arXiv:2305.04918v1 [cs.CC] 8 May 2023

具有策略约束的均衡的计算复杂性

预印本

BruceM. Kapron维多利亚
大学计算机科学系，不列颠哥
伦比亚省维多利亚市
bmkapron@uvic.ca

库沙·萨米法尔
计算机科学系
维多利亚大学
维多利亚 , BC
koosha021@gmail.com

摘要

纳什均衡等解概念的计算方面已得到广泛研究，其中包括最终目标是找到具有某些额外性质的均衡的情形。此外，为了处理可解性问题，人们也关注了这些问题的近似版本。我们的工作通过考虑带约束的博弈拓展了这一研究方向：在这些博弈中，玩家的策略选择受到某种形式的限制。我们还探讨了这一背景下纳什均衡与所谓的受约束均衡或社会均衡之间的关系，尤其关注它们在全性和复杂性方面的关联。我们的结果表明，在策略约束略有不同的博弈中，寻找均衡的计算复杂性会有显著差异。除了考察这类策略约束的计算方面，我们还证明了这些约束有助于对涉及策略性资源分配的问题建模，而且从行为博弈论的角度来看也颇有意义。

1 引言

博弈论提供了一种对参与者之间战略互动进行数学建模的方法。它最初应用于社会科学领域，如今已证明同样适用于计算机科学中的建模，尤其是网络和分布式系统等领域。随着这些新应用的发展，该领域的关注重点转向了计算基础，不再局限于传统的数学存在性证明，而是开始考察算法可行性问题。作为这一关注重点转变的一部分，博弈中的均衡存在性相关问题与计算复杂性之间已建立起深刻的联系。

纳什均衡 [53] 是博弈论中的一个核心概念，其计算复杂性一直备受关注。纳什的著名结果 [52, 53] 证明了任何拥有两个或更多玩家的策略博弈都存在混合均衡。然而，这纯粹是一个存在性结果，并未讨论相关问题的计算复杂性，即如何为给定博弈找到一个混合均衡。自 [48], 的研究表明该问题不太可能是 NP完全以来，关于探究这一问题困难性的研究已取得显著进展 [18, 27, 33, 54], , 尤其是将其与全NP搜索问题类 TFNP 联系起来的研究。这一系列工作最终得出了 [18], 的结果：对于双人博弈，寻找（混合）纳什均衡的计算复杂性与 PPAD 中任何问题一样困难。PPAD 是 TFNP 的一个子类，涵盖了斯佩纳引理和布劳威尔不动点定理等问题的复杂性。

面对难以处理的问题，自然会考虑问题解的宽松定义。对于纳什均衡，已有多种常数因子近似算法 [1, 24, 25, 28, 31] 然而，对于任意加性近似误差，寻找近似解的问题仍然很难 [18, 61, 62]。除了研究寻找纳什均衡的计算复杂性，我们还可以考虑存在额外约束时的均衡。对此，有两种广为人知的方法。第一种方法旨在寻找具有某些性质的纳什均衡（例如，实现指定的社会福利） [21, 38, 47]。第二种方法旨在寻找受约束的解，即假设所有玩家只采用满足给定约束的策略时，没有玩家会偏离的解 [2, 30, 35]。

更广泛地说，博弈论面临一些基础性挑战，其中包括如何让混合策略这一概念在实践中更有用 [63]。20世纪80年代，混合策略的概念受到批评，被认为“直觉上存在问题”，因为它弱化了纳什均衡的定义 [5, 60]。对于各种实际用途，这一概念尚无普遍接受的解释。根据 [22], , 混合策略用于不存在纯纳什均衡的博弈，但其主要目的是得出值得关注的数学结果。本文的研究结果部分源于对策略作为一种资源这一特定解释的探索；这种解释引出了反映该观点的一些自然约束。

1.1 混合策略的解释

理解混合策略的一种方法是采用行为解释。作为经济学中的一个核心概念，博弈论研究人们的策略决策受到理性、自私和效用最大化影响的情境。行为博弈论则通过考察人们的策略决策行为如何受到社会偏好或心理因素的影响，进一步完善了这一分析。混合策略的概念可以有多种解释方式 [60], 其中一种是从信念而非行动的角度重新解释混合均衡 [4]。在这里，混合策略刻画的是玩家对其他玩家所采用策略的信念。第二种解释将玩家视为大量代理人的代表。每个代理人选择一种纯策略，而收益则取决于选择各项策略的代理人所占的比例。因此，混合策略代表了各个群体所选择的纯策略的概率分布 [60]。该布 [51] 引入了资源分配博弈，为一类特定的博弈提供了直观的解释：在这类博弈中，均衡策略表示每个玩家分配给其各项纯策略的资源比例。最后，在重复博弈的背景下，混合策略还可以用于表示一段时间内的平均行为。

1.2 带策略约束的均衡

如前所述，在行为博弈论中，玩家的混合策略可能取决于心理因素或其他外部因素。已有许多模型成功解释了非均衡行为 [17, 19, 23, 50, 66]。本文的主要目标之一，是分析一种特定行为：所有玩家都力求按照某种标准衡量方式，避免自己的策略与对手的策略发生重叠。

在极端情况下，玩家不得使用其他玩家使用的策略，即他们的支撑集交集为空。我们将这个问题称为不相交纳什均衡，并证明，即使采用多项式加性近似，判定一个双矩阵博弈是否存在这样的均衡仍是 NP完全问题。我们还考虑一种更强的形式，

不相交纳什均衡，称为分区纳什均衡，在这种均衡中，玩家的支撑集必须构成策略空间的一个划分。在第3.2节中，我们在策略性资源分配的背景下应用这一概念。接下来，我们将推广不相交纳什均衡，允许支撑集重叠，但要求混合策略之间至少相隔 δ 的统计距离（即按照 $L1$ 距离衡量），由此得到一个称为 δ-远*Nash*均衡的问题。若将玩家的混合策略视为大量代理人策略的代表，那么玩家混合策略之间的统计差异可以为分析公共行为提供有用信息（见第3.2节）。

一般而言，当对玩家可采用的策略施加约束时，可以推广纳什概念，以允许出现新形式的均衡。Debreu 将均衡的概念扩展为允许这样一种可能性：某个玩家的可用策略集合取决于其他玩家的策略选择；并证明了当这类博弈满足某些假设时，约束（社会）均衡的存在性 [30]。在标准式博弈的约束（社会）均衡情形下，我们可以考虑不相交性及相关约束：玩家在评估策略响应时，只能考虑那些相对于其他玩家策略满足该约束的策略。例如，约束远均衡（见第 2 节）中的最佳响应意味着，每个玩家都没有动机偏离到另一个与对手玩家的策略在统计上足够远的混合策略。这不同于纳什均衡；在纳什均衡中，假定其他所有玩家采取固定策略，玩家可以考虑所有混合策略。在这种情形下，我们展示了不相交性具有有趣的计算复杂性。简而言之，我们越是依据远离约束限制纳什均衡的定义，问题就越困难；而在受约束情形下，远均衡将呈现出完全不同的行为。

1.3 主要结果

为简便起见，我们只研究双人（双矩阵）博弈的计算方面。本文的基本结果主要关注纳什均衡的两种变体的计算复杂性，即带统计远距相关约束的纳什均衡和带统计远距相关约束的约束均衡。假设有一个双人博弈，玩家的收益由一个矩阵给出，两个玩家各有 n 种可能的策略。非正式地说，我们证明，即使在多项式加性近似下，以下问题仍是NP完全的。

- δ-远Nash均衡，适用于任意 $\delta > poly(\frac{1}{n})$
- 不相交纳什均衡
- 分区纳什均衡
- 无小概率的纳什均衡

自然会考虑是否存在某个阈值近似误差，使得当误差低于该阈值时，问题 δ-远Nash均衡变为全问题（即保证至少存在一个解）。虽然我们尚未解答这一问题，但给出了一个界限：只要纳什均衡存在，就保证有解。判定一个双矩阵博弈是否具有多个均衡，是众所周知的带约束纳什均衡问题之一 [38, 47, 21]。我们注意到，基于连续性，每个双人博弈都有无限多个近似纳什均衡。作为一种近似类比，可以考虑这样一个问题：找出两个统计距离给定的均衡条件 [6]。我们证明，即使采用多项式近似，该问题仍为 NP完全。

我们还研究了与远离约束相关问题的受约束版本：此时目标是找到一个均衡，使最佳响应的评估仅考虑那些与另一位玩家的策略在统计上相距甚远的偏离。受约束的不相交纳什均衡可能无解；但考虑该问题的近似版本（受约束不相交均衡）至少有一个平凡解（见 3.19）。因此，我们可以对策略组合施加额外约束，排除小概率的可能性（我们称之为受限远均衡）。然而，该问题为 NP 困难（定理 3.24）。最后，我们证明，对于某些 δ，受约束远均衡仍为 PPAD 困难；并且在一个简单假设下，该问题仍属于 PPAD（定理 3.20 和 3.21）。

1.4 相关研究

关于带约束纳什均衡的问题受到了广泛关注，也已有多项关于其复杂性的研究结果发表。与无约束情形不同，这类问题不一定存在解。Gilboa 和 Zemel 关于带约束均衡的研究，例如要求具有保证收益或满足唯一性，表明其中许多问题都是 NP完全 [38]；[12, 20, 21, 47]中给出了其他证明。 [21] 和 [47] 表明，这些困难性结果对称博弈同样成立。此外，这种困难性还可扩展到对称胜负博弈（即所有效用均为 0 或 1） [12]。潜在地可能存在

可以考虑多种约束，而其中许多性质都会导致 NP 困难问题。据我们所知，我们的工作首次探讨了基于玩家策略间相互约束的条件下，均衡问题的复杂性。除了在这种情形下寻找精确解的问题外，除非某些约束与玩家的社会福利直接相关，否则针对带有特定约束的纳什均衡近似问题，相关进展有限 [6, 32, 64, 40]。事实上，为（无约束）纳什均衡问题寻找多项式时间近似方案一直颇具挑战性；人们尝试通过多种方法解决这一问题 [7, 29, 39, 46, 68]。最后，一项开创性研究 [62]，表明，寻找近似纳什均衡的时间复杂度不可能优于 [46] 中提出的准多项式时间算法（假设指数时间假设成立）。

令人惊讶的是，尽管 Debreu [30]和 Rosen [59]在经济学及其他领域中定义的受约束博弈具有广泛应用，但直到近期的研究 [55], , 这些问题的复杂性才受到关注；据我们所知，受约束双矩阵博弈的复杂性则尚未得到研究。来自不同领域的许多研究者都曾探讨这一概念，这也解释了为何文献中出现了诸多不同名称，包括伪博弈、社会均衡、凹博弈以及共同（耦合）约束均衡[2, 35, 36, 65, 70]。对受约束均衡这一概念存在一些常见批评 [41], , 尤其是约束如何实施的问题。在相关均衡或带调解人的博弈等多种情境下，这一问题或许都能得到妥善处理，因此这一概念在根本上仍具有研究价值。

此外，关于求解受约束均衡的研究主要关注凸约束情形，在这种情形下，根据众所周知的数学事实，解的存在性能够得到保证 [26, 30, 55, 59]。显然，我们的问题并不属于这一情形；然而，对于其中一个主要问题，解的存在性仍有保证。还有许多关于受约束（即社会或广义纳什）均衡的研究，其关注点仅限于纯策略[2, 34, 35, 36, 55]。一个值得注意的例外是文献 [57] 中提出的受约束博弈，在这种博弈中，每位玩家都从可行策略集合中选择两个纯策略的混合策略。

2 预备知识

2.1 博弈论定义

定义 2.1。 一个标准型博弈 由有限个 k 玩家、有限集合 $S = \{1, \ldots, |S| = n\}$ 纯策略 （或行动）[1], 以及由效用函数 构成的向量$(U_1, \ldots, U_k)$ 指定，其中 $U_i \colon S^k \to \mathbb{R}$。

任何此类博弈都有一种表示形式，其中 U_i 由一个 n^k维的 收益矩阵 A_i给出。对于两个玩家的情况，这产生了双矩阵博弈的标准概念。

在许多情况下，允许玩家对纯策略进行随机化是有用的。这引出了以下定义：**定义 2.2.** 令 $\triangle_n$ 为 n 维概率单纯形，

$$\triangle_n = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

A 混合策略 是 $\triangle_n$的一个元素，对应于策略上的概率分布。如果 x 是一个混合策略，支撑集(x)（ x的支撑集 ）表示 S 中被 x 赋予正概率的元素集合。

注意，我们可以将纯策略 s 视为一种混合策略，它以概率 1 选择 s。

定义 2.3. 一个纯策略组合是一个 k 维的策略向量$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k)$，其中 s_i 是玩家 i 采用的纯策略。类似地，我们定义混合策略组合$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$。

如果 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ 是一个策略组合，而 x 是一个策略，我们使用标准记号 $(x, \mathbf{y}_{-i})$ 表示 $(y_1, \ldots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \ldots, y_k)$。

定义 2.4。 给定一个纯策略组合 $\boldsymbol{s}$，玩家 i 的收益 为 $U_i(\boldsymbol{s})$。我们可以通过定义 $U_i(\boldsymbol{x})$ 来将这一概念扩展到混合策略，其中对于混合策略组合 $\boldsymbol{x}$，其值为 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{s} \leftarrow \boldsymbol{x}}[U_i(\boldsymbol{s}))]$, , 即当$\boldsymbol{x}$所确定的分布作用于$\boldsymbol{s}$ 时， $U_i(\boldsymbol{s})$ 的期望值。

备注 2.5. 在双人博弈中，对于混合策略组合 $\mathbf{z} = (x, y)$，我们有：

$$U_1(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_{ij} U_1(i, j) \text{ and } U_2(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_{ij} U_2(i, j),$$

其中 $\alpha_{ij} = x_i y_j$。

[1]一种更一般的表述为每位玩家 i提供一个策略集 S_i。当我们关注 EXACT（即非近似）纳什均衡这一概念时，这种表述与本文所采用的表述并无本质区别。

定义 2.6。 纯策略 s 是玩家 i 对策略组合 $\boldsymbol{x}$ 的 最佳响应，如果对于所有 $s' \in S$，我们都有$U_i(s,\boldsymbol{x}_{-i}) \geq U_i(s', \boldsymbol{x}_{-i})$。
我们也可以用相同的方式定义相对于混合策略组合的混合最佳响应策略。
注 2.7. 我们注意到，最佳响应和纳什均衡的定义也有等价版本，在这些版本中，放宽了对纯策略的限制；也就是说，玩家会将采用某个特定混合策略时的收益与采用所有其他混合策略时的收益进行比较。

定义 2.8. 策略组合 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$ 若对每个玩家 i 以及所有 $s \in S, U_i(\boldsymbol{x}^*) \geq U_i\left(s, \boldsymbol{x}_{-i}^*\right)$，均成立，则称为纳什均衡 。
定义 2.9. 严格劣势策略 是指一种无论对手选择何种策略，其收益总是低于任何其他可选策略的策略。

定义 2.10。 如果对于每个玩家 i以及所有 $s \in S, U_i(\boldsymbol{x}^*) + \epsilon \geq U_i\left(s, \boldsymbol{x}_{-i}^*\right)$，策略组合 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$ 都是 ϵ近似纳什均衡，则称其为 ϵ近似纳什均衡 。我们类似地定义 ϵ最佳响应 。
备注 2.11。 严格劣势策略不能参与纳什均衡。然而，在近似纳什均衡中，根据每个玩家的效用矩阵和近似误差，严格劣势策略可以以较小的概率被采用。

定义 2.12。 策略组合 $\boldsymbol{x}$ 的社会福利 是所有玩家收益之和 $\sum_{i=1}^{k} U_i(\boldsymbol{x})$ 。
定义 2.13。 完全混合策略 是这样一种混合策略：为其中的所有纯策略 S 都分配一个正数（大于零）的概率。

这一概念已得到广泛研究，因此存在各种不同的定义 [42, 44, 45, 49, 56, 58]。
在本文中，我们将提及一些广为人知的限制条件，包括零和和对称博弈：
定义 2.14. 如果对所有 $s_1, s_2 \in S$， $U_1(s_1, s_2) = -U_2(s_1, s_2)$，则称双人博弈为零和博弈。这意味着在博弈的任意一局中，一名玩家的收益等于另一名玩家的损失。
备注 2.15。 对于一个双矩阵博弈 $\mathcal{G}$，我们可以分别用矩阵 $R = (r_{ij})$ 和 $C = (c_{ij})$ 表示 U_1 和 U_2，其中 $U_1(i, j) = r_{ij}$ 且 $U_2(i, j) = c_{ij}$。此类博弈的矩阵表示可记为 $\mathcal{G}(R, C)$。
定义 2.16。 博弈 $\mathcal{G}(R, C)$ 是对称的，如果两个玩家拥有相同的策略且 $R = C^T$。此外，如果(x^*, x^*) 是纳什均衡，我们称 x^* 为对称均衡 。

2.1.1 受约束均衡定义

一旦考虑对策略组合施加约束的博弈，就有两种自然的均衡概念。我们仍然可以考察是否存在满足给定约束的纳什均衡。不过，我们也可以修改上述定义，要求玩家只考虑相对于其他玩家策略而言满足约束的替代策略。显然，对于任何具有策略约束的博弈，第一种解都意味着第二种解，但一般来说，反之则不成立。我们采用的方法主要基于[2] 和 [35]。我们将在第 3.1 节使用以下定义来定义受约束不相交均衡。在第 4.5 节中，我们将深入探讨它们之间的关系。

定义 2.17. 设 $\mathcal{G}$ 为一个博弈， $\mathcal{R}_i$ 为 $\prod_{i=1}^{k-1} \Delta_n$上的关系，其中 $i \in [k]$。每个 $\mathcal{R}_i$ 都可以视为一个集值映射，因此 $\mathcal{R}_i(\boldsymbol{x}_{-i}) \subseteq \Delta_n$。设 $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_i \mid i \in [n]\}$。混合策略组合 x^* 是 受约束均衡（广义纳什均衡），当且仅当：

$$\forall x_i \in \mathcal{R}_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*), \qquad U_i(\boldsymbol{x}^*) \geq U_i\left(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*\right) \tag{1}$$

在下文中，我们只考虑所有 $\mathcal{R}_i$均相同的情形，即存在一个共同约束 $\mathcal{R}$。备注2.18。 [55, 59] 中对受约束博弈的定义不涉及包含混合策略的博弈。我们的定义可以视为这些定义的一个特例。

2.2 计算复杂性定义

定义 *2.19*。*TFNP*（全函数非确定性多项式时间）是由解可在多项式时间内验证的全搜索问题构成的类。形式上，给定一个多项式平衡的多项式时间关系 $R(x, y)$，其对应的 *NP* 搜索问题是（部分）多值函数 $Q(x) = \{y \mid R(x, y)\}$。若对所有 x， $Q(x)$ 均非空，则该问题是全的。*FNP* 类由所有 *NP* 搜索问题构成，而 *TFNP* 类由所有全 *NP*搜索问题构成。若存在一个多项式时间函数 Q'，使得对所有 x， $Q'(x) \in Q(x)$，则搜索问题 Q 属于 *FP*。与 R 相关联的判定问题是：给定 x，判断是否存在某个 y，使得 $R(x, y)$。*NP* 是所有此类判定问题构成的类。

