \cdot \mathrm{rk}\ \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3 \right\rfloor = 3$，因为 $\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3$的断点至多为 $1\,3$。

考虑长正合列（2.5），我们有

$$\begin{aligned} 0 \to (\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3)^{\mathrm{SL}_3} &\to (\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3 \mid_{\eta_0})^{I_0} \bigoplus (\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3 \mid_{\eta_\infty})^{I_\infty} \\ &\to \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3) \to \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3) \to 0. \end{aligned}$$

回想一下，根据定理 2.15，$(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3 \mid_{\eta_0})^{I_0}$ 的维数为 2，由正合列可推出

$$3 \geq \dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3) = 2 + \dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3) + \dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3 \mid_{\eta_\infty})^{I_\infty}.$$

如果中间上同调非零，则它是一维的。通过第 A.1.1节中的计算，我们得到

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob} \mid \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3)) = -(m_3^3(3) + 1 + p^2) = 0.$$

这就导出了矛盾，因为 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\ \mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\ \overline{\mathbb{F}}_3},\ \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_3)$ 是权重 10 纯的。因此，斯旺导子为 $2 + \dim(\mathrm{Sym}^3 V)^{I_\infty}$。

□

现在假设 D_0 为 (C) 型或 (D) 型。表示 $\mathrm{Sym}^3 V$ 是三个子表示的直和： $V_1 = \mathrm{span}\{v_0^3,\ v_1^3,\ v_2^3\}$、 $V_2 = \mathrm{span}\{v_i^2 v_j\}_{i \neq j}$和 $V_3 = \mathrm{span}\{v_0 v_1 v_2\}$。

- 如果 D_0 是 (C) 型， D_0 的作用在每个 V_i中都有不动向量。因此 $\dim(\mathrm{Sym}^3 V)^{I_\infty} \geq 3$。应用引理 2.25，我们得到
$$5 \leq 2 + \dim(\mathrm{Sym}^3 V)^{I_\infty} = \mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3 V) \leq 3.$$
- 若 D_0 是 (D) 型，则算子 T 和 $Q_{a,b,c}$ 在每个 V_i中都没有不动向量。因此，不变量子空间 $(\mathrm{Sym}^3 V)^{I_\infty}$ 的维数为 0，且 V_i 全都是全野的。利用引理 2.25，我们推得
$$2 = \mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3 V) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Sw}(V_i) \geq 3,$$
这仍然是不可能的。

群 D_0 也不可能同 (G) 型的群同构，因为 G_{648} 没有阶为 81 的正规子群，也就是说，没有正规 3-西洛子群。通过群论计算可知， G_{648} 的正规子群可能的阶为 1，3，27，54，216 和 648。

现在剩下的情形是 (E) 型和 (F) 型的群。

引理 2.26. 若 D_0 是 *(E)* 型或 *(F)* 型，则$\mathrm{Sym}^6 V$ 的斯旺导子为6。

证明. 根据上述讨论，群 D_0 要么是群 G_{108} ，要么是群 G_{216}。在这两种情况下， D_0 的 3-西洛子群 D_1 均由矩阵 S 和 T生成，其阶为 27。群 D_1 只有 3 个阶为 9 的子群。它们是

$$H_1 = < S, \omega I_3 >, \quad H_2 = < T, \omega I_3 > \quad \text{and} \quad H_3 = < ST, \omega I_3 > .$$

由于 V完全野，因此分歧滤过中的最后一个非平凡群 D_N 没有不动向量，即 $V^{D_N} = 0$。由于 S、 ST和 T分别有非零不动向量 v_1、 $v_1 + w^2 v_2 + v_3$和 $v_1 + v_2 + v_3$，群 D_N 必为 H_i 或 $< \omega I_3 >$。

T存在非负整数 a、 b、 c，使得下编号分歧滤过具有如下形式

$$D_0 \rhd D_1 = \cdots = D_a \rhd \cdots \rhd D_{a+b} \rhd \cdots = D_{a+b+c} \rhd \{1\},$$

where $D_{a+1} = \cdots D_{a+b}$是 H_1、 H_2或 H_3，如果 $b \neq 0$，并且 $D_{a+b+1} = \cdots = D_{a+b+c} = < \omega I_3 >$，如果 $c \neq 0$。 .

我们知道，$\mathrm{Sw}(V)=1$ 以及 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3V)=2$ 根据（2.25），或者为 3。那么

$$1=\mathrm{Sw}(V)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\dim V-\dim V^{D_i}}{[D_0:D_i]}=\frac{1}{[D_0:D_1]}\left(3*a+3*\frac{b}{3}+3*\frac{c}{9}\right)$$

and

$$2\text{ or }3=\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3V)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\dim \mathrm{Sym}^3V-\dim \mathrm{Sym}^3V^{D_i}}{[D_0:D_i]}=\frac{1}{[D_0:D_1]}\left(8*a+6*\frac{b}{3}+0*\frac{c}{9}\right).$$

若 $D_0=G_{108}$，唯一的可能性是 $(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 3)$。若 $D_0=G_{216}$，则有两种可能性：$(a,\ b,\ c)=(2,\ 0,\ 6)$ 或 $(1,\ 4,\ 3)$。在所有情况下，数 c 都非零，且最后一个非平凡群 $D_N=D_{a+b+c}$ 是一个阶为 3 的 $<\omega I_3>$。此外，我们在所有情况下都得到 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3V)=2$。

现在考虑 $\mathrm{Sym}^6V=\mathrm{Sym}^6(\mathrm{Kl}_3)\overline{\eta}_\infty$ 的斯旺导子。在此情况下，D_N 在 Sym^6V 上作用平凡，因此只需计算 $\dim \mathrm{Sym}^6V^{D_1}$ 和 $\dim \mathrm{Sym}^6V^{H_i}$（若 $b\neq 0$，则 $D_{a+1}=H_i$ 对某个 $i\in\{1,\ 2,\ 3\}$）。令 $\{v_i\}_{i=0,\ 1,\ 2}$ 为 V 和 $f_i=v_0+\omega^iv_1+\omega^{2i}v_2$ 关于 $i=0,\ 1,\ 2$ 的典范基。那么 S 和 T 在基 $\{f_i\}$ 上的作用分别为 $Sf_i=f_{i+1}$ 和 $Tf_i=\omega^{-i}f_i$，其中 $f_3:=f_0$。

考虑多重指标的集合

$$A:=\{\underline{I}=(I_0,I_1,I_2)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^3\mid |\underline{I}|:=I_0+I_1+I_2=6\},$$

其上 $\sigma=(123)\in S_3$ 作用。对于任意向量 $f=\sum_{\underline{I}\in A}a_{\underline{I}}f^{\underline{I}}$ 属于 Sym^kV，我们有

$$Sf=\sum_{\underline{I}\in A}a_{\sigma^{-1}\underline{I}}f^{\underline{I}}\quad\text{and}\quad Tf=\sum_{\underline{I}\in A}a_{\underline{I}}\omega^{I_2-I_1}f^{\underline{I}}.$$

因此，如果 $f\in\mathrm{Sym}^6V^{D_1}$，即 $Sf=Tf=f$，则向量 f 属于 $\{\sum_{i=0}^2 f^{\sigma\underline{I}}\mid I_0\equiv I_1\equiv I_2 \bmod 3\}$ 的张成空间。不变量子空间 $(\mathrm{Sym}^3V)^{D_1}$ 的维数为 4。类似地，我们可以计算出，对于 $i\in\{1,2,3\}$，$\dim \mathrm{Sym}^6V^{H_i}=10$。

总之，对于 $(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 3)$、$(2,\ 0,\ 6)$ 和 $(1,\ 4,\ 3)$，斯旺导子为

$$\frac{1}{4}\left(24*1+18*0+0*\frac{3}{9}\right)=\frac{1}{8}\left(24*2+18*0+0*\frac{6}{9}\right)=\frac{1}{8}\left(24*1+18*\frac{4}{3}+0*\frac{3}{9}\right)=6.$$

□

引理 2.27。$(\mathrm{Sym}^6V)^{I_\infty}$ 的维数为2，若 $D_0=G_{108}$；若 $D_0=G_{216}$，则为1。

证明。设 $D_0=\rho(I_\infty)$ 为 G_{108} 或 G_{216}，它们分别是 $G=G_{216}$ 或 $G=G_{648}$ 的正规子群。设 $\overline{a}\in G/D_0$ 是元素 $a\in G$的共轭类，则

$$\mathrm{Tr}(\overline{a}\mid(\mathrm{Sym}^kV)^{I_\infty})=\frac{1}{\#D_0}\sum_{g\in a\cdot D_0}\mathrm{Tr}(g\mid\mathrm{Sym}^kV).\tag{2.28}$$

特别地，若令 $a=1$，则得到

$$\sum\dim(\mathrm{Sym}^kV)^{I_\infty}x^k=\frac{1}{\#D_0}\sum_{g\in D_0}\frac{-1}{P_{g,V}(x)}\tag{2.29}$$

其中 $P_{g,\ V}(x)=$ 行列式$(x\cdot g-1\mid V)$ 是 g的特征多项式。可以用 Sagemath 轻松计算[1] [38]。因此，我们推得

$$\begin{cases}P(x)=-\dfrac{1-x^3+x^6+x^{12}-x^{15}+x^{18}}{(-1+x^3)^3(1+x^3)^2(1+x^6)} & \text{if } D_0=G_{108};\\ \widetilde{P}(x)=-\dfrac{1-x^3+x^9-x^{15}+x^{18}}{(-1+x^3)^3(1+x^3)^2(1+x^6)} & \text{if } D_0=G_{216}.\end{cases}\tag{2.30}$$

特别地，它们关于 t^6 的系数分别为 2 和 1。□

根据第 A.1.1 节，我们有

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}\mid \mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3},\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_3))=-820.$$

结合定理 2.15 和 [24, 定理 7.0。7]，我们推得

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}\mid(\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_3)^{I_0})=1+p^2+p^4+p^6=820.$$

[1]代码可在 我的网页上找到。

利用长正合列（2.5），我们得出

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob} \mid \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_3)) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob} \mid (\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_3)^{I_{\overline{\infty}}}), \tag{2.31}$$

and

$$\dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_3) = 2 - \dim(\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_3)^{I_{\overline{\infty}}}.$$

若 $D_0 = G_{216}$，则 $\dim(\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_3)^{I_{\overline{\infty}}}$ 和中间上同调均为一维。然而，根据（2.31），由于 $(\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_3)^{I_{\overline{\infty}}}$ 是权 12 纯的，且 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\ \mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\ \overline{\mathbb{F}}_3},\ \mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_3)$ 是权 13 纯的，因此得到矛盾。

总之，唯一的可能性是 $D_0 = G_{108}$。D_0 的分歧滤过可用 t 表示 he
三元组 (1，0，3) 位于 引理的证明 2.26。 □

中间上同调的维数。

命题 2.32。当 $p = 3$ 时，$I_{\overline{\infty}}$ 在 $(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_3)\ |_{\eta_\infty}$ 上的作用的斯旺导子由下式给出

$$\mathrm{Swan}_\infty(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_3) = \begin{cases} \frac{1}{3}\binom{k+2}{2} & 3 \nmid k, \\ \frac{1}{4}\left(\binom{k+2}{2} - \frac{d(k,3,3)+2}{3}\right) & 3 \mid k. \end{cases}$$

证明。回忆一下，我们记 $V = \mathrm{Kl}_3\ |_{\eta_\infty}$。若 $3 \nmid k$，则在群 $< \omega I_3 >$ 的作用下，$\mathrm{Sym}^k V$ 没有不动向量。因此，斯旺导子可表示为

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\dim \mathrm{Sym}^k V - 0}{[D_0 : D_i]} = \frac{\dim \mathrm{Sym}^k V}{3} \cdot \sum \frac{3}{[D_0 : D_i]} = \frac{1}{3} \cdot \binom{k+2}{2}.$$

若 $3 \mid k$，情况与 $k = 6$ 时类似。在这种情况下，$D_4 =< \omega I_3 >$ 在 $\mathrm{Sym}^k V$ 上平凡作用。$\mathrm{Sym}^k V^{D_1}$ 的维数可根据 S 和 T 的作用下的不变量向量计算。我们再次令 $\{v_i\}_{i=0,1,2}$ 为 V 的典范基，并令 $f_i = v_0 + \omega^i v_1 + \omega^{2i} v_2$ 对应于 $i = 0, 1, 2$。若 $Sf = Tf = f$，向量 f 属于集合 $\{\sum_{i=0}^{2} f^{\sigma^i I} \mid I_0 \equiv I_1 \equiv I_2 \mod 3\}$ 的张成空间。S 和 T 的不变量的维数恰好等于数目 $\frac{d(k,3,3)-2}{3} + 1 = \frac{d(k,3,3)+2}{3}$，其中 $d(k, 3, 3)$ 在第 2.5.1 节中引入。总之，斯旺导子为

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\dim \mathrm{Sym}^k V - \dim \mathrm{Sym}^k V^{D_i}}{[D_0 : D_i]} = \frac{1}{4}\left(\binom{k+2}{2} - \frac{d(k,3,3)+2}{3}\right).$$

□

命题 2.33。惯性群的不变量由下式给出

$$(\mathrm{Sym}^k V)^{I_{\overline{\infty}}} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-k)^{\bigoplus \widetilde{p}_k} \bigoplus \mathscr{L}_\theta(-k)^{\bigoplus p_k - \widetilde{p}_k},$$

其中 θ 是一个非分歧特征，它将 *Frobenius* 映到 -1，而 p_k 和 $\widetilde{p}_k$ 分别是生成级数 k 的第 $P(x)$ 和 $\widetilde{P}(x)$ 中第 (2.30) 项的系数。特别地，$(\mathrm{Sym}^k V)^{I_{\overline{\infty}}}$ 的维数为 p_k。

证明。设 ϕ 是 Frob_∞ 在 GL_3 中的像以及 $\phi_1 = \frac{1}{3}\phi$ 在 SL_3中的像的提升。由于 ϕ 正规化 $D_0 = G_{108}$，它属于 G_{108} 在 SL_3, 中的正规化子，即 G_{216}。直接计算可得 G_{216}/D_1 是四元数群 Q_8，而 D_0/D_1 是一个循环群。注意到对于 $\overline{\phi}_1^{-1} g \overline{\phi}_1 = g^3$，有 $g \in Q_8$，这意味着 $\phi_1 \notin D_0$。在（2.28）中令 $a = \phi_1$。于是得到

$$Q(x) := \sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(\phi_1 \mid (\mathrm{Sym}^s V)^{I_{\overline{\infty}}}) x^s = \frac{1}{108} \sum_{g \in \phi_1 D_0} \frac{-1}{P_{g,V}(x)}.$$

由于 $\phi_1 \notin G_{108}$ 和 $G_{216} = G_{108} \cup \phi_1 G_{108}$，级数 $Q(x)$ 不过是

$$2\widetilde{P}(x) - P(x) = \frac{-1 + x^3 - x^6}{(-1 + x^3)(1 + x^6)}.$$

~设 p_k 和 $\widetilde{p}_k$ 分别为 $P(x)$ 和 $P(x)$ 的第 k 个系数。

注意到 $\phi_1^2 \in G_{108}$，因为 $[G_{216} : G_{108}] = 2$。因此，ϕ_1 作用于 $(\mathrm{Sym}^k V)^{I_{\overline{\infty}}}$ 的特征值为± 1。设 1 和 -1 的特征子空间维数分别为 λ_1 和 λ_{-1}。那么 $\lambda_1 + \lambda_{-1} = \dim(\mathrm{Sym}^k V)^{I_{\overline{\infty}}}$ 并且 $\lambda_1 - \lambda_{-1} = 2\widetilde{p}_k - p_k$。因此，我们得出命题2.33中的所需分解。

□

推论 2.34。当 $p=3$ 时，矩的维数为

$$\dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_3)=\begin{cases}\frac{1}{3}\binom{k+2}{2}-\lfloor\frac{k+2}{2}\rfloor & 3\nmid k;\\ \frac{1}{4}\left(\binom{k+1}{2}-\frac{d(k,3,3)+2}{3}\right)-\lfloor\frac{k+2}{2}\rfloor-p_k & 3\mid k.\end{cases}$$

3. 与克洛斯特曼矩相关的动机

在本节中，我们旨在构造与克洛斯特曼层的矩相关的动机。我们的方法推广了 [16] 中通过韦伊构造给出的构造。接下来，我们研究它们的德拉姆实现、 ℓ-进实现，以及在特征 $p>0$下的其他实现。

3.1. 动机的构造。令 n 为一个整数， V_λ 为最高权 $\sum_i \lambda_i(L_1+\ldots+L_i)$ 的不可约表示， $\mathrm{K}\subset\mathbb{G}_m^{n|\lambda|}$为由方程定义的超曲面

$$\sum_{i=1}^{|\lambda|}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{i,j}+\frac{1}{\prod_{j=1}^n x_{i,j}}\right)=0. \tag{3.1}$$

群 $S_{|\lambda|}\times\mu_{n+1}$ 通过 $(\sigma\times\mu)\cdot x_{i,j}:=\mu\cdot x_{\sigma(i),j}$作用于 K。稍微滥用一下记号，我们将 P_λ 和Q_λ 分别记作第 2.1 节中的群 $P_{\mu(\lambda)}$ 和 $Q_{\mu(\lambda)}$，并令 $G_\lambda=P_\lambda\times Q_\lambda$。令 $\chi_n\colon \mathrm{sign}^n\times\mathrm{sign}^{n+1}$ 为 G_λ 的特征；对于 $S_{|\lambda|}$的每个表示 V，我们将相对于

$$\frac{1}{\#G_\lambda}\sum_{\sigma\in P_\lambda}\mathrm{sign}(\sigma)^n\sigma\cdot\sum_{\tau\in Q_\lambda}\mathrm{sign}(\tau)^{n+1}\tau \tag{3.2}$$

