arXiv:2305.04932v1 [math.FA] 7 May 2023

关于李雅普诺夫算子和斯坦算子的奇异 M矩阵某一性质的类比

A.M. Encinas [1]，Samir Mondal [2] 和 K.C. Sivakumar [2]

摘要

对于实方阵，已知若 A 是一个奇异的不可约 M矩阵，那么属于 A 值域的唯一非负向量是零向量。本文证明了这一结果对于李雅普诺夫算子和斯坦算子的一个类比。

关键词： M矩阵，奇异不可约 M矩阵，几乎单调性，李雅普诺夫算子，斯坦算子。

美国数学学会主题分类：15A48, 15A23, 15A09, 15A18

[1]加泰罗尼亚理工大学数学系，西班牙巴塞罗那（andres.marcos.encinas@upc.edu）。[2]印度理工学院马德拉斯分校数学系，印度金奈 600036（ma19d750@smail.iitm.ac.in, kcskumar@iitm.ac.in）。

1 引言

所有 $n \times n$ 阶实矩阵的集合记为 $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$。对于矩阵 $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$，我们用 $X \geq 0$ 表示 X的所有元素均为非负数。如果 X 的所有元素均为正数，则用 $X > 0$表示。对于向量，我们也采用相同的记号。

通常，对于任意 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$， $N(A)$ 和 $R(A)$ 分别表示 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 的零空间和值域。 A 的秩为 $\mathbf{rk}(A)$， $R(A)$ 的维数。此外， $\rho(A)$ 表示 A 的谱半径；即其特征值绝对值中的最大值。

如果存在置换矩阵 $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$，使得 $P^T AP$具有如下形式，则称矩阵 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 是可约的

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$$

其中 S_{11} 和 S_{22} 是阶至少为 1 的方阵。如果一个矩阵不是可约的，则称其为不可约矩阵。

矩阵 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 的群逆（如果存在）是满足方程 $AXA = A$、 $XAX = X$ 和 $AX = XA$ 的唯一矩阵 $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$。如果群逆存在，则记为 $A^{\#}$。当然，当 A 是非奇异的时， $A^{\#}$ 存在，并且还有 $A^{\#} = A^{-1}$。

矩阵 A的群逆存在的充要条件是 A的指标为 1；也就是说， $R(A^2) = R(A)$，这等价于条件$N(A^2) = N(A)$，参见 $[1, $定理 2，第 4 节$4]$。另一种刻画是，$A^{\#}$ 存在当且仅当 $R(A)$ 和 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$的互补子空间。容易证明，任意对称矩阵都有群逆；幂零矩阵 A （即 $A^n = 0$）没有群逆；而幂等矩阵（即 $A^2 = A$）的群逆存在且就是其本身。更多详情请参见 $[1, $第 $4]$章。

若 $\mathcal{S}^n(\mathbb{R})$ 是 $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 中的对称矩阵子空间，其中 $X \in \mathcal{S}^n(\mathbb{R})$，则用 $X \succeq 0$ 表示 X 是半正定矩阵。若 X 是正定矩阵，则使用$X \succ 0$。

定义 1.1. 如果矩阵 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 的所有非对角元素均为非正，则称其为 Z-矩阵。任何 Z-矩阵 A 都可表示为 $A = sI - B$，其中 $s \geq 0$ 且 $B \geq 0$。如果 $s \geq \rho(B)$，则称 A 为 M-矩阵。

M-矩阵这一概念由 A. Ostrowski 于 1935 年提出，以纪念 H. Minkowski；后者曾于 1900 年前后研究过这类矩阵。 M-矩阵具有许多有趣的非负性性质。例如，在上述表示中，设

$s > \rho(B)$。然后，$A = s\big(I - \frac{B}{s}\big)$ 并考虑 $\frac{B}{s}$ 的诺伊曼级数；即：

$$\Big(I - \frac{B}{s}\Big)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{B}{s}\Big)^{m} \geq 0.$$

我们得出，A可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{s}\Big(I - \frac{B}{s}\Big)^{-1} \geq 0$。在这种情况下，我们将 A称为可逆的 M-矩阵。否则，我们称 A为奇异的M-矩阵。

这里给出了可逆 M-矩阵的一个刻画。关于证明，请参阅文献 [2, 第 6], 章，其中给出了五十种不同的刻画方式。

定理1.2。 *[2,*定理2.3，第 *6]*章
设 A 是一个 Z-矩阵。则下列命题等价：(a) A 是一个可逆的 M-矩阵。(b) 存在 $x > 0$ 使得 $Ax > 0$。(c) 对每个 $q > 0$，都存在 $x > 0$ 使得 $Ax = q$.(d) A 是单调的，即 $Ax \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0$。$A$ 是逆非负的，即 A 可逆且 $A^{-1} \geq 0$。(f) A是一个 P-矩阵，即 A的所有主子式均为正。(g) A 是正稳定的，即其每个特征值的实部均为正。假设 A 具有表示形式 $A = sI - B$，其中 $B \geq 0$ 且 $s \geq \rho(B)$。那么，上述每个命题都等价于：(h) $s < \rho(B)$。此外，当 A不可约时，上述命题等价于：(e') A 是逆正的，即 A 可逆且 $A^{-1} > 0$。