定义 2.20。 一对多归约的概念可按如下方式扩展到全搜索问题：对于两个全搜索问题 R 和 S，如果存在可在多项式时间内计算的函数 f、g，使得对所有 x、y，若$(f(x)\ y) \in S$，则$(x, g(y)) \in R$，我们就称 $R \leq_m S$。

注 2.21。 请注意，搜索问题之间的这种归约形式等价于只调用一次预言机的 Cook 归约。

TFNP 的子类 PPAD 在纳什均衡问题的复杂性研究中起着核心作用。这些复杂性类定义如下：

定义 2.22。 我们将终点问题（EOTL）定义如下：给定一个有向图 $\mathcal{G}$，该图由两个规模为多项式的电路表示，分别用于返回某个节点（以二进制表示）的前驱和后继；每个顶点至多有一个前驱和一个后继，且存在一个没有前驱的顶点 $u \in \mathcal{G}$，要求找出另一个没有前驱或没有后继的顶点 $v \neq u$。如果一个搜索问题可在多项式时间内归约到 *EOTL*，则该问题属于PPAD 。

在双矩阵博弈中，目标是找到一个满足纳什条件的策略组合（一对混合策略）。如果我们已知这些策略的支撑集，则可以利用线性规划在多项式时间内确定问题中的相对权重。由此立即得到：

命题2.23. 任何收益为有理数的2玩家博弈都有一个纳什均衡，其中概率的比特长度关于策略数量和收益的比特长度是多项式级的。

总之，当有两名玩家时，难点在于找到这两个子集。这种方法无法推广到双人博弈之外；事实上，纳什在其最初的布中证明了，存在一些3人博弈，它们只有无理数解。讨论这类情况中的 EXACT 复杂性，需要使用 FIXP 等复杂性类 [33]以及（针对带有额外约束的纳什均衡） $\exists\mathbb{R}$ [11]。

在考虑加性近似的计算复杂性时，我们需要考虑近似项 ϵ的表示方式。具体而言，我们考虑以下几种近似形式 [64]:

定义 2.24。

- 我们用 EXACT 表示问题的精确解（即， $\epsilon = 0$。）
- 对于指数加性近似，或EXP-近似，输入 ϵ 以（二进制）有理数编码 *r.*
- 对于多项式加性近似，或多项式近似，输入 $\epsilon = \frac{1}{k}$ 以一元形式表示为 1^k。

3 带策略约束的均衡

本节概述与带策略约束的均衡相关问题的正式定义和主要定理。除非另有说明，我们还假设效用矩阵中的元素均介于 $[0, 1]$ 之间。我们采用混合策略之间的标准统计距离（全变差距离）概念，将混合策略视为定义在纯策略上的概率分布。

3.1 问题定义

定义 3.1。 如果 $||x - y||_1 \geq 2\delta$成立，其中$||x - y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$，则称两个（混合）策略 $x \in \triangle_n$ 和 $y \in \triangle_n$ 2δ相距 $||x - y||_1 \geq 2\delta$。
备注 3.2。 请注意，对于双矩阵博弈，对于行玩家和列玩家的混合策略 x 和 y，我们只需有 $0 \leq ||x - y||_1 \leq 2$。

定义 3.3。 纳什均衡$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$ 称为 δ-远纳什均衡，如果对所有 $i \neq j$，x_i^*和 x_j^* 都是 2δ-远的。这类均衡的近似版本记作(δ, ϵ)-远纳什均衡。

还可以通过禁止所有玩家使用其他所有玩家所采用的策略，来引入该问题的一个具体情形，如下所示：

定义 3.4。 （不相交纳什均衡）：策略组合 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ 是一个不相交纳什均衡，当且仅当它是一个纳什均衡，且 $\bigcap_{i=1}^{k} P_i = \emptyset$ 其中 $P_i =$ 支撑集(x_i)。
我们称混合策略组合（x_1、.....、x_k）具有不相交支撑集组合，如果对于任意玩家 i 和玩家 j （$i \neq j$），二者具有不相交支撑集。

表 1：一个不存在不相交纳什均衡的博弈

		玩家2
玩家1	1,1	0,0
	0,0	0,0

注3.5：当 $\delta = 0$， δ-远Nash均衡问题就只是寻找一个纳什均衡，而当 $\delta = 1$ 时，它恰好是不相交纳什均衡。不相交纳什均衡的存在性并不一定得到保证，表1中的例子说明了这一点。

为了研究有限重叠支撑集均衡的一项直接应用，我们定义了以下问题，它可以通过进一步约束不相交纳什均衡导出：

定义 3.6.（分区纳什均衡）：策略组合 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ 是一个划分纳什均衡，如果它是不相交纳什均衡且 $\bigcup_{i=1}^{n} P_i = S$，其中 $P_i =$ 支撑集(x_i)。

我们还有另一种纳什均衡变体，[47]也研究了该变体的 EXACT 问题。该变体要求纳什均衡中的所有策略都不能以小概率进行。

定义 3.7.（主要纳什）：如果所有玩家支撑集中的所有策略被选择的概率都大于 θ，则该策略组合是一个 θ-主要纳什均衡 。对于近似版本，我们考虑(θ, ϵ)-主要纳什均衡。

接下来，我们研究先前关于有限重叠支撑集的纳什均衡问题的受约束版本。在受约束情形下，目标是找到一种均衡，在这种均衡中，只考虑那些符合约束条件（即限制策略使用方式）的策略偏离。例如，在不相交纳什均衡的受约束版本（我们称之为受约束不相交均衡）中，如果某个玩家无法从一种均衡策略偏离到另一种混合策略，且该混合策略的支撑集与其他玩家的支撑集均存在非空交集，那么该玩家的策略就是最佳响应。这与纳什均衡不同，在纳什均衡中，假设其他所有玩家都采用固定策略，某个玩家可以考虑所有混合策略。

定义 3.8。对于双矩阵博弈，我们可以为 δ-远离和不相交纳什均衡的受约束版本定义共同约束：

$$\mathcal{R}_{\delta}^{n} = \{(x, y) \in \Delta_n \times \Delta_n \mid ||x - y||_1 \geq 2\delta\}$$

$$\mathcal{R}_{\text{disjoint}}^{n} = \{(x, y) \in \Delta_n \times \Delta_n \mid \langle x, y \rangle = 0\}$$

其中 $\langle x, y \rangle$ 表示内积。我们将满足 *2.17*（见定义）的均衡称为 $\mathcal{R}_{\delta}^{n}$的受约束δ-远均衡，并将满足 $\mathcal{R}_{\text{disjoint}}^{n}$ 的受约束不相交均衡。

注释 3.9。假设列玩家选择 y。对于行玩家（列玩家同理），我们还可以得到以下关系：

$$\mathcal{R}_{\delta}^{n}(y) = \{x \in \Delta_n \mid ||x - y||_1 \geq 2\delta\}$$

$$\mathcal{R}_{\text{disjoint}}^{n}(y) = \{x \in \Delta_n \mid \langle x, y \rangle = 0\}$$

注 3.10。很容易看出，所有恰好有两个纯策略的博弈都存在受约束不相交均衡，其中两个玩家各自采用一种纯策略。我们定义的受约束策略空间并非凸集。正如 Rosen [59] 所示，在约束为凸集时，可以保证存在解。最近，研究已证明，利用角谷不动点定理的计算版本，为具有凸约束的博弈寻找均衡是 PPAD 完全的 [55]。我们的结果表明，即使约束不是凸集，也可能保证存在解。

在受约束情形下，我们提出的问题中至少有一个是可处理的，即近似受约束不相交均衡（命题 3.19）。然而，在近似受约束不相交均衡中，一个自利玩家可能会损害所有其他玩家的社会福利。考虑到这一缺点，我们将注意力转向另一种受约束均衡，其定义如下：

定义 3.11。(θ, δ)-受限远均衡问题 定义如下：给定一个双矩阵博弈 $\mathcal{G}$，寻找一个受约束的 δ-远均衡，使所有以正概率采用的纯策略，其采用概率均大于 θ。我们可以通过采用加性近似误差 ϵ 来放宽此定义，并将其称为$(\theta, \delta, \epsilon)$-受限远均衡。对于 $\delta = 1$，我们将该问题称为(θ, ϵ)-受限不相交均衡。

表2：巴赫或斯特拉文斯基与对立博弈

		Clara	
Ray		$1,\frac{1}{2}$	0,0
		0,0	$\frac{1}{2},1$

		Clara	
Ray		0,0	$1,\frac{1}{2}$
		$\frac{1}{2},1$	0,0

表3：所得税博弈

		纳税人	
审计员		2,0	4,-10
		4,0	0,4

		纳税人	
审计员		2,0	4,-20
		4,0	0,4

3.2 应用

为了说明动机，我们先从两个基于著名的“巴赫还是斯特拉文斯基”博弈的简单例子说起。在这两个博弈中，都有两名玩家，每人有两种策略。在第一个情境中，两名玩家必须在两项活动中做出选择：一名行玩家（Ray）和一名列玩家（Clara）。Ray 更喜欢第一项活动，而 Clara 更喜欢第二项。如果两人选择相同的活动，在第一个博弈中，根据各自的偏好，其中一人将获得$_{1\,2}$的收益，另一人则获得 1；如果他们选择不同的活动，就会发生冲突，双方的收益均为 0。在第二个博弈中，如果玩家采用不同的策略，他们将根据各自的偏好获得 1 或$_{1\,2}$的收益。

在第一个博弈中，存在两个纯纳什均衡，且两位玩家采取相同的策略。该博弈存在一个混合纳什均衡（$_{2\,3}$，$_{1\,3}$）（对于行玩家）和$^{-}$（$_{\bar{1}\,3}$，$_{2\,3}$）（对于列玩家），其中策略的统计 $L1$ 距离为$_{2\,3}$。此外，在第一个博弈中，不存在两位玩家选择不同活动的纳什均衡，这表明如果两位玩家都表现出不合作行为，就无法获得理想的收益。在第二个博弈中，存在两个纯纳什均衡，在这两个均衡中，两位玩家都采取不同的策略，而唯一的混合策略均衡与前一个博弈相似。总之，在该博弈中，根据各自的偏好，两位玩家都倾向于使用不同的活动（策略）。

3.2.1 逃税者与政策设计

我们首先考虑一个例子，说明远纳什均衡如何为政策制定者提供有用的信息。表 3 展示了两个对简单税务审计问题进行建模的博弈。这里，审计员和纳税人各有两种可选策略。审计员的策略是审计纳税人（策略 1）或不审计纳税人（策略 2）。纳税人可以如实缴税（策略 1）或逃税（策略 2）。这些双矩阵博弈都没有纯纳什均衡。我们将采用之前提到的两种不同解释。第一个博弈的纳什均衡是：纳税人以$_{2\,3}$ 的概率如实缴税，以$_{1\,3}$的概率逃税。在这个均衡中，审计员以$_{2\,7}$ 的概率审计纳税人，以$_{4\,7}$的概率不审计。我们可以这样解释这种混合策略：假设审计员确实在两种策略之间随机选择，而与纳税人相关的数值则分别表示缴税和逃税的纳税人比例。政策设计的目标可以是制定一项能够让纳税人尽量避免逃税的政策。在第二个博弈中，加入这项新的被查获惩罚后，审计员将以$_{1\,6}$的概率进行审计，而税收遵从率不会改变。换句话说，在这个博弈的纳什均衡中，审计员采取的策略为（$_{16,56}$），纳税人采取的策略为（$_{23,13}$）。这表明，如果我们想改变税收遵从情况，就需要改变审计员的收益，尽管我们已经成功降低了审计率，这对社会来说是件好事。要提高遵从率，我们可以增加抓到逃税者时的收益，或者降低审计成本。讨论了所得税博弈的一些方面之后，我们可以简单地得出结论：如果远纳什均衡存在，那么该政策就是有效的，因为我们希望降低选择同一策略的概率。[2]

[2]政策设计者应遵循一些基本假设，例如，惩罚不应过高。在纳税人诚实的情况下以高概率进行审计并不理想。对于具有多个混合纳什均衡的博弈，我们可以考虑衡量玩家混合策略的统计距离均值。

3.2.2 策略性资源分配

资源分配和公平分配问题从计算角度受到了广泛关注，因为它们是多智能体系统中的关键考量。在一般的资源分配问题中，我们希望在对资源（有时是资源束）具有不同估值的代理人之间分配资源。公平分配是一类社会选择问题，涉及一组代理人，其中每个代理人都有个人偏好，通常由效用函数表示。公平分配的目标是以公平、公正的方式分配资源。公平分配问题的一个基本问题是，首先应如何定义公平性标准。经济学领域的许多研究，尤其是社会选择理论，探讨了这一主题。经典的公平定义包括竞争均衡 [3]和社会纳什福利 [43]。人们已经考察了许多针对不可分物品的公平概念；然而，其中许多概念都难以计算 [9, 13, 15, 16]。此外，几乎所有知名研究都局限于非策略性情形。

策略性公平分配是公平分配的一个分支，在该分支中，参与者可能会采取不合作的行动，以最大化自身效用。特别是，玩家可能会隐藏自己的真实偏好，而不是根据真实偏好进行真诚博弈。当存在具有策略行为的参与者时，必须制定合适的公平分配方案，并确立适当的公平标准，以公平且公正地分配资源。公平分配的一个分支与博弈论相关，研究由公平分配算法所产生的博弈中的均衡[14, 16, 67]。

无嫉妒分配是指这样一种分配：每个玩家获得的份额，在其看来至少与任何其他参与者所获得的份额一样好 [37]。无嫉妒性有若干不同的变体 [8, 10, 69]。在策略性环境中，我们将无嫉妒性的一种变体定义如下：

定义 3.12. 假设有 k 个玩家和 n 个物品。博弈 $\mathcal{RV}$ 定义如下：$\forall i \in [k]$ 和 $\forall t \in [n]$,$U_i(t, x_{-i}) = \alpha V_i(t) + \beta R_i(x_{-i})$，其中 α 和 β 是常数。$V_i(t)$ 表示玩家 i 对物品 t 的价值，而 $R_i(x_{-i})$ 是一个可在常数时间内计算的函数，用于表示玩家如何解读分配给其他玩家的物品（纯策略） $x_{-i} = (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$。

定义 3.13. 如果每个玩家都获得了属于博弈 $\mathcal{RV}$ 的一个 ϵ 划分纳什均衡 x^* 支撑集中的物品，且该均衡具有以下性质，则该分配是一个(δ, ϵ)-逐物品无嫉妒 分配：

- 每个玩家 $i \in [k]$ 的支撑集大小为 $\frac{n}{k}$。–
- 对于每个玩家 $i \in [k]$，我们有 $||x_i^* - \frac{k}{n}||_1 \leq \delta$。

注记 3.14。 容易看出，在一个 (0，0)-逐项无嫉妒 分配中，没有玩家会愿意用分配给自己的任一物品交换分配给其他玩家的任何物品。注意，在无嫉妒分配中，每个玩家只关心物品的价值。

命题 3.15。 判定是否存在 (δ, ϵ)-逐项无嫉妒 分配的问题，对于某些 δ 和 ϵ（相对于博弈的规模为多项式有界），是 *NP*完全的。

证明。 这直接由分区纳什均衡的困难性得出。 □

注记 3.16。 公平分配的另一个分支研究真实资源分配机制，在这类机制中，代理人会受到激励，诚实地报告自己对资源的真实估值。本文不讨论真实机制。

3.3 主要定理

我们考虑的许多问题除了加性近似项之外，还取决于其他参数。这些参数取决于 n，即策略空间 S 的大小。我们称这样的参数 α 是多项式有界的，如果存在某个 $k > 0$，使得 $\alpha(n) = O(\frac{1}{n^k})$。对于带约束的纳什均衡，我们有以下结果：

Th定理 3.17。 对于双矩阵博弈，以下问题在 *POLY*-近似下是 *NP*完全的 *x:*

(a) 对任意多项式有界的 δ， δ-*FarNash (b)* 不相交纳什均衡 *(c) PartitionNash (d)* 多于一个纳什均衡，且其统计差异为 δ，对于某个多项式有界的 δ *(e)* 对于某个多项式有界的 θ， θ-主要纳什均衡

对于 EXACT 版本，可以扩展 Gilboa 和 Zemel 的方法 [38] 来证明不相交纳什均衡是 NP 困难的。

我们可以考虑这样一个问题：是否存在一个阈值近似误差，使得低于该阈值时，δ-远纳什成为全问题。尽管这个问题尚无明确答案，我们仍在以下定理中给出一个界限，在该界限内可以保证存在一个 δ-远纳什均衡：

定理 3.18。 对于任意博弈 $\mathcal{G}$，存在一个 $\delta(n) \geq \frac{1}{n}$，使得至少存在一个 $\mathcal{G}$的$(\delta, 4\delta)$-远*Nash*均衡。此外，该问题属于 *PPAD*。

与这些问题的受约束均衡版本相关的主要复杂性结果如下：

命题3.19。 对于任意博弈 $\mathcal{G}$，在 *EXP*-近似下寻找受约束不相交均衡的问题可在多项式时间内计算。

以下定理均针对双矩阵博弈，并在多项式近似下成立。

定理3.20。 存在一个多项式有界的 δ，使得寻找 δ-远受约束均衡的问题是 *PPAD* 困难的。

定理 3.21。 存在一个多项式有界的 δ，使得对于其对角修改版本不容纳完全混合纳什均衡（见定义 *4.25*）的博弈，寻找 δ-远受约束均衡的问题属于 $PPAD$。

备注 3.22。 利用一个广为人知的 支持集枚举算法的一部分，可以轻松检验前述假设。更多详情请参见附录A.2。

定理 3.23。 对于某个多项式有界的 θ，判断是否存在 θ-受限不相交均衡的问题是 *NP*完全的。

定理 3.24。 对于某个多项式有界的 θ 以及任意多项式有界的 δ，判断是否存在（θ、δ）-受限远均衡的问题是 *NP* 困难的。

注释 3.25。 所述定理还可以导出关于纳什均衡其他变体的若干困难性结果，其中包括有关参数的附加信息。为了简化论述，此处不再一一陈述。

3.4 技术概述

本文中所述问题的 NP困难性证明受到以下文献所给出的通用证明的启发： [21] 该证明针对带约束的纳什均衡存在性判定问题的 NP困难性。这个通用归约（从 SAT（一种 NP完全问题）归约而来）改进了以下文献中给出的、关于带特定约束的纳什均衡的 NP完全性结果： [38] （这些结果仅关注精确版本）。 [21]中的不可近似性证明并不适用于本文所考虑的近似形式（在 [27]中引入的加性近似误差）。然而，Schoenebeck 和 Vadhan 提供的归约 [64] （该归约修改了 [21]中给出的证明）表明，即使采用多项式近似，为所有玩家寻找具有某种保证收益的纳什均衡的问题仍然是 NP完全的。在全文中，我们引入并使用一种标准的复制技术（见示例4.1）：我们复制某些策略，使每个玩家拥有自己的关联策略，而另一个副本（我们称之为非关联策略）将成为严格劣势策略。我们将表明，在我们考察的任何近似方案下，只要谨慎应用该技术，就能将现有关于纳什均衡的困难性结果与我们的策略约束联系起来。