由 $V^{G_\lambda,\ \chi_n}$。此外，若有限群 H 作用于 V且与 $S_{|\lambda|}$交换，则将等型分量 $(V^{G_\lambda,\ \chi_n})^H$ 记为 $V^{G_\lambda\times H,\ \chi_n}$。

定义 3.3。 与 $\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}$ 的矩相关的动机是如下形式的、定义在 $\mathbb{Q}$ 上且系数为有理数的诺里动机：

$$\mathrm{M}^\lambda_{n+1}:=\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}_c^{n|\lambda|-1}(\mathcal{K})^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1),$$

其中 $W_\bullet$是（动机）权滤过 [21, 定理 10.2。5]，，指数 $G_\lambda\times\mu_{n+1}$， χ_n表示关于 (3.2) 以及上述 μ_{n+1} 作用取等型分量。

注 3.4。 $\zeta_{n+1}\in\mu_{n+1}$ 在 K 上的作用并非定义在 $\mathbb{Q}$ 上的自同构（仅定义在 $K=\mathbb{Q}(\zeta_{n+1})$上）。但是，在 $\mathrm{N}:=\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}_c^{n|\lambda|-1}(\mathrm{K})^{G_\lambda,\ \chi_n}(-1)$ 上取 μ_{n+1} 的不变量，仍可得到一个定义在 $\mathbb{Q}$上的诺里动机。事实上，可以将诺里动机 N 看作一个 $\mathbb{Q}$-向量空间，并带有动机伽罗瓦群 $G_{\mathrm{mot}}(\mathbb{Q})$ 的作用。我们将 N 限制为定义在 K上的诺里动机 N_K，即一个 $\mathbb{Q}$-向量空间，并带有动机伽罗瓦群 $G_{\mathrm{mot}}(K)$ 的作用。于是可以考虑一个定义在 K上的诺里动机

$$\mathrm{N}^{\mu_{n+1}}:=\mathrm{im}(\mathrm{N}_K\xrightarrow{\varphi}\mathrm{N}_K),$$

其中 $\varphi=\frac{1}{\#\mu_{n+1}}\sum_{\zeta\in\mu_{n+1}}\zeta$。可以验证， $\mathrm{N}^{\mu_{n+1}}$ 在 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 的作用下保持稳定。根据 [21,定理 9.1。16], 动机 $\mathrm{N}^{\mu_{n+1}}$ 来自 $\mathbb{Q}$上的一个诺里动机。

当表示 V_λ 是 SL_{n+1}标准表示的第 k对称幂，即$V_{(k,0,\ldots,0)}$时，我们得到在 [16, (3.1)]中构造的动机 M^k_{n+1}。为简便起见，在这种情况下，我们用 M^k_{n+1} 代替 $\mathrm{M}^{(k,0,\ldots,0)}_{n+1}$。

命题 3.5。 动机 M^λ_{n+1} 是权 $n|\lambda|+1$纯的。此外，它们配备了$(-1)^{n|\lambda|+1}$- 对称完美配对

$$\mathrm{M}^\lambda_{n+1}\times\mathrm{M}^\lambda_{n+1}\to\mathbb{Q}(-n|\lambda|-1).$$

证明。 由构造可知，动机 $\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}(\mathrm{H}_c^{n|\lambda|-1}(\mathrm{K})(-1))$是权 $n|\lambda|+1$ 纯的。此外，利用与指数混合霍奇结构的 [16, 定理 3.2] 类似的证明，它们配备了$(-1)^{n|\lambda|+1}$-对称完美配对。考虑等型分量后，动机 M^λ_{n+1} 也为权$n|\lambda|+1$纯，并具有诱导的$(-1)^{n|\lambda|+1}$-对称配对。 □

3.2. **特征0下的实现**。

3.2.1. 德拉姆实现。 $\mathrm{M}^{\lambda}_{n+1}$ 的德拉姆实现构成一个权$nk+1$的纯霍奇结构。当 $n=1$ 且 $\lambda=(k)$ 时，M^{k}_{2}的霍奇数由 [16, 定理 18], 给出，它们只能是 0 或 1。在 [32, 定理 1.2 和定理 523], 中，我们计算了更多动机的霍奇数，并用生成级数表示它们。通过对 同上中的生成级数直接计算，我们可推出以下推论。

推论 3.6。 对于 $(n+1,\ k)$ 定理 *1.6* 中表格所列的数对，$\mathrm{M}^{k}_{n+1,\ \mathrm{dR}}$ 的霍奇数要么为0 ，要么为1。

对于 $\mathrm{M}_{44,\ \mathrm{dR}}$ 和 $\mathrm{M}_{3}^{(2,2)}{}_{,\ \mathrm{dR}}$，尽管我们无法直接计算它们的霍奇数，但它们的霍奇数仍然只有 0 或 1，见注 5.10 和注5.17。

3.2.2. ℓ进实现。 对于素数 ℓ， ℓ 进实现

$$(\mathrm{M}^{\lambda}_{n+1})_{\ell}:=\mathrm{gr}^{W}_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_{\ell})^{G_{\lambda}\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1) \tag{3.7}$$

M 的λ_{n+1} 是一个连续的 ℓ-进表示，取值于绝对伽罗瓦群 Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$，其权为$n|\lambda|+1$ ，并且根据命题 3.5，它配备了一个 $(-1)^{n|\lambda|+1}$-对称配对。与动机的情形类似，我们实际上得到了 Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$的一个表示。如注释 3.4所述，尽管$\mu_{n+1}$ 的作用与 Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$不交换，但 μ_{n+1} 的不变量在 Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$的作用下保持稳定。

对于克洛斯特曼和的对称幂矩情形，我们在 $^{k}_{n+1)\mathrm{dR}}$ 中计算了维数，见 [32, 推论 219]。由比较定理可得以下命题。

命题 3.8. 其维数为$(\mathrm{M}^{k}_{n+1})_{\ell}$

$$\frac{1}{n+1}\left(\binom{k+n}{n}-d(k,n+1)\right)-\sum_{u=0}^{\lfloor\frac{nk}{2}\rfloor}m_k(u)-\begin{cases}a(k,n+1) & 2\mid n,\\ 0 & 2\nmid nk,\\ b(k,n+1) & else.\end{cases}$$

其中，数 $a(k,n+1)$ $b(k,n+1)$、数 $d(k,n+1)$ 在第 *2.5.1* 节中定义，而数 $m_k(u)$ 定义于 (2.16)。

我们将在第 4.1 节研究这些伽罗瓦表示的分歧性质。 .

3.3. **特征** $p>0$ **下的其他实现**。

3.3.1. ℓ-进情形。

命题 3.9。我们有

$$\mathrm{H}^{i}_{\acute{e}t,?}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Kl}^{\lambda}_{n+1})\simeq\mathrm{H}^{n|\lambda|+i}_{\acute{e}t,?}\left(\mathbb{G}^{n|\lambda|+1}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathscr{L}_{\psi(\widetilde{f}_{|\lambda|})}\right)^{G_{\lambda}\times\mu_{n+1},\chi_n}{}^{2},$$

对于 $i\in\{0,1,2\}$。

证明。 这里给出通常上同调的证明，而紧支撑上同调和中间上同调的性质可用类似方法证明。

令 pr_z 为从 $\mathbb{G}^{n|\lambda|}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}\times\mathbb{G}_{m,z}$ 到最后一个因子 $\mathbb{G}_{m,z}$的投影。投影 pr_t 以与 pr_z平行的方式定义。由同构 $\left([n+1]_*\mathscr{L}_{\psi_p(\widetilde{f}_{|\lambda|})}\right)^{\mu_{n+1}}\simeq\mathscr{L}_{\psi_p(f_{|\lambda|})}$, 我们有 $\mathrm{Kl}^{\lambda}_{n+1}\simeq([n+1]_*[n+1]^*\mathrm{Kl}^{\lambda}_{n+1})^{\mu_{n+1}}$.那么

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{i}_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Kl}^{\lambda}_{n+1})\simeq&\mathrm{H}^{i}_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},([n+1]_*[n+1]^*\mathrm{Kl}^{\lambda}_{n+1})^{\mu_{n+1}})\\ \simeq&\mathrm{H}^{i}_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},[n+1]^*\mathrm{Kl}^{\lambda}_{n+1})^{\mu_{n+1}}\\ \simeq&\mathrm{H}^{i}_{\acute{e}t}\left(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},[n+1]^*\left(\mathrm{Kl}^{\otimes|\lambda|}_{n+1}\right)^{G_{\lambda},\chi_n}\right)^{\mu_{n+1}}\\ \simeq&\left(\mathrm{H}^{n|\lambda|+i}_{\acute{e}t,?}\left(\mathbb{G}^{n|\lambda|+1}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathscr{L}_{\psi(\widetilde{f}_{|\lambda|})}\right)^{G_{\lambda},\chi_n}\right)^{\mu_{n+1}},\end{aligned}$$

其中，在最后一个同构中，我们使用了命题λ_{n+1} 2.13 中对 Kl 的几何描述。 □

类似于 [16, (2.12)], 中相关德拉姆上同调的构造，我们有如下推论。**推论 3.10**。 存在一个 $(-1)^{n|\lambda|+1}$对称的完美自配对，定义在 $\mathrm{H}^{1}_{\text{ét,mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Kl}^{\lambda}_{n+1})$。

[2]这里的作用 μ_{n+1} 的 n 由 $\mathbb{G}_{m,\ \mathbb{F}_p(\zeta_{n+1})}$上的作用诱导，我们也可以类似地将 μ_{n+1}-不变量理解为 in 注记 3.4。

定理 3.11。 假设 $n|\lambda| \geq 3$。我们有 ℓ-*adic* 上同调之间的同构

$$\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+i}\mathrm{H}^i_{\text{ét,c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}) \simeq \mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+i}\mathrm{H}^{n|\lambda|-2+i}_{\text{ét,c}}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p))^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1)$$

对于 $i \in \{0、1、2\}$，以及

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1_{\text{ét,mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}) \simeq & \mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\text{ét,c}}\Big(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)\Big)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1)\\ \simeq & \mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|+1}_{\text{ét},\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}}\Big(\mathbb{G}^{n|\lambda|}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)\Big)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n},\end{aligned}$$

当 $\mathcal{K}$ 光滑时，它也同构于 $\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\text{ét}}\Big(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)\Big)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1)$。

证明。 通过进行变量替换 $(t、\ x_{i、\ j}) \mapsto (t、\ x_{i、\ j}/t)$，对于 $i \in \{0、\ 1\}$，我们得到

$$\mathrm{H}^{n|\lambda|+i}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}\Big(\mathbb{G}^{n|\lambda|+1}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{L}_{\psi(\widetilde{f}_{|\lambda|})}\Big) \simeq \mathrm{H}^{n|\lambda|+i}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}\Big(\mathbb{G}^{n|\lambda|+1}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{L}_{\psi(t\cdot g^{\boxplus|\lambda|})}\Big).$$

接着，考虑三元组的局部化序列

$$\Big((\mathbb{A}^1\times\mathbb{G}^{n|\lambda|}_m, t\cdot g^{\boxplus|\lambda|}), (\mathbb{G}^{n|\lambda|+1}_m, t\cdot g^{\boxplus|\lambda|}), (0\times\mathbb{G}^{n|\lambda|}_m, 0)\Big),$$

我们得到正合列

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1+i}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}\Big(\mathbb{G}^{n|\lambda|}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}(\zeta_p)\Big) \to & \mathrm{H}^{n|\lambda|+i}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}\Big(\mathbb{G}^{n|\lambda|+1}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{L}_{\psi_p(t\cdot g^{\boxplus|\lambda|})}\Big)\\ \to & \mathrm{H}^{n|\lambda|+i}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}\Big(\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}\times\mathbb{G}^{n|\lambda|}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{L}_{\psi_p(t\cdot g^{\boxplus|\lambda|})}\Big) \to \mathrm{H}^{n|\lambda|+i}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}\Big(\mathbb{G}^{n|\lambda|}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)\Big).\end{aligned} \tag{3.12}$$

对于 $i \in \{0,\ 1,\ 2\}$。接下来，我们考虑另一个三元组

$$\Big((\mathbb{A}^1\times\mathbb{G}^{n|\lambda|}_m, t\cdot g^{\boxplus k}), (\mathbb{A}^1\times(\mathbb{G}^{n|\lambda|}_m\backslash\mathcal{K}), t\cdot g^{\boxplus|\lambda|}), (\mathbb{A}^1\times\mathcal{K}, 0)\Big). \tag{3.13}$$

注意，对于任意 $r \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^r_{\acute{e}t,c}\Big(\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}\times(\mathbb{G}^{n|\lambda|}_m\backslash\mathcal{K})_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{L}_{\psi_p(t\cdot g^{\boxplus|\lambda|})}\Big) = & \mathrm{H}^r_{\acute{e}t,c}\Big(\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}\times(\mathbb{G}^{n|\lambda|}_m\backslash\mathcal{K})_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{L}_{\psi_p(t)}\Big)\\ = & \bigoplus_{a+b=r}\mathrm{H}^a_{\acute{e}t,c}\Big(\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{L}_{\psi_p}\Big)\otimes\mathrm{H}^b_{\acute{e}t,c}\Big((\mathbb{G}^{n|\lambda|}_m\backslash\mathcal{K})_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)\Big) = 0,\end{aligned}$$

其中，我们在第一个等式中通过 $(t,\ x_{i,\ j}) \mapsto (t\cdot(g^{\boxplus|\lambda|})^{-1},\ x_{i,\ j})$ 作了变量替换。于是，根据与三元组 (3.13) 相关联的长正合列，我们推出

$$\mathrm{H}^{n|\lambda|+i}_{\acute{e}t,c}\Big(\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}\times\mathbb{G}^{n|\lambda|}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathscr{L}_{\psi_p(t\cdot g^{\boxplus|\lambda|})}\Big) \simeq \mathrm{H}^{n|\lambda|-2+i}_{\acute{e}t,c}\Big(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)\Big)(-1). \tag{3.14}$$

现在，结合 (3.12) 和 (3.14)，可得关于 $i \in \{0,\ 1,\ 2\}$的正合列。然后取这些正合列的等型分量，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1+i}_{\acute{e}t,c}\Big(\mathbb{G}^{n|\lambda|}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)\Big)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n} \to & \mathrm{H}^i_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1})\\ \to & \mathrm{H}^{n|\lambda|-2+i}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p))^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1) \to \mathrm{H}^{n|\lambda|+i}_{\acute{e}t,c}\Big(\mathbb{G}^{n|\lambda|}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)\Big)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}\end{aligned} \tag{3.15}$$

根据命题3.9。对序列 (3.15) 取分次商 $\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+i}$，通过分析弗罗贝尼乌斯权重可得

$$\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+i}\mathrm{H}^i_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}) \simeq \mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+i}\mathrm{H}^{n|\lambda|-2+i}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p))^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1).$$

特别地，令 $i = 1$，我们推出

$$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}) = \mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}) \simeq \mathrm{gr}^W_{n|\lambda|-1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p))^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1).$$

对于通常的上同调，我们使用类似的局部化序列得到

$$\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}) \simeq \mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|+1}_{\text{ét},\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}}\Big(\mathbb{G}^{n|\lambda|}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)\Big)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n},$$

它也同构于 $\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\text{ét}}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p))^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1)$，当 $\mathcal{K}$ 光滑时 . □

由定理3.11可知，M^λ_{n+1} 的名称是合理的，因为 M 的 L-函数$^\lambda_{n+1}$ 与附属于克洛斯特曼层 $\mathrm{Kl}L$ 的 $^\lambda_{n+1}$-函数相同。

3.3.2. p-进情形。
贝塞尔 F-等晶体。设 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 为 $\mathbb{Q}_p$的代数闭包，并选取一个元素 ϖ，使得 $\varpi^{p-1}=-p$。由此得到唯一的非平凡加法特征 $\psi\colon \mathbb{F}_p\to\overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$，满足 $\psi(1)\equiv 1+\varpi$ 模 ϖ^2。Dwork 的 F-等晶体 $\mathscr{L}_{\varpi}$ 是在 $K=\mathbb{Q}_p(\varpi)$ 上、定义于 $\mathbb{A}^1$ 的超收敛结构层上的秩为 1 的联络 $\mathrm{d}+\varpi\mathrm{d}z$，其弗罗贝尼乌斯结构为 $\exp(\varpi(z^p-z))$。我们将 $\mathscr{L}_{\varpi h}$ 记为正则函数 $h\colon X\to\mathbb{A}^1$ 下 $\mathscr{L}_{\varpi}$ 的逆像。

这个克洛斯特曼晶体是一个超收敛 F-等晶体，也通过图表（2.7）定义如下：

$$\mathrm{Kl}_{n+1}:=\mathrm{R}\pi_{\mathrm{rig}*}\mathscr{L}_{\varpi\sigma}[n].$$