我们将在下一节中考虑定理1.2针对 $S^n(\mathbb{R})$上两类特殊算子的版本（定理2.1和定理2.2）。

接下来，让我们关注奇异 M-矩阵的情形。由于奇异不可约 M-矩阵与许多应用密切相关，这类矩阵中一个重要的子类便是奇异不可约 M-矩阵的集合。对于这类矩阵，我们回顾一个众所周知的结果，该结果将为本文内容提供动机。

定理1.3。 *[2,*定理 4.16，第 *6],[8,* 章 *3]*设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$为奇异不可约 M-矩阵。则以下结论成立：(a) $\mathrm{rk(A)} = \mathrm{n} - 1$.(b) 存在一个向量 $x > 0$ 使得 $Ax = 0$.(c) $A^{\#}$ 存在，并且在 $R(A)$上非负，即 $x \geq 0, x \in R(A) \Longrightarrow A^{\#}x \geq 0$。(d) A的所有主子矩阵，除了 A 本身，都是可逆的 M-矩阵。(e) A 是几乎单调的，即 $Ax \geq 0 \Longrightarrow Ax = 0.$

我们指出，在 [2, 定理 4.16 第 6] 章中，命题 (c) 被证明具有A “性质 c”，并且定理 1.3 中的 (c) 与之等价也得到了证明

在 [8, 定理 3]中。回顾一下，如果一个奇异的 M-矩阵 A 满足 $A = sI - B$，则称其具有 $B \geq 0$“性质 c”，其中 $s > 0$，且矩阵 $\frac{1}{s}B$ 是半收敛的。矩阵 X 的半收敛性是指矩阵序列 $\{X^k\}$ 收敛。请注意，对于可逆的 M-矩阵，这样的序列收敛到零。这类矩阵最常见的情形之一是出现在不可约马尔可夫过程中，此时涉及形如 $I-T$的矩阵，其中 T是不可约列随机矩阵。关于刻画奇异不可约 M-矩阵的更多结果，请参阅 [6] 。

定义 1.4. 如果一个矩阵 A 是值域单调的（例如，参见 [7]），则称其为值域单调矩阵。

$$Ax \geq 0, x \in R(A) \Longrightarrow x \geq 0.$$

If A是值域单调的，那么我们称 A具有值域单调性。

注意到， A 的值域单调性等价于： $A^2x \geq 0 \Longrightarrow Ax \geq 0$.此外， [8, 定理 1.3 的陈述（$c$）由定理 3（e）] 表明，其等价于 A的值域单调性。

让我们回顾一个比值域单调性更强的概念。这个概念将在本文中发挥核心作用。

定义 1.5。令 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$。若 A，则称其为平凡值域单调。

$$Ax \geq 0, x \in R(A) \Longrightarrow x = 0.$$

A 的平凡值域单调性与以下内容相同： $A^2x \geq 0 \Longrightarrow Ax = 0$. 容易验证，矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 是平凡值域单调的。

定理 1.6. 设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 是一个奇异的不可约 M-矩阵。那么 A 是平凡值域单调的。

证明. 假设 $Ax \geq 0, x \in R(A)$。那么由 A的几乎单调性（定理 1.3 的 (e) 项），可得 $Ax = 0$。因此， $x \in N(A) \cap R(A)$，且由于群逆 $A^{\#}$ 存在，我们有 $x = 0$. □

在这项工作中，我们关注如何确定实对称矩阵空间上的李雅普诺夫算子和斯坦算子是否具有平凡值域单调性这一问题。我们考察了四类矩阵，它们分别对应这些算子的特定情形，并对此给出了肯定或否定的答案。主要结果见定理 3.10、定理 3.15 和定理 3.17。第 4 节给出了相关反例，随后以汇总表的形式归纳了研究结果。

2 预备知识

有限维希尔伯特空间 H 的非空子集 C 称为真锥，若对于所有 $\alpha \geq 0$， $C + C = C$、$\alpha C \subseteq C$，且 C 具有非空内部。给定一个锥 C，我们将其对偶锥 C^* 定义为。

$$C^* := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \geq 0,\ \forall x \in C\}.$$

由此可知， C^* 确实是真锥。一个众所周知的真锥例子是非负正交象限 $\mathbb{R}^n_+$，即非负向量构成的锥。设所有 n 阶实对称矩阵构成的空间记为 $\mathcal{S}^n$。那么， $\mathcal{S}^n$ 是一个实希尔伯特空间，其迹内积为 $\langle A, B\rangle = tr(AB)$ $A, B \in \mathcal{S}^n$. 在 $\mathcal{S}^n$ 中，所有半正定矩阵构成的集合记为 $\mathcal{S}^n_+$，它是一个锥。这两个锥都满足自对偶性条件，即 $C^* = C$，当 $C = \mathbb{R}^n_+$ 或 $\mathcal{S}^n_+$ 时。