本文的 NP困难性结果是通过结合我们引入的技术，以及 [21] （推论 6）、 [64] （定理 8。6）中给出的两种归约的思想推导出来的。为清晰起见，我们将归约 [64] 分解为一系列引理；在不同的证明中，这些引理经过一些适度修改后将被频繁使用。我们首先讨论不相交纳什均衡的困难性，该结果直接将这些引理的（经调整的）版本应用于一个通过修改所提供的博弈而构造的博弈 [21]，同时还要考虑另外两种需要纳入考量的可能情况。我们还介绍了另一种标准技术，用于界定策略修改下的近似误差（见引理4.2）。划分纳什均衡的困难性，以及在某些情况下近似远距离纳什均衡的存在性，也可通过结合使用该引理与其他一些技术得到（见定理 3.18和命题4.18）。通过巧妙且非平凡地扩展复制技术，我们得以缩小远纳什均衡的距离，并证明其困难性（见第 4.1.4节）。为简单起见，我们将证明分解为两个子情况，其中统计距离可能是一个较小或较大的数（见 4.19 和 4.20）。

为了探索约束远均衡的计算复杂性，我们采用另一种技术，即对玩家收益矩阵的对角线项施加惩罚。通过这种方法，我们证明，在考虑远距离相关约束时，具有某些性质的纳什均衡可以与受约束均衡这一概念联系起来。我们将通过在先前提到的、用于归约的博弈中嵌入一个类似于石头剪刀布的子博弈，并结合前面讨论的所有技术，证明受限均衡和不含小概率的纳什均衡的困难性（见定理3.23 和3.24。）

4 主要定理的证明

4.1 远纳什的计算复杂性与定理 3.17

显然，所有上述问题都属于 NP。我们对定理3.17中所述 NP 困难性结果的证明，首先证明 POLY-approx disjointNash（定理3.17 第 (b) 部分）是 NP 困难的（见命题4.4），由此可得远Nash均衡（对于 $\delta = 1$）同样是 NP 困难的。接下来，只需稍微修改命题4.4（见命题4.18），即可推出 POLY近似划分Nash均衡的困难性（定理3.17 第 (b) 部分）。为证明定理3.17 第 (a) 部分，我们证明这种困难性可推广至任意 δ 个关于博弈中策略规模的多项式（见第4.1.4节）。游戏是否存在多个统计距离固定的纳什均衡这一问题的困难性（定理3.17 第 (d) 部分）在推论4.16中证明。最后，我们在推论4.38中证明 POLY近似主要Nash均衡的困难性（定理3.17 第 (e) 部分），从而完成该定理的证明。

全文中，我们在多种情况下使用两种标准技巧。为了通过从众所周知的 NP 困难问题进行标准 NP困难归约，推导出不相交纳什均衡的困难性结果，我们需要确保所需的博弈解具有不相交支撑集。为此，我们复制部分策略，使玩家只能采用其对应的 策略集中的策略。我们通过以下示例说明这一技巧：

例4.1。 求精确纳什均衡的问题可在多项式时间内归约为求精确不相交纳什均衡的问题。

证明。 给定一个具有 $S = [n]$ 个策略的双矩阵博弈 $\mathcal{G}$，我们构造博弈 $\mathcal{G}'$，并证明 $\mathcal{G}$ 中的纳什均衡会形成 $\mathcal{G}'$ 中的不相交纳什均衡。设 σ 是一个严格小于 $\mathcal{G}$ 中任一玩家最低收益的值。在 $\mathcal{G}'$ 中，所有玩家的策略空间均为 $S' = S_1 \cup S_2$，其中 $S_1 = [n]$ 和 $S_2 = n + [n]$ 只是 $S = [n]$ 的副本。新的收益矩阵将迫使每个玩家 i 只能选择集合 S_i 中的策略。对于 $S' \times S'$ 中的任意 $(i,\ j)$，每个玩家的效用矩阵定义如下：

$$U_1'(i,j) = \begin{cases} U_1(i, j-n), & \text{if } i \in S_1 \\ \sigma & \text{o.w} \end{cases}$$

$$U_2'(i,j) = \begin{cases} U_2(i, j-n), & \text{if } j \in S_2 \\ \sigma & \text{o.w} \end{cases}$$

假设 $(x^*,\ y^*)$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个精确纳什均衡。如果每个玩家 k 在 S_k 的成员上采用与 $(x^*,\ y^*)$ 中在 S 上相同的概率分布，根据 σ 的构造和严格支配关系，我们得到 $\mathcal{G}'$ 的一个精确不相交纳什均衡。现在假设 $(x',\ y')$ 是 $\mathcal{G}'$ 中具有不相交支撑集的纳什均衡。我们可以通过定义 $i \in S$、$x_i^* = x_i'$ 和 $y_i^* = y_{i+n}'$，轻松地将这些概率分布映射为 $\mathcal{G}$ 的一个纳什均衡 $(x^*,\ y^*)$。

□

注 4.1。 上述技术只能应用于我们问题的精确版本，并且需要进行调整才能用于近似版本。

引理 4.2。 假设（x^*、y^*） 是一个双矩阵博弈中的纳什均衡，其中效用矩阵的元素取值范围为 $[\alpha, \beta]$。对于每个 i，我们将 x_i^- 定义为与 x_i^* 相同，但从策略 i 的权重中取出 $\epsilon_i \le x_i^*$，并将其重新分配给 $[n] - \{i\}$中的某些策略。假设 $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \le \epsilon$，则有以下结论：

1. (x^-, y^*) *and* (x^*, y^-) *are* $2\epsilon(\beta - \alpha)$*-Nash equilibria.*
2. $|U_1(x^*, y^*) - U_1(x^-, y^-)| \le 2\epsilon(\beta - \alpha)$
3. $|U_2(x^*, y^*) - U_2(x^-, y^-)| \le 2\epsilon(\beta - \alpha)$

证明。 见附录 A。除非另有说明，我们假设 $\alpha = 0$、$\beta = 1$。 □

在证明不相交纳什均衡的 NP困难性之前，我们先回顾 3CNF 公式的可满足性问题及一些相关术语。

定义 4.3。 一个布尔公式 ϕ 采用合取范式（合取范式）由一个变量 集合 V （其中$|V| = n$）、一个文字 集合 L （由变量及其否定组成），以及一个子句集合 C 指定，其中每个子句都是一个文字集合。一个3CNF 公式 是每个子句都恰好包含 *3* 个文字的合取范式公式。*3CNFSAT* 是判定一个 *3CNF* 公式 ϕ 是否存在满足赋值的问题（即将变量设为真或假，使得 ϕ 的值为真。）

为了证明POLY近似不相交Nash均衡的困难性，我们将任意一个3-CNF ϕ 在多项式时间内映射为一个双人博弈 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$，并证明以下命题。

命题4.4。 给定一个含有 ϕ 个变量的 *3-CNF* n 实例，在 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 中存在一个 ϵ-不相交纳什均衡（其中 $\epsilon = \frac{1}{2n^3}$），当且仅当 ϕ 是可满足的。

博弈 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 是对 [64], 中给出的博弈的修改版，我们将其称为 $\mathcal{SV}(\phi,\epsilon)$。[3] $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 是一个非对称双人正规形博弈，定义如下：令 $S \equiv S_1 = S_2 = L_1 \cup L_2 \cup V \cup C \cup \{f\}$ 为两个玩家的策略集，其中 L_1 和 L_2 是 L 的副本。令 $\mathrm{v}: L \to V$ 为将文字对应到变量的函数，例如 $\mathrm{v}(x_1) = \mathrm{v}(-x_1) = x_1$。例如，若 x_1 是一个变量，则 x_1 和 $-x_1$ 是分别表示变量 x_1 为真或假的文字。此外，令 $\mathrm{g}: L_1 \cup L_2 \to L$ 为函数（我们称之为去标签函数），它将 L_1 和 L_2 的副本映射到 L 的 L。效用矩阵定义如下：

1. $u_1\left(l^1,l^2\right) = u_2\left(l^1,l^2\right) = n-1$ 对于所有满足 $\mathrm{g}(l^1) \neq -\mathrm{g}(l^2)$ 的 $l^1 \in L_1$, $l^2 \in L_2$；
2. 对于所有 $l^1 \in L^1, , l^2 \in L^2$， $u_1(l^1,-l^2) = u_2(-l^1,l^2) = n-4$ & $\mathrm{g}(l^1) = \mathrm{g}(l^2)$；
3. 对于所有 $l^1 \in L_1$, $l^2 \in L_2$, $x \in V \cup C$， $u_1(l^1,x) = u_2(x,l^2) = n-4$；
4. 对于所有 $v \in V$, $l^1 \in L_1$, $l^2 \in L_2$，且 $\mathrm{g}(l^1) = \mathrm{g}(l^2)$、$\mathrm{v}(\mathrm{g}(l^1)) \neq v$ 时， $u_1(v,l^2) = u_2(l^1,v) = n$；
5. 对于所有 $v \in V$, $l^1 \in L_1$, $l^2 \in L_2$，且 $\mathrm{g}(l^1) = \mathrm{g}(l^2)$、$\mathrm{v}(\mathrm{g}(l^1)) = v$ 时， $u_1(v,l^2) = u_2(l^1,v) = 0$；
6. 对于所有 $v \in V$, $x \in V \cup C$， $u_1(v,x) = u_2(x,v) = n-4$；
7. 对于所有满足 $\mathrm{g}(l^1) = \mathrm{g}(l^2) \notin c$ 的 $c \in C$, $l^1 \in L_1$, $l^2 \in L_2$， $u_1(c,l^2) = u_2(l^1,c) = n$；
8. 对于所有满足 $\mathrm{g}(l^1) = \mathrm{g}(l^2) \in c$ 的 $c \in C$, $l^1 \in L_1$, $l^2 \in L_2$， $u_1(c,l^2) = u_2(l^1,c) = 0$；
9. 对于所有 $c \in C$, $x \in V \cup C$， $u_1(c,x) = u_2(x,c) = n-4$；
10. 对于所有 $x \in S - \{f\}$， $u_1(x,f) = u_2(f,x) = 0$；
11. $u_1(f,f) = u_2(f,f) = 2n$；
12. 对于所有 $x \in S - \{f\}$， $u_1(f,x) = u_2(x,f) = n-1$。

以下情况也需要定义，因为当玩家不从其关联文字集合中进行游戏时，可能会出现这些情况。我们以使它们成为严格劣势策略的方式定义它们：

13. $u_1(l^2,*) = u_2(*,l^1) = -2n$ for all $* \in S$, $l^2 \in L_2$ and $l^1 \in L_1$;
14. $u_2(l^2,*) = u_1(*,l^1) = 0$ for all $* \in S - \{f\}$, $l^2 \in L_2$ and $l^1 \in L_1$.

备注 4.5。 请注意，在 [21] 中， $U_i(f,\ f)$ 是任意正数。

4.1.1 命题的关键引理4.4

在证明命题 4.4之前，我们需要几个引理。

引理 4.6。 在任意 ϵ-纳什均衡中，对于 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$，行玩家以大于 $\frac{\epsilon}{2n}$ 的概率选择来自 L_2 的文字是不可能的。对列玩家以及所有其他收益为 $-2n$ 的策略，同样的论证也适用。

证明。 如果某个玩家选择的文字不属于其关联的文字集合，他们将获得 $-2n$ 的收益。因此，在任何 ϵ-纳什均衡中，这些严格劣势策略被选择的概率最多为 $\frac{\epsilon}{2n}$；因为以大于 $\frac{\epsilon}{2n}$ 的概率选择此类策略，会使该玩家相较于其他策略至少损失 ϵ，这违反了 ϵ-最佳响应的定义。 □

引理 4.7. 在任意 ϵ-纳什均衡 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 中，如果两个玩家都没有以正概率选择 f，那么未与玩家关联的文字，以及子句和变量，选择它们的概率至多为 ϵ。

证明。 证明与引理B.3类似。 □

因此，严格劣势策略、变量和子句的联合概率不可能大于 ϵ。下一个引理将证明，如果其中一名玩家无法达到保证收益 $n-1-\epsilon$，就无法获得 ϵ-近似不相交纳什均衡。

引理 4.8。 在 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 中的任何 ϵ-纳什均衡里，所有玩家的保证收益至少为 $n-1-\epsilon$。

[3]困难性的证明 判断 $\mathcal{SV}(\phi,\epsilon)$ 是否具有保证收益为 $n-1-\epsilon$ 的 ϵ-纳什均衡的计算复杂度见附录 B。

证明。 假设其中一名玩家无法保证获得至少 $n-1-\epsilon$ 的收益。无论另一名玩家采取什么行动，该玩家都可以偏离假定的策略，改为采取 f，从而获得 $n-1$。因此，该策略不是针对对手玩家的 ϵ-最佳响应。 □

引理 4.9。 假设公式 ϕ 可满足。博弈 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$至少存在一个精确不相交纳什均衡。

证明。 可以将与定理 B.2 类似的论证应用于 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$，以证明存在一个精确不相交纳什均衡。此处唯一的区别在于重复文字集合和去标签函数。换言之，每位玩家在其关联文字中，分别从 n 个 $2n$ （基于一个满足赋值）中均匀随机化的策略，在 L_1 和 L_2 中构成一个精确不相交纳什均衡（每位玩家的期望收益为 $n-1$。） □

引理 4.10。 假设 ϕ 不可满足。如果两位玩家都没有以正概率选择 f，那么对于任意 $l^1 \in L_1$，行玩家选择 $l^1 \in L_1$ 或 $-l^1 \in L_1$ 的概率至少为 $\frac{1}{n}-2\epsilon$。

证明。 假设情况并非如此。设该概率小于 $\frac{1}{n}-\epsilon-\frac{2\epsilon}{n} \geq \frac{1}{n}-2\epsilon$。令 $l^2 \in L_2$为一个满足以下条件的文字：$\mathrm{g}(l^2) = \mathrm{g}(l^1)$。回顾引理 4.7，两个玩家从各自对应的文字集合中选择策略的概率至少为 $1-\epsilon$，而所有其他策略被选择的概率至多为 ϵ。那么，列玩家选择 $\mathrm{v}(\mathrm{g}(l^2))$ 时，其期望收益至少为 $n-1+2\epsilon$，这可由引理 B.4 推出，唯一的修改是我们使用引理 4.7 代替引理 B.3。由于最大社会福利为 $2n-2$，另一位（行）玩家未能达到保证值 $n-1-\epsilon$，因此会偏离并改选 f。 □

注记 4.11。 同样的论证也适用于列玩家。

引理 4.12. 假设 ϕ 不可满足。如果两个玩家都没有以正概率选择 f，那么对每个玩家及其关联集合中的文字 l，l 或 $-l$ 中必有一个以概率 $\geq \frac{1}{n}-2\epsilon-\frac{1}{n^2}$ 被选择，而另一个被选择的概率小于 $\frac{1}{n^2}$。

证明. 证明与引理 B.5 完全相同，只是每个玩家都会以较高概率从各自的文字集合中选择。 □

引理 4.13. 假设 ϕ 不可满足。如果两个玩家都没有以正概率选择 f，那么至少有一个玩家无法保证获得 $n-1-\epsilon$的收益。

证明。我们证明，在所构造的博弈中，除了支撑集中包含 f的那些情形外，任意 ϵ-纳什均衡中，文字与真值赋值之间仍然存在一一对应关系。我们知道，对每个玩家而言，该玩家会以至少 $1-\frac{1}{n^2}-2\epsilon$ 的概率选择 l 或 $-l$（来自其关联文字），而选择另一个的概率至多为 $\frac{1}{n^2}$。对于每个玩家，如果分别以高于 $-l^1$ 和 $-l^2$ 的概率选择 L_1 中的 l^1 和 L_2 中的 l^2，我们就可以认为变量为真（注意，$\mathrm{g}(l^1) = \mathrm{g}(l^2) = l$）。如果某个赋值不满足该公式，通过改变策略选择一个不可满足的子句，根据命题 B.2，其中一个玩家将获得至少 $\left(1-\epsilon-\frac{3}{n^2}\right)n > n-1+2\epsilon$ 的收益。因此，另一个玩家无法获得 $n-1-\epsilon$。

□

4.1.2 命题的证明 4.4

证明。 我们证明了，如果 ϕ 是可满足的，则存在一个精确不相交纳什均衡（也是一个近似解）。我们还证明了，如果 ϕ 不可满足，且两个玩家都不以 f 正概率进行选择，那么至少有一个玩家无法保证获得 $n-1-\epsilon$ 的收益。综上，根据引理 4.8，必有一个玩家选择 f，并且我们证明，这迫使另一位玩家以 f 正概率进行选择。

现在，假设一名玩家以概率 α 选择 f，而另一名玩家不选择 f。对于 α，有两种可能的情况：第一种是 $\alpha < \frac{\epsilon}{n}$，第二种是 $\alpha \geq \frac{\epsilon}{n}$。我们在下面的引理中证明，对于任一情况，都不可能在 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 中构造出一个 ϵ-近似不相交纳什均衡。 □

引理 4.14. 令 $\epsilon = \frac{1}{2n^3}$，其中 n 表示 ϕ中的变量数。如果 ϕ 不可满足，则 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 不存在这样的 ϵ-近似纳什均衡：恰好有 个玩家以正概率选择 f。

证明. 假设行玩家以概率 f 选择 α。容易看出，与引理 4.8类似，不存在双方收益均低于 $n-1-\epsilon$ 的 ϵ-纳什均衡。列玩家实际上可以通过偏离策略，确保获得更高的收益 $[\alpha\cdot(2n)+(1-\alpha(n-1))]-\epsilon$，方法是改为选择 f。如上所述，如果有一名玩家不选择 f，则可能达到的最大社会福利至多为 $2n-2$。因此，如果一名玩家能获得高于 $n-1+2\epsilon$的收益，另一名玩家获得的收益就会低于 $n-1-\epsilon$。如果一名玩家以正概率选择 f，那么与玩家无关的变量、子句和文字，其被选择的概率至多为 ϵ（稍后计算收益时将使用这个上界）。这与引理 4.7 中的推导相同，因为在这种情形下唯一的变化是列玩家有更高的保底期望收益。

现在假设 (x^*,y^*) 是一个近似不相交纳什均衡，其中行玩家以概率$0<\alpha<\frac{\epsilon}{n}$ 选择 f，列玩家以概率 0 选择 f。我们证明¯（与引理 B.4 类似），行玩家选择 l^1 或 $-l^1$ 的概率至少为 $\frac{1}{n}-2\epsilon$：假设该概率小于 $\frac{1}{n}-2\epsilon$。列玩家以概率 1 选择 $v(g(l^2))$（我们知道 $g(l^1)=g(l^2)$）时，其期望收益至少为 $n-1+2\epsilon$，¯计算如下：

- 当行玩家选择 l^1 或 $-l^1$ 时，收益为零。
- 当行玩家选择 L_1 中的一个关联文字（ l^1 或 $-l^1$除外）时，收益为

$$(1-\epsilon-(\frac{1}{n}-2\epsilon)-\alpha)n=(1+\epsilon-\frac{1}{n}-\alpha)n\geq n+\epsilon n-1-\epsilon=n-1+\epsilon(n-1)$$