与约化群的克洛斯特曼层类似，约化群也有贝塞尔 F-晶体，见[40]。与 $G=\mathrm{SL}_{n+1}$和 $V=V_\lambda$相关的联络为 $\left(\mathrm{Kl}_{n+1}^{\otimes|\lambda|}\right)^{G_\lambda}$，1×符号$(\frac{n|\lambda|}{2})$。为简便起见，我们将 $\mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda}$ 记作 F-等晶体 $\left(\mathrm{Kl}_{n+1}^{\otimes k}\right)^{G_\lambda}$，1×符号。

刚性上同调。与 ℓ-进情形类似，对于 ? ∈ {∅,c,mid}

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{rig},?}(\mathbb{G}_m/K,\mathrm{Kl}^{\lambda}_{n+1})=\mathrm{H}^{n|\lambda|+1}_{\mathrm{rig},?}\left(\mathbb{G}_m^{n|\lambda|+1},\mathscr{L}_{\varpi\widetilde{f}_{|\lambda|}}\right)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}[\varpi].$$

将 [16, §3.2.2] 中的论证应用于此，并将等型分量从 $(S_k\times\mu_{n+1},\chi_n)$ 改为 $(G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n)$，我们得到

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{rig,mid}}(\mathbb{G}_m/K,\mathrm{Kl}^{\lambda}_{n+1})\simeq\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\mathrm{rig,c}}(\mathcal{K}/K)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1)[\varpi], \tag{3.16}$$

当 K 光滑时，它也同构于 $\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}$ 刚性 $(\mathrm{K}/K)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1)[\varpi]$ 。

4. 克洛斯特曼层的 L-函数

本节的主要目标是证明定理 1.6。首先，我们研究伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}^{\lambda}_{n+1})_\ell$，以提供证明定理 1.6 和 1.7所需的性质。一般情形由定理 4.5论述，而对 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}$ 情形的更详细分析则见定理 4.15。我们还将在第 4.2节回顾 Deligne–Weil 表示的重要性质。最后，定理 1.6 将在第 4.3节证明。

4.1. 与克洛斯特曼层相关的伽罗瓦表示。

4.1.1. 紧化。设 k 为一个整数，且 p 为不整除 $n+1$ 的素数。劳朗多项式 $g^{\boxplus k}_{n+1}=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}y_{i,j}+\prod_{j}^{1}{}_{y_{i,j}}\right)$ 定义在环面 $\mathbb{G}^{nk}_{m,\mathbb{Q}}$上，并定义了一个超曲面 $\mathcal{K}$。我们按照 ~~X_{tor}~~ 的 $\mathbb{G}^{nk}_m$§4.3 中的方法选取一个环面紧化 [16, §4.3。2], 另见 [32, §5.2。3]

我们从这一对 $(\mathbb{G}^{nk}_{m,\mathbb{Q}},g^{\boxplus k}_{n+1})$ 开始。令 $M=\bigoplus_{i,j}\mathbb{Z}y_{i,j}$ 为 $\mathbb{G}^{nk}_{m,\mathbb{Q}}$ 上的单项式格，$N=\bigoplus_{i,j}\mathbb{Z}e_{i,j}$ 为其对偶格。我们考虑与 F 在 $N_{\mathbb{R}}$ 中生成的单纯扇相关联的 $\mathbb{G}^{nk}_{m,\mathbb{Q}}$ 的环面紧化 X，该扇由以下射线生成

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\cdot\textstyle\sum_{i,j}\epsilon_{i,j}e_{i,j}$$

其中 $\epsilon_{i,j}\in\{0,\pm1\}$ 和 $(\epsilon_{i,j})_{i,j}\neq 0$。$F$ 中的每个最大维数 nk 的单纯锥都提供了 X 的一个仿射图，它与 $\mathbb{A}^{nk}$ 同构。在每个图上，函数 $g^{\boxplus k}_{n+1}$ 都具有相同的结构。例如，我们可以考虑由以下元素生成的极大锥

$$\gamma_{i_0,j_0}:=\sum_{1\leq i\leq i_0-1,1\leq j\leq n}e_{i,j}+\sum_{1\leq j\leq j_0}e_{i_0,j}$$

对于 $1\leq i_0\leq k$ 一个 d $1\leq j_0\leq n$，其中与对偶锥关联的仿射环是多项式环 $\mathbb{Q}[u_{i,j}]$ 使得

$$u_{i,j}=\begin{cases}y_{i,j}/y_{i,j+1} & 1\leq j<n,\\ y_{i,j}/y_{i+1,1} & i<k,j=n,\\ y_{k,n}{}_j & i=k,j=n.\end{cases}$$

在此图表中，我们可以将 $g^{\boxplus k}_{n+1}$ 改写为 $g_1/(\prod_{1\leq j\leq n}u_{1,j}\cdot\prod_{2\leq i\leq k,j}u_{i,j})$，其中

$$g_1=1+\sum_{e=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{n}u_{1,j}^{j}\cdot\prod_{\substack{2\leq i\leq e\\1\leq j\leq n}}u_{i,j}^{n}\cdot\prod_{j=1}^{n}u_{e+1,j}^{n-j}+\prod_{1\leq j\leq n}u_{1,j}^{j}\cdot\prod_{\substack{2\leq i\leq k\\1\leq j\leq n}}u_{i,j}^{n}\cdot h$$

对于多项式 h。环面簇 X 为 $(\mathbb{G}_m^{nk}, g_{n+1}^{\boxplus k})$ 提供了一个紧化，其中 $g_{n+1}^{\boxplus k}$ 的零点轨迹的闭包以及 $X\backslash\mathbb{G}_m^{nk}$ 构成一个严格正规交叉除子。

我们取超曲面 $Z(g_{n+1}^{\boxplus k})$ 在 X 内的扎里斯基闭包，记为 K。可以验证

$$Z(g_1)\cap Z(u_{1,s})=\varnothing,\ Z(g_1)\cap Z(u_{r,s})=Z\bigg(1+\sum_{e=1}^{r-1}\prod_{j=1}^{n}u_{1,j}^{j}\cdot\prod_{\substack{2\le i\le e\\1\le j\le n}}u_{i,j}^{n}\cdot\prod_{j=1}^{n}u_{e+1,j}^{n-j}\bigg)$$

and

$$Z(\partial g_1/\partial u_{1,1})\cap Z(u_{r,s})=Z\bigg(\sum_{e=1}^{r-1}\prod_{j=1}^{n}u_{1,j}^{j}\cdot\prod_{\substack{2\le i\le e\\1\le j\le n}}u_{i,j}^{n}\cdot\prod_{j=1}^{n}u_{e+1,j}^{n-j}/u_{1,1}\bigg)$$

当 $1\le s\le n$ 和 $2\le r\le k$ 时。因此，对于 $1\le s\le n$ 和 $1\le r\le k$，有 $Z(g_1)\cap Z(\partial g_1/\partial u_{1,\,1})\cap Z(u_{r,\,s})=\varnothing$。由此可得，K 沿除子 $Z\big(\prod_{1\le i\le k,\ 1\le j\le n}u_{i,\,j}\big)$ 光滑。此外，可以验证 $Z\big(\prod_{1\le i\le k,\ 1\le j\le n}u_{i,\,j}\big)\cap\mathrm{K}$ 满足严格正规交叉性质。

至于 $\mathrm{K}=\mathrm{K}\cap\mathbb{G}_m^{nk}$，可以验证，当 $\gcd(k,\ n+1)=1$ 时，K 光滑；当 $\gcd(n+1,\ k)>1$ 时，K 在 $\mathbb{G}_m^{nk}$ 内有孤立奇点。在后一种情况下，K 的奇异轨迹 Σ_0 仅有有限个 $\overline{\mathbb{Q}}$-点或 $\overline{\mathbb{F}}_p$-点，且这些点均为普通二次奇点。我们沿奇异轨迹 $\Sigma_0(\overline{\mathbb{Q}})$ 对 $\mathbb{G}_m^{nk}$ 进行爆破，并将 K 的严格变换记为 K'。为方便起见，当 $\gcd(k,\ n+1)=1$ 时，我们将 K' 记为 K。我们将 $\mathrm{Bl}_{\Sigma_0}(X)$ 中 K' 的闭包记为 K'。

引理 4.1. 令 $\mathbb{F}$ 为 $\overline{\mathbb{Q}}$ 或 $\overline{\mathbb{F}}_p$。假设 最大公约数$(k,n+1)>1$, nk 为偶数，且 $nk\ge 4$。若 $\mathbb{F}=\overline{\mathbb{F}}_p$，我们还假设 $p\nmid n+1$。那么有

$$\mathrm{H}_{\acute{e}t,c}^{nk-1}(\mathcal{K}'_{\mathbb{F}})=\mathrm{H}_{\acute{e}t,c}^{nk-1}(\mathcal{K}_{\mathbb{F}}).$$

证明。令 T 为沿膨胀态射 $\mathrm{K}'\to\mathrm{K}$ 对 Σ_0 取的原像，它是若干个互不相交的二次超曲面的并。接着考虑正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-2}(T_{\mathbb{F}})&\longrightarrow&\mathrm{H}_{\acute{e}t,c}^{nk-1}((\mathcal{K}'\backslash T)_{\mathbb{F}})&\xrightarrow{\alpha}&\mathrm{H}_{\acute{e}t,c}^{nk-1}(\mathcal{K}'_{\mathbb{F}})&\xrightarrow{\gamma}&\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1}(T_{\mathbb{F}})\\&&\downarrow\simeq&&\downarrow\beta&&\\\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-2}((\Sigma_0)_{\mathbb{F}})&\longrightarrow&\mathrm{H}_{\acute{e}t,c}^{nk-1}((\mathcal{K}\backslash\Sigma_0)_{\mathbb{F}})&\longrightarrow&\mathrm{H}_{\acute{e}t,c}^{nk-1}(\mathcal{K}_{\mathbb{F}})&\longrightarrow&\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1}((\Sigma_0)_{\mathbb{F}}).\end{array}\tag{4.2}$$

在假设 $nk\ge 4$成立的条件下，上同调 $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-2}((\Sigma_0)_{\mathbb{F}})$ 和 $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1}((\Sigma_0)_{\mathbb{F}})$ 均为零。特别地，若将图表向右再延伸一列，我们便可得出 γ 是满射。

由于 nk 为偶数，上同调 $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1}(T_{\mathbb{F}})=0$，因为 T 是若干个互不相交的二次超曲面的并。由此我们得出 $\mathrm{H}_{\acute{e}t\,c}^{nk-1}(\mathrm{K}'_{\mathbb{F}})=\mathrm{H}_{\acute{e}t\,c}^{nk-1}(\mathrm{K}_{\mathbb{F}})$. □

4.1.2. 一般 ℓ-adic 情形。设 $p\ne\ell$ 为两个不同的素数，$\lambda\in\mathbb{N}^n$ 为一个序列，并且 ζ_{n+1} 是 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 中的一个 $(n+1)$ 阶单位根或 $\overline{\mathbb{Q}}$。我们采用上一节的记号，并将 k 替换为 $|\lambda|$。我们将 $\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 的奇异点集记为 $\Sigma'(p)=\Sigma'(|\lambda|,\ n+1,\ p)$。回忆一下，$\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 的每个奇异点 x 都具有 $x=(x_{i,\,j})_{1\le i\le k,\ 1\le j\le n}=(\zeta_{n+1}^{a_i})_{i,\,j}$ 的形式，其中 a_i 为 $\{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$。$S_{|\lambda|}\times\mu_{n+1}$ 在 $\Sigma'(p)$ 上的作用由下式给出

$$(\sigma,\zeta_{n+1}^{a})\cdot(x_{i,j})=(\zeta_{n+1}^{a}\cdot x_{\sigma(i),j}).$$

可以将 $\Sigma'(p)$ 中的 $S_{|\lambda|}$-轨道与多重指标集合对应起来

$$\{\underline{I}\in\mathbb{N}^{n+1}\mid|\underline{I}|=|\lambda|,\ C_{\underline{I}}=0\text{ in }\overline{\mathbb{F}}_p,\ C_{\underline{I}}\ne 0\text{ in }\mathbb{C}\}=d(k,n+1,p)-d(k,n+1)\tag{4.3}$$

通过将 $x=(\zeta_{n+1}^{a_i})_{i,\,j}$ 映射到满足 $I_j=\#\{i\mid a_i=j\}$ 的 $\underline{I}$。在多重指标上，μ_{n+1} 的作用由$\zeta_{n+1}\cdot(I_0,\ I_1,\ \ldots,\ I_n)=(I_n,\ I_0,\ \ldots,\ I_{n-1})$给出。

假设 $p\nmid n+1$。$\Sigma'(p)$ 中的奇点在 [1, XII 1.1]的意义下是普通二次的。令$n|\lambda|=2m+1$(分别为 $n|\lambda|=2m+2$)，并将皮卡–勒夫谢茨公式 [1, XV 3.4] 应用于 $\mathcal{K}'_{\mathbb{Z}_p}\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$。对每个 $x\in\Sigma'(p)$，都有一个消失圈类 $\delta_x\in\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{n|\lambda|-1}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}_p})(m)$，其定义仅差一个符号。这些消失圈类彼此正交，并满足

$$(\delta_x,\delta_x)=(-1)^m 2\quad(\text{resp.}\quad(\delta_x,\delta_x)=0).$$

固定 $\overline{\mathbb{Q}}$ 在 p 上的一个位，并将相应的惯性群记为 I_p。对于每个元素 $\sigma \in I_p$，其在 $\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}})$ 上的作用由下式给出

$$\sigma(v) = \begin{cases} v + (-1)^m \sum_{x\in\Sigma'(p)} \frac{\epsilon(\sigma)-1}{2}(v,\delta_x)\delta_x & 2 \nmid n|\lambda|, \\ v - (-1)^m \sum_{x\in\Sigma'(p)} \epsilon(\sigma)(v,\delta_x)\delta_x & 2 \mid n|\lambda|, \end{cases} \tag{4.4}$$

其中，若 $n|\lambda|$ 为奇数，则 ϵ 是阶为 2 的特征 $I_p \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$；若 $n|\lambda|$ 为偶数，则 ϵ 是基本驯性特征 $I_p \to \varprojlim_n \mu_{\ell^n}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。此外，我们有一个正合列。

$$0 \to \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \to \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\gamma} \sum_{x\in\Sigma'(p)} \mathbb{Q}_\ell(m - n|\lambda| + 1),$$

其中 γ 是与消失圈类 δ_x 的交数之和。

定理 4.5。假设当 $n|\lambda|$ 为奇数时，最大公约数$(n+1, |\lambda|) = 1$。

(1) 如果 $p \nmid n+1$ 且 $\mathcal{K}'_{\mathbb{F}_p}$ 光滑，则伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}^\lambda_{n+1})_\ell$ 在素数 p处非分歧，并且存在一个$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-表示的同构

$$(\mathrm{M}^\lambda_{n+1})_\ell[\zeta_p] \simeq \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}).$$

(2) 如果 $p \nmid n+1$ 和 $p \neq 2$，则伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}^\lambda_{n+1})_\ell$ 至多是温和分歧的。

证明。为简便起见，我们省略上同调中的系数 $\mathbb{Q}_\ell$。令 $\mathrm{K}^{(0)} = \mathrm{K}'$，并令 $\mathrm{K}^{(i)}$ 为 $\mathrm{K}'\backslash\mathrm{K}'$ 的所有互不相同的不可约分支的 i 重交的互不相交并，其中 $i \geq 1$。令 $\mathbb{F}$ 为 $\overline{\mathbb{Q}}$ 或 $\overline{\mathbb{F}}_p$。考虑谱序列。

$$(E_1^{p,q})_{\mathbb{F}} = \mathrm{H}^q_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}^{(p)}_{\mathbb{F}}) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\mathbb{F}}). \tag{4.6}$$

对于 $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{Q}}$ 的情形，由于所有 i，$\mathrm{K}^{(i)}$ 都是适当光滑的，基于权的原因，E_2 页中的所有态射均为 0。因此，谱序列在 E_2 页退化。由谱序列可得，

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}^W_{n|\lambda|-1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) = (E_\infty^{0,n|\lambda|-1})_{\overline{\mathbb{Q}}} &= \ker(\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) \to \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}})) \\ &= \mathrm{im}(\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{Q}}})), \end{aligned}$$

其中映射 α 是从极限项 H 上的满射边缘映射 $\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t\ c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}})$ 到 $E_2^{0,n|\lambda|-1}$。注意，上述谱序列关于 $S_{|\lambda|} \times \mu_{n+1}$ 的作用是等变的。利用引理 4.1 中的同构，我们得出

$$\mathrm{im}(\alpha)^{G_\lambda \times \mu_{n+1}, \chi_n} \simeq (\mathrm{M}^\lambda_{n+1})_\ell(1). \tag{4.7}$$

对于 $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}_p$ 的情形，我们同样得到 G-等变同构

$$\mathrm{gr}^W_{n|\lambda|-1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) = \mathrm{gr}^{W'}_{n|\lambda|-1}(E_\infty^{0,n|\lambda|-1})_{\overline{\mathbb{F}}_p} = \mathrm{gr}^{W'}_{n|\lambda|-1}\mathrm{im}\Big(\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})\Big),$$

其中，我们用 W' 表示（Frobenius）权滤过，以区别于特征 0 中的权滤过 W。回顾

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét},\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_m, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}) \simeq \mathrm{gr}^{W'}_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\text{ét,c}}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta))^{G_\lambda \times \mu_{n+1}, \chi_n}(-1)$$

