arXiv:2305.04893v1 [econ.TH] 8 May 2023

Bauer拟凸函数最大值原理

Ian Ball

2023年5月8日

Bauer 最大原理正越来越多地应用于经济理论中的优化问题；例如，参见 Kleiner等人(2021) 和Arieli等人(2023)。本文指出，在 Bauer 最大原理中，可以将目标函数所要求的凸性放宽为拟凸性。

定理 1 （拟凸最大值原理）
设 K 为豪斯多夫局部凸空间中的一个非空紧致凸子集。任何从 K 到 $[-\infty,\infty)$ 的上半连续拟凸函数，都能在 K 的某个极点处取得其最大值。

具有凸目标函数的最大原理归因于 Bauer(1958年）。我首先概述 Bauer 的凸目标函数最大原理的标准证明；参见 Aliprantis 和 Border (2006年，第 298 页）以及 Ok(2007年，第 658 页）。回顾一下，在任意向量空间中，集合 A 的子集 B 是 B-极端的，如果满足以下条件：对于任意不同的点 x、$y \in B$，如果开区间 $(x$、$y)$ 与 A相交，那么 x 和 y 都属于 A。[1]

Bauer 最大原理的标准证明如下。设f：$K \to [-\infty,\infty)$是上半连续且凸的。令 E 表示 f 在 K上的最大化点集。

1. 检查集合 E 非空、闭且为 K-极值的。

[1]对于 $x \neq y$，区间 (x,y) 定义为集合 $\{\lambda x+(1-\lambda)y:\ 0<\lambda<1 \qquad\}$.

2. 使用佐恩引理证明存在一个极小的非空闭合K-极值子集 E。称此集合为 E_0。

3. 按如下方式论证 E_0 是单点集。如果 E_0 至少包含两个点，那么根据 Hahn–Banach 定理，存在一个在 E_0 上不为常数的连续线性泛函。该线性泛函在 E_0 上的最大化点集是 E_0 的非空、闭且真子集，可以证明它是 K-极端的，这与 E_0 的极小性矛盾。

的凸性仅在第1 部分中用于证明集合 E 最大化点 K-极端。Aliprantis 和 Border (2006年，第 300 页）证明，如果假设 f 是显式拟凸而非凸的，同样的证明依然成立。[2] 显式拟凸性严格弱于凸性，但严格强于拟凸性。

若 f 仅为拟凸函数，则最大化点集 E 不一定是 K-极端的。但 E 是 K-半极端的，也就是说，对于任意不同的点 x、$y \in K$，若开区间 (x, y) 与 E 相交，则 x 和 y 中至少有一个属于 E。等价地，$K \setminus E$ 是凸集。下文定理 1 的证明沿用相同的三步结构，只是以“K-半极端”代替“K-极端”，但第 3 步需要新的论证。该证明的思路源自 Conway（1990）对 Krein–Milman 定理的证明，而该证明被认为出自 Léger（1968）。定理 1 似乎已为数学文献所知，但很难找到包含完整证明的参考文献。[3]

[2]若函数 $f\colon K \to [-\infty, \infty)$ 满足：对于所有互不相同的 x、$y \in K$ 以及 $\lambda \in (0, 1)$，$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$；且当 $f(x) \neq f(y)$ 时，不等式为严格不等式，则称其为显式拟凸函数。显式拟凸性是一种序数性质；凸性则不是。[3]Holmes（1975 年，第 75 页）陈述了定理 1，但没有给出证明。Stenger 等人（2021 年，第 425 页）声称，定理 1 可以通过仿照 Choquet 等人（1969 年，第 102 页）关于凸函数的 Bauer 最大原理的证明来证明。但这是不正确的；如果假设目标函数仅为拟凸函数，Choquet 等人（1969 年，第 103 页）证明中的断言 (iv) 并不成立。定理 1 证明中的关键步骤是证明闭的 K-半极端子集 K 含有 K 的一个极点。Anderson 和 Pulsen（1968）以及 Pryce（1969）证明了这一断言。这些论文没有提及 Bauer 最大原理，且其证明与本文给出的证明截然不同。