- 当行玩家不使用文字时，收益至少为 $\epsilon\cdot 0$。
- 当行玩家选择 f 时，收益部分为 $\alpha\cdot 0$。

该求和结果至少为 $n-1+2\epsilon$（对于 $n>2$），这表明行玩家无法满足保证条件$n-1-\epsilon$。总而言之，行玩家最好以更高的概率，即概率为 1，选择 f，而不是 α。对于任意 $l^2\in L_2$，根据引理 4.10，列玩家选择 l^2 或 $-l^2$ 的概率至少为 $\frac{1}{n}-2\epsilon$。这是因为列玩家不选择 f。因此，对于每个玩家，从其关联文字集合中选择 l 或 $-l$ 的概率至少为 $\frac{1}{n}-2\epsilon$。这意味着，对于任意 $l^1\in L_1$，$l^1\in L_1$ 或 $-l^1$ 中的一个以大于 $\frac{1}{n}-2\epsilon-\frac{1}{n^2}$ 的概率被选择，而另¬个被选择的概率则小于 $\frac{1}{n^2}$（参见引理 B.5 和引理 4.12）。上述结论对列玩家及其关联文字同样成立。利用与引理 4.13 和命题 B.2 中类似的论证，我们可以得出结论：行玩家可以改变其策略，以较高的概率 $1-\alpha$ 选择一个未满足子句，并至少获得 $(1-\epsilon-\frac{3}{n^2}-\alpha)\underline{n}>n-1+2\epsilon$ 的收益。由于最大社会福利为 $2n-2$，列玩家最好改为选择 f，从而获得 $n-1$ 的收益。

现在假设行玩家以概率 $\alpha>\frac{\epsilon}{n}$ 出牌 f，而列玩家以概率零出牌 f。回想一下，列玩家只能以至多 ϵ的概率选择其关联文字以外的策略。如果列玩家改为以概率1出牌 f，其收益将至少增加 ϵ，这违反了 ϵ-最佳响应的定义：

$$[2\alpha\cdot n+(1-\alpha)(n-1)]-[(1-\epsilon-\alpha)(n-1)+\epsilon\cdot n+\alpha\cdot 0]=2\alpha\cdot n-\epsilon>\epsilon$$

□

备注4.15。博弈 $\mathcal{G}(\phi,\ \epsilon)$的最小收益和最大收益分别为 $-2n$ 和 $2n$。我们可以缩放该博弈的收益，使其处于标准范围 $[0,1]$内。

以下推论证明了判定一个博弈是否存在多个均衡，且这些均衡之间的统计距离至少为 $\delta=2\epsilon$ 的困难性（定理 3.17 第 (d) 部分）。

推论4.16。 当公式 ϕ 不可满足时，在博弈 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$的任何均衡中，两个玩家都必须以大于$1-\epsilon$ 的概率出牌 f。

证明。我们可以按照命题4.4的证明进行。假设行玩家以 α_1 的概率选择 f，列玩家以 α_2 的概率选择 f。容易看出，α_1 或 α_2 中至少有一个必须大于 $\frac{\epsilon}{n}$。如果这两个概率都小于 $\frac{\epsilon}{n}$，根据引理 4.14 的变体（两位玩家都以较小概率选择 f），其中一位玩家将无法获得其保证收益。综上，我们可以假设 $min(\alpha_1,\alpha_2)\geq\frac{\epsilon}{n}$。只需选择纯策略 f，即可容易证明两位玩家的保证收益至少为 $[min(\alpha_1,\alpha_2)\cdot(2n)+(1-min(\alpha_1,\alpha_2)(n-1))]-\epsilon$。只有当两位玩家以大于 $1-\epsilon$ 的概率选择 f 时，他们才能获得高于其近似保证收益的收益。如果一位玩家以小于 $1-\epsilon$ 的概率选择 f（我们知道该概率必然大于 $\frac{\epsilon}{n}$），则该玩家会损失 $2\min(\alpha_1,\alpha_2)\cdot n-\epsilon$，这大于 ϵ。

□

备注 4.17。 注意，当公式可满足时，除了具有策略组合（f， f）的纳什均衡之外，还存在一个精确不相交纳什均衡。

4.1.3 PartitionNash 的困难性

虽然证明精确划分纳什均衡是 NP 困难的似乎颇具挑战，但由我们已有的不相交纳什均衡的 NP 困难性结果和引理 2，可以轻松推导出针对 4.2 人玩家的 POLY近似划分Nash均衡的 NP 困难性结果。

命题 4.18。 给定一个含有 n 个变量的 *3-CNF* ϕ 实例，博弈 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 存在一个 ϵ-划分纳什均衡（对于 $\epsilon=\frac{1}{2n^3}$），当且仅当该公式可满足。

证明。 参见附录 B。 □

4.1.4 远Nash均衡的困难性与定理3.17

在本节中，我们完成定理 3.17 的证明。我们证明，对于任意 δ 以及某个 ϵ（相对于博弈中策略规模）多项式有界的值，判定是否存在一个 (δ,ϵ)-远Nash均衡的问题仍然是困难的。
给定一个含有 n 个变量的公式 ϕ，我们构造博弈 $\mathcal{H}(\phi,\delta,\epsilon)$。该博弈与 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 类似，不同之处在于，并非所有文字都会被复制，具体取决于给定的值 δ（见命题 4.19 和 4.20）。两个玩家的策略空间均为 $S^{H_\delta}\equiv S_1^{H_\delta}=S_2^{H_\delta}=L'\cup L_1'\cup L_2'\cup V\cup C\cup\{f\}$。我们将原公式 ϕ 中的文字（L）分为三个集合。集合 L' 包含来自 L 的未复制文字，而 L_1' 和 L_2' 则包含复制后的文字，分别对应行玩家和列玩家。函数 g′ : $L'\cup L_1'\cup L_2'\to L$ 的定义方式与 g 类似，不同之处在于它将 $L'\subset L$ 中的元素映射到其自身。 L' 中文字的规则与 $\mathcal{SV}(\phi,\epsilon)$ 中的规则类似，而 $L_1'\cup L_2'$ 中的规则则与 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 中的规则类似。
命题 4.19. 给定任意一个包含 n 个变量的 *3-CNF* 公式 ϕ，对于任意 $\delta>\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}$，存在一个博弈 $\mathcal{H}(\phi,\delta,\epsilon)$，使得对于某个关于 n 多项式有界的 ϵ，在 $\mathcal{H}(\phi,\delta,\epsilon)$ 中存在一个 (δ,ϵ)- 远纳什均衡，当且仅当 ϕ 是可满足的。

证明。 该证明通过结合命题4.4 和命题B.2得出。回顾引理 4.12、4.14 和 B.5可知，对于任意文字 $l\in L'$（以及与之对应的副本 $l_1\in L_1'$ 和 $l_2\in L_1'$），当两个玩家都没有以大于 $\frac{1}{n}-2\epsilon-\frac{1}{n^2}$ 的正概率选择 f 时，文字 $-l$ 或其否定至少会以 $\frac{1}{n}-2\epsilon-\frac{1}{n^2}$ 的概率被选择。。

为了针对给定的 δ生成 $\mathcal{H}(\phi,\delta,\epsilon)$，我们确定 i，使得 $\delta=\frac{1}{2}(2i(\frac{1}{n}-2\epsilon-\frac{1}{n^2}))$，并从原公式中随机选取 $\lfloor i\rfloor$ 个文字，生成集合 L_1' 和 L_2'。其余文字将构成 L'（不会重复）。注意，对于 $\delta'\le\delta$，(δ',ϵ)-远Nash均衡的NP困难性意味着(δ,ϵ)-远Nash均衡也具有相同的困难性。类似于推论4.16的论证表明，如果给定公式不可满足，就不存在(δ,ϵ)-远纳什均衡（两个玩家都必须以至少 $1-\epsilon$ 的概率选择 f，而我们知道 $\delta>\epsilon$）。 □

命题 4.20. 给定任意含有 n 个变量的 *3CNF* 公式 ϕ，对于任意在 n 中多项式有界的 δ，存在一个博弈 $\mathcal{D}(\phi,\delta,\epsilon)$，使得对于某个在 n 中多项式有界的 ϵ，博弈 $\mathcal{D}(\phi,\delta,\epsilon)$ 中存在一个 (δ,ϵ)- 远纳什均衡，当且仅当 ϕ 可满足。

证明。对于 $\delta>\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}$，困难性结果可由命题 4.19 和博弈 $\mathcal{H}(\phi,\delta,\epsilon)$ 得出。否则，我们构造一个新博弈 $\mathcal{D}(\phi,\delta,\epsilon)$，它与博弈 $\mathcal{H}(\phi,\delta,\epsilon)$ 类似，不同之处在于我们增加了某个文字的副本数。对于原公式 ϕ 中的某个文字 $l^t\in L$（以及它的否定 $-l^t$），我们创建 d 个副本，并以一种方式复制其中的 d 个副本，使得每个玩家都倾向于只从对应的副本中选择。这可以通过采用与命题4.4中讨论的类似博弈结构，以及引理 4.1 中使用的技巧来实现。)
我们认为 $L^{\mathcal{D}}=L\cup(\bigcup_{j=i}^{d}l_j^t)\cup(\bigcup_{j=i}^{d}(-l_j^t))-\{l^t,-l^t\}$ 是玩家之间共有的所有文字策略，其中对于每个 j，l_j^t 只是 l^t 的一个副本。类似地，$L_1^{\mathcal{D}}=(\bigcup_{j=1}^{i}l_{1,\,j}^t)\cup(\bigcup_{j=1}^{i}-l_{1,\,j}^t)-\{l_1^t,-l_t^1\}$ 和 $L_2^{\mathcal{D}}=(\bigcup_{j=1}^{i}l_{2,\,j}^t)\cup(\bigcup_{j=1}^{i}-l_{2,\,j}^t)-\{l_2^t,-l_2^t\}$ 将分别视为包含与行玩家和列玩家相关联文字的集合。最后，我们将博弈 $\mathcal{D}(\phi,\ \delta,\ \epsilon)$ 的策略集定义为 $S^{\mathcal{D}}=L^{\mathcal{D}}\cup L_1^{\mathcal{D}}\cup L_2^{\mathcal{D}}\cup V\cup C\cup\{f\}$。

在此博弈中，对于行玩家，分配给作为以下各项副本的文字的概率之和 l^t 和 $-l^t$ 原公式的，必须至少为 $\frac{1}{n}-2\epsilon$ 随后是引理4.10、4.14以及B.4 （如果两位玩家都以 f 进行

正概率小于 $\frac{\epsilon}{n}$）。此外，分配给 l^t 或 $-l^t$ 的副本文字的概率之和必须至少为 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-2\epsilon$，而另一个则小于 $\frac{1}{n^2}$。

我们将收益 $u_1^{\mathcal{D}}(f,f)=u_2^{\mathcal{D}}(f,f)$ 设得足够高，使得所有包含双方都选择 f 这一情形的 ϵ-纳什均衡都不可能构成 δ-远纳什均衡（见 4.16）。总之，如果公式 ϕ 不可满足，就不存在 (δ,ϵ)-远纳什均衡。如果公式 ϕ 可满足，那么我们可以找到一个 $\frac{i}{d}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3})$-远纳什均衡（将权重平均分配给 l^t 的各个副本），并将 i 设得足够小，使这个比例大于给定的 δ。 □

由此可知，判断是否存在 (δ,ϵ)-远纳什均衡这一问题是 NP 困难的。我们的结果对于以下更强的情形同样成立：

推论 4.21。 对于一个双矩阵博弈 $\mathcal{G}$，判断是否存在满足以下性质的纳什均衡 (x^*,y^*) 是 *NP*完全问题。

- $2\alpha \le ||x^*-y^*||_1 \le 2\beta$ 对于某个 $1\ge\beta>\alpha\ge 0$，其大小相对于 $\mathcal{G}$ 的策略规模是多项式有界的。

4.2 远Nash均衡的存在性与定理3.18

我们证明，当近似误差足够大时，远纳什均衡存在。这一结论可由纳什均衡的存在性和一些简单技巧得出。我们先介绍一个引理，然后给出证明。

引理 4.22。 设 $\mathcal{G}$ 是一个博弈，它有一个对称纳什均衡 (z^*,z^*)，其中某个纯策略 t 在 z^* 中的概率大于 δ。那么，存在一个策略 z^-，使得 (z^-,z^*) 和 (z^*,z^-) 是 2δ-近似纳什均衡，且 $||z^*-z^-||_1\ge 2\delta$。

证明。在这个博弈中，至少有一对策略（z^*,z^*）构成纳什均衡。对于其中一位玩家，我们将 z_t^*（任意 t）的 δ 份额平均分配给所有其他策略，以生成 z^-。这种对策略的修改具有这样的性质：z^- 和 z^* 具有 2δ远离性。然后，策略组合（z^-,z^*）具有性质 $||z^--z^*||\ge 2\delta$。通过对称论证，（z^*,z^-）也满足这一点。根据引理 4.2，（z^-,z^*）和（z^*,z^-）都是 2δ-近似纳什均衡。

□

4.2.1 定理3.18的证明

证明。假设$(x^*,\ y^*)$ 是 $\mathcal{G}$中的一个纳什均衡。如果 $||x^*-y^*||_1>2\delta$，问题就解决了。否则，$||x^*-y^*||_1\le 2\delta$，我们可以将 x^* 改为 y^*（或反过来），使得存在 z^* 满足 $(z^*,\ z^*)$ 将构成一个 $(0,\ 2\delta)$-远均衡，论证与引理 4.2类似。接下来，我们只需使用引理 4.22 来生成 z^- 和 $||z^--z^*||_1=2\delta$。

根据引理 4.2 和 4.22，我们可以得出 $(z^-,\ z^*)$ 是一个 4δ-近似纳什均衡（$||x^*-z^-||\le 4\delta$），并且我们知道 $||z^--z^*||_1=2\delta$，这表明我们可以生成 $(\delta,\ 4\delta)$-远Nash均衡。显然，在每个概率分布中，都存在一个被赋予大于 $\frac{1}{n}$ 的概率的策略，我们可以相应地修改该策略。我们的证明将这个问题归约为一个近似纳什均衡实例，这意味着该问题属于PPAD。

□

注 4.23。 为了获得比 4δ 更好的近似因子，我们可以考察以下优化问题：

$$Min_{x\in\Delta_n}||x-x^*||_1$$
$$Subject\ to\ ||x-y^*||_1\ge 2\delta$$

4.3 受约束的远距离且不相交均衡

精确受约束远离均衡并非在所有博弈中都必然存在。考虑著名的石头-布-剪刀游戏，它是一个零和博弈（表4）。该博弈有唯一的纳什均衡：双方都以相同概率选择全部三种纯策略，并将它们纳入自己的支撑集。对于每种策略，博弈都有一种反策略，当一名玩家采用该反策略时，该玩家获得1，而对手获得 -1。如果双方采用相同的纯策略，双方的收益都是0。若要求玩家遵守约束集 $\mathcal{R}^n_{\text{disjoint}}$，每位玩家可能遇到两种情况。第一种情况是双方各选择一种纯策略；第二种情况则是

表4：石头剪刀布，一种零和博弈

		玩家1	
玩家2	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

一名玩家采用一种纯策略，而另一名玩家采用两种纯策略。在这两种情况下，双方都更愿意采用反策略，因为至少有一名玩家总是可以采用这种策略。因此，该博弈不存在精确约束互斥均衡。但例如，如果一名玩家选择“石头”，另一名玩家以概率 $1-\epsilon$ 选择“布”，并以概率 ϵ选择“剪刀”，我们就可以构造一个 ϵ-约束互斥均衡。现在可以证明命题3.19。

4.3.1 命题的证明3.19

证明。 选择一个纯策略 l 并将其作为列玩家的策略。行玩家将选择一个纯策略t (除了 l) 使行玩家的收益最大化。令 x^* 为行玩家的策略。对于所有 $i \in [n]-\{t,l\}$，令$x_i^- = \epsilon_{(n-2)}$ 且 $x_t^- = 1-\epsilon$。根据引理 4.2，行玩家最多损失 ϵ。因此， x^- 是行玩家在互斥约束下的一个 ϵ-最佳响应。在这种情况下，除非列玩家采用属于 x^- 支撑集的策略（这违反了约束），否则列玩家无法获得更高的收益。 □

备注 4.24。 这一结果表明，将策略互斥作为共同（耦合）约束存在缺陷。这是因为，如果所有玩家都遵守共同约束，一个自利玩家就可能损害所有其他玩家的社会福利。这确实为考虑 (θ,ϵ)-受限不相交均衡提供了依据。

4.4 约束远均衡的困难性及定理 3.20 和 3.21

存在互斥性和远离性等约束时，无法保证受约束均衡的存在。不过，我们将证明，在一些简单假设下，可以保证存在解。以下定义确定了一类博弈，我们将证明，在满足某些条件时，这类博弈保证存在约束远均衡。该定义还使我们能够确立约束远均衡与远纳什均衡之间的关系（见命题 4.33）。

定义 4.25。 对于博弈 $\mathcal{G}$， $\mathcal{G}$的对角修改版本（记作 $\mathcal{D}^M(\mathcal{G})$）是一个博弈，其收益矩阵 $U^{\mathcal{D}^M}{}_{(\mathcal{G})\,i}$ 中的元素与 $\mathcal{G}$ 相同，但对角元素如下所示：

$$\forall t \in S : U_i^{\mathcal{D}^M(\mathcal{G})}(t,t) = -M$$

备注 4.26。 显然，当 M 足够大时，出现互斥均衡的可能性会增加。请注意，如果我们在 $\mathcal{D}^M(\mathcal{G})$中找到一个纳什均衡，它不一定构成原博弈 $\mathcal{G}$的纳什均衡，因为我们移除了收益矩阵对角线所包含的所有信息。

4.4.1 定理3.20 的证明

以下命题完成了定理 3.20 对 $\delta = 1$的证明。

命题 4.27. 对于任意一个相对于任意博弈 $\mathcal{G}$ 的规模而言 ϵ 多项式有界的量，都存在一个相对于 $\mathcal{G}$ 的规模而言 ϵ' 多项式有界的量，使得在双矩阵博弈 $\mathcal{G}$ 中寻找 ϵ-纳什均衡的问题，可在多项式时间内归约到在 $\mathcal{D}^M(\mathcal{G})$中寻找 ϵ'-受约束不相交均衡的问题。

证明。 证明可由 4.1、4.2以及以下事实推出：寻找纳什均衡的问题是 PPAD 困难[18]。完整证明见附录 C。 □

备注 4.28. 前一个命题的证明还表明，对角线项的这种修改并不会改变寻找纳什均衡仍然是 PPAD 困难这一事实。

4.4.2 定理3.21 的基本元素

为了证明定理3.21，我们需要证明对角修正博弈的一些性质。我们从以下定义开始，然后建立该定义与约束远均衡之间的关系。

定义 4.29。 假设给定一个双矩阵博弈，目标是寻找具有以下性质的纳什均衡：

- 对于所有 $t \in [n]$，如果两个玩家都以正概率选择 t，那么至少有一个玩家选择 t 的概率必须小于 $\frac{1}{M}$。

这种均衡称为 M-半不相交纳什均衡。类似地，可以定义受约束的 M-半不相交均衡，其中我们只考察满足该性质的策略所对应的偏离。

引理 4.30. 假设在 $\mathcal{D}^M(\mathcal{G})$的任何纳什均衡中，至少有一名玩家不采用完全混合策略。对于任意一名被两名玩家都以正概率采用的纯策略 t，至少有一名玩家必须以小于 $\frac{1}{M}$ 的概率采用策略 t。此外，对于 ϵ-近似纳什均衡，这一结论对小于 $\frac{1+\epsilon}{M}$ 的概率也成立。