根据定理3.11。我们得到

$$\mathrm{gr}^{W'}_{n|\lambda|+1}\mathrm{im}(\beta)^{G_\lambda \times \mu_{n+1}, \chi_n}(-1)[\zeta_p] \simeq \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}) \tag{4.8}$$

现在我们考虑具有正合行和列的 G-等变交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}) & \xrightarrow{\iota_c} & \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}) & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) & \xrightarrow{\gamma} & \bigoplus_{x\in\Sigma'(p)} \mathbb{Q}_\ell(m - n|\lambda| + 1), \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}}) & & \end{array} \tag{4.9}$$

其中间一行为皮卡–勒夫谢茨公式给出（我们假设 $p \nmid n+1$）。此外，考虑到 (4.4)，当 $p \neq 2$ 时，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 在 $\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}})$ 上的表示至多是温和分歧的。我们验证了定理中的第二个断言。

注意，每个类 δ_x 都是 $\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}{}_{\{x\}}(\mathrm{K}', \mathrm{R}\Psi(m))$ 的一个非平凡生成元，其支集为 $\{x\}$，其中 $\mathrm{R}\Psi$ 表示邻近循环复形。因此，$\Delta = \bigoplus \mathbb{Q}_\ell(-m)\delta_x$ 包含于 $\mathrm{im}(\alpha)$ 中。若我们对第二行取关于 $(G_\lambda \times \mu_{n+1}, \chi_n)$ 的等型分量，则得到一个正合列

$$0 \to \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n} \xrightarrow{\iota} \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{Q}}})^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n} \xrightarrow{\gamma} \Big(\bigoplus_{x\in\Sigma} \mathbb{Q}_\ell(m-n|\lambda|+1)\Big)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}. \tag{4.10}$$

通过图追逐论证，我们从 (4.10) 得到一个包含关系

$$\mathrm{gr}^{W'}_{n|\lambda|+1}\mathrm{im}(\beta)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n} \hookrightarrow \mathrm{im}(\alpha)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}. \tag{4.11}$$

当 $\mathcal{K}'$ 在 p 处有良约化时，簇 $\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 是光滑适当的，且 ι 和 ι_c 在 (4.9) 中是同构。因此 $\mathrm{im}(\alpha) \simeq \mathrm{im}(\beta)$ 权纯 $nk-1$ (W 和 W' 相同)。由 (4.7) 和 (4.8)，我们得到一个同构

$$(\mathrm{M}^\lambda_{n+1})_\ell[\zeta_p] \simeq \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1})$$

来自非分歧 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-表示的4.11。这验证了定理中的第一个陈述。 □

注 4.12。在上面的讨论中，我们省略了 $p \mid n+1$的情形。在这种情况下，$\mathcal{K}^{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 的奇点是孤立的，但不是普通二次的，因此皮卡–勒夫谢茨公式在此情形下不适用。不过，相对于$\mathcal{K}'_{\mathbb{Z}_p} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$的消失循环仍为 0，只要 $i \neq n|\lambda|-1$ [23,推论 2。10]。

如果最大公约数$(k, n+1) = 1$，那么 $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$，并且上面的许多论证，包括 (4.8)，即使在 $p \mid n+1$时仍然成立。根据与消失循环相关的长正合列[1, XIII(1.4.2.2)], 余特化态射

$$\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \to \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}_{\overline{\mathbb{Q}}})$$

是单射。因此，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{Q}}}) \\ \downarrow\beta & & \downarrow\alpha \\ 0 \longrightarrow \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}_{\overline{\mathbb{F}}_p}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}_{\overline{\mathbb{Q}}}) \end{array}$$

诱导出一个单射

$$\mathrm{gr}^{W'}_{n|\lambda|+1}\mathrm{im}(\beta)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1) \hookrightarrow \mathrm{gr}^{W}_{n|\lambda|+1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{Q}}})^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}(-1) = (\mathrm{M}^\lambda_{n+1})_\ell. \tag{4.13}$$

只要 (4.13) 的源与目标维数相同，该包含就成为同构，这意味着 $(\mathrm{M}^\lambda_{n+1})_\ell$ 在 p 处非分歧。例如，当 $n \leq 2$, $p = n+1$，且 $p \nmid k$时，附属于 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}$ 的伽罗瓦表示根据 [41, 推论 4.35] 和推论 2.34。

设 $N(V_\lambda)$ 和 $E(V_\lambda)$ 是 V_λ的自同态，分别由 N和 E在 $\mathfrak{sl}_{n+1}$中诱导而来，定义见[14, § 5]。受上述例子的启发，我们猜想:

猜想 4.1 4. 态射 (4.13) 是同构，当矩阵 $N(V_\lambda) + E(V_\lambda)$ 可逆时 .

4.1.3. $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}$ 的 ℓ-进情形。现在我们详细描述 $\mathrm{M}^\lambda_{n+1,\ell}$ 在 $\lambda = (k, 0, \ldots, 0)$ 时的情况，也就是 $\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}$ 的情形。设 $a(k, n+1, p)$、$a(k, n+1)$ 和 $\delta(k, p)$ 为第 2.5.1 节和命题 2.22 中定义的数。

定理 4.15. 设 p 是一个不同于 ℓ 的素数，使得 $p \nmid n+1$ 和 $\mathcal{K}'$ 在 p 处有坏约化。那么

(1) 若 nk 为奇数，且 $\gcd(k, n+1) = 1$，并且 $p \neq 2$，则伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}^k_{n+1})_\ell$ 在 p 处温和分歧。对于这样的素数，我们有正交分解 $(\mathrm{M}^k_{n+1})_\ell = \mathrm{H} \bigoplus \mathrm{E}$ 作为 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-表示，使得

- $\mathrm{H}[\zeta_p] = \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\ \text{中间}}(\mathbb{G}_{m,\ \overline{\mathbb{F}}_p},\ \mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})$,
- E 由消失圈类生成。

(2) 若 $n+1$ 是一个素数，则伽罗瓦表示 $(M_{n+1}^k)_\ell$ 在 p处温和分歧。对于这样的素数，惯性群 $I_p \subset Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 在 $(M_{n+1}^k)_\ell$ 上幺幂作用，使得 $(\sigma-1)^2=0$ 对任意 $\sigma \in I_p$均成立。单值算子的幂零部分的像 U （记作 N）由消失圈类生成，其维数为 $a(k,n+1,p)-a(k,n+1)-\delta(k,p)$。关于交数配对，$U$ 是全各向同性的，其正交补为 $(M_{n+1}^k)_\ell^{I_p}$。此外，诱导映射 $\sigma-1\colon (M_{n+1}^k)_\ell \mapsto (M_{n+1}^k)_\ell/U$ 为零。

证明。为简单起见，我们将指数 $(S_k\times\mu_{n+1},\chi_n)$ 替换为 (G,χ)。由于当 $nk\le 3$ 时，伽罗瓦表示是平凡的或一维的，我们假设 $nk\ge 4$。当 $p\nmid n+1$ 时，$\mathrm{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 的所有奇点都是普通二次的。再次考虑谱序列 (4.6)，并令 $F^\bullet$ 为 $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathrm{K}'_{\mathbb{F}})$ 上诱导的递减滤过。若 $i\ge 1$，则 $\mathrm{K}^{(i)}$ 在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 和 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上都是光滑适当的，因此对 $i\ge 1$ 和任意 $a\in\mathbb{Z}$，我们有同构 $\mathrm{H}^a_{\acute{e}t}(\mathrm{K}^{(i)}_{\overline{\mathbb{F}}_p})\simeq \mathrm{H}^a_{\acute{e}t}(\mathrm{K}^{(i)}_{\overline{\mathbb{Q}}})$。由皮卡－勒夫谢茨公式，对 $0\le a\le nk-2$，我们有同构 $\mathrm{H}^a_{\acute{e}t}(\mathrm{K}^{(i)}_{\overline{\mathbb{F}}_p})\simeq \mathrm{H}^a_{\acute{e}t}(\mathrm{K}^{(i)}_{\overline{\mathbb{Q}}})$。因此 $(E_2^{i,nk-1-i})_{\overline{\mathbb{Q}}}\simeq (E_2^{i,nk-1-i})_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 并且

$$(E_2^{i,nk-i-1})_{\overline{\mathbb{F}}_p}=(E_\infty^{i,nk-i-1})_{\overline{\mathbb{F}}_p}=(E_\infty^{i,nk-1-i})_{\overline{\mathbb{Q}}} \tag{4.16}$$

对于 $i\ge 1$。换句话说，分次部分 $\mathrm{gr}_F^i\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})=\mathrm{gr}_F^i\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}})$ 的维数与 p 无关，当 $i\ge 1$时。

引理 4.17。$\mathrm{gr}_F^i\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}$ 是纯的，其弗罗贝尼乌斯权重为 $nk-1-i$ （若 $1\le i\le nk-1$）；若 $i=0$，则是权为 $nk-1$ 和 $nk-2$ 的混合对象。此外，$\mathrm{gr}^{W'}_{nk-2}\mathrm{gr}_F^0\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}$ 的维数为

$$-\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})+\begin{cases} a(k,n+1,p)-a(k,n+1) & 2\mid n,\\ 0 & 2\nmid nk,\\ b(k,n+1,p)-b(k,n+1) & 2\nmid n \text{ and } 2\mid k.\end{cases}$$

证明。当 $1\le i\le nk-1$时，分次商 $\mathrm{gr}_F^i\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}=(E_2^{i,nk-i-1})^{G,\chi}$ 是 Frobenius 权重为 $nk-1-i$的纯层，其维数与 p无关。由正合列（3.15），我们推出对于 $0\le i$ 有

$$\begin{aligned}\dim F^{1+i}\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}&\le \dim W'_{nk-2-i}\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}\\&=\dim W'_{nk-i}\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}).\end{aligned} \tag{4.18}$$

由长正合列 (2.5)，$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})$ 上 Frobenius 权重 W' 滤过的分次部分的维数，可以根据 $(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})^{I_0}_{\overline{\eta}_0}$、$(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})^{I_\infty}_{\overline{\eta}_\infty}$ 和 $(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})^{G_{\mathrm{geom}}}$ 的分次部分维数计算。根据定理 2.15 和 2.18，由于 $(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})^{I_\infty}_{\overline{\eta}_\infty}$ 和 $(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})^{G_{\mathrm{geom}}}$ 是权 nk纯的，我们推得

$$\dim W'_{nk-i}\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})=\dim W'_{nk-i}(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})^{I_0}_{\overline{\eta}_0}.$$

对 $1\le i$。由注记 2.14，我们推得 $\dim W^{nk-1-j}\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})$ 与 p无关，当$j\ge 0$时。

现在我们用一个素数 p' 替换 p，该素数处 K' 有良约化。在这种情况下，$\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_{p'}})\simeq \mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}})$,，且左侧的 Frobenius 权重滤过 W' 与右侧的权滤过 W 一致。特别地，我们有

$$\mathrm{gr}^{W'}_{nk-1-i}\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_{p'}})^{G,\chi}=\mathrm{gr}_F^i\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_{p'}})^{G,\chi} \tag{4.19}$$

对所有 $0\le i\le nk-1$ 均成立。因此

$$\begin{aligned}&\dim F^{1+i}\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_{p'}})^{G,\chi}=\dim W'_{nk-2-i}\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_{p'}})^{G,\chi}\\&=\dim W'_{nk-i}\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{c}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_{p'}},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})\end{aligned} \tag{4.20}$$

对于 $0\le i$。因此，我们得出结论，(4.18) 是一个等式。特别地，每个 $\mathrm{gr}_F^i\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}$ 都是纯的，具有弗罗贝尼乌斯权重 $nk-1-i$（若 $1\le i\le nk-1$），而 $\mathrm{gr}_F^0\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1,\mathrm{c}}(\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}$ 是混合的，具有弗罗贝尼乌斯权重 $nk-1$和$nk-2$。

最后，利用 (4.20)，我们有

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{gr}^{W'}_{nk-2}\mathrm{gr}^0_F\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi} &= \dim \mathrm{gr}^{W'}_{nk-2}\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi} - \dim \mathrm{gr}^{W'}_{nk-2}F^1\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}\\ &= \dim \mathrm{gr}^{W'}_{nk}\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}) - \dim \mathrm{gr}^{W'}_{nk}\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_{p'}}, \mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}).\end{aligned}$$

由（2.5）、定理 2.15和定理 2.18，上述维数与所声称的数值一致 . □

(1) 假设 nk为奇数且 $p\nmid 2(n+1)$。由（4.10），表示 $(\mathrm{M}^{\lambda}_{n+1})_\ell$是温和分歧的[3]。由（4.4），短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_{x\in\Sigma'(p)} \mathbb{Q}_\ell(-m) \longrightarrow 0$$

分裂，并且 $\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})$ 与 $\Delta = \bigoplus_x \mathbb{Q}_\ell(-m)\delta_x$ 在 $\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}})$ 中正交。取 $(G,\ \chi)$ 等型分量，并对图表（4.9）进行图追逐论证，可得

$$\mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi} = \mathrm{im}(\beta)^{G,\chi} \bigoplus \Delta^{G,\chi}.$$

由于 nk 为奇数，克洛斯特曼层 Kl_{n+1} 的整体单值群为 SP_{n+1}，这意味着 $\mathrm{H}^0(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}) = 0$。由引理 4.17 可得 $\dim \mathrm{gr}^{W'}_{nk-2}\mathrm{gr}^0_F\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi} = 0$。因此，$\mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}$是权 $nk-1$ 纯的，且 $\mathrm{gr}^{W'}_{n|\lambda|-1}\mathrm{im}(\beta)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n} = \mathrm{im}(\beta)^{G_\lambda\times\mu_{n+1},\chi_n}$。由（4.8），我们可以取 $\mathrm{H} = \mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}$和 $\mathrm{E} = \Delta^{G,\chi}$。

(2) 假设 $n+1$是一个素数。回忆一下，$nk = 2m+2$和 $\Delta = \sum_{x\in\Sigma'(p)} \mathbb{Q}_\ell(-m)\delta_x$是由消失圈类生成的 $\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}})$ 子空间。根据皮卡–勒夫谢茨公式，$\sigma\in I_p$ 作用于上同调类 $v\in\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}_{\overline{\mathbb{Q}}})$ 的作用由下式给出

$$\sigma(v) = v - (-1)^{m+1}t_\ell(\sigma)\sum_{x\in\Sigma'(p)} < v, \delta_x > \delta_x,$$

这意味着 $(\sigma-1)^2 = 0$。由此可得

$$(\mathrm{M}^k_{n+1})^{I_p}_\ell = \left(\Delta^{\perp}\right)^{G,\chi} = \mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi} \cap \mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \supset \mathrm{im}(\beta)^{G,\chi},$$

并且诱导映射 $\sigma-1\colon (\mathrm{M}^k_{n+1})_\ell \mapsto (\mathrm{M}^k_{n+1})_\ell/\Delta^{G,\chi}$ 为零。只需计算 $U = \Delta^{G,\chi}$ 的维数。考虑图表

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathrm{im}(\beta)^{G,\chi} & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi}\cap \mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}) & \hookrightarrow & \mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi} & \xrightarrow{\gamma} & C \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ & & & & & & (\bigoplus_{x\in\Sigma'(p)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-m-1))^{G,\chi} \end{array} \tag{4.21}$$

其中，C 是映射 γ 在 $(\bigoplus_{x\in\Sigma'(p)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-m-1))^{G,\chi}$ 中的像。

引理 4.22. 在图表 (4.21)中，竖直映射 i_1 是一个同构。如果 $p=2$ 且 k 为偶数，则竖直映射 i_2 的余核是一维的。否则，映射 i_2 是一个同构。

证明。 通过对 (4.9) 进行图追逐论证，我们得出 $\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\alpha)\cap\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})$。因此映射 i_1是一个同构。

考虑图表的后续部分（4.9），即

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & \mathrm{H}^{nk}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{nk}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} \\ \mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) & \xrightarrow{\gamma} & \bigoplus_{x\in\Sigma'(p)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-m-1) & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{H}^{nk}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{F}}_p}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{nk}_{\acute{e}t}(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{Q}}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

[3] $(\mathrm{M}^{\lambda}_{n+1})_\ell$ 可能在 $p=2$ 处野分歧，因为特征 $\epsilon\colon I_2\to\{\pm1\}$ 的阶为 2。

其中两个垂直映射是从极限项 $\mathrm{H}^{nk}_{\acute{e}t,\,c}(\mathcal{K}')$ 到 $E^{0,\,nk}$的满射边缘映射。由次数 $nk-1$上同调的同一论证可得，$\mathrm{im}(\alpha')=\mathrm{gr}^W_{nk}\mathrm{H}^{nk}_{\acute{e}t,\,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}})$，并由（3.15）得到一个正合列

$$\mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)(-1)^{G,\chi}\to \mathrm{H}^2_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_m,\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})\to \mathrm{H}^{nk}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}(-1)[\zeta_p]\to \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)(-2)^{G,\chi}, \tag{4.23}$$

假设 K' 在 p'处有良约化。对 p'考虑上述图表，则 $\mathrm{im}(\beta')=\mathrm{im}(\alpha')$。由于 $\mathrm{H}^2_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_{p'}},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})=0$ 且 $\mathrm{im}(\beta')$ 是弗罗贝尼乌斯权重为 nk 的纯对象，由（4.23）可得 $\mathrm{im}(\beta')^{G,\chi}=0$。这迫使 $\mathrm{im}(\alpha')^{G,\chi}=0$，且这与 p 的选择无关。