定理 1 的证明。设 $f\colon K \to [-\infty, \infty)$ 是上半连续且拟凸的。由于 K 是紧致的，且 f 是上半连续的，函数 f在 K上能取到最大值。记最大值为 M，并令 E表示最大化点集。由于 f 是上半连续的，集合 E 是闭集。我们断言， E 是 K-半极端的。取 x 和 y 为 K 中的不同点，且开区间 (x, y) 与 E相交。选取 $z \in (x, y) \cap E$。我们有

$$M = f(z) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq M,$$

其中，中间的不等式利用了拟凸性。由此可得 $\max\{f(x)\ f(y)\} = M$，因此 x 和 y 中至少有一个属于 E。

令 $\mathcal{E}$ 为 E的所有非空、闭的 K-极端子集构成的集合。按集合包含关系对 $\mathcal{E}$ 作偏序。我们证明 $\mathcal{E}$ 有一个极小元。显然， $\mathcal{E}$ 非空，因为它包含 E。设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{E}$中的一个非空链。我们断言，交集 $C = \bigcap \mathcal{C}$属于 $\mathcal{E}$。$\mathcal{E}$ 中的每个元素都是紧致且非空的，因此 C 紧致且非空。我们断言 C 是 K-半极端的。设 x 和 y 是 K 中的两个不同点，且开区间 (x, y)与 C相交。对于 $\mathcal{C}$中的每个 E'，开区间 (x, y)也必定与 E' 相交（因为 $C \subseteq E'$），所以 x 和 y 中至少有一个属于 E' （因为 E' 是 K- 半极端的）。由于 $\mathcal{C}$ 是一个链，因此 x 和y中至少有一个（记作 x）属于 $\mathcal{E}$中的每个集合。[4] 因此，x 属于 C。我们得出结论，C属于 $\mathcal{E}$。我们已经证明， $\mathcal{E}$中的每条链在 $\mathcal{E}$ 中都有一个下界。根据佐恩引理， $\mathcal{E}$ 有一个极小元，记为 E_0。

为完成证明，我们证明 E_0 只包含一个点，因此该点是 K的一个极点。反设 E_0 至少包含两个点。我们证明存在一个严格小于 E_0的集合 $E_0' \in \mathcal{E}$，这与 E_0的极小性矛盾。分两种情况讨论。

i. 假设 E_0 是 K-极端的。由于该空间是豪斯多夫局部凸空间，存在一个 K 的凸相对开子集 V，它包含 E_0 中的某个点，并排除 E_0中的另一个点。令 $E_0' = E_0 \setminus V$。由

[4]假设并非如此。那么存在某个不包含 x 的 $E_1 \in \mathcal{C}$，以及某个不包含 y的 $E_2 \in \mathcal{C}$。由于 $\mathcal{C}$ 是一条链，因此 $E_1 \subseteq E_2$ 或 $E_2 \subseteq E_1$。集合 E_1 和 E_2 中较小的那个既不包含 x，也不包含 y，这就产生了矛盾。

构造中， E_0' 是 E_0的非空真闭子集。我们断言 E_0' 是 K-半极端的。设 x 和 y 是 K 中的两个不同点，且开区间（x， y）与 E_0' 相交（因而也与 E_0相交）。由于 E_0 是 K-极端的， x 和 y 都属于 E_0。我们断言 x 和 y 中至少有一个属于 E_0'。否则， x 和 y 都属于 V。由于 V 是凸的，区间（x， y）是 V 的子集，因此不可能与 E_0相交，矛盾。