证明。 根据假设，对于 $\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})$ 的任何纳什均衡，至少有一名玩家不采用完全混合策略。假设对于某个纳什均衡（x^*，y^*），存在一个纯策略 t，使得 $y_t^* > \frac{1}{M}$且 $x_t^* > \frac{1}{M}$。不失一般性地，假设列玩家不采用 $t' \in [n]$。我们通过说明行玩家可以从 t 偏离到 t' 并获得更高的收益来导出矛盾。令（t，y^*）表示这样的策略组合：行玩家以概率 1 采用纯策略 t，列玩家采用混合策略 y^*，则有：

$$U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(t, y^*) = \sum_{1 \le j \le n} y_j^* U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(t, j) < 1 + y_t^* U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(t, t) \le 0 \tag{2}$$

其中，最后一个不等式源于这样一个事实：$y_t^* \ge \frac{1}{M}$。假设 y^* 固定，若令 $U^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})\,1}(x_t^*, y^*)$（其中 x_t^*并不表示混合策略，而是纯策略 t 在 x^*中被采用的概率）表示$x_t^* \cdot U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(t, y^*)$，则有：

$$U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x_t^*, y^*) = x_t^* \sum_{1 \le j \le n} y_j^* U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(t, j) \le x_t^*(1 + y_t^* U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(t, t)) < 0 \tag{3}$$

现在假设行玩家将权重 x_t^* 从 t 全部转移到 t'。将修改后的策略称为 x'。显然，$U^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})\,1}(x'_{t'}, y^*) \ge 0$，因为 $y_{t'}^* = 0$。

$$U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x^*, y^*) - U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x', y^*) = x_t^* [\sum_{j=1}^{n} y_j^* U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(t, j) - \sum_{j=1}^{n} y_j^* U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(t', j)]$$

$$U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x^*, y^*) - U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x', y^*) = U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x_t^*, y^*) - U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x'_{t'}, y^*) < 0$$

总之，假设对所有 j，都有 $y_j^* > \frac{1}{M}$，便会导出矛盾。我们可以轻松地将证明推广到近似纳什均衡的情形。 □

命题 4.31. 对于对角修正博弈 $\mathcal{D}^M(\mathcal{G})$，若至少有一名玩家不采用完全混合策略，则寻找 M-半不相交纳什均衡的问题属于 *PPAD*。

证明。 根据引理 4.30，任何 满足条件的 $\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})$ 纳什均衡都是一个 M-半不相交纳什均衡。 □

命题 4.32。 对于任意双矩阵博弈 $\mathcal{G}$， M-半受约束互斥均衡是一个$(1 - \frac{n}{M})$ 约束远均衡。

证明。 根据约束远均衡的定义，结论立即得出。 □

4.4.3 定理证明3.21

证明。 设 $\mathcal{G}$ 是一个博弈，其对角修改版本没有完全混合纳什均衡。我们首先证明，寻找近似误差为 $\frac{6n}{M}$ 的 M-半受约束不相交均衡的问题属于 PPAD。接下来，根据命题 4.32，寻找受约束 $(1 - \frac{n}{M}, \frac{6n}{M})$-远均衡的问题属于PPAD。

回顾一下，对于对角修正博弈，如果该对角修正博弈没有完全混合纳什均衡，那么寻找 EXACT M-半不相交纳什均衡的问题属于 PPAD。令 $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}^{n}(y^*)$表示 M-半受约束不相交均衡的行玩家约束集。现在设 (x^*, y^*) 是 $\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})$ 的 EXACT M-半不相交纳什均衡。为了证明 (x^*, y^*) 是 M-半受约束不相交均衡，且在 $\mathcal{G}$ 中的近似误差为 $\frac{6n}{M}$，我们需要对所有 $f \in \mathcal{S}_{\mathrm{M}}^{n}(y^*)$ 证明以下内容（列玩家的证明类似）：

$$U_1^{\mathcal{G}}(x^*, y^*) + \frac{6n}{M} > U_1^{\mathcal{G}}(f, y^*)$$

记 $x^* = x^b + x^s$ 和 $y^* = y^b + y^s$，其中上标 b 表示在 x^* 中以大于 $\frac{1}{M}$ 的概率使用的策略，上标 s 则表示其他策略（y^b 和 y^s同理）。显然，$U^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})_1}(x^b, y^b) = U_1^{\mathcal{G}}(x^b, y^b)$，因为 x^b和 y^b都对应于具有不相交支撑集的策略。由于 (x^*, y^*) 是 $\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})$ 的 M-半不相交纳什均衡，因此满足以下条件：

$$\forall f \in \mathcal{S}_{\mathrm{M}}^{n}(y^*) \subset \Delta_n, \quad U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x^*, y^*) \geq U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(f, y^*) \tag{4}$$

将引理 4.2 应用于方程 4，即可得到以下不等式。若记 $\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})_1(x^b, y^*)$ 为行玩家从子分布 x^b中获得的收益份额，则有：

$$\forall f \in \mathcal{S}_{\mathrm{M}}^{n}(y^*) \subset \Delta_n, \quad U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x^b, y^*) + \frac{n}{M} \geq U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(f, y^*)$$

同理：

$$\forall f \in \mathcal{S}_{\mathrm{M}}^{n}(y^*) \subset \Delta_n, \quad U_1^{\mathcal{G}}(x^b, y^b) + \frac{n}{M} + \frac{n}{M} \geq U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(f, y^*)$$

并且根据$|U_1^{\mathcal{G}}(f, y^b) - U^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})_1}(f, y^*)| \leq \frac{n}{M}$这一事实：

$$\forall f \in \mathcal{S}_{\mathrm{M}}^{n}(y^*) \subset \Delta_n, \quad U_1^{\mathcal{G}}(x^b, y^b) + \frac{2n}{M} + \frac{n}{M} \geq U_1^{\mathcal{G}}(f, y^b)$$

现在，我们从 x^b 的支撑集中选取一个元素，并将 y^b 和 x^s 中所有概率的总和分别赋予它们。这两个新的概率分布 x' 和 y' 构成一个 M- 半受约束不相交均衡，其中 $\frac{6n}{M}$ 是近似误差，具体为 4.2 （因为 $||x' - x^b||_1 \leq \frac{n}{M}$ 和 $||y' - y^b||_1 \leq \frac{n}{M}$）：

$$\forall f \in \mathcal{S}_{\mathrm{M}}^{n}(y') \subset \Delta_n, \quad U_1^{\mathcal{G}}(x', y') + \frac{6n}{M} \geq U_1^{\mathcal{G}}(f, y')$$

□

4.5 一个有趣的联系

下面的命题说明，对角化博弈如何在受约束均衡和纳什均衡情形下的不相交均衡之间建立联系。

命题 4.33。 对于 $\theta \geq \frac{1}{M}$，$\mathcal{G}$ 中的任意 (θ, ϵ)-受限不相交均衡都会在 $\mathcal{D}^M$ 中形成一个 ϵ-近似不相交纳什均衡$(\mathcal{G})$。

证明。 参见附录 C。 □

4.6 受限远均衡与定理 3.23 和 3.24

我们首先给出以下命题，以确立不相交纳什均衡与受约束不相交均衡之间的关系。

4.6.1 证明定理所需的基本要素 3.24

为了证明定理 3.24，我们首先通过将一个零和子博弈嵌入该博弈，对 4.4 进行推广。我们将通过移除规则 10-15 并添加一系列新规则，将 $\mathcal{G}(\phi, \epsilon)$ 修改为$\mathcal{C}(\phi, \epsilon)$ $(\frac{1}{\epsilon} > c > n)$。设$S^{\mathcal{C}} \equiv S_1^{\mathcal{C}} = S_2^{\mathcal{C}} = L_1 \cup L_2 \cup V \cup C \cup F^{\mathcal{C}}$为两个玩家共同的策略集，其中 $F^{\mathcal{C}} = \{f^i \mid i \in [c]\}$。新规则定义如下：

1. $u_1^{\mathcal{C}}(x, f^i) = u_2^{\mathcal{C}}(f^j, x) = 0$对所有 $i, j \in [c]$和 $x \in S^{\mathcal{C}} - F^{\mathcal{C}}$均成立；2. $u_1^{\mathcal{C}}(f^i, x) = u_2^{\mathcal{C}}(x, f^i) = n-1$对所有 $i, j \in [c]$和 $x \in S^{\mathcal{C}} - F^{\mathcal{C}}$均成立；3. $u_1^{\mathcal{C}}(f^i, f^j) = u_2^{\mathcal{C}}(f^j, f^i) = \binom{n^2}{\epsilon}$对所有 $i = j \in [c]$均成立；4. $u_1^{\mathcal{C}}(f^i, f^j) = u_2^{\mathcal{C}}(f^j, f^i) = 2\binom{n^2}{\epsilon}$对所有 $i, j \in [c]$ 和 $i = j+1$(模 c) 均成立；5. $u_1^{\mathcal{C}}(f^i, f^j) = u_2^{\mathcal{C}}(f^j, f^i) = 0$对所有 $i, j \in [c]$和 $i \neq j+1$(模 c) 均成立；6. $u_1^{\mathcal{C}}(l^2, *) = u_2^{\mathcal{C}}(*, l^1) = -2n$对所有 $* \in S^{\mathcal{C}}$, $l^1 \in L_1$和 $l^2 \in L_2$均成立；7. $u_2^{\mathcal{C}}(l^2, *) = u_1^{\mathcal{C}}(*, l^1) = 0$对所有 $* \in S^{\mathcal{C}} - F^{\mathcal{C}}$, $l^1 \in L_1$和 $l^2 \in L_2$均成立；

命题 4.34。 给定一个 *3-CNF* ϕ, $\mathcal{C}(\phi, \epsilon)$ 实例，当且仅当给定的公式 ϕ可满足时，该实例存在一个 *EXACT* 不相交纳什均衡，其中任一玩家支撑集中的所有策略被选择的概率都严格大于 $\frac{1}{c}$。

证明。 当公式可满足时，可以得到与 4.4 类似的解，其中所有玩家都以概率 $\frac{1}{n}$玩某些文字。我们需要证明，当公式不可满足时，博弈 $\mathcal{C}(\phi, \epsilon)$ 唯一的精确纳什均衡相较于 $\mathcal{G}(\phi, \epsilon)$ 仅可能是玩家采用以下策略时：

$$x^c = y^c = (\frac{1}{c} f_1, \ldots, \frac{1}{c} f_c)$$

很容易验证，(x^c, y^c) 是一个精确Nash均衡，因为由以下策略 $F^{\mathcal{C}}$ 所诱导的子博弈只是石头剪刀布的简单推广。类似地，不难看出，在任何精确Nash均衡中，如果没有玩家采用 $F^{\mathcal{C}}$中的任何策略，那么 $C \cup V$中的所有策略都不可能以正概率被采用。理由与 [21]和引理4.7类似，因为使用这些策略所得的社会福利必然小于 $2n-2$，而且至少有一名玩家会试图通过偏离到任意 $n-1$来实现 $f^i \in F^{\mathcal{C}}$。采用任何策略 $f^i \in F^{\mathcal{C}}$都会导致对手玩家采用 f^j，其中 $j = i+1$(模 c)，而这一过程可以永远持续下去。

不失一般性，假设行玩家以大于 $\frac{\epsilon}{n}$ 的概率采用策略 $f^i \in F^{\mathcal{C}}$。简单计算可知，列玩家采用纯策略 $f^j \in F^{\mathcal{C}}$（其中 $j = i+1$（模 c））时，其期望收益始终大于 n（f^i 不可能以很小的概率被采用）。这确实会阻止列玩家采用 L、C 或 V 中的任何策略。由策略集为 $F^{\mathcal{C}} \subset S^{\mathcal{C}}$ 所诱导的子博弈 $\mathcal{C}_F$ 只有一个 EXACT 的唯一纳什均衡（x^c，y^c）。对于这个策略组合，双方支撑集中的所有策略所采用的概率都至多为 $\frac{1}{c}$。 □

注 4.35。 我们还可以观察到，$\mathcal{C}$（ϕ，ϵ）的任何纳什均衡的期望保证收益都是 $\frac{1}{c} \cdot \binom{n^2}{\epsilon} + 1 \cdot 2n^2 = 3n^2 - \frac{\epsilon}{c}$。

4.6.2 定理3.23和3.24的证明

下面的命题完成了定理3.23的证明。

命题 4.36。 给定一个公式 ϕ，其中包含 n 个变量，则存在一个博弈，使得对于某些 θ，以及在 n中多项式有界的 ϵ，该博弈中存在一个 (θ, ϵ)-受限不相交均衡，当且仅当 ϕ 可满足。

证明。 将命题 4.34 推广到近似情形（其中 $\epsilon = \frac{1}{2n^3}$），并结合命题 4.4证明中使用的技巧，并不困难。我们仿照在博弈 $F^{\mathcal{C}}$ 中所做的那样，复制子句、变量以及策略 $\mathcal{G}(\phi, \epsilon)$，并考虑四个将相关策略的副本映射起来的函数。我们还需要假设 $\epsilon \leq \frac{1}{c} - \frac{2\epsilon^2}{n} \leq \frac{1}{n} - 2\epsilon - \frac{1}{n^2}$。显然可以看出 $\frac{1}{c} - \frac{2\epsilon^2}{n}$大于 ϵ，$\frac{\epsilon}{n}$以及 $\frac{2\epsilon}{n} + \frac{\epsilon^2}{2n^2}$。

每个玩家只能以小于 $\frac{\epsilon}{n}$的概率选择未关联的文字、子句和变量，因为在这个博弈中，受约束不相交均衡也是不相交纳什均衡。这表明，在任何$(\frac{1}{n} - 2\epsilon - \frac{1}{n^2}, \epsilon)$-受限不相交均衡中，都不能选择这些策略。根据引理 ϵ，这一结论同样适用于只能以小于4.7 和4.16的概率选择的变量和子句（及其关联副本）。

如果没有玩家采用 $F_1^{\mathcal{C}}$或 $F_2^{\mathcal{C}}$中的策略，类似于命题 4.4的分析可以表明，至少有一名玩家会有动机选择 $F_1^{\mathcal{C}}$或 $F_2^{\mathcal{C}}$中的某些策略。如果允许玩家采用 $F_1^{\mathcal{C}}$或 $F_2^{\mathcal{C}}$中的某些策略，我们将证明，只需稍作调整，命题 4.34 中的分析仍然成立。在这个修改后的版本 $\mathcal{C}(\phi, \epsilon)$（含有重复的变量和子句）中，在任何满足至少一名玩家以大于 $F_1^{\mathcal{C}}$或 $F_2^{\mathcal{C}}$的概率采用其中策略这一条件的精确约束互斥均衡中，都不存在相关联的

文字、子句或变量策略能够以正概率被采用。在近似情形中，文字、子句或变量被采用的概率至多为 $\frac{\epsilon^2}{n^2}$。这是因为我们知道，$F_1^{\mathcal{C}}$或$F_2^{\mathcal{C}}$中存在一种策略，其采用概率大于 $\frac{2\epsilon}{n}$；而采用 $f^{i+1}(\text{模 } c)$（根据玩家的不同，取自 $F_1^{\mathcal{C}}$或 $F_2^{\mathcal{C}}$）至少会带来 ϵ的收益差。总之，在任何 $(\frac{1}{n} - 2\epsilon - \frac{1}{n^2}, \epsilon)$-受限不相交均衡中，都不能采用这些策略。

回想一下，根据注 4.35，每位玩家必须保证获得 $\frac{3n^2}{c\epsilon}$ 的收益（对于近似版本，则为 $(3\frac{n^2}{c\epsilon}) - \epsilon$）。最后，如果某位玩家更倾向于以小于 $\frac{1}{c} - \frac{2\epsilon^2}{n}$ 的概率选择 $F_1^{\mathcal{C}}$ 或 $F_2^{\mathcal{C}}$ 中的任意策略，那么至少存在 $F_1^{\mathcal{C}}$ 或 $F_2^{\mathcal{C}}$ 中的一种策略，使得该玩家以大于 $\frac{1}{c} + \frac{2\epsilon^2}{n^2}$ 的概率选择该策略，因为我们已经证明，在受限均衡中，第一位玩家和第二位玩家分别只能使用 $F_1^{\mathcal{C}}$ 和 $F_2^{\mathcal{C}}$ 中的策略。对手可以获得至少 $(\frac{3n^2}{c\epsilon}) + \frac{2\epsilon^2}{n^2}(\frac{n^2}{\epsilon})$ 的收益，这等于 $\frac{3n^2}{c\epsilon} + 2\epsilon$。这是因为由 $F_1^{\mathcal{C}}$ 和 $F_2^{\mathcal{C}}$ 中的策略诱导的子博弈结构类似于石头剪刀布博弈。

该子博弈中任一均衡的最大社会福利为 $2\frac{3n^2}{c\epsilon}$，这表明一名玩家无法达到指定的保证值 $\frac{3n^2}{c\epsilon} - \epsilon$。总之，在这种情况下，不存在最小概率大于 $\frac{1}{c} - \frac{2\epsilon^2}{n} < \frac{1}{n} - \epsilon - \frac{1}{n^2}$ 的 ϵ-受约束不相交均衡。由此证明，任意公式 ϕ 可满足，当且仅当该修改版的 $\mathcal{C}(\phi, \epsilon)$存在一个 $(\frac{1}{n} - \epsilon - \frac{1}{n^2}, \epsilon)$-受限不相交均衡。

□

命题 4.37。给定一个含有 n 个变量的公式 ϕ，存在一个博弈 $\mathcal{R}(\phi, \delta, \epsilon)$，使得对于某些 ϵ、θ，以及任意给定的、关于 n 多项式有界的 δ，博弈 $\mathcal{R}(\phi, \delta, \epsilon)$ 存在一个受限的$(\theta, \delta, \epsilon)$-远均衡，当且仅当 ϕ 可满足。

证明。我们只证明 $\delta < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$的情形，另一种情形类似（参见命题 4.19）。我们构造最终博弈 $\mathcal{R}(\phi, \delta, \epsilon)$，它由博弈 $\mathcal{D}(\phi, \delta, \epsilon)$ 和 $\mathcal{C}(\phi, \epsilon)$ 组合而成。该博弈的策略集为 $S^{\mathcal{R}} = L^{\mathcal{D}} \cup L_1^{\mathcal{D}} \cup L_2^{\mathcal{D}} \cup V_1 \cup V_2 \cup C_1 \cup C_2 \cup F_1^{\mathcal{R}} \cup F_2^{\mathcal{R}}$。此博弈的文字策略与博弈 $\mathcal{D}(\phi, \delta, \epsilon)$ 相同，并且我们仿照 $\mathcal{C}(\phi, \epsilon)$ 复制了子句和变量。函数 g_1：$L^{\mathcal{D}} \cup L_1^{\mathcal{D}} \cup L_2^{\mathcal{D}} \to L$ 的定义方式与博弈 $\mathcal{D}(\phi, \delta, \epsilon)$ 中 g' 的定义类似。我们还有三个函数 g_2：$V_1 \cup V_2 \to V$ 和 g_3：$C_1 \cup C_2 \to C$（类似于 g_1, g 和 g'），它们将复制策略映射到 ϕ 中对应的原始变量和子句。函数 g_4：$F_1^{\mathcal{R}} \cup F_2^{\mathcal{R}} \to F^{\mathcal{C}}$ 可用于 $F^{\mathcal{C}}$ 中的策略。博弈 $\mathcal{R}(\phi, \delta, \epsilon)$ 的收益矩阵定义如下：