如果 $p\neq 2$ 或 k 为奇数，则 $\dim \mathrm{H}^2_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})=\dim \mathrm{H}^0_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})=0$。因此，（4.23）蕴含 $\mathrm{im}(\beta')=0$。于是，$\kappa=0$, $C=(\bigoplus_{x\in\Sigma'(p)}\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-m-1))^{G,\chi}$，且两个竖直映射 i_1 和 i_2 均为同构。

若 $p=2$ 和 k 为偶数，则 Kl_{n+1} 的单值群为 SO_{n+1} 或 G_2。因此，$(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})^{G_{\mathrm{geom}}}$ 是一维的，并且我们有 $\dim \mathrm{H}^2_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})=\dim \mathrm{H}^0_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})=1$。根据谱序列 (4.6) 和 (4.23) 的性质，我们有

$$\mathrm{gr}^W_{nk+2}\mathrm{H}^2_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})\simeq \mathrm{gr}^W_{nk+2}\mathrm{H}^{nk}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})^{G,\chi}(-1)=\mathrm{im}(\beta')^{G,\chi}(-1).$$

因此 $\mathrm{im}(\beta')^{G,\,\chi}$ 是一维的。由于 $\mathrm{im}(\alpha')^{G,\,\chi}=0$，态射 κ 是满射。因此，在 (4.21) 中，i_2 的余核维数为 1。□

注意到 $\Delta^{G,\chi}$ 包含于 $\mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}$ 中，因为 $\Delta^{G,\chi}\subset(\Delta^\perp)^{G,\chi}=\mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi}\cap\mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t}(\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_p})=\mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}$。由于 $\Delta^{G,\chi}$ 是弗罗贝尼乌斯权重为 $nk-2$ 的纯对象，我们由此推得 $\Delta^{G,\chi}\subset W'_{nk-2}\mathrm{im}(\beta)$。根据命题 3.8、谱序列 (4.6) 的性质以及 (4.7)，我们有

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi}&=\dim \mathrm{H}^{nk-1}_{\acute{e}t,c}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{Q}}})-\sum_{i=1}^{nk-1}\dim(E_\infty^{i,nk-1-i})^{G,\chi}_{\overline{\mathbb{Q}}}\\&=\frac{\binom{k+n}{n}-d(k,n+1)}{n+1}-\dim(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})^{I_0}_{\overline{\eta}_0}-a(k,n+1).\end{aligned}$$

至于 $\mathrm{im}(\beta)^{G\text{的维数},\,\chi}$根据命题2.22、(4.8) 和引理 4.17，我们可推得

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}&=\dim \mathrm{gr}^{W'}_{nk-1}\mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}+\dim \mathrm{gr}^{W'}_{nk-2}\mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}\\&=\frac{\binom{k+n}{n}-d(k,n+1,p)}{n+1}-\dim(\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})^{I_0}_{\overline{\eta}_0}-a(k,n+1)+\dim \mathrm{H}^2_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1}).\end{aligned}$$

注意到恒等式 $d(k,\ n+1,\ p)-d(k,\ n+1)=(n+1)(a(k,\ n+1,\ p)-a(k,\ n+1))$。于是，由引理 4.22可得

$$\begin{aligned}\dim C&\overset{(*)}{=}\dim \mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi}-\dim \mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}\\&=a(k,n+1,p)-a(k,n+1)-\dim \mathrm{H}^2_{\acute{e}t,c}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})\\&=\dim \mathrm{gr}^{W'}_{nk-2}\mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}\geq\dim\Delta^{G,\chi}\\&=\dim \mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi}-\dim(\Delta^\perp)^{G,\chi}\\&\overset{(**)}{=}\dim \mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi}-\dim \mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}=\dim C,\end{aligned}\tag{4.24}$$

其中，(∗) 是由短正合列 (4.21) 推得的，而 (∗∗) 是因为 $\Delta^\perp=\mathrm{im}(\beta)$。因此 $\Delta^{G,\,\chi}=\mathrm{gr}^{W'}_{nk-2}\mathrm{im}(\beta)^{G,\,\chi}$，其维数为 $a(k,\ n+1,\ p)-a(k,\ n+1)-\dim \mathrm{H}^2_{\acute{e}t,\,c}(\mathbb{G}_{m,\,\overline{\mathbb{F}}_p},\,\mathrm{Sym}^k\mathrm{Kl}_{n+1})$。□

注 4.25。 我们证明了，当 $n+1$ 是一个素数且 $p\neq n+1$ 表示 $(\mathrm{M}^k_{n+1})_\ell$ 满足 the 权–单值 性猜想，其中单值滤过由下式给出

$$M_{nk}=\Delta^{G,\chi}(-1)\subset M_{nk+1}=\mathrm{im}(\beta)^{G,\chi}(-1)\subset M_{nk+2}=\mathrm{im}(\alpha)^{G,\chi}(-1).$$

换言之，相关的魏尔–德利涅表示是权 $nk+1$ (见 [3, 第528] 页及第 4.2节中的定义)。

推论 4.26。 *(1)* 若 $n+1$ 是一个素数，则 $(\mathrm{M}^k_{n+1})_\ell$ 在 p 处的 *Artin* 导子指数为 $a(k,n+1,p)-a(k,n+1)-1$，若 $p=2$ 且 k 为偶数；否则为 $a(k,n+1,p)-a(k,n+1)$。

(2) p 处$\{\big(\mathrm{M}^{(2,1)}_3\big)_\ell\}_\ell$ 的 *Artin* 导子指数为1，当 $p=2$,7 时；当 $p\neq 2$,3,7 时，为0。*(3)* p 处$\{\big(\mathrm{M}^{(2,2)}_3\big)_\ell\}_\ell$ 的 *Artin* 导子指数为1，当 $p=2$ 时；当 $p\neq 2$,3 时，为0。

证明。对于第一种情况，$(\mathrm{M}_{n+1}^{k})_{\ell}$在 p处的 Artin 导子为 $\dim C=\dim \mathrm{im}(\alpha)-\dim \mathrm{im}(\beta)$。由引理 4.17和（4.24）可得精确公式。

对于第二种和第三种情况，如果 $p\neq 3$，我们可以对$\{\left(\mathrm{M}_{3}^{(2,1)}\right)_{\ell}\}_{\ell}$和 $\{\left(\mathrm{M}_{3}^{(2,2)}\right)_{\ell}\}_{\ell}$采用上述定理中的相同论证，并结合命题2.17 和2.19中关于 $\mathrm{Kl}_{3}^{(2,1)}$ 和 $\mathrm{Kl}_{3}^{(2,2)}$ 的局部行为。如果 $p=3$，则根据推论2.34 和注释 4.12的类比，表示 $\{\left(\mathrm{M}_{3}^{(2,1)}\right)_{\ell}\}_{\ell}$ 是非分歧的。□

4.1.4. *p-进情形。* 本节研究 p-进伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_{p}$。

命题 4.27. *p进表示$(\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_{p}$ 是德拉姆的。若 $p\nmid n+1$ 且$\mathcal{K}'$ 在p处有良约化，则表示$(\mathrm{M}_{n+1}^{\rightarrow})_{p}$ 是晶体的，并且存在一个 Frobenius 模同构*

$$\mathrm{H}^{1}_{\mathrm{rig,mid}}(\mathbb{G}_{m}/K,\mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda})\simeq((\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_{p}\otimes\mathbf{B}_{crys})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_{p}/\mathbb{Q}_{p})}\otimes K.$$

证明. 如第 4.1.1节所述，我们令 $\mathcal{K}'$ 为 $\mathcal{K}$，若最大公约数$(n+1,k)=1$；否则，取沿奇异轨迹爆破得到的 $\mathcal{K}$。根据 [4, §3.3(i) 和 §3.4], ，由于 p进表示 $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_{p})$ 来自一个真光滑簇，因此它是德拉姆的。由德拉姆表示的子商仍然是德拉姆表示这一事实，即得第一个断言。

现在假设最大公约数$(p,n+1)=1$ 且 K'在 p处有良约化。于是根据 p进比较定理，表示 $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1}\left(\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}_{p}}\right)$ 是晶体的。因此，作为 $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^{nk-1}\left(\mathrm{K}'_{\overline{\mathbb{Q}}_{p}}\right)$的子商，表示 $(\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_{p}$ 仍然是晶体的。

回想一下，我们有一个同构

$$\mathrm{H}^{1}_{\mathrm{rig,mid}}(\mathbb{G}_{m}/K,\mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda})\simeq\mathrm{gr}^{W}_{n|\lambda|-1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\mathrm{rig,c}}(\mathcal{K}/K)(-1)^{G_{\lambda}\times\mu_{n+1},\chi_{\lambda}}[\varpi]$$

第 3.3.2 节。通过将各处的 étale 上同调替换为刚性上同调，我们得到与引理 4.1 中类似的结果。考虑谱序列 [27, 命题 8.2.17 和 8.2.18(ii)]

$$E_{1}^{i,j}=\mathrm{H}^{j}_{\mathrm{rig}}\left(\overline{\mathcal{K}}'^{(i)}_{\mathbb{F}_{p}}/\mathbb{Q}_{p}\right)\Rightarrow\mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{rig,c}}(\mathcal{K}'_{\mathbb{F}_{p}}/\mathbb{Q}_{p}),$$

并记为

$$\alpha\colon\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}\left(\overline{\mathcal{K}}'_{\overline{\mathbb{F}}_{p}}/\mathbb{Q}_{p}\right)\to\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}\left(\overline{\mathcal{K}}'^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_{p}}/\mathbb{Q}_{p}\right)$$

从 $E^{0,n|\lambda|-1}_{1}$ 到 $E^{1,n|\lambda|-1}_{1}$ 的微分。由于对于所有 $i\geq 1$，簇 $\mathrm{K}'^{(i)}$ 都是光滑适当的，因此，谱序列的极限项中权 $n|\lambda|-1$ 的唯一贡献来自 α 的核。因此。

$$\mathrm{gr}^{W}_{n|\lambda|-1}\mathrm{H}^{n|\lambda|-1}_{\mathrm{rig,c}}(\mathcal{K}'_{\overline{\mathbb{F}}_{p}}/\mathbb{Q}_{p})\simeq\mathrm{gr}^{W}_{n|\lambda|-1}\ker\alpha.\tag{4.28}$$

然后使用式（4.7）、（4.28）的类比以及 p-进比较定理，我们得到 Frobenius 模的同构

$$\mathrm{H}^{1}_{\mathrm{rig,mid}}(\mathbb{G}_{m}/K,\mathrm{Kl}_{n+1}^{\lambda})\simeq((\mathrm{M}_{n+1}^{\lambda})_{p}\otimes\mathbf{B}_{crys})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_{p}/\mathbb{Q}_{p})}\otimes K.$$

□

4.2. **关于 Deligne–Weil 表示的一般性讨论。** 我们回顾文献 [36] 中 Weil–Deligne（或简称 WD）表示的定义。对于每个素数 p，存在一个正合列

$$1\to I_{p}\to\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_{p}/\mathbb{Q}_{p})\simeq\widehat{\mathbb{Z}}\to\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_{p}/\mathbb{F}_{p})\to 1,$$

其中 I_{p} 是 p 处的惯性群。此外，存在一个满射 $t_{\ell}\colon I_{p}\to\mathbb{Z}_{\ell}$。令 $W_{\mathbb{Q}_{p}}$ 为$\mathbb{Q}_{p}$的*Weil*群，即 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_{p}/\mathbb{Q}_{p})$ 中由 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_{p}/\mathbb{F}_{p})\simeq\mathbb{Z}$ 中 Frobenius 生成的子群在逆像，并赋予诱导拓扑。

E-向量空间 V（带有离散拓扑）上的 WD表示是一个对 (r,N)，由一个具有开核的表示 $r\colon W_{\mathbb{Q}_{p}}\to\mathrm{GL}(V)$ 和一个自同态 $N\in\mathrm{End}(V)$ 构成，满足

$$r(\phi)Nr(\phi^{-1})=p^{-1}N$$

对 Frob$_p$ 的每个提升 $\phi\in W_{\mathbb{Q}_{p}}$ 都成立。若 $N=0$ 且 $r(I_{p})=1$，则称其为非分歧。若 r 是半单的，则称其为 Frobenius半单。对于 Frobenius 的一个提升 ϕ，我们可以分解 $r(\phi)=r(\phi)^{ss}r(\phi)^{u}=r(\phi)^{u}r(\phi)^{ss}$，其中 $r(\phi)^{ss}$ 是半单的，而 $r(\phi)^{u}$ 是幺幂的。任意 WD表示 (r,N) 都有一个规范的 Frobenius半单化 $(r,N)^{ss}$：保持 N 和 $r|_{I_{p}}$ 不变，并将 $r(\phi)$ 替换为 $r(\phi)^{ss}$。

如果 $\ell\neq p$，则可以按照以下方式，将 WD–表示 WD$_p(\rho)$ 以典范方式关联到 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_{p},\mathbb{Q}_{p})$ 的 ℓ-进表示 ρ。根据 Grothendieck 准幺幂定理，存在 I_{p} 的有限指数开子群 H，以及唯一的幂零端同态 $\ell\neq p$

满足对所有 $\sigma \in H$ 均有 $\rho(\sigma) = \exp(t_\ell(\sigma)N)$。令 ϕ 为 Frob_p 的一个提升，并且 $\sigma \in I_p$，定义

$$r(\phi^n \sigma) := \rho(\phi^n \sigma)\exp(-t_\ell(\sigma)N). \tag{4.29}$$

注意到，$\mathrm{WD}_p(\rho)$ 非分歧，当且仅当 $\rho(I_p) = 1$，也就是说，ρ 非分歧。

WD 表示 （r， N）定义在 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上称为 权 w [3, 纯。 528] 若存在一个递增且分离的 ed 上升的单值 单值滤过 M_i，其对应于 V，使得

- 每个 F_iV 在 r作用下不变，
- 对于 Frob_p 的每个提升 ϕ，$\mathrm{gr}_i^M V$ 上的所有特征值 $r(\phi^m)$ 都是权 $m\cdot$ i 的魏尔数，
- 这个自同态 N 将 M_iV映入 $M_{i-2}V$，并对每个 $j \geq 1$ 诱导同构 $N^j \colon \mathrm{gr}^M_{w+j}V \simeq \mathrm{gr}^M_{w-j}V$。

4.3. 潜在自守性。 一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上、具有 n 维的 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的 ℓ-进表示、且在 S 之外非分歧的弱相容系统 $\mathscr{R} = \{\rho_\ell\}$，是由连续半单表示构成的一个族。

$$\rho_\ell \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(V_\ell)$$

对于每个素数 ℓ，具有以下性质。

(1). 如果 $p \notin S$，对于所有 $\ell \neq p$，表示 ρ_ℓ 在 p 处是非分歧的，并且$\rho_\ell(\mathrm{Frob}_p)$ 的特征多项式是一个系数属于 $\mathbb{Q}$ 的多项式，且与 ℓ的选择无关；**(2).** 每个表示 ρ_ℓ 在 ℓ处都是德拉姆的，并且当 $\ell \notin S$时是晶体的；**(3).** ρ_ℓ 的霍奇–泰特权重与 ℓ无关。

对于一个 ℓ-进表示的弱相容系统，我们可以附加一个部分 L-函数 n

$$L^S(\mathscr{R}, s) = \prod_{p \notin S} \det(1 - \rho_\ell(\mathrm{Frob}_p)p^{-s})^{-1}.$$

此外，若对每个 p，都存在一个定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上、取值于 $W_{\mathbb{Q}_p}$ 的 WD 表示 $\mathrm{WD}_p(\mathscr{R})$，使得对每个 $\ell \neq p$ 和每个 ι: $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$，推前 $\iota\mathrm{WD}_p(\mathscr{R})$ 同构于 $\mathrm{WD}_p(\rho_\ell)^{ss}$，则称 $\mathscr{R}$ 严格相容。对于一个严格相容族 $\mathscr{R}$，我们可以附加一个 L-函数

$$L(\mathscr{R}, s) = \prod_p \det\left(1 - \mathrm{Frob}_p \cdot p^{-s} \mid \mathrm{WD}_p(\mathscr{R})^{I_p, N=0}\right)^{-1},$$

它与 $L^S(\mathscr{R},\ s)$ 的差别仅在于 $p \in S$ 处有限多个欧拉因子。为了描述完整的 L-函数，我们还需要 ∞ 处的伽马因子。Serre 猜想了在 [33, § 3] 中，$\mathbb{Q}$ 上纯动机的完整L-函数在无穷远处的伽马因子的形式。我们用 $L_\infty(\mathscr{R},\ s)$ 表示与 $\mathscr{R}$ 相关联的伽马因子。

定理 4.30 ([30, 定理 A 与推论 2。2])。 设 $\mathscr{R} = \{\rho_\ell\}$ 是一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上、在 S 之外非分歧的、由 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的 n 维 ℓ-进表示组成的弱相容系统。假设 $\{\rho_\ell\}$ 满足以下性质。

(1)（纯性）存在一个整数 w，使得对于每个素数 $p \notin S$，ρ_ℓ（Frob_p）的公共特征多项式的根都是权为 w 的韦伊数。*(2)*（正则性）表示 ρ_ℓ 具有 n 个互不相同的 *Hodge–Tate* 权。*(3)*（奇本质自对偶性）每个 ρ_ℓ 都通过一个映射分解，映至 $\mathrm{GO}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，且相似特征为偶；或者每个 ρ_ℓ 都通过一个映射分解，映至 $\mathrm{GSp}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，且相似特征为奇。此外，在这两种情况下，相似特征均构成一个弱相容系统。