ii. 假设 E_0 不是 K-极点。那么，存在点 x 属于 $K \setminus E_0$、点 y 属于 E_0 以及标量 λ 属于 $(0, 1)$，使得 $\lambda x + (1-\lambda)y$ 属于 E_0。令E_0' 为所有满足 $\lambda x + (1-\lambda)z$ 属于 E_0的点 z 在 K 中的集合。特别地， E_0' 包含 y。由于 $K \setminus E_0$ 是相对开且凸的，因此 $K \setminus E_0'$ 也是相对开且凸的，即 E_0' 是闭的且K-半极点。为了证明 E_0' 是 E_0的真子集，考虑由 $z_1 = y$ 定义的序列 (z_n)，并且对所有 $n \geq 1$，均有 $z_{n+1} = \lambda x + (1-\lambda)z_n$。该序列收敛于 $K \setminus E_0$中的 x，因此只有有限多个项属于 E_0。 E_0 中的最后一项属于 $E_0 \setminus E_0'$。

□

最后，我们对 K 是凸集这一假设作一些说明。Bauer （1958年）提出的极大值原理最初表述中，并未假设定义域 K 是凸集。事实上，上文概述的、针对凸目标函数的 Bauer 原理的标准证明，并未使用 K 是凸集这一假设。因此，该证明实际上确立了一个更强的极大值原理，其中K 不要求是凸集（而目标函数是显式拟凸的，正如上文所讨论的那样）。[5]

相比之下， K 定理1 中的凸性不可省略。Haberl（2004年）给出了一个简单例子：一个非空的紧致非凸子集 K，位于$\mathbf{R}^2$ 中，以及一个闭的 K-半极子集 E，位于 K 其中，但不包含 K的任何极点。指标函数 E 是上半连续且拟凸的，但它不会在 K的任何极点处取得其最大值。[6]

[5]定义在非凸定义域上的函数，如果其定义不等式对于定义域内的凸组合成立，则称该函数为凸函数/（显式）拟凸函数。[6]Bereanu (1974) 声称证明了一个广义最大值原理，该原理适用于定义域不一定为凸集的拟凸函数。 Haberl (2004) 中的例子构成了对该结果的反例。Haberl (2004) 讨论了 Bereanu （1974）证明中的错误。

参考文献

Aliprantis, C. D. 和 K. C. Border（2006年）：《无限维分析：一份入门指南》，Springer，第3版。 [1, 2]Anderson, T. B. 和 E. T. Pulsen（1968）：《关于凸集的半极子集》，Math. Scand.，23，167–168。 [2]Arieli, I.、Y. Babichenko、R. Smorodinsky 和 T. Yamashita（2023）：《通过双池化实现最优说服》，Theoretical Economics，18，15–36。 [1]Bauer, H.（1958年）：《函数的极小点与极点》，Archiv der Mathematik，9，389–393。 [1, 4]Bereanu, B.（1974）：《关于拟凹泛函的全局最小值》，Archiv der Mathematik，25，381–393。 [4]Choquet, G.、J. Marsden、T. Lance 和 S. S. Gelbart（1969）：《分析学讲义：第二卷表示理论》，W. A. Benjamin。 [2]Conway, J. B.（1990）：《泛函分析初阶》，Graduate Texts in Mathematics第96卷，Springer，第2版。 [2]Haberl, J.（2004）：《局部凸空间中广义凸泛函的最大化》，Journal of Optimization Theory and Applications，121，327–359。 [4]Holmes, R. B.（1975）：《几何泛函分析及其应用》，Graduate Texts in Mathematics第24卷，Springer。 [2]Kleiner, A.、B. Moldovanu 和 P. Strack（2021）：《极点与主序：经济学应用》，Econometrica，89，1557–1593。[1]Léger, C.（1968）：《紧致凸集及其极点》，Comptes rendus de l’Académie des Sciences，267，92–93。 [2]Ok, E. A.（2007年）：《带有经济学应用的实分析》，Princeton University Press。 [1]Pryce, J. D.（1969）：《关于半极凸集的表示及某些分离性质》，Quarterly Journal of Mathematics，20，367–382。 [2]Stenger, J.、F. Gamboa 和 M. Keller（2021）：《拟凸函数的优化》

凸函数在乘积测度集上，”*SIAM* 优化学报，31,425–447. [2]