1. 对所有满足 $\mathsf{g}_1(l^1) \neq -\mathsf{g}_1(l^2)$ 的 $l^1, l^2 \in L^{\mathcal{D}}$，$u_1^{\mathcal{R}}(l^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(l^2, l^1) = n - 1$；2. 对所有满足 $\mathsf{g}_1(l^1) \neq -\mathsf{g}_1(l^2)$ 的 $l^1 \in L_1^{\mathcal{D}}$, $l^2 \in L_2^{\mathcal{D}}$，$u_1^{\mathcal{R}}(l^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(l^1, l^2) = n - 1$；3. 对所有满足 $\mathsf{g}_1(l^1) \neq -\mathsf{g}_1(l^2)$ 的 $l^1 \in L^{\mathcal{D}}$, $l^2 \in L_2^{\mathcal{D}}$，$u_1^{\mathcal{R}}(l^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(l^1, l^2) = n - 1$；4. 对所有满足 $\mathsf{g}_1(l^1) \neq -\mathsf{g}_1(l^2)$ 的 $l^1 \in L_1^{\mathcal{D}}$, $l^2 \in L^{\mathcal{D}}$，$u_1^{\mathcal{R}}(l^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(l^1, l^2) = n - 1$；5. 对所有 $l \in L^{\mathcal{D}}$，$u_1^{\mathcal{R}}(-l, l) = u_2^{\mathcal{R}}(-l, l) = n - 4$；6. 对所有 $l^1 \in L_1^{\mathcal{D}}, l^2 \in L_2^{\mathcal{D}}$ 且满足 $\mathsf{g}_1(l^1) = \mathsf{g}_1(l^2)$，$u_1^{\mathcal{R}}(-l^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(-l^1, l^2) = n - 4$；7. 对所有 $l^1 \in L^{\mathcal{D}}, l^2 \in L_2^{\mathcal{D}}$ 且满足 $\mathsf{g}_1(l^1) = \mathsf{g}_1(l^2)$，$u_1^{\mathcal{R}}(-l^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(-l^1, l^2) = n - 4$；8. 对所有 $l^1 \in L_1^{\mathcal{D}}$, $l^2 \in L^{\mathcal{D}}$ 且满足 $\mathsf{g}_1(l^1) = \mathsf{g}_1(l^2)$，$u_1^{\mathcal{R}}(-l^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(-l^1, l^2) = n - 4$；9. 对所有满足 $\mathsf{g}_2(v^1) = g(v^2)$ 且 $\mathsf{v}(\mathsf{g}_1(l)) \neq \mathsf{g}_2(v^1)$ 的 $v^1 \in V$, $v^2 \in V_2$, $l \in L^{\mathcal{D}}$，$u_1^{\mathcal{R}}(v^1, l) = u_2^{\mathcal{R}}(l, v^2) = n$；

10. $u_1^{\mathcal{R}}(v^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(l^1, v^2) = n$ 对于所有 $v^1 \in V_1$, $v^2 \in V_2$, $l^1 \in L_1^{\mathcal{D}}$, $l^2 \in L_2^{\mathcal{D}}$，满足 $\mathsf{g}_1(l^1) = \mathsf{g}_1(l^2)$、$\mathsf{g}_2(v^1) = \mathsf{g}_2(v^2)$，且 $\mathsf{v}(\mathsf{g}_1(l^1)) \neq \mathsf{g}_2(v^1)$；
11. $u_1^{\mathcal{R}}(l, x^2) = u_2^{\mathcal{R}}(x^1, l) = n - 4$ 对于所有 $l \in L^{\mathcal{D}}$, $x^1 \in V_1 \cup C_1$, $x^2 \in V_2 \cup C_2$；12. $u_1^{\mathcal{R}}(l^1, x^2) = u_2^{\mathcal{R}}(x^1, l^2) = n - 4$ 对于所有 $l^1 \in L_1^{\mathcal{D}}$, $l^2 \in L_2^{\mathcal{D}}$, $x^1 \in V_1 \cup C_1$, $x^2 \in V_2 \cup C_2$，且 $\mathsf{g}_1(l^1) = \mathsf{g}_1(l^2)$；13. $u_1^{\mathcal{R}}(v^1, l) = u_2^{\mathcal{R}}(l, v^2) = 0$ 对于所有 $v^1 \in V_1$, $v^2 \in V_2$, $l \in L^{\mathcal{D}}$，满足 $\mathsf{g}_2(v^1) = \mathsf{g}_2(v^2)$，且 $\mathsf{v}(\mathsf{g}_1(l)) = \mathsf{g}_2(v^1)$；

14. $u_1^{\mathcal{R}}(v^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(l^1, v^2) = 0$ 对于所有 $v^1 \in V_1$, $v^2 \in V_2$, $l^1 \in L_1^{\mathcal{D}}$, $l^2 \in L_2^{\mathcal{D}}$，满足 $\mathsf{g}_1(l^1) = \mathsf{g}_1(l^2)$、$\mathsf{g}_2(v^1) = \mathsf{g}_2(v^2)$ 且 $\mathsf{v}(\mathsf{g}(l^1)) = \mathsf{g}_2(v^1)$；

15. $u_1^{\mathcal{R}}(v^1, x^2) = u_2^{\mathcal{R}}(x^1, v^2) = n-4$ 对所有 $v^1 \in V_1$, $v^2 \in V_2$, $x^1 \in V_1 \cup C_1$, $x^2 \in V_2 \cup C_2$ 均成立，且 $\mathsf{g}_2(v^1) = \mathsf{g}_2(v^2)$；16. $u_1^{\mathcal{R}}(c^1, l) = u_2^{\mathcal{R}}(l, c^2) = n$ 对所有满足 $\mathsf{g}_3(c^1) = \mathsf{g}_3(c^2)$ 且 $\mathsf{g}_1(l) \notin \mathsf{g}_3(c^1)$ 的 $c^1 \in C_1$, $c^2 \in C_2$, $l \in L^{\mathcal{D}}$ 均成立；17. $u_1^{\mathcal{R}}(c^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(l^1, c^2) = n$ 对所有满足 $\mathsf{g}_1(l^1) = \mathsf{g}_1(l^2)$、$\mathsf{g}_3(c^1) = \mathsf{g}_3(c^2)$ 且 $\mathsf{g}_1(l^1) \notin \mathsf{g}_3(c^1)$ 的 $c^1 \in C_1$, $c^2 \in C_2$, $l^1 \in L_1^{\mathcal{D}}$, $l^2 \in L_2^{\mathcal{D}}$ 均成立；18. $u_1^{\mathcal{R}}(c^1, l) = u_2^{\mathcal{R}}(l, c^2) = 0$ 对所有满足 $\mathsf{g}_1(l^1) = \mathsf{g}_1(l^2)$、$\mathsf{g}_3(c^1) = \mathsf{g}_3(c^2)$ 且 $\mathsf{g}_1(l) \in \mathsf{g}_3(c^1)$ 的 $c^1 \in C_1$, $c^2 \in C_2$, $l \in L^{\mathcal{D}}$ 均成立；19. $u_1^{\mathcal{R}}(c^1, l^2) = u_2^{\mathcal{R}}(l^1, c^2) = 0$ 对所有 $c^1 \in C_1$, $c^2 \in C_2$, $l^1 \in L_1^{\mathcal{D}}$, $l^2 \in L_2^{\mathcal{D}}$ 均成立，且满足 $\mathsf{g}_1(l^1) = \mathsf{g}_1(l^2)$ 和 $\mathsf{g}_1(l^1) \in \mathsf{g}_3(c^1)$；20. $u_1^{\mathcal{R}}(c^1, x^2) = u_2^{\mathcal{R}}(x^1, c^2) = n-4$ 对所有 $v^1 \in V_1$, $v^2 \in V_2$, $x^1 \in V_1 \cup C_1$, $x^2 \in V_2 \cup C_2$ 均成立，且 $\mathsf{g}_3(c^1) = \mathsf{g}_3(c^2)$；21. $u_1^{\mathcal{R}}(x, f^i) = u_2^{\mathcal{R}}(f^j, x) = 0$ 对任意 $f^i \in F_2^{\mathcal{R}}$ 和 $f^j \in F_1^{\mathcal{R}}$ 均成立，其中 $x \in S^{\mathcal{R}} - F_1^{\mathcal{R}} - F_2^{\mathcal{R}}$；22. $u_1^{\mathcal{R}}(f^i, x) = u_2^{\mathcal{R}}(x, f^j) = n-1$，对任意 $f^i \in F_1^{\mathcal{R}}$ 和 $f^j \in F_2^{\mathcal{R}}$ 均成立，其中 $x \in S^{\mathcal{R}} - F_1^{\mathcal{R}} - F_2^{\mathcal{R}}$；23. $u_1^{\mathcal{R}}(f^i, f^j) = u_2^{\mathcal{R}}(f^j, f^i) = \frac{dn^2}{\delta\epsilon}$ 对满足 $\mathsf{g}_4(f^i) = \mathsf{g}_4(f^j)$ 的任意 $f^i \in F_1^{\mathcal{R}}$ 和 $f^j \in F_2^{\mathcal{R}}$ 均成立；24. $u_1^{\mathcal{R}}(f_1^i, f_2^j) = u_2^{\mathcal{R}}(f_1^j, f_2^i) = 2(\frac{dn^2}{\delta\epsilon})$，对于 $f_1^i, f_1^j \in F_1^{\mathcal{R}}$ 和 $f_2^i, f_2^j \in F_2^{\mathcal{R}}$，其中 $\mathsf{g}_4(f_1^i) = \mathsf{g}_4(f_2^i) = f^i$ 且 $\mathsf{g}_4(f_1^j) = \mathsf{g}_4(f_2^j) = f^j$（上标 i 和 j 分别表示 $F^{\mathcal{C}}$ 中的第 i 个和第 j 个成员），而 $i = j+1$（模 c）；25. $u_1^{\mathcal{R}}(f_1^i, f_2^j) = u_2^{\mathcal{R}}(f_1^j, f_2^i) = 0$ 对于 $f_1^i, f_1^j \in F_1^{\mathcal{R}}$ 和 $f_2^i, f_2^j \in F_2^{\mathcal{R}}$，其中 $\mathsf{g}_4(f_1^i) = \mathsf{g}_4(f_2^i) = f^i$ 且 $\mathsf{g}_4(f_1^j) = \mathsf{g}_4(f_2^j) = f^j$，而 $i \neq j+1$（模 c）；26. $u_1^{\mathcal{R}}(l^2, *) = u_2^{\mathcal{R}}(*, l^1) = -2n$ 对所有 $* \in S^{\mathcal{R}}$, $l^1 \in L_1$ 和 $l^2 \in L_2$ 均成立；27. $u_2^{\mathcal{R}}(l^2, *) = u_1^{\mathcal{R}}(*, l^1) = 0$ 对所有 $* \in S^{\mathcal{R}} - F_1^{\mathcal{R}} - F_1^{\mathcal{R}}$, $l^1 \in L_1$ 和 $l^2 \in L_2$ 均成立；28. $u_1^{\mathcal{R}}(v^2, *) = u_2^{\mathcal{R}}(*, v^1) = -2n$ 对所有 $* \in S^{\mathcal{R}}$, $v^1 \in V_1$ 和 $v^2 \in V_2$ 均成立；29. $u_2^{\mathcal{R}}(v^2, *) = u_1^{\mathcal{R}}(*, v^1) = 0$ 对所有 $* \in S^{\mathcal{R}} - F_1^{\mathcal{R}} - F_2^{\mathcal{R}}$, $v^1 \in V_1$ 和 $v^2 \in V_2$ 均成立；30. $u_1^{\mathcal{R}}(c^2, *) = u_2^{\mathcal{R}}(*, c^1) = -2n$ 对所有 $* \in S^{\mathcal{R}}$, $c^1 \in C_1$ 和 $c^2 \in C_2$ 均成立；31. $u_2^{\mathcal{R}}(c^2, *) = u_1^{\mathcal{R}}(*, c^1) = 0$ 对所有 $* \in S^{\mathcal{R}} - F_1^{\mathcal{R}} - F_2^{\mathcal{R}}$, $c^1 \in C_1$ 和 $c^2 \in C_2$ 均成立；32. $u_1^{\mathcal{R}}(f^2, *) = u_2^{\mathcal{R}}(*, f^1) = -2n$ 对所有 $* \in S^{\mathcal{R}}$, $f^1 \in F_1^{\mathcal{R}}$ 和 $f^2 \in F_2^{\mathcal{R}}$ 均成立；33. $u_2^{\mathcal{R}}(f^2, *) = u_1^{\mathcal{R}}(*, f^1) = 0$ 对所有 $* \in S^{\mathcal{R}} - F_1^{\mathcal{R}} - F_2^{\mathcal{R}}$, $f^1 \in F_1^{\mathcal{R}}$ 和 $f^2 \in F_2^{\mathcal{R}}$. 均成立。

如果公式 ϕ 可满足，那么存在一个 $(\frac{\delta}{d}, \delta, 0)$-受限远均衡，其中 d 由 δ 驱动（见命题 4.20）。我们证明，如果 ϕ 不可满足，则不存在 $(\frac{\delta}{d} - \frac{2\delta\epsilon^2}{dn}, \delta, \epsilon)$-受限远均衡。如果没有采用来自 $F_1^{\mathcal{R}}$ 或 $F_2^{\mathcal{R}}$ 的（相关）策略之一，那么其中一名玩家无法获得保证收益 $n-1-\epsilon$，并且会像此前所有结果中那样，从这些集合中选择一个策略。如果 $F_1^{\mathcal{R}}$ 或 $F_2^{\mathcal{R}}$ 中存在一个（相关）策略，使得行玩家或列玩家以大于 $\frac{\delta\epsilon}{2dn}$ 的概率采用该策略，那么根据与定理 4.36 类似的分析，所有与文字、变量和子句相关的策略都不能以大于 $\frac{\delta\epsilon^2}{dn^2}$ 的概率采用。

最后，如果玩家更倾向于以小于 $\frac{1}{c} - \frac{2\delta\epsilon^2}{dn}$ 的概率选择 $F_1^{\mathcal{R}}$ 或 $F_2^{\mathcal{R}}$ 中的任意策略，那么至少存在一个策略，使得对手可以获得至少为 $(\frac{3dn^2}{c\delta\epsilon}) + \frac{2\delta\epsilon^2}{dn^2}(\frac{dn^2}{\delta\epsilon})$ 的收益，该收益等于 $\frac{3dn^2}{c\delta\epsilon} + 2\epsilon$。该博弈中任何均衡的最大社会福利为子博弈 $2\frac{3dn^2}{c\delta\epsilon}$，这表明一个玩家无法满足保证 $\frac{3dn^2}{c\delta\epsilon} - \epsilon$。如果令 $c = \lceil \frac{d}{\delta} \rceil + 1$，则 $\frac{1}{c} < \frac{\delta}{d}$ 和 $\frac{1}{c} - \frac{2\delta\epsilon^2}{dn^2}$ 始终为正（生成 $\mathcal{R}(\phi, \delta, \epsilon)$，其中 $|F_1^{\mathcal{R}}| = |F_2^{\mathcal{R}}| > \frac{\delta}{d}$）。由此完成证明：任意公式 ϕ 可满足，当且仅当 $\mathcal{R}(\phi, \delta, \epsilon)$ 具有一个 $(\frac{\delta}{d}, \delta, \epsilon)$-受限远均衡。

□

推论 4.38。 对于给定的具有 n 个变量的公式 ϕ，存在一个博弈，使得对于某些在 n 中多项式有界的 ϵ 和 θ，该博弈存在一个 (θ, ϵ)-主要纳什，当且仅当公式 ϕ 可满足。

5 结论与开放问题

我们介绍了具有策略约束的博弈在困难性与可行性方面的结果，并论证了这类博弈有助于建模涉及策略行为的各种应用。我们认为，围绕计算问题和应用开展进一步研究，将会是一个富有成果的方向。下面我们提出一些可能的研究方向。

与受约束不相交均衡不同，即使要证明 (δ, ϵ)-约束远均衡属于 NP，对于任意 δ，也并非易事。更进一步，我们证明了，对于零和博弈，这种意义下的均衡可能并不存在。然而，对于满足以下（凸）共同约束的 [59] 受约束的近均衡，可以保证存在一个解，该结论依赖于角谷不动点定理：

$$\mathcal{R}_\delta^n = \{(x, y) \in \Delta_n \times \Delta_n \mid ||x - y||_1 \leq 2\delta\}$$

可以通过使用与 [55] 中讨论的类似论证，证明其属于 PPAD。寻找受约束的近均衡的通信复杂性和不可近似性结果也可能很有意义。一般而言，一个有趣的问题是，是否存在某种自然的纳什均衡变体，使得该问题的计算复杂性属于 TFNP，但不属于 $PPAD$。针对双矩阵博弈中 EXACT 精确划分纳什均衡的困难性寻找直接归约，仍是一个尚无定论的开放问题，而且似乎没有简单的解决方案。

参考文献

[1] Amir Ali Ahmadi 和 Jeffrey Zhang。《双矩阵博弈中的半定规划与纳什均衡》。INFORMS Journal on Computing，33(2):607–628，2021年。arXiv:https://doi.org/10.1287/ijoc.2020. 0960, doi:10.1287/ijoc.2020.0960。[2] E Altman 和 E Solan。《受约束博弈：对对手约束的态度所产生的影响》。IEEE Trans. Automat. Contr.，54(10):2435–2440，2009年10月。[3] Kenneth J. Arrow。《古典福利经济学基本定理的扩展》。1951年。[4] Robert Aumann 和 Adam Brandenburger。《纳什均衡的认知条件》。《计量经济学》，63(5):1161–1180，1995年。URL: http://www.jstor.org/stable/2171725。[5] Robert J Aumann。《博弈论试图实现什么？》载于《Frontiers of Economics》，由 K. Arrow 和 S. Honkapohja 编。Citeseer，1985年。[6] Per Austrin、Mark Braverman 和 Eden Chlamtáˇc。《纳什均衡的NP完全变体的不可近似性》。载于 Leslie Ann Goldberg、Klaus Jansen、R. Ravi 和 José D. P. Rolim 编，《近似、随机化与组合优化：算法与技术》，第13–25页，柏林、海德堡，2011年。Springer Berlin Heidelberg。[7] Yakov Babichenko。《近似纳什均衡的查询复杂度》。J. ACM，63(4):1–24，2016年11月。[8] Julius B. Barbanel。《超无嫉妒蛋糕分割与测度独立性》。《数学分析与应用杂志》，197(1):54–60，1996年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X96900062, doi:https://doi.org/10.1006/S0022-247X(96)90006-2。[9] Siddharth Barman、Ganesh Ghalme、Shweta Jain、Pooja Kulkarni 和 Shivika Narang。《策略性代理人之间不可分物品的公平分配》。载于第18届自主代理人与多智能体系统国际会议论文集，AAMAS '19，第1811–1813页，南卡罗来纳州里奇兰，2019年。国际自主代理人与多智能体系统基金会。[10] Siddharth Barman、Ganesh Ghalme、Shweta Jain、Pooja Kulkarni 和 Shivika Narang。《策略性代理人之间不可分物品的公平分配》，2019年。arXiv:1901.09427。[11] Marie Louisa Tølbøll Berthelsen 和 Kristoffer Arnsfelt Hansen。《关于多人纳什均衡相关判定问题的计算复杂性》。Theory Comput. Syst.，66(3):519–545，2022年。doi:10.1007/s00224-022-10080-1。[12] Vittorio Bilò 和 Marios Mavronicolas。《对称胜负博弈中纳什均衡相关计算问题的复杂性》。Algorithmica，83(2):447–530，2021年2月。[13] Simina Brânzei、Ioannis Caragiannis、David Kurokawa 和 Ariel Procaccia。《策略性公平分配的算法框架》。AAAI人工智能会议论文集，30(1)，2016年2月。doi:10.1609/aaai.v30i1.10042。