于是存在一个有限伽罗瓦全实扩张 $F/\mathbb{Q}$，使得所有 ρ_ℓ 都成为自守的。此外，对于任意两个不同的素数 p 和 ℓ，与 ρ_ℓ 相关联的 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 的 *WD*表示 $\mathrm{WD}_p(\mathscr{R})$ 是权为 w 的纯表示。此外，完备化的 L 函数

$$\Lambda(\mathscr{R}, s) = L_\infty(\mathscr{R}, s) \cdot L(\mathscr{R}, s)$$

满足函数方程 $\Lambda(\mathscr{R}, s) = \varepsilon(\mathscr{R}, s)\Lambda(\mathscr{R}^\vee, 1-s)$。

现在我们可以利用上述 Patrikis–Taylor 定理来证明1.6 定理。

定理 1.6 的证明。假设 $k \geq 3$，因为由命题 3.8 可知，当 $k \leq 2$ 时 $\dim \mathrm{M}^k_{n+1} = 0$。令$S(k, n+1)$ 为满足以下条件之一的素数集合： p，即 $p \mid n+1$ 或 $\mathrm{K}'_{\mathbb{F}_p}$ 不光滑。我们首先验证 ℓ-进伽罗瓦表示 $\mathscr{R} = \{(\mathrm{M}^k_{n+1})^{ss}_\ell\}$ 的半单化构成一个弱相容系统。事实上，只需证明 $\{(\mathrm{M}^k_{n+1})_\ell\}$ 满足弱相容系统的三个条件。前两个条件可直接由定理 4.5 和命题 4.27 得出。关于

第三个条件，我们固定一个嵌入 $\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \mathbb{C}$，并利用 p-进比较定理，得到如下过滤同构：

$$\begin{aligned}\left((\mathrm{M}_{n+1}^k)_p \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\right)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \otimes \mathbb{C} &= \left(\mathrm{gr}_{nk+1}^W \mathrm{H}_{\acute{e}t,c}^{nk-1}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p)^{S_k \times \mu_{n+1}, \chi_n}(-1) \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\right)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \otimes \mathbb{C} \\ &= \mathrm{gr}_{nk+1}^W \mathrm{H}_{\acute{e}t,c}^{nk-1}(\mathcal{K}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p)^{S_k \times \mu_{n+1}, \chi_n}(-1) \otimes \mathbb{C} \simeq (\mathrm{M}_{n+1}^k)_{\mathrm{dR}},\end{aligned}$$

因此，霍奇–泰特权重与 ℓ 无关。

为了应用定理 4.30 到弱相容族 $\mathscr{R}$，有必要验证定理 4.30 中所述的条件。纯性条件成立，因为伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}_{n+1}^k)_\ell$及其半单化均为权 $nk+1$纯。对于定理1.6中给出的各对 $(n+1, k)$，正则性条件也成立，因为根据推论 3.6 及上述比较同构，$(\mathrm{M}_{n+1}^k)_\ell$ （及其半单化）的 Hodge–Tate 权重的重数不是 0 就是 1。

$\mathscr{R}$ 的奇本质自对偶性可如下验证。命题 3.5 中所述的完美配对表明，表示 $(\mathrm{M}_{n+1}^k)_\ell$ 通过 $\mathrm{GSP}((\mathrm{M}_{n+1}^k)_\ell)$ 或 $\mathrm{GSO}((\mathrm{M}_{n+1}^k)_\ell)$ 分解，其相似特征为 χ_{cyc}^{nk+1}。选取 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-nk-1)$ 的一个生成元后，我们可以将该完美配对应视为群环 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 上模 $(\mathrm{M}_{n+1}^k)_\ell$ 的一个相容非退化双线性形式，其中对合为 $g \mapsto \chi_{cyc}^{-nk-1}(g)g^{-1}$。根据 [35, Thm.4.2.1], ，半单化也通过 GSP 或 GSO 分解，且具有相同的特征。这就确立了 $\mathscr{R}$ 的奇本质自对偶性。

根据定理 4.30，弱相容族 $\mathscr{R}$ 是势自守的，而部分L-函数 $L^S(\mathscr{R}, s)$ 可延拓为定义在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，并满足函数方程。注意，$\mathscr{R}$的部分 L-函数与 $L^S(k, n+1; s)$ 一致，因为对于每个 $p \notin S(k, n+1)$，它们的局部因子都相同；这一点可通过应用定理 4.15、注 4.25 和 [16, 引理 5.40] 验证。因此，部分 L-函数$L^S(k, n+1; s)$ 可以补全为 $\Lambda_k(s) = L_\infty(\mathscr{R}, s) \cdot L(\mathscr{R}, s)$，它可亚纯地延拓至整个复平面，并满足定理 1.6 中所述的函数方程。
□

5. Evans型猜想

在本节中，我们借助 LMFDB 数据库 证明定理 1.7 。 [37]回顾一下，本文所说的模形式均指归一化全纯尖点海克特征形式。

5.1. **模性**。

5.1.1. 附属于模形式的伽罗瓦表示。 如[8, 11]中所构造，对于权为 k的模形式 $f \in S_k(\Gamma_1(N))$，可以附加二维伽罗瓦表示。更确切地说，设 N 和 k 为正整数，$f \in S_k(\Gamma(N))$为模形式，$K_f = \mathbb{Q}(a_f(p))$为由 f的傅里叶系数生成的数域。那么，对于 K_f在素数 $\ell \nmid N$之上的任意位 λ，存在一个连续的奇不可约伽罗瓦表示

$$\rho_{f,\lambda} \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(K_{f,\lambda}), \tag{5.1}$$

当 $p \nmid N$时非分歧，使得对于 $p \nmid N\ell$，算术 Frobenius Frob_p^{-1}在 p处的迹为 $a_p(f)$。

注意，$\rho_{f,\lambda}$ 的导子为 N，Hodge–Tate 权为 $(0, k-1)$。此外，它是奇的，即 $\det(\rho_{f,\lambda})$在复共轭下的值为 -1。

给定这样的 $\rho_{f,\lambda}$，我们将其模 ℓ 约化记为 $\overline{\rho}_{f,\lambda}$: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$。具体做法是，在 $K_{f,\lambda}^2$ 中选取一个伽罗瓦稳定的 O_λ-格，并模去 O_λ 的极大理想；其中 O_λ 是 K_λ 的整数环。尽管 $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ 取决于格的选择，其半单化却不受影响。

5.1.2. 模性的一种特殊情形。 我们回顾 Kisin 定理的一个较弱版本 [25, 定理 1.4。3], ，该定理指出，与某些二维动机相关联的 ℓ-进伽罗瓦表示是模形式的，即同构于 $\rho_{f,\ell}$ （5.1）中的某一个。此论证最初归功于 Serre [34, §4。8], ，类似论证也见于 [41, 定理 4.6。1]。

定理 5.2。 设M 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上、系数取自 $\mathbb{Q}$ 的维数为2 的纯动机。假设M 的德拉姆实现的非零霍奇数为 $h^r, {}^s = h^{s,r} = 1$，其中 $0 \le r < s$；并且M_ℓ 的 ℓ-进伽罗瓦表示是奇的且绝对不可约。那么，对于某个 $N \ge 1$ 和某个狄利克雷特征ε: $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times \to \mathbb{C}^\times$，存在一个模形式 $f \in S_{s-r+1}(\Gamma_0(N)\ \varepsilon)$，使得 $\rho_{f,\ell} \simeq \mathrm{M}_\ell(r)$。

注 5.3。 由 (4.8.8) 以及 [34], 第 216 页最后一段可知，N 的 2 进赋值和 3 进赋值分别至多为 8 和 5。

5.2. **Evans型猜想**。

在本小节中，我们通过逐一考察每种情形来证明定理1.7 。

5.2.1. ε-因子。 为了将定理 5.2 用于与克洛斯特曼层相关的动机，必须验证相应的伽罗瓦表示是奇的。下面的命题和切博塔廖夫密度定理确保了这一点。

命题 5.4. 如果 $n|\lambda|$ 是偶数，那么

$$\varepsilon(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}, j_*\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}) = p^{\frac{n|\lambda|+1}{2}\cdot \dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\left(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}\right)}.$$

证明。 应用推论 3.10，我们发现中间的 ℓ-进上同调 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\left(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}\right)$ 是 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ 的一个辛表示。因此，Frob_p 的行列式是 p 的幂。考虑到 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\left(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}\right)$的维数和权，我们推得

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}, j_*\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}\right) &= \det\left(-\mathrm{Frob}_p, \mathrm{H}^1_{\acute{e}t}\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}, j_*\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}\right)\right)\\ &= \det\left(\mathrm{Frob}_p, \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\left(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}\right)\right) = p^{\frac{n|\lambda|+1}{2}\dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\left(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Kl}^\lambda_{n+1}\right)}.\end{aligned}$$

□

5.2.2. 对称$^4\mathrm{Kl}_3$。 动机 M^4_3 定义在 $\mathbb{Q}$上，权纯为 9，并配备了一个斜对称完美配对，如命题3.5所述。其维数为 2，其德拉姆实现的霍奇数 $h^{p,9-p}$ 在 $p=3$ 或 6 时为 1，根据 [32, 定理 1。2]，其他情况下为 0。我们的目标是证明伽罗瓦表示相容系统$\{(\mathrm{M}^4_3)_\ell(6)\}$ 是模形式的。

命题 5.5. 存在一个（唯一的）模形式 f *in* $S_4(\Gamma_0(14))$，使得对于每个素数 $p\notin\{2,7\}$，傅里叶系数 $a_p(f)$ 满足

$$a_f(p) = -\frac{1}{p^3}(m^4_3(p)+1+p^2+p^4),$$

其中 $m^4_3(p)$ 是 $\mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_3$ 的对称幂矩。特别地，该模形式在 *LMFDB* 数据库中的标签是 $14.4.a.b$。

证明. 由 (4.3)，我们发现，(3.1) 中的超曲面 $\mathrm{K}^{\overline{\mathbb{F}}_p}$ in 在 $d(4,3,p)$（第 2.5.1 节）为 0 时是光滑的。根据定理 4.5，我们发现 ℓ-adic 表示 $(\mathrm{M}^4_3)_\ell$ 在 $p\neq 2,3,7$ 处非分歧。正如注 4.12 所指出的， ℓ-adic 表示 $(\mathrm{M}^4_3)_\ell$ 在 $p=3$ 处也非分歧，因为中间的 ℓ-adic 上同调 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\left(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_3}, \mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_3\right)$ 根据推论 2.34 维数为 2。此外，推论 4.26 告诉我们，相容族 $\{(\mathrm{M}^4_3)_\ell\}_\ell$ 的导子为 14。

由于动机 机 M^4_3 是权重 9 纯的，其非零霍奇数由 $h^{3,6}=h^{6,3}=1$ 给出， he
霍奇–泰特权 根据 p-进比较定理，$(\mathrm{M}^4_3)_\ell(6)$ 的霍奇–泰特权为 (0,3)，重数为 1。
根据命题5.4 和切博塔廖夫密度定理，我们发现行列式 $\det\left((\mathrm{M}^4_3)_\ell(6)\right)$ 等于 $\chi^3_{cyc,\ell}$。由于 $\chi_{cyc,\ell}(c)=-1$，表示 $(\mathrm{M}^4_3)_\ell(6)$ 是奇的。因此，根据定理 $\{(\mathrm{M}^4_3)_\ell(6)\}$ 是模形式的5.2。

由正合列 (2.5)、定理 2.15和定理 2.18，我们推出

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p \mid (\mathrm{M}^4_3)_\ell) = -(m^4_3(p)+1+p+p^2).$$

由此可得，对于任意 $p\notin\{2,\ 7,\ \ell\}$，

$$a_f(p) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p^{-1} \mid (\mathrm{M}^4_3)_\ell(6)) = -\frac{1}{p^3}(m^4_3(p)+1+p+p^2).$$

现在，剩下的任务是确定该模形式。对应模形式的权和级分别为 $k=4$ 和 $N_f=14$。通过计算傅里叶系数 a_f（3），详见第A.1.1节，我们发现该模形式 f 在 LMFDB 数据库中的标记为 $14.4.a.b$ 。□

5.2.3. 对称$^3\mathrm{Kl}_4$。动机 M^3_4 定义于 $\mathbb{Q}$，权 10 纯，并带有一个对称的完美配对。其维数为 2，其德拉姆实现的非零霍奇数 $h^{p,\ 10-p}$ 在 $p=4$或 6 时为 1，由 [32, 定理 12]可得。我们旨在证明伽罗瓦表示相容族$\{(\mathrm{M}^3_4)_\ell(6)\}$是模形式的。

命题 5.6。 存在一个（唯一的）带复乘的模形式 f *in* $S_3\left(\Gamma_0(15)\ \left(\cdot\frac{}{15}\right)\right)$，使得对于每个素数 $p\notin\{2,5\}$，傅里叶系数 $a_f(p)$ 满足

$$a_f(p) = -\left(\frac{p}{15}\right)\frac{1}{p^4}(m^3_4(p)+1+p^2+p^3).$$

这里 $m_4^3(p)$ 是 $\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4$ 的对称幂矩。特别地，相应模形式在 *LMFDB* 数据库中的标签为 $15.3.d.a$。

证明。 根据（4.3），定理 4.5和定理 4.15，我们知道，当 $p \neq 2,3,5$ 时，$(\mathrm{M}_4^3)_\ell$ 非分歧；当 $p = 3,5$ 时，则为温和分歧。此外，应用命题 2.22，我们可以得到 $\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4$ 在 $p \neq 2$ 处的中间 ℓ-进上同调的维数。因此，当 $p = 3$ 或 5 时，$(\mathrm{M}_4^3)_\ell^{I_p} \simeq \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4\big)$ 的维数为 1。这意味着 $\{(\mathrm{M}_4^3)_\ell\}$ 的导子 N 具有 $2^s \cdot 15$ 的形式，其中 $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为某个值。

引理 5.7。 对于每个 $\ell \neq 2$，表示 $(\mathrm{M}_4^3)_\ell$ 在 $p = 2$ 处非分歧。特别地，$\{(\mathrm{M}_4^3)_\ell\}$ 的导子 N 为 15。

证明。在 $p = 2$处，$\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4$ 的斯旺导子至多为 5。由于 Kl_4 的单值群是 Sp_4，且 Sp 的标准表示的对称幂 $_4$ 仍然不可约，零次上同调 $\mathrm{H}^0_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\ \overline{\mathbb{F}}_p},\ \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)$ 消失。由正合列（2.5）和格罗滕迪克–奥格–沙法列维奇公式，我们推得

$$\dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4\big) = \mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4) - 3 - \dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty}.$$

由此可得 $3 \leq \mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4) \leq 5$。

根据第A.2.1节，$p = 2$ 处 Frobenius 在 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\ \mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\ \overline{\mathbb{F}}_p},\ \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4\big)$ 上的迹为

$$-(m_4^3(p) + 1 + p^2 + p^3 + \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p \mid (\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty})) = -16 - \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p \mid (\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty}).$$

下面我们逐一考察 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)$ 的所有可能取值。

- 若 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4) = 5$，则层 $\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4$ 在 $1/4$ 处只有一个斜率（等于 ∞），这意味着 $(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty} = 0$。因此，中间 ℓ-进上同调的维数为 2。由此，表示 $(\mathrm{M}_{34})_\ell$ 在 $p = 2$处非分歧，这归功于注记 4.12。

- 若 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4) = 4$，则 $\dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty} \leq 1$。 – 若 $\dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty} = 1$，则 $\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4$ 的中间 ℓ-adic 上同调为 0。Frob_2 在 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4\big)$ 上的迹为 0。因此我们得到

$$0 = -16 - \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p \mid (\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty}).$$

  这是不可能的，因为 $(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty}$ 是权重 9 的纯一维对象。
  – 若 $\dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty} = 0$，则中间 ℓ-adic 上同调为一维。Frob_2 在 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4\big)$ 上的迹为 -16。然而，由于 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4\big)$ 是权重 10 的纯一维对象，这种情况是不可能的。

- 若 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4) = 3$，则 $\dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4)^{I_\infty} = 0$。因此，中间 ℓ-进上同调的维数为 0。然而，Frob_2 在 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4\big)$ 上的迹同时为 0 和 -16，这显然荒谬。

总之，我们推得 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_4) = 5$，且表示 $(\mathrm{M}_4^3)_\ell$ 在 2 处非分歧。因此，导子 N 为 $2^0 \cdot 15 = 15$。□

根据 p-进比较定理以及我们对动机 M_4^3, 的霍奇数的计算，可以确定 $\{(\mathrm{M}_4^3)_\ell(6)\}$ 的 Hodge–Tate 权为 (0, 2)。注意，这些伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}_4^3)_\ell$是正交的，因为动机 M_4^3 上存在命题 3.5 给出的对称完美配对。根据[28, 1. 4(2)],，相应的伽罗瓦表示 $\{(\mathrm{M}_4^3)_\ell(6)\}$ 对应于某些特征 $\varepsilon_f\colon \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$的复乘模形式 $f = q + \sum_{n=2}^\infty a_n q^n \in S_3(15, \varepsilon_f)$。此外，对于任意 $p \notin \{3, 5\} \cup \{\ell\}$，我们推得

$$\begin{aligned} a_f(p) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p^{-1} \mid (\mathrm{M}_4^3)_\ell(6)) = \det\big((\mathrm{M}_3^4)_\ell(6)\big)^{-1} \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p \mid (\mathrm{M}_4^3)_\ell(6)) \\ &= -\varepsilon_f^{-1} \cdot \frac{1}{p^4}(m_4^3(p) + 1 + p^2 + p^3). \end{aligned}$$