[14] Simina Brânzei、Ioannis Caragiannis、David Kurokawa 和 Ariel Procaccia。《策略性公平分配的算法框架》。AAAI人工智能会议论文集，30(1)，2016年2月。doi:10.1609/aaai.v30i1.10042。[15] Simina Brânzei、Vasilis Gkatzelis 和 Ruta Mehta。《面向策略性代理人的纳什社会福利近似》。运筹学，70(1):402–415，2022年。arXiv:https://doi.org/10.1287/opre.2020.2056，doi:10.1287/opre.2020.2056。[16] Simina Brânzei 和 Peter Bro Miltersen。《切蛋糕中的均衡分析》。载于2013年自主代理人与多智能体系统国际会议论文集，AAMAS '13，第327–334页，南卡罗来纳州里奇兰，2013年。国际自主代理人与多智能体系统基金会。[17] Colin F. Camerer、Teck-Hua Ho 和 Juin-Kuan Chong。《博弈的认知层级模型》。《经济学季刊》，119(3):861–898，2004年08月。arXiv:https://academic.oup.com/qje/article-pdf/119/3/861/5461769/119-3-861.pdf，doi:10.1162/0033553041502225。[18] Xi Chen、Xiaotie Deng 和 Shang-Hua Teng。《确定双人纳什均衡计算的复杂性》。J. ACM，56(3):1–57，2009年5月。[19] Juin-Kuan Chong、Teck-Hua Ho 和 Colin Camerer。《博弈的广义认知层级模型》。《博弈与经济行为》，99:257–274，2016年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825616300847，doi:https://doi.org/10.1016/j.geb.2016.08.007。[20] Bruno Codenotti 和 Daniel Štefankovi˘c。《(0,1)双矩阵博弈中纳什均衡的计算复杂性》。《信息处理快报》，94(3):145–150，2005年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020019005000281，doi:https://doi.org/10.1016/j.ipl.2005.01.010。[21] Vincent Conitzer 和 Tuomas Sandholm。《纳什均衡的复杂性新结果》。《博弈与经济行为》，63(2):621–641，2008年7月。[22] H. W. Corley。《策略式n人半合作博弈中帕累托标量均衡的规范效用模型》。《理论经济学快报》，07(06):1667–1686，2017年。doi:10.4236/tel.2017.76113。[23] Miguel A. Costa-Gomes 和 Vincent P. Crawford。《双人猜测博弈中的认知与行为：实验研究》。《美国经济评论》，96(5):1737–1768，2006年12月。URL: https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/aer.96.5.1737，doi:10.1257/aer.96.5.1737。[24] Artur Czumaj、Argyrios Deligkas、Michail Fasoulakis、John Fearnley、Marcin Jurdzi´nski 和 Rahul Savani。《计算近似均衡的分布式方法》。载于《网络与互联网经济学》，《计算机科学讲义》，第15–28页。Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2016年。[25] Artur Czumaj、Argyrios Deligkas、Michail Fasoulakis、John Fearnley、Marcin Jurdzi´nski 和 Rahul Savani。《计算近似均衡的分布式方法》。Algorithmica，81(3):1205–1231，2019年3月。[26] Constantinos Daskalakis。《非凹博弈：博弈论下一个一百年的挑战》。2022年。[27] Constantinos Daskalakis、Paul W Goldberg 和 Christos H Papadimitriou。《计算纳什均衡的复杂性》。《SIAM计算杂志》，39(1):195–259，2009年1月。[28] Constantinos Daskalakis、Aranyak Mehta 和 Christos Papadimitriou。《关于近似纳什均衡的简要说明》。Theor. Comput. Sci.，410(17):1581–1588，2009年4月。[29] Constantinos Daskalakis 和 Christos H. Papadimitriou。《关于纳什均衡的无信息多项式时间近似方案》。载于第四十一届ACM计算理论年会论文集，STOC '09，第75–84页，美国纽约州纽约，2009年。计算机协会。doi:10.1145/1536414.1536427。[30] Gerard Debreu。《社会均衡存在定理》。美国国家科学院院刊，38(10):886–893，1952年。URL: https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.38.10.886，arXiv: https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.38.10.886，doi:10.1073/pnas.38.10.886。[31] Argyrios Deligkas、Michail Fasoulakis 和 Evangelos Markakis。《双矩阵博弈中1/2-良支持纳什均衡的多项式时间算法》，2022年。URL: https://arxiv.org/abs/2207.07007，doi:10.48550/ARXIV.2207.07007。[32] Argyrios Deligkas、John Fearnley 和 Rahul Savani。《近似纳什均衡的不可近似性结果》。载于 Yang Cai 和 Adrian Vetta 编，《网络与互联网经济学》，第29–43页，柏林、海德堡，2016年。Springer Berlin Heidelberg。[33] Kousha Etessami 和 Mihalis Yannakakis。《纳什均衡与其他不动点的复杂性》。《SIAM计算杂志》，39(6):2531–2597，2010年1月。

[34] Francisco Facchinei、Andreas Fischer 和 Veronica Piccialli。关于广义纳什博弈与变分不等式。《运筹学快报》，35(2):159–164，2007年3月。[35] Francisco Facchinei 和 Christian Kanzow。广义纳什均衡问题。4OR，5(3):173–210，2007年9月。[36] Francisco Facchinei 和 Christian Kanzow。广义纳什均衡问题。《运筹学年刊》，175(1):177–211，2010年3月。[37] Gamow George 和 Marvin Stern。《趣味数学：从大爆炸到黑洞》。Viking Press，1958年。[38] Itzhak Gilboa 和 Eitan Zemel。纳什均衡与相关均衡：若干复杂性考量。《博弈与经济行为》，1(1):80–93，1989年。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ 0899825689900067，doi：https://doi.org/10.1016/0899-8256(89)90006-7。[39] Mika Goos 和 Aviad Rubinstein。近似纳什均衡的近最优通信下界。载于2018年IEEE第59届计算机科学基础年会（FOCS）。IEEE，2018年10月。[40] Elad Hazan 和 Robert Krauthgamer。近似最佳纳什均衡有多难？《SIAM计算杂志》，40(1):79–91，2011年。arXiv：https://doi.org/10.1137/090766991，doi：10.1137/090766991。[41] Tatsuro Ichiishi。《经济分析博弈论》。经济理论、计量经济学与数理经济学。Academic Press，圣迭戈，1983年。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/B9780123701800500020，doi：https://doi.org/10.1016/B978-0-12-370180-0.50002-0。[42] Gabriela Jeronimo、Daniel Perrucci 和 Juan Sabia。完全混合纳什均衡的参数表示。《计算数学及其应用》，58(6):1126–1141，2009年9月。[43] Mamoru Kaneko 和 Kenjiro Nakamura。纳什社会福利函数。《计量经济学》，47(2):423–435，1979年。URL：http://www.jstor.org/stable/1914191。[44] Irving Kaplansky。对冯·诺伊曼博弈论的贡献。《数学年刊》，46(3):474–479，1945年。URL：http://www.jstor.org/stable/1969164。[45] Irving Kaplansky。对冯·诺伊曼博弈论的贡献。II。《线性代数及其应用》，226-228:371–373，1995年9月。[46] Richard J Lipton、Evangelos Markakis 和 Aranyak Mehta。用简单策略进行大型博弈。载于第4届ACM电子商务会议论文集——EC '03，纽约，美国纽约，2003年。ACM出版社。[47] Andrew McLennan 和 Rabee Tourky。通过模仿博弈获得简单复杂性。《博弈与经济行为》，68(2):683–688，2010年3月。[48] Nimrod Megiddo 和 Christos H. Papadimitriou。关于全函数、存在性定理与计算复杂性。《理论计算机科学》，81(2):317–324，1991年4月。doi：10.1016/0304-3975(91) 90200-l。[49] I gal Milchtaich。双矩阵博弈中完全混合均衡收益的计算。《国际博弈论评论》，08(03):483–487，2006年9月。[50] Rosemarie Nagel。猜数博弈中的逐步推理：一项实验研究。《美国经济评论》，85(5):1313–1326，1995年。URL：http://www.jstor.org/stable/2950991。[51] Ahmad Nahhas 和 H. W. Corley。通过资源分配对n人标准式博弈中混合策略的另一种解释。《理论经济学快报》，08(10):1854–1868，2018年。doi：10.4236/tel. 2018.810122。[52] John Nash。非合作博弈。《数学年刊》，54(2):286–295，1951年。URL：http://www.jstor. org/stable/1969529。[53] John F. Nash。n人博弈中的均衡点。《美国国家科学院院刊》，36(1):48–49，1950年1月。doi：10.1073/pnas.36.1.48。[54] Christos H Papadimitriou。关于奇偶性论证的复杂性及其他低效的存在性证明。《计算机与系统科学杂志》，48(3):498–532，1994年6月。[55] Christos H. Papadimitriou、Emmanouil-Vasileios Vlatakis-Gkaragkounis 和 Manolis Zampetakis。多玩家凹博弈与角谷不动点的计算复杂性，2022年。URL：https: //arxiv.org/abs/2207.07557，doi：10.48550/ARXIV.2207.07557。[56] T Parthasarathy、Vasudha Sharma 和 A R Sricharan。完全混合双矩阵博弈。《数学科学进展》，130(1)，2020年12月。

[57] Wojciech Połowczuk 和 Tadeusz Radzik。受约束凹双矩阵博弈中的均衡。《应用数学》（华沙），40(2):167–182，2013年。[58] T. E. S. Raghavan。双矩阵博弈中的完全混合策略。伦敦数学会杂志，2(Part_4):709–712，1970年。URL：https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/2.Part_4.709，arXiv：https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/2.Part_4.709，doi：https://doi.org/10.1112/jlms/2.Part_4.709。[59] J. B. Rosen。凹型N人博弈均衡点的存在性与唯一性。《计量经济学》，33(3):520–534，1965年。URL：http://www.jstor.org/stable/1911749。[60] Ariel Rubinstein。关于博弈论解释的评论。《计量经济学》，59(4):909–924，1991年。URL：http://www.jstor.org/stable/2938166。[61] Aviad Rubinstein。纳什均衡的不可近似性。载于第47届ACM计算理论研讨会年会论文集，美国纽约州纽约市，2015年6月。ACM。[62] Aviad Rubinstein。解决近似双人纳什均衡计算的复杂性问题。SIGecom Exch.，15(2):45–49，2017年2月。doi：10.1145/3055589.3055596。[63] Larry Samuelson。经济学及更广领域中的博弈论。《经济展望杂志》，30(4):107–130，2016年11月。doi：10.1257/jep.30.4.107。[64] Grant R Schoenebeck 和 Salil Vadhan。简洁表示博弈中纳什均衡的计算复杂性。ACM计算理论汇刊，4(2):1–50，2012年5月。[65] Wayne Shafer 和 Hugo Sonnenschein。没有有序偏好的抽象经济中的均衡。《数理经济学杂志》，2(3):345–348，1975年。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304406875900026，doi：https://doi.org/10.1016/0304-4068(75)90002-6。[66] Dale O. Stahl 和 Paul W. Wilson。关于玩家对其他玩家模型的实验性证据。《经济行为与组织杂志》，25(3):309–327，1994年。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167268194901031，doi：https://doi.org/10.1016/0167-2681(94)90103-1。[67] Koichi Tadenuma 和 William Thomson。公平分配博弈。《博弈与经济行为》，9(2):191–204，1995年。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825685710159，doi：https://doi.org/10.1006/game.1995.1015。[68] Haralampos Tsaknakis 和 Paul G. Spirakis。用于计算近似纳什均衡的图谱方法。CoRR，abs/0909.4686，2009年。URL：http://arxiv.org/abs/0909.4686，arXiv：0909.4686。[69] William A. Webb。超无嫉妒蛋糕分割算法。Journal of Mathematical Analysis and Applications，239(1):175–179，1999年。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ S0022247X99965812，doi：https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6581。[70] Andrzej Wieczorek。受约束博弈与不定博弈及其应用。波兰科学院数学研究所，1983年。URL：http://eudml.org/doc/268472。

A 技术引理

A.1 引理的证明4.2

证明。 不难看出 $||x^- - x^*||_1 \leq 2\epsilon$。我们证明有 $|U_1(x^*, y^*) - U_1(x^-, y^*)| \leq \epsilon(\beta - \alpha)$。无论如何进行操作，从 x_i^* 中取出并重新分配 ϵ_i，最多只会使收益降低 $\epsilon_i(\beta - \alpha)$。因此，总效用损失将小于 $\epsilon(\beta - \alpha)$。

我们证明 x^- 是对 y^* 的一个 $\epsilon(\beta - \alpha)$-最佳响应，因为 x^* 是对 y^* 的最佳响应，这一点可由以下论证证明：

$$U_1(x^*, y^*) \geq U_1(x, y^*)$$
$$U_1(x^-, y^*) + \epsilon(\beta - \alpha) \geq U_1(x, y^*)$$

我们证明，y^* 是对 x^- 的一个 $2\epsilon(\beta - \alpha)$-最佳响应。对于所有 $y \in S$，我们有：

$$U_2(x^*, y^*) \geq U_2(x^*, y)$$
$$U_2(x^-, y^*) + \epsilon(\beta - \alpha) \geq U_2(x^*, y) \geq U_2(x^-, y) - \epsilon(\beta - \alpha) \text{ (for any pure strategy } y)$$
$$U_2(x^-, y^*) + 2\epsilon(\beta - \alpha) \geq U_2(x^-, y)$$

这意味着（x^-， y^*）是一个 $2\epsilon(\beta-\alpha)$-纳什均衡。类似地，我们可以证明（x^*， y^-）也是如此。不等式 (2) 的证明如下：

$$|U_1(x^*,y^*)-U_1(x^-,y^-)| \le |U_1(x^*,y^*)-U_1(x^*,y^-)| + |U_1(x^*,y^-)-U_1(x^-,y^-)|$$
$$\le \epsilon(\beta-\alpha)+\epsilon(\beta-\alpha) = 2\epsilon(\beta-\alpha)$$

(3) 的证明类似。 □

注A.1. 设 $\beta=1$ 和 $\alpha=0$。下面给出一个我们在全文中都会用到的例子。我们取 δ 比例的纯策略，并将其均匀分配给所有其他纯策略。

$$|U_1(x^*,y^*)-U_1(x^-,y^*)| = \left|\sum_{1\le j\le n}\delta y_j^* U_1(t,j) - \sum_{1\le i\ne t\le n}\sum_{1\le j\le n}\frac{\delta}{(n-1)}y_j^*U_1(i,j)\right| \tag{5}$$
$$= \left|\sum_{1\le i\ne t\le n}\sum_{1\le j\le n}\frac{\delta}{(n-1)}y_j^*U_1(t,j) - \sum_{1\le i\ne t\le n}\sum_{1\le j\le n}\frac{\delta}{(n-1)}y_j^*U_1(i,j)\right|$$
$$= \left|\frac{\delta}{(n-1)}\left(\sum_{1\le i\ne t\le n}\sum_{1\le j\le n}y_j^*U_1(t,j) - \sum_{1\le i\ne t\le n}\sum_{1\le j\le n}y_j^*U_1(i,j)\right)\right|$$

显然， $|U_1(t,j) - U_1(i,j)| \le 1$，因为我们可以假设博弈的收益限制在 $[0,1]$。因此：

$$|U_1(x^*,y^*)-U_1(x^-,y^*)| \le \left|\frac{\delta}{(n-1)}\sum_{1\le i\ne t\le n}\sum_{1\le j\le n}y_j^*\right|$$

最后，由于 y^* 是一个概率分布::

$$|U_1(x^*,y^*)-U_1(x^-,y^*)| \le \delta$$

列玩家也可以进行相同的操作：

$$|U_2(x^*,y^*)-U_2(x^*,y^-)| \le \delta$$

我们计算了效用之间的精确差值，但这构成 2ϵ-近似纳什均衡的原因可由 4.2 得出。进行这些计算是为了说明，即使是受限修改也可能导致较大的近似误差。

A.2 使用支持集枚举

备注 A.2。 我们还可以通过对矩阵进行以下计算，为双矩阵博弈 $\mathcal{G}(R,\ C)$ 定义纳什均衡（R 和 C 分别表示行玩家（第一位）和列玩家（第二位）的收益矩阵）：

$$x^{*T}Ry^* \ge e_i^TRy^*, \forall i\in\{1,\dots,m\}$$
$$x^{*T}Cy^* \ge x^{*T}Ce_i, \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

我们还可以通过进行以下修改来定义一个 ϵ-近似纳什均衡：

$$x^{*T}Ry^* + \epsilon \ge e_i^TRy^*, \forall i\in\{1,\dots,m\}$$
$$x^{*T}Cy^* + \epsilon \ge x^{*T}Ce_i, \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

命题 A.3. 该 混合策略 (x^*,y^*) 是 $\mathcal{G}(R,C)$ 的纳什均衡，当且仅当满足以下两个条件 ：

$$\forall i\in Supp(x^*), (Ry)_i = u = \max_{q\in S}\{(Ry)_q\}$$

$$\forall j\in Supp(y^*), \left(x^TC\right)_j = v = \max_{r\in S}\left\{\left(x^TC\right)_r\right\}$$

该命题的第一个条件指出，行玩家的混合策略 x^* 是列玩家的混合策略 y^* 的最佳响应，当且仅当 x^* 支撑集中的所有纯策略 i 都是对混合策略 y^* 的最佳响应。第二个条件表示与列玩家对应的最佳响应条件。

命题 A.4. 判断一个博弈是否存在双方都采用完全混合策略的纳什均衡，这个问题属于 P 类。

证明。 以下线性方程可以检验是否存在双方支撑集大小为 n 的纳什均衡。通过求解这些方程，可以确定一对候选混合策略：

$$\forall j \in [n], \sum_{i\in[n]} x_i c_{ij} = v,$$

$$\sum_{i\in[n]} x_i = 1$$

and

$$\forall j \in [n], \sum_{j\in[n]} y_j r_{ij} = u$$

$$\sum_{j\in[n]} y_j = 1$$

对于行玩家，第一组方程试图找出一个支撑集大小为 n 的策略 x，使列玩家在 $[n]$中的纯策略之间无差异。也就是说，如果行玩家采用 x，那么列玩家采用 $[n]$ 中的纯策略所获得的收益均为 v。第二组方程对列玩家起相同作用。如果这些线性方程无解，那么就不存在双方都采用完全混合策略的纳什均衡。可以使用回代法求解这些方程组。 □

B 具有保证收益的纳什均衡与分区纳什均衡的复杂性

这里我们重新审视 [64] 中的一项困难性结果，并将证明拆分为多个部分，以阐明它与我们所用技术之间的联系。该结果表明，判定一个双矩阵博弈是否存在一个 ϵ-纳什均衡，且其保证收益为 $n-1-\epsilon$，是 NP完全的。我们将这个问题称为保证纳什。

B.1 近似保证纳什

下面给出的 $\mathcal{SV}(\phi,\epsilon)$ 博弈的定义（见 [64]（定理 8.6））比我们的 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 博弈更简单，因为两个玩家使用相同的文字集合，而且与 [21] 中给出的博弈不同，他们的策略集中省略了 f。对称博弈 $\mathcal{SV}(\phi,\epsilon)$ 定义如下：

1. $u_1\left(l^1,l^2\right) = n-1$，其中 $l^1 \neq -l^2$ 对所有 $l^1,l^2 \in L$均成立。这将确保每个玩家在采用上述策略时都能获得较高的收益。2. $u_1(l,-l) = n-4$ 对所有 $l \in L$均成立。这将确保每个玩家不会同时采用一个文字及其否定。3. $u_1(v,l) = 0$，其中 $\mathrm{v}(l) = v$，对所有 $v \in V, l \in L$均成立。这与规则 4 一起确保对于每个变量 v，每个参与者采用 l或 $-l$的概率至少为 $\frac{1}{n}$，其中 $\mathrm{v}(l) = \mathrm{v}(-l) = v$。4. $u_1(v,l) = n$，其中 $\mathrm{v}(l) \neq v$，对所有 $v \in V, l \in L$均成立。5. $u_1(l,x) = n-4$，其中 $l \in L$, $x \in V \cup C$。这与规则 6 和 7 一起确保，如果两个玩家都不采用这些文字，那么收益就无法达到保证值。6. $u_1(v,x) = n-4$ 对所有 $v \in V, x \in V \cup C$均成立。7. $u_1(c,x) = n-4$ 对所有 $c \in C, x \in V \cup C$均成立。8. $u_1(c,l) = 0$，其中 $l \in c$对所有 $c \in C, l \in L$均成立。这与规则 9 一起确保对于每个子句 c，每个参与者以至少 $\frac{1}{n}$的概率采用子句 c中的一个文字。9. $u_1(c,l) = n$，其中 $l \notin c$对所有 $c \in C, l \in L$均成立。

–

注 B.1。 [21, 64] 中引入的博弈是一个对称博弈，这意味着 $\forall s_1,\ s_2 \in S,\ u_1(s_1,\ s_2) = u_2(s_2,\ s_1)$。

命题 B.2。 设 $\epsilon = \frac{1}{2n^3}$，并设每位玩家的保证收益为 $n-1$。给定一个 *3-CNF* ϕ，其可满足，当且仅当在 $\mathcal{SV}(\phi, \epsilon)$ 中存在一个 ϵ-纳什均衡，且每位玩家的保证收益为 $n-1-\epsilon$。

证明。 我们将在B.1.2节中证明这一定理。 □

B.1.1 命题的基本引理B.2

引理 B.3。 在 $\mathcal{SV}(\phi, \epsilon)$ 中任何具有保证收益 $n-1-\epsilon$ 的 ϵ-纳什均衡里，子句和变量被选择的概率至多为 ϵ。

证明。 $\mathcal{SV}(\phi)$的社会福利至多为 $2n-2$。如果两个玩家都不从 L中进行选择，社会福利至多为$2n-4$。当两个玩家以概率 $1-\epsilon$从 L 中进行选择时，期望社会福利至多为 $2n-2-2\epsilon$。因此，对于任意 $\epsilon' > \epsilon$，以概率 ϵ' 选择变量和子句将使期望社会福利至多为$2n-2-2\epsilon' < 2n-2-2\epsilon$。这意味着至少有一个玩家的期望收益低于 $n-1-\epsilon$，这违反了 ϵ-最佳响应的定义。

□

引理 B.4. 在 $\mathcal{SV}(\phi, \epsilon)$ 中，任何具有 $n-1-\epsilon$ 保证收益的 ϵ-纳什均衡下，对于任意 $l \in L$，行玩家选择 l 或 $-l$ 的概率至少为 $\frac{1}{n} - 2\epsilon$。

证明。 假设这不成立，且存在一个 $l \in L$，使得选择 l 的概率小于 $\frac{1}{n} - \epsilon - \frac{2\epsilon}{n} \geq \frac{1}{n} - 2\epsilon$。那么，列玩家选择纯策略$\mathbf{v}(l)$ 的期望收益至少为以下各项之和：

- 当行玩家选择 l 或 $-l$ 时：$\left(\frac{1}{n} - \epsilon - \frac{2\epsilon}{n}\right) \cdot 0$。
- 当行玩家选择除 l 或 $-l$之外的文字时：

$$(1 - \epsilon - (\frac{1}{n} - \epsilon - \frac{2\epsilon}{n})) \cdot n$$

- 当行玩家不选择来自 L 的文字时，这种可能性对应的期望收益部分至少为：$\epsilon \cdot 0$

求和至少为 $n-1+2\epsilon$。由于最大社会福利为 $2n-2$，另一个（行）玩家无法达到保证收益 $n-1-\epsilon$。对另一位玩家而言，情况也一样。 □

引理 B.5. 在 $\mathcal{SV}(\phi, \epsilon)$ 的任意 ϵ-纳什均衡中，若保证收益为 $n-1-\epsilon$，则对于每位玩家和任意文字 $l \in L$，要么以概率 $\geq \frac{1}{n} - 2\epsilon - \frac{1}{n^2}$ 选择 l，要么以小于 $\frac{1}{n^2}$ 的概率选择 $-l$。

证明。 若行玩家选择 l 且列玩家选择 $-l$，则根据构造，收益总和为$2n-8$。不难看出，这种情况发生的概率小于 $\frac{\epsilon}{3}$（论证与引理B.3类似）。如果两位玩家选择这些策略的概率都大于 $\frac{\epsilon}{3}$，那么社会福利将为 $2n-2-\frac{\epsilon}{3}(2n-2) - \frac{\epsilon}{3}(2n-8) = 2n-2-2\epsilon$，这将导致至少一位玩家无法获得 $n-1-\epsilon$。

考虑来自 L 的文字 l 和 $-l$，不失一般性地假设行玩家选择 l 的概率高于 $-l$。回顾一下，我们已经证明，每个玩家选择 l 或 $-l$ 的概率至少为 $\frac{1}{n} - \epsilon - \frac{2\epsilon}{n} \geq \frac{1}{n} - 2\epsilon$。为导出矛盾，假设行玩家选择 l 的概率小于 $\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n^2} + 2\epsilon\right)$（但仍大于$\frac{1}{n^2}$），这意味着行玩家选择 $-l$ 的概率必然大于 $\frac{1}{n^2}$。列玩家要么选择 l 的概率小于 $\frac{1}{n^2}$，要么选择 $-l$ 的概率大于 $\frac{1}{n} - \epsilon - \frac{2\epsilon}{n}$。无论哪种情况，他们同时选择 l 和 $-l$ 的概率至少为：

$$\left[\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n^2} + 2\epsilon\right)\right]\left[\frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} - \frac{1}{2n^6} \geq \frac{1}{2n^3} = \epsilon$$

这是不可能的，因为我们已经证明，两个结果同时发生的概率必须小于 $\frac{\epsilon}{3}$。因此，如果行玩家必须以大于 $\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n^2} + 2\epsilon\right)$的概率选择一个文字，那么这个文字的否定最多只能以 $\frac{1}{n^2}$ 的概率被选择。通过对称论证，列玩家也必须遵循相同的规则。

□

注 B.6. 关于列玩家以大于 l 的概率选择 $\frac{1}{n^2}$ 这一情形的分析与此类似，故未在 [64]中给出。如果列玩家以大于 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\epsilon$ 的概率选择 l，而我们知道行玩家以大于 $\frac{1}{n^2}$ 的概率选择 $-l$，那么他们同时选择 l 和 $-l$ 的概率至少为 $\epsilon>\frac{\epsilon}{3}$。如果列玩家以小于 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\epsilon$ 的概率选择 l，那么列玩家必须以大于 $\frac{1}{n^2}$ 的概率选择 $-l$。根据我们的假设，行玩家以大于 $\frac{1}{n}-2\epsilon$ 的概率选择 l。两个玩家同时选择 l 和 $-l$ 的概率仍大于 $\frac{\epsilon}{3}$。

B.1.2 命题B.2 的证明

下一步是证明命题B.2。

证明。如果 ϕ 可满足，我们将证明存在一个 $\mathcal{SV}(\phi,\ \epsilon)$ 的均匀精确纳什均衡，其中每个玩家都以概率 $\frac{1}{n}$ 均匀地选择 $l^i\in L$ 或 $-l^i\in L$（对所有 i）。

如果 ϕ 可满足，则存在一个赋值，使得 v_1、.....、v_n 被赋为 真 或 假，并满足所有子句。如果 v_i 被赋为 真，那么 l^i；否则，$-l^i$ 将被选为博弈中的策略。然后，l^1、.....、l^n 是与一个满足赋值相对应的文字。每个玩家的期望收益为 $n-1$，因为他们始终会选择 l 或 $-l$ 中的一个。其次，只有两条规则会产生大于 $n-1$ 的收益，即其中一名玩家选择变量或子句的情形。例如，如果行玩家以正概率选择任何子句 c，我们就知道列玩家会以概率 $\frac{1}{n}$ 选择该子句中的某个文字 c，因为另一名玩家会在.....之间随机选择 满足赋值中的文字。因此在这种情况下，行玩家的收益至多为 $\frac{1}{n}\cdot 0+(n-1)\frac{}{n}\cdot n=n-1$，所以行玩家得到相同的收益 $n-1$，对此无差异。对于变量也同样成立。总之，假设一名玩家在满足公式的文字上采用均匀策略，另一名玩家也采取相同的做法，由此形成一个保证收益为 $n-1$ 的纳什均衡。

现在假设 ϕ 不可满足。我们证明，在任何 ϵ-纳什均衡中，至少有一名玩家获得的期望收益始终低于 $n-1-\epsilon$。对于近似版本，我们需要对文字与真值赋值之间的对应关系作如下修改，相较于 [21]。我们认为，如果某个文字被采用的频率高于其否定形式，那么该文字就是 真的 。如果某个赋值不满足该公式，则至少有一个子句不含满足该子句的文字。只要对手采用的文字不属于该子句，任一玩家都可以改用该子句对应的策略，从而获得 n 的收益。根据引理 B.3，我们知道列玩家以概率 $>1-\epsilon$ 采用文字；而每个子句中只有3 个文字，根据引理 $\leq\frac{1}{n^2}$ B.5，列玩家对每个文字的采用概率为 $\leq\frac{1}{n^2}$。行玩家改用该子句策略后，至少会获得 $\left(1-\epsilon-\frac{3}{n^2}\right)n>n-1+2\epsilon$。因此，要么行玩家可以通过改变策略获得 ϵ 更高的收益，要么他已经获得了 $n-1+2\epsilon$，因此另一名玩家没有至少为 $n-1-\epsilon$的保证收益。 □

B.2 分区纳什均衡的困难性与命题4.18

证明。正如所述，很容易检查分区纳什均衡所需的两个条件是否满足。因此，该问题属于 NP。命题4.4表明，即使是该问题的多项式近似版本也是 NP 困难的。根据命题4.4，我们知道，在 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 中，任何不满足双方玩家的支撑集中都包含 f 的 ϵ-纳什均衡，都具有以下性质：对于每个玩家 $i\in\{1,2\}$ 以及任意特定文字 l_i，只要 $g(l_2)=g(l_1)=l$，$l_i\in L_i$ 或 $-l_i\in L_i$ 中有一个以大于 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-2\epsilon$ 的概率被采用，而另一个以小于 $\frac{1}{n^2}$ 的概率被采用。所有其他可能的策略被采用的概率至多为 ϵ，因为文字必须以概率 $1-\epsilon$ 被采用。

在 $\mathcal{G}(\phi,\ \epsilon)$ 中，任何精确不相交纳什均衡都应满足以下性质：对于所有满足 $g(l_1)=g(l_2)=l$ 的 $l_1\in L_1$ 和 $l_2\in L_2$，行玩家必须以概率 $\frac{1}{n}$ 选择 l_1 或 $-l_1$ 之一，另一项的选择概率必须为零，紧接着是 [21]。注意，如果其中一位玩家选择了 f，另一位玩家也必须选择 f；本证明不涉及这种情况。在此情况下，所有玩家都只会选择各自关联的文字，因为其他所有文字都被其他所有策略支配。

如果公式 ϕ 可满足，则可通过 4.4 生成一个精确不相交纳什均衡。假设 (x^*,y^*) 是 $\mathcal{G}(\phi,\epsilon)$ 的一个精确不相交纳什均衡。我们将该策略修改为 (x^-,y^-)，并生成一个 ϵ-划分纳什均衡。考虑 $\epsilon'=\frac{\epsilon}{cn}$，并回想 $\epsilon=\frac{1}{2n^3}$。我们选择让 ϵ' 非常小，是因为我们有一些严格劣势策略（c 足够大，可以涵盖划分所需的所有规则），而且 f 的概率不能大于 $\frac{\epsilon}{n}$。我们从列玩家的一种纯策略中取出一小部分概率 $\frac{\epsilon'}{2}$，并将其平均分配给列玩家那些不在行玩家和列玩家支撑集中的策略。显然，根据引理 4.2，(x^-,y^-) 是一个 ϵ-近似分区纳什均衡。现在，划分纳什的两个性质

实例都满足。显然，如果我们有一个近似分区纳什均衡 $(x^-,\ y^-)$，就可以直接生成一个能够推出满足赋值的精确不相交纳什均衡。这是因为所有以大于 $\frac{1}{n}-2\epsilon-\frac{1}{n^2}$ 的概率进行的文字 l，其概率 $\frac{1}{n}$ 可以确定公式 ϕ 的一个赋值。

□

注记 B.7。 命题 3.15 的证明只需将那些与能够给出 SAT 答案的文字无关的策略平均分配给两位玩家即可。

C 对角修正博弈与约束远均衡

命题 4.27的证明

我们知道，基本上，存在一个博弈 $\mathcal{G}$，已知在 [18] 中寻找均衡是困难的，即使是进行逆多项式近似也很困难，下面我们将重述这一点:

定理 C.1 ([18])。 对于任意 $c>0$，计算双人博弈的 n^{-c} 近似纳什均衡这一问题是 *PPAD* 完全的。

通过使用下文给出的构造，可以将该博弈约化为一个对角修正博弈。设此标准型博弈 $\mathcal{G}$ 的收益矩阵为 U_1 和 U_2，其中两位玩家的策略均来自 $S=[n]$。在我们生成的下述博弈 $\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})'$ （它也是一个对角修正博弈）中，原博弈 $\mathcal{G}$的任何纳什均衡都会形成一个不相交纳什均衡（同时也是一个受约束不相交均衡）。注意，在此博弈的任何纳什均衡中，行玩家只能对 S_1 赋予正概率；列玩家则只能对 S_2 赋予正概率。证明由例 4.1可得。

$$U_1'(x,y)=\begin{cases}U_1^{\mathcal{G}}(i,j) & i\in S_1\ and\ j\in S_2\\ -M & otherwise\end{cases}$$

$$U_2'(i,j)=\begin{cases}U_2^{\mathcal{G}}(i,j) & i\in S_1\ and\ j\in S_2\\ -M & otherwise\end{cases}$$

U_1' 和 U_2' 的两个对角元素都可以是任意负数，但必须严格小于原博弈中的最小元素（通常为零）。在第一个博弈中找到的任何（EXACT）纳什均衡，都可以通过为每位玩家使用相应的策略副本，映射为第二个博弈中的一个不相交纳什均衡。显然，在第二个博弈中找到的任何受约束不相交均衡（同时也是不相交纳什均衡），也可以映射为第一个博弈中的一个纳什均衡。

现在，假设我们给定了一个近似受约束不相交纳什均衡 (x^*,y^*)，它属于 $\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})$ 且近似误差为 ϵ。在 ϵ-受约束不相交均衡中，$\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})'$ 玩家可以以小于 $\frac{\epsilon}{M}$ 的概率采用并非分配给自己的策略。应用引理 4.2，我们可以为 $\mathcal{G}$生成一个有效近似纳什均衡。

C.2 命题4.33的证明

若我们有一个针对 $\mathcal{G}$ 的 θ-受限不相交均衡（$x^*,\ y^*$），我们将证明该均衡是 $\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})$ 的不相交纳什均衡。对于所有纯策略 $s\in S$，我们需要证明:

$$U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(x^*,y^*)\geq U_1^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})}(s,y^*)$$

我们很容易证明，对于所有 $s\notin Supp(y^*)$，这个不等式都成立，因为我们知道 $U^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}}(\mathcal{G})\ \mathbf{1}\ (x^*,y^*)=U_1^{\mathcal{G}}(x^*,y^*)$，且 $U_1^{\mathcal{G}}(s,y^*)=U^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}}(\mathcal{G})\ \mathbf{1}\ (s,y^*)$。接下来，考虑任意 $s\in Supp(y^*)$。在 (x^*,y^*) 中，概率小于 $\frac{1}{M}$ 的情况不可能发生，零除外。因此，可以得出 $U^{\mathcal{D}^{\mathrm{M}}}(\mathcal{G})\ \mathbf{1}\ (s,y^*)<0$。这是因为 s 以概率 $\mathbf{1}$ 被采用，而列玩家必须以大于 $\frac{1}{M}$ 的概率采用 s。

我们知道，(x^*,y^*) 在 $\mathcal{D}^{\mathrm{M}}(\mathcal{G})$ 中的收益为正，这意味着在这种情况下不可能偏离到 s。通过对称论证，这对列玩家同样成立。类似的论证也适用于近似概念。

C.2.1 受约束不相交均衡属于 NP

命题 C.2. 在双矩阵中寻找受约束不相交均衡的问题属于 NP。

证明。 我们使用等价的矩阵形式来计算期望收益。假设我们有一个受约束不相交均衡 $(x^*, y^*) \in \triangle_n \times \triangle_n$。我们可以针对行玩家检查以下内容（列玩家同理）：

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \cap S - Supp(y^*), x^{*T} R y^* \geq e_i^T R y^*$$

假设 $x = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})$ 是 $\mathcal{R}^n_{disjoint}(y^*)$ 中的一个任意混合策略，其中我们移除了所有被赋予零概率的策略。我们证明，$\mathcal{R}^n_{disjoint}(x^*)$ 中的任意策略都可以按如下方式生成。我们对每个 i 将 α_i 乘以之前的不等式，并按如下方式计算求和：

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{*T} R y^* \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i^T R y^*$$

由于 x 是一个概率分布，因此我们有 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$。右侧将为 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i^T R y^* = x R y^*$。最后，结果为：

$$\forall x \in \mathcal{R}^n_{disjoint}(y^*),\ x^{*T} R y^* \geq x^T R y^*$$

对于第二位玩家，我们也可以采用相同的方法：

$$\forall y \in \mathcal{R}^n_{disjoint}(x^*),\ x^{*T} C y^* \geq x^{*T} C y$$

□

推论 C.3. 在双矩阵博弈中寻找近似受限不相交均衡的问题属于 NP。

证明。 受限版本的约束互斥均衡多了一个条件，而检查该条件可以在多项式时间内完成。

□