此时，剩下的任务就是确定这个模形式。我们已经知道，这个模形式的级为 15，权重为 3。

引理 5.8。 特征 ε_f 是勒让德符号 $\left(\frac{\bullet}{15}\right)$。

证明。 通过 LMFDB，我们发现只有两个 15 级、权重 3 的模形式。它们的特征均由勒让德符号 $\left(\frac{\bullet}{15}\right)$ 给出。□

总之，我们已确定所需的模形式的权为 $k=3$，级为 15，nebentypus 为 $\varepsilon_f = (\cdot\,{}_{15})$。然而，LMFDB 中仍有两种可能。为确定正确的一种，我们使用第 $a_f(2) = -1$ 节中 $(\mathrm{M}_4^3)_\ell(6)$ 的弗罗贝尼乌斯迹。A.2。我们在 LMFDB 数据库中的搜索得到了唯一匹配项：标记为 $15.3.d.b$ 的模形式。□

5.2.4. $\mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_4$. 二维动机 M_4^4 定义在 $\mathbb{Q}$ 上，权为 13 的纯动机，并配备反对称完美自配对。

命题 5.9。 存在一个（唯一的）模形式 f，属于 $S_6(\Gamma_0(10))$，使得对于每个素数 $p \notin \{2,5\}$，傅里叶系数 $a_f(p)$ 满足

$$a_f(p) = -\frac{1}{p^4}(m_4^4(p) + 1 + p^2 + p^3 + p^4 + 2p^6),$$

其中， $m_4^4(p)$是$\mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_4$的对称幂矩。特别地，相应模形式在 *LMFDB* 数据库中的标签为 $10.6.a.a$。

证明. 根据定理4.5，表示 $(\mathrm{M}_4^4)_\ell$ 在 $p \neq 2$ 处非分歧；这是因为本例中第 4.1.1节的 $\mathrm{K}'_{\mathbb{F}_p}$ 是光滑的，即 (4.3) 中的 $d(4,4,p) - d(4,4) = 0$。此外，由定理 4.15 可推得，表示 $(\mathrm{M}_4^4)_\ell$ 在 $p = 2$ 处可能野分歧，在 $p = 5$ 处温和分歧。根据推论 4.26 和注 5.3，相容族 $\{(\mathrm{M}_4^4)_\ell\}_\ell$ 的导子具有 $N = 2^s \cdot 5$ 的形式，其中 $0 \leq s \leq 8$。

由霍奇对称性，存在一个整数 $h \in \{0, 1, \ldots, 6\}$，使得 M_4^4 的霍奇数 $h^{p,\,13-p}$ 在 $p = h$ 或 $13-h$ 时为 1，否则为 0。因此，$(\mathrm{M}_4^4)_\ell(13-h)$ 的 Hodge–Tate 权为 $(0,\ 13-2h)$。

根据命题 5.4和切博塔廖夫密度定理，伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}_4^4)_\ell(13-h)$ 的行列式是一个奇特征 χ_{cyc}^{13-2h}。随后，模形式的存在性由定理 5.2给出。因此，对于任意 $p \notin \{2, 5, \ell\}$，

$$a_f(p) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p^{-1} \mid (\mathrm{M}_4^4)_\ell(13-h)) = -\frac{1}{p^h}(m_4^4(p) + 1 + p^2 + p^3 + p^4 + 2p^6).$$

最后，我们可以利用 A.2.2节中的数值结果计算傅里叶系数 $a_f(3) = -26 \cdot 3^{4-h}$ 和 $a_f(7) = -22 \cdot 7^{4-h}$。注意，当 $k^2 \cdot N \leq 40000$ 时，LMFDB 包含模形式的完整列表。我们逐一尝试 $0 \leq h \leq 6$ 和 $0 \leq s \leq 8$。如果 $(s,h) = (8,0), (8,1), (8,2), (8,3), (8,4), (7,0), (7,1), (7,2), (7,3), (6,0)$ 或 $(6,1)$，则有 $k^2 \cdot N > 40000$。在这种情况下，LMFDB 数据库无法满足我们的需求。因此，我们遵循 [41] 中的附录，计算有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的尖点新模符号空间。我们发现，对于某些素数 p，数 $a_f(p)$ 不是海克算子 T_p的特征多项式的根，如 A.2.2节的表格所示。在剩余的可能情形中，我们在数据库中找到两个权为 6 且具有给定傅里叶系数的模形式。考虑到级，只有一个模形式的标签为 $10.6.a.a$。在 LMFDB 中，另一个模形式的级为 400。□

注记 5.10。 我们从上面的证明推得，动机 M_4^4 的德拉姆实现的非零霍奇数为 $h^{4,\,9} = h^{9,\,4} = 1$。虽然没有在 [32], 中直接计算霍奇数，但仍可仿照 $\mathrm{M}_3^{3,\prime}$的论证来计算。

5.2.5. $\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5$。 动机 M_5^3 定义在 $\mathbb{Q}$上，权 13 纯，并配备反对称完美配对。它的维数为 2。根据 [32, 定理 1.2], , 其德拉姆实现的霍奇数 $h^{p,\,13-p}$ 在 $p = 5$ 或 8 时为 1，在其他情况下为 0。我们旨在证明伽罗瓦表示相容族 $\{(\mathrm{M}_5^3)_\ell(8)\}$ 是模形式的。

命题 5.11。 存在一个（唯一的）模形式 f，属于 $S_4(\Gamma_0(33))$，使得对每个素数 $p \notin \{3, 11\}$，傅里叶系数 $a_f(p)$ 满足

$$a_f(p) = -\frac{1}{p^5}(m_5^3(p) + 1 + p^2 + p^3 + p^4 + p^6), \tag{5.12}$$

其中 $m_5^3(p)$是 *s* 对 $\mathrm{Sym}^5\mathrm{Kl}_3$ 的对称幂矩。特别地，相应模形式的标签是 $33.4.a.b$，位于 *LMFDB* 数据库中。

证明。表示 $(\mathrm{M}_5^3)_\ell$ 在 p 处非分歧，若 $p \notin \{3, 5, 11, \ell\}$，这是由定理 4.5 和 (4.3) 得出的。根据推论 4.26，$\{(\mathrm{M}_5^3)_\ell(8)\}$ 的导子具有 $3^s \cdot 5^t \cdot 11^e$ 的形式，其中 $0 \leq s$、$e \leq 2$ 和 $0 \leq t$。

引理5.13. 若 $5 \neq \ell$，则表示 $(\mathrm{M}_5^3)_\ell$ 在 5 处非分歧。

证明. 在 $p=5$ 处，$\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5$ 的斯旺导子至多为 7。鉴于 Kl_5 的单值群是 SL_5，且 SL_5 的标准表示的对称幂仍然不可约，零次上同调 $\mathrm{H}^0_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)$ 消失。由正合列（2.5）和格罗滕迪克–奥格–沙法列维奇公式，我们得到：

$$\dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5\big)=\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)-5-\dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}.$$

因此，我们有 $5\le \mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)\le 7$。根据第A.3节中的数值结果，$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5\big)$ 在 $p=5$ 处的迹为

$$-(m_5^3(p)+1+p^2+p^3+p^4+p^6+\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p\mid(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}))=-4\cdot 5^5-\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p\mid(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}).$$

现在我们如下考察 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)$ 的每个可能取值。

- 如果 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)=7$，则层 $\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5$ 在 ∞处只有一个斜率（$=1/5$）。由此可得，$(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}$ 的维数为 0。因此，$\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5$ 的中间 ℓ-进上同调的维数为 2。根据备注4.12，表示 $(\mathrm{M}_{35})_\ell$ 在 5 处非分歧。

- 如果 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)=6$，那么 $\dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}\le 1$。我们考虑两种情况。
  (1) 假设 $\dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}=1$，则中间 ℓ-进上同调消失。$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\ \mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\ \overline{\mathbb{F}}_p},\ \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5\big)$ 在 $p=5$ 处的 Frobenius 迹为 0。因此我们有
  $$0=-4\cdot 5^5-\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p\mid(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}).$$
  由于 $(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}$ 是权 12 的纯对象，且维数为 1，这是不可能的。
  (2) 假设 $\dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}=0$，中间 ℓ-进上同调是一维的。$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\ \mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\ \overline{\mathbb{F}}_p},\ \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5\big)$ 在素数 $p=5$ 处的迹为 $-4\cdot 5^5$. 由于 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\ \mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\ \overline{\mathbb{F}}_p},\ \mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5\big)$ 是权 13 的纯对象，且维数为 1，因此导致矛盾。

- 若 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)=5$，则 $\dim(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)^{I_\infty}=0$。因此，$\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5$ 的中间 ℓ-进上同调维数为 0。在素数 $p=5$ 处，$\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5\big)$ 的 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\text{中间}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}$,的迹同时为 0 和 $-4\cdot 5_5$，这显然荒谬。

总之，我们有 $\mathrm{Sw}(\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)=7$，且表示 $(\mathrm{M}_5^3)_\ell$ 在 5 处非分歧。 □

考虑伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}_5^3)_\ell(8)$。$(\mathrm{M}_5^3)_\ell(8)$ 的 Hodge–Tate 权为 $(0,\ 3)$。它们的行列式是奇特征 χ_{cyc}^3，由命题 5.4 和切博塔廖夫密度定理可知。该模形式的存在由定理 5.2保证。因此，我们对任意 $p\notin\{3,\ 11,\ \ell\}$，得出 (5.12。

因此，我们所寻找的模形式权重为 4，其级的形式为 $N_f=3^s\cdot 11^e\le 1089$，其中$0\le s,\ e\le 2$。此外，我们在第 $a(2)=-1$ 节和 $a(5)=-4$ 节中计算了傅里叶系数 A.3。根据这些信息，只剩下一个权重为 4、级为 $N=33$ 的模形式，它在 LMFDB 数据库中的标记为 $33.4.a.b$。 □

5.2.6. $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$。动机 $\mathrm{M}_3^{(2,1)}$ 定义在 $\mathbb{Q}$上，权 9 纯，并配备反对称完美配对。其维数为 2，其德拉姆实现的霍奇数 $h^{p,\ 9-p}$ 在 $p=4$ 或 5 时为 1，否则为 0；这是由 [32, 命题 520]得出的。我们希望证明伽罗瓦表示相容族 $\{(\mathrm{M}_2^{(2,1)})_\ell(5)\}$是模形式的。

命题 5.14。存在一个（唯一的）模形式 $f\in S_2(\Gamma_0(14))$，使得对于每个素数 $p\notin\{2,3,7\}$，傅里叶系数 a_p 满足

$$a_f(p)=-\frac{1}{p^4}\Big(m_3^{(2,1)}(p)+p+p^2+p^3\Big), \tag{5.15}$$

其中 $m_3^{(2,1)}(p)$ 是层 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$ 的矩。特别地，这个模形式的标签是 $14.2.a.a$，见 *LMFDB* 数据库。

证明。层 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$ 在 0 处温和分歧，在 ∞处野分歧。由格罗滕迪克–奥格–沙法列维奇公式（2.4），ℓ-进上同调的维数等于 ∞处的斯旺导子。类似命题2.32，由于 $\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}\subset\mathrm{Kl}_3^{\otimes 4}$和 ζ_3 作用在 $(\mathrm{Kl}_3^{\otimes 4})^{\eta_\infty}$ 上是自由的，我们可以计算得出，$\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}$ 在 ∞ 处的斯旺导子在 $p=3$时为 5。由正合列（2.5）、命题2.17和命题2.19，可得

$$\dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Kl}_3^{(2,1)}\big)=\begin{cases}2 & p\neq 2,7\\ 1 & p=2,7\end{cases}$$

and

$$\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_p,(\mathrm{M}_3^{(2,1)})_\ell(4)\big)=-p^{-4}(m_3^{(2,1)}(p)+p+p^2+p^3).$$

由注记4.12和推论4.26，表示 $(\mathrm{M}_3^{(2,1)})_\ell$ 在 $p\notin\{2,7,\ell\}$ 处非分歧，且相容族$\{(\mathrm{M}_3^{(2,1)})_\ell\}_\ell$ 的导子为 14。

利用命题5.4 和切博塔廖夫密度定理， $(\mathrm{M}_3^{(2,1)})_\ell(5)$ 的行列式为 χ_{cyc}^{-1}，这是奇数。于是，定理 5.2 表明该模形式的存在性，由此我们对任意 5.15) 推导出 $p\neq 2,\ 7,\ \ell$。

最后，通过计算傅里叶系数 $a_f(p)$（见第A.1.2 节），对于 $p\le 23$，我们可以确定 LMFDB 数据库中的模形式。□

5.2.7. $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$ 。 动机 $\mathrm{M}_3^{(2,2)}$ 定义于 $\mathbb{Q}$，权为 13 的纯对象，并在命题3.5中配备了反对称完美配对。

命题 5.16。 存在一个（唯一的）模形式 $f=q+\sum_{n\ge2}^{\infty}a_nq^n\in S_4(\Gamma_0(6))$，使得对于每个素数 $p\notin\{2,3\}$，傅里叶系数 $a_f(p)$ 满足

$$a_f(p)=-\frac{1}{p^5}\Big(m_3^{(2,2)}(p)+p^2+p^3+2p^4+2p^6\Big),$$

其中 $m_3^{(2,2)}(p)$ 是层$\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$ 的矩。特别地，这个模形式在 *LMFDB* 数据库中的标签是 $6.4.a.a$，与对应于 $\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_2$的模形式相同。

证明。 层 $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$ 在 0 处温和分歧，在 ∞处野分歧。由命题 2.17、命题2.19以及长正合列（2.5），我们得到

$$\dim \mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}\big(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}\big)=\begin{cases}2 & p\neq 2,3\\ 1 & p=2\end{cases}$$

and

$$\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_p,(\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell(5)\big)=-p^{-5}(m_3^{(2,2)}(p)+p^2+p^3+2p^4+2p^6)$$

若 $p\neq 2$，则为 3。由注 4.12，环素数集合 S 是 {2, 3} 的子集，且 $\dim(\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell=2$。根据定理 4.5 和推论 4.26，伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell$ 在 $p=2$ 处温和分歧，且其在 $p=2$ 处的 Artin 导子为 1。由注 5.3 可知，$\{(\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell\}_\ell$ 的导子具有 $N=2\cdot3^s$ 的形式，其中 $0\le s\le5$。

由霍奇对称性，存在一个整数 $h\in${0、1、.....、6}，使得霍奇数 $h^{p,\ 13-p}$ 在 $p=h$ 或 $13-h$时为 1，否则为 0。因此， $(\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell(13-h)$ 的 Hodge–Tate 权重为 $(0,\ 13-2h)$。

由命题 5.4 和切博塔廖夫密度定理可知，$\det(\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell=\chi_{cyc}^{-13}$。因此， $(\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell(13-h)$ 的行列式为 χ_{cyc}^{13-2h}，这是一个奇特征。因此，定理 5.2 保证存在一个权为 $14-2h$、级为 $2\cdot3^s$ 的模形式，使得 $(\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell(13-h)\simeq\rho_{f,\ \ell}$。由此可知，对任意$p\notin S\cup\{\ell\}$,

$$a_f(p)=\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p^{-1}\mid((\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell(13-h))=-\frac{1}{p^h}\big(m_3^{(2,2)}(p)+p^2+p^3+2p^4+2p^6\big).$$

为确定该模形式，我们采用与命题 5.9 中类似的论证。我们逐一检验组合 $0\le h\le6$和 $0\le s\le5$。若 $(s,h)=(5,0)$、$(5,1)$ 或 $(5,2)$，则计算有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的尖点新模符号空间。我们发现，对于某些素数 p，数值 $a_f(p)$ 不是海克算子 T_p 的特征多项式的根，如 A.1.2节的表格所示。因此，$(s,h)\neq(5,0)$、$(5,1)$ 或 $(5,2)$，于是我们继续在 LMFDB 中搜寻该模形式。剩下的模形式的权为 4，级为 6；在本例中，它对应于 $(s,h)=(1,5)$。□

注记 5.17. M 的德拉姆实现的非零霍奇数$_3^{(2,2)}$ 为 $h^{5,\ 8}=h^{8,\ 5}=1$。我们无法使用 [32, 定理 1。2], 中的方法计算这些数，因为联络 Kl 在 0 处的局部单值化的幂零部分$_3^{(2,2)}$ 不是由不同大小的 Jordan 块构成的直和（其中有两个大小为 4 的块）。

5.2.8. 一个猜想。 命题 5.16 的一个有趣推论是，对于 $p\nmid6$，层 $\mathrm{Sym}^6\mathrm{Kl}_2$ 和 $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$ 的矩，因为它们都对应于标签为 $6.4.a.a$. 的模形式。由此直接得到恒等式

$$m_3^{(2,2)}(p)-p^3m_2^6(p)=-2p^6-2p^4-p^2.\tag{5.18}$$

此外，我们有 ℓ-进伽罗瓦表示 $(\mathrm{M}_2^6)_\ell(-3)\ \simeq\ (\mathrm{M}_3^{(2,2)})_\ell$的同构，由此得到以下猜想。

猜想 5.19。 两个动机 $\mathrm{M}_2^6(-3)$和 $\mathrm{M}_3^{(2,2)}$ 同构。

A. 矩的计算

本文使用了若干通过 Sagemath 软件计算得到的数值结果 [38]。本附录介绍了算法，所有代码均可在 我的网页上找到。我们固定一个嵌入 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$ 并将 ℓ-进数与它们在 $\mathbb{C}$ 中的像通过 ι识别。

A.1. 关于 $m_3^k(p)$、 $m_3^{(2,1)}(p)$ 和 $m_3^{(2,2)}(p)$的计算。

A.1.1. $m_3^k(p)$。对于素数 p，根据 Deligne [9, Somme. Trig.], ，我们知道，对于每个 $a \in \mathbb{F}_p^\times$，存在 3 个绝对值为 p的代数数 α_a、 β_a和 γ_a，使得 $s_1(a) = \alpha_a + \beta_a + \gamma_a = \mathrm{Kl}_3(a;p)$，且$s_3(a) = \alpha_a \cdot \beta_a \cdot \gamma_a = p^3$. 。于是，二次初等对称多项式为

$$s_2(a) := \alpha_a\beta_a + \beta_a\gamma_a + \gamma_a\alpha_a = p^3(\alpha_a^{-1} + \beta_a^{-1} + \gamma_a^{-1}) = p(\overline{\alpha}_a + \overline{\beta}_a + \overline{\gamma}_a) = p \cdot \overline{\mathrm{Kl}_3(a;p)}.$$

Kl_3 的第 k个对称幂矩是形如以下形式的整数

$$m_3^k(p) := \sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times} \sum_{i+j+k=k} \alpha_a^i \beta_a^j \gamma_a^k,$$

利用初等对称多项式的值即可计算。例如，三次、四次和六次对称幂矩可通过以下方式计算

$$m_3^3(p) = \sum_a (s_1(a)^3 - 2s_1(a)s_2(a) + p^3),$$

$$m_3^4(p) = \sum_a (s_1(a)^4 - 3s_1(a)^2 s_2(a) + s_2(a)^2 + 2p^3 s_1(a)),$$

$$m_3^6(p) = \sum_a (s_1(a)^6 - 5s_1(a)^4 s_2 + 6s_1(a)^2 s_2(a)^2 - s_2(a)^3 + 4p^3 s_1(a)^3 - 6p^3 s_1(a)s_2(a) + p^6,$$

分别。因此，我们由（2.5）得到

$$a_3^4(p) = -\frac{1}{p^3}(m_3^4(p) + 1 + p^2 + p^4)$$

是中间上同调 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_3)$ 的迹。我们列出一些数值结果如下。

	素数	
	3	5
$m_3^3(p)$	-10	
$a_3^4(p)$	-2	-12
$m_3^6(p)$	-820	

A.1.2. $m_3^{(2,1)}(p)$ 和 $m_3^{(2,2)}(p)$。 根据（2.10），$\mathrm{Kl}_{V_{2,\ 1}\ \mathrm{SL}_3}$ 的矩是 $\mathrm{Sym}^2\mathrm{Kl}_3 \otimes \wedge^2\mathrm{Kl}_3$ 的矩与 $\mathrm{Kl}_3(-3)$的矩之差。因此，我们得到

$$m_3^{(2,1)}(p) = \sum_a (s_1(a)^2 s_2(a) - s_2^2(a) - p^3 s_1(a)).$$

设 $a_3^{(2,1)}\ p$ () 为中间上同调 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}_3^{(2,1)})$ 的迹，可通过 b 计算得出。 y

$$a_3^{(2,1)}(p) = -p^{-4}(m_3^{(2,1)}(p) + p + p^2 + p^3).$$

对于 $\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$，我们同样根据（2.10）得出，$\mathrm{Kl}_3^{(2,2)}$ 的矩为

$$m_3^{(2,2)}(p) = \sum_a \left((s_1(a)^2 - s_2(a))(s_2(a)^2 - p^3 s_1(a)) - p^3 s_1(a) \cdot s_2(a)\right).$$

设 $a_3^{(2,2)}(p)$ 为中间上同调 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathrm{Kl}_3^{(2,2)})$ 的迹。那么我们得到

$$a_3^{(2,2)}(p) = -p^{-5}(m_3^{(2,2)}(p) + p^2 + p^3 + 2p^4 + 2p^6).$$

一些数值结果如下。

	素数						
	5	7	11	13	17	19	23
$a_3^{(2,1)}$	0		0	-4	6	2	0
$a_3^{(2,2)}$	6	-16	12	38	-126	20	168

此外，我们计算了若干有限域上的尖点新模符号空间 $\mathbb{F}_\ell$，并验证指定的迹是否为 T_p 的特征多项式的根。以下是一些数值结果。

级 N	权 k	素数 p	有限域 $\mathbb{F}_\ell$	$T_p(a_f(p))$
$2\cdot 3^5$	14	5	$\mathbb{F}_{23}$	1
$2\cdot 3^5$	12	5	$\mathbb{F}_{23}$	-1
$2\cdot 3^5$	10	5	$\mathbb{F}_{13}$	5

A.2. $m_4^3(p)$ 的计算及 $m_4^4(p)$。

A.2.1. $m_4^3(2)$. 这里我们计算 $p=2$ 处的三阶对称幂矩。利用 Sagemath [38], 我们知道 $\mathrm{Kl}_4(1;2)=1$ 和 $\mathrm{Kl}_4(1;4)=11$。令 $\alpha_1,\dots,\alpha_5$ 为 Frob_2 在 $(\mathrm{Kl}_4)_{\overline{1}}$ 上的作用的特征值，并令 $s_1,\dots,s_4$ 为 α_i 上的初等对称多项式。根据 Kl_4, 的定义，我们有

$$s_1=\sum\alpha_i=-\mathrm{Kl}_4(1;2)=-1,$$

$$s_1^2-2s_2=\sum\alpha_i^2=-\mathrm{Kl}_4(1;4)=-11.$$

因此，$s_1=-1$ 和 $s_2=6$。此外，由于 $\det \mathrm{Kl}_4=E(-6)$，我们有 $s_4=\prod\alpha_i=p^6$. 注意到 $\alpha_i\cdot\overline{\alpha}=p^3$，我们有 $s_3=p^3\overline{s}_1-8$. 然后，可以通过计算矩来求得

$$m_4^3(2)=\sum_{i,j,k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k=s_1^3-2s_1s_2+s_3=3.$$

由此可得

$$a_4^3(2)=-\frac{1}{p^4}(m_4^3(p)+1+p^2+p^3)=-1.$$

A.2.2. $m_4^3(p)$ 和 $m_4^4(p)$。令 $\alpha_1(a)\dots,\alpha_4(a)$ 为 Frob_p 作用于 $(\mathrm{Kl}_4)_{\overline{a}}$ for $a\in\mathbb{F}_p^\times$ and by $s_1(a)..,s_4(a)$ 的特征值，后者是 $\alpha_i(a)$ 上的初等对称多项式。根据 Kl_4, 的定义，我们有

$$s_1(a)=\sum\alpha_i(a)=-\mathrm{Kl}_4(a;p)\text{ and }s_1(a)^2-2s_2(a)=\sum\alpha_i(a)^2=-\mathrm{Kl}_4(a;p^2).$$

此外，由于 $\det\mathrm{Kl}_4=E(-6)$，我们有 $s_4(a)=\prod\alpha_i=p^6$. 注意到 $\alpha_i(a)\cdot\overline{\alpha}_i(a)=p^3$，因此得到 $s_3(a)=p^3s_2(a)$。接下来，可~~以以~~计算这些矩为

$$m_4^4(p)=\sum_a(s_1(a)^4-3s_1(a)^2s_2(a)+s_2(a)^2+2p^3s_1(a)\overline{s_1(a)}-p^6).$$

最后，中间上同调 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^4\mathrm{Kl}_4)$ 的迹为

$$a_4^4(p)=-\frac{1}{p^4}(m_4^4(p)+1+p^2+p^3+p^4+2p^6).$$

下面列出一些数值结果。

	素数		
	2	3	7
$a_4^3(p)$	-1		
$a_4^4(p)$		-26	-22

与第 A.1.2 节末尾类似，我们列出一些数值结果，其中 $N\cdot k^2\geq 40000$。

级 N	权 k	素数 p	有限域 $\mathbb{F}_\ell$	$T_p(a_f(p))$
$2^8\cdot 5$	14	7	$\mathbb{F}_{11}$	3
$2^8\cdot 5$	12	3	$\mathbb{F}_{13}$	10
$2^8\cdot 5$	10	7	$\mathbb{F}_{11}$	3
$2^8\cdot 5$	8	7	$\mathbb{F}_{11}$	5
$2^8\cdot 5$	6	7	$\mathbb{F}_{11}$	4
$2^7\cdot 5$	14	3	$\mathbb{F}_{17}$	8
$2^7\cdot 5$	12	7	$\mathbb{F}_{17}$	8
$2^7\cdot 5$	10	3	$\mathbb{F}_{11}$	5
$2^7\cdot 5$	8	7	$\mathbb{F}_{11}$	3
$2^6\cdot 5$	14	3	$\mathbb{F}_{17}$	3
$2^6\cdot 5$	12	3	$\mathbb{F}_{29}$	2

A.3. **计算** $m_5^3(p)$. 设 $\alpha_1(a),\dots,\alpha_5(a)$ 为 Frob_p 作用于 $(\mathrm{Kl}_5)_{\overline{a}}$ 上的特征值，其中 $a\in\mathbb{F}_p^\times$，并以 $s_1(a),\dots,s_5(a)$ 表示 $\alpha_i(a)$ 上的初等对称多项式。根据 Kl_5 的定义，我们有

$$s_1(a)=\sum\alpha_i(a)=\mathrm{Kl}_5(a;p)\ \text{and}\ s_1(a)^2-2s_2(a)=\sum\alpha_i(a)^2=\mathrm{Kl}_5(a;p^2).$$

此外，由于 $\det\mathrm{Kl}_5=E(-10)$，我们有 $s_5(a)=\prod\alpha_i=p^{10}$. 因为 $\alpha_i(a)\cdot\overline{\alpha}_i(a)=p^4$，我们有$s_3(a)=p^2s_2(a)$ 和 $s_4=p^6s_1(a)$。然后，可以将矩计算为

$$m_5^3(p)=\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\sum_{i\le j\le k}\alpha_i(a)\alpha_j(a)\alpha_k(a)=\sum_a s_1(a)^3-2s_1(a)s_2(a)+3s_3(a).$$

最后，中间上同调 $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t,\mathrm{mid}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{F}}_p},\mathrm{Sym}^3\mathrm{Kl}_5)$ 的迹为

$$a_5^3(p)=-\frac{1}{p^5}(m_5^3(p)+1+p^2+p^3+p^4+p^6).$$

矩和弗罗贝尼乌斯迹在 $p=2,5$ 处的值列于下文。

	素数	
	2	5
$m_5^3(p)$	-61	3901
$a_5^3(p)$	-1	-4

参考文献

[1] 代数几何讲义，柏林-纽约，1973年。布瓦-马里代数几何研讨班（SGA 7 II），由 P. Deligne 和 N. Katz 主编。[2] 上同调 ℓ-进与函数 L，《数学讲义》第589卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1977年。布瓦-马里代数几何研讨班 1965—1966年，SGA 5，由 Luc Illusie 编。

[3] T . Bayer、T . Gee、p 和 D . Geraghty 和 R . 泰勒 . 潜在自守性与权重变换 . *Ann.* 数学 .

[4] A. Beilinson. 关于晶体周期映射。剑桥数学杂志，1(1):1–51，2013年。[5] G. Boxer, F. Calegari、T . Gee 和 V . Pilloni . 全实域上的阿贝尔曲面是潜在模形式的 . *Publ. M* 数学高等研究所年报 .

[6] D. Broadhurst. 费曼积分、L级数与克洛斯特曼矩。Commun. Number Theory Phys., 10(3):527–569, 2016. [7] D. Broadhurst. 多达 20 个贝塞尔函数乘积的临界L值。讲座幻灯片，https://www.matrix-inst.org.au/wp_Matrix2016/wp-content/uploads/2016/04/Broadhurst-2.pdf，2017。[8] P. Deligne. 模形式与 ℓ进表示。载于《布瓦-马里代数几何研讨班》第 1968/69 卷，报告 347–363，第 139–172 页。施普林格出版社，1971。[9] P. Deligne. étale 上同调，《数学讲义》第 569 卷。施普林格出版社，柏林，1977年。布瓦-马里代数几何研讨班 SGA $4\frac{1}{2}$。[10] P. Deligne. Weil 猜想。II. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 52:137–252, 1980. [11] P. Deligne and J.-P. Serre. 权 1 模形式。Ann. Sci. École Norm. Sup., 7(4):139–172, 1974. [12] R. Evans. 有限域上的超几何 ${}_3F_2(1/4)$求值与 Hecke 特征形式。Proc. Amer. Math. Soc., 138(2):517– 531, 2010。[13] R. Evans. 克洛斯特曼和的七次矩。Israel J. Math., 175:349–362, 2010. [14] E. Frenkel and B. Gross. 射影直线上的刚性非正则联络。数学年刊 (2), 170(3):1469–1512, 2009. [15] J. Fresán and P. Jossen. 指数动机。http://javier.fresan.perso.math.cnrs.fr/expmot.pdf。[16] J. Fresán, C. Sabbah, and J.-D. Yu. 克洛斯特曼联络的霍奇理论。Duke Math. J., 171(8):1649–1747, 2022. [17] L. Fu and D. Wan. 克洛斯特曼和对称积的 L函数。J. Reine Angew. Math., 589:79–103, 2005。

[18] L. Fu and D. Wan. 克洛斯特曼层对称积的 L函数的平凡因子。Finite Fields Appl., 14(2):549– 570, 2008。[19] W. Fulton and J. Harris. 表示论，《数学研究生文本》第 129 卷。施普林格出版社，纽约，1991年。入门课程，《数学读本》。[20] J. Heinloth, B.-C. Ngô, and Z. Yun. 约化群的克洛斯特曼层。数学年刊 (2), 177(1):241–310, 2013年。[21] A. Huber and S. Müller-Stach. 周期与诺里动机，《数学及其边界领域成果》第 65 卷。第三辑。现代数学概览丛书 /《数学及相关领域成果》。第三辑。现代数学概览丛书/。Springer, Cham, 2017。Benjamin Friedrich 和 Jonas von Wangenheim 撰写了部分内容。[22] K. Hulek, J. G. Spandaw, B. van Geemen, and D. van Straten. Barth–Nieto 五次曲面及其相关曲面的模性。Adv. Geom., 1(3):263–289, 2001。[23] L. Illusie. 反常性与变化。Manuscripta Math., 112(3):271–295, 2003。[24] N. M. Katz. 高斯和、克洛斯特曼和与单值群，《数学年刊研究》第 116 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1988年。[25] M. Kisin. 二维伽罗瓦表示的模性。载于《数学当前进展，2005》，第 191–230 页。Int. Press, Somerville, MA, 2007。[26] G. Laumon. Fourier 变换、函数方程的常数与 Weil 猜想。Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 65:131–210, 1987。[27] B. Le Stum. 刚性上同调，《剑桥数学论丛》第 172 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[28] R. Livné. Gal(Q/Q) 的动机正交二维表示。Israel J. Math., 92(1-3):149–156, 1995. [29] G. A. Miller, H. F. Blichfeldt, and L. E. Dickson. 有限群理论及其应用。Dover Publications, Inc., 纽约，1961年。[30] S. Patrikis and R. Taylor. 某些 l进表示的自守性与不可约性。Compos. Math., 151(2):207–229, 2015。[31] C. Peters, J. Top, and M. van der Vlugt. 一个与 Melas 代码中权 5 字数目相关的 $K3$ 曲面的 Hasse ζ 函数。J. Reine Angew. Math., 432:151–176, 1992。[32] Y. Qin. 与克洛斯特曼矩和 Airy 矩相关的动机的霍奇数。Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 2024(808):143–192, 2024。[33] J.-P. Serre. 代数簇 ζ 函数的局部因子（定义与猜想）。载于《Delange-Pisot-Poitou 研讨班》第 11 年：1969/70。数论。第 1 分册：报告 1 至 15；第 2 分册：报告 16 至 24，第 15 页。Secrétariat Math., 巴黎，1970。[34] J.-P. Serre. Gal (Q/Q) 的二维模表示。Duke Math. J., 54(1):179–230, 1987. [35] J.-P. Serre. 正交表示的模 p 约化。载于《李群、几何与表示论》，《数学进展》第 326 卷，第 527–540 页。Birkhäuser/Springer, Cham, 2018。[36] R. Taylor. 伽罗瓦表示。Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 13(1):73–119, 2004。[37] LMFDB Collaboration. L 函数与模形式数据库。http://www.lmfdb.org，2024年。[38] Sage 开发者。SageMath，Sage 数学软件系统（版本 10.4.0），2024年。https://www.sagemath.org。[39] A. Weil. 关于某些指数和。Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 34(5):204, 1948。[40] D. Xu and X. Zhu. 约化群的贝塞尔 F等晶体。Invent. Math., 227(3):997–1092, 2022。[41] Z. Yun. 与克洛斯特曼和的矩相关的伽罗瓦表示及 Evans 猜想。Compos. Math., 151(1):68– 120, 2015。附录 B 由 Christelle Vincent 撰写。