接下来，我们注意到，如果 A 是一个 Z-矩阵，那么 $\langle Ae_j、\ e_i\rangle = a_{ij} \leq 0、\ i \neq j$, 其中 e_i 表示 $\mathbb{R}^n$ 的第 i 个标准基向量。这些基向量也彼此正交且为正。由此可知，矩阵 A 为 Z-矩阵的一个等价表述为：

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \ \text{ and } \ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle Ax, y\rangle \leq 0.$$

这相当于说（其中 $C = \mathbb{R}^n_+$）：

$$x \in C,\ y \in C^* \quad \text{and } \ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle Ax, y\rangle \leq 0.$$

受上述重新表述的启发，若线性算子 T：$\mathcal{S}^n \longrightarrow \mathcal{S}^n$ 满足以下条件，则称其为 Z-算子：

$$X \succeq 0, Y \succeq 0 \quad \text{and } \ \langle X, Y\rangle = 0 \implies \langle T(X), Y\rangle \leq 0,$$

其中， $U \succeq 0$ 表示对称矩阵 U 是半正定的事实。当 $-U \succeq 0$时，我们将使用记号 $U \preceq 0.$。在本文中，我们将研究 $\mathcal{S}^n$ 上的两个重要算子类，即李雅普诺夫算子和斯坦算子。首先来看它们的定义。给定 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$， $\mathcal{S}^n$ 上的李雅普诺夫算子 L_A 定义为

$$L_A(X) := AX + XA^T,\ X \in \mathcal{S}^n$$

而斯坦算子 S_A 定义为

$$S_A(X) := X - AXA^T,\ X \in \mathcal{S}^n.$$

令 L 表示给定矩阵 A 的 Lyapunov 或斯坦算子。那么 L 满足以下条件（与 A 无关）：

$$X \succeq 0, Y \succeq 0 \quad \text{and} \quad \langle X, Y \rangle = 0 \implies \langle L(X), Y \rangle \leq 0.$$

因此，这两个算子都可以被视为作用于 $\mathcal{S}^n$ 上的线性映射的 Z-矩阵的类比。

若算子 T 作用于 $\mathcal{S}^n$，且 T 是一个可逆的Z算子，并且 $T^{-1}(\mathcal{S}_+^n) \subseteq \mathcal{S}_+^n$，则称其为正稳定的 Z算子。注意，这推广了我们对可逆 M矩阵的认识：它是可逆的，且其逆矩阵非负，即保持锥 $\mathbb{R}_+^n$ 不变。

下面的结果是定理1.2中（(b)和(c)两项）针对李雅普诺夫算子 [5]的一个版本。记号 $U \succ 0$ 表示对称矩阵 U 是正定的。

定理2.1。（*[5,*定理 *5]*）
对于 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$，以下命题等价：(a) 存在 $E \succ 0$，使得 $L_A(E) \succ 0$。(b) 对每个 $Q \succ 0$，都存在 $X \succ 0$，使得 $L_A(X) = Q$。(c) A 是正稳定的。

接下来陈述斯坦算子的一个版本。原始结果适用于复矩阵 [4]。我们仅介绍实数情形。回顾一下，如果矩阵 A 的所有特征值都位于复平面的开单位圆盘内，则称该矩阵是施尔稳定的。

定理2.2。（*[4,*定理 *11]*）
对于 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$，以下陈述等价：(a) 存在 $E \succ 0$，使得 $S_A(E) \succ 0$。(b) 对于每个 $Q \succ 0$，都存在 $X \succ 0$，使得 $S_A(X) = Q$。(c) A 是 Schur 稳定的。

这些结果可视为定理1.2的类似结论。令 L 表示李雅普诺夫算子或斯坦算子。于是，定理2.1或定理2.2的(*b*)指出，算子 L 的值域包含所有（对称）正定矩阵构成的开集。因此，L 是满射，因而也是单射。于是，L 可逆。由同一结论还可得，$L^{-1}(\mathcal{S}_+^n) \subseteq \mathcal{S}_+^n$。因此，这两个算子都是正稳定的 Z-算子。

3 主要结果

我们希望识别一些矩阵类，使得李雅普诺夫算子和/或斯坦算子是平凡值域单调的。首先，我们来定义这一概念。受矩阵定义的启发，如果线性算子 $T\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$值域单调，则称其为值域单调的。

$$T(X) \succeq 0, X \in R(T) \implies X \succeq 0$$

并将 T 称为平凡值域单调，如果

$$T(X) \succeq 0, X \in R(T) \Longrightarrow X = 0.$$

与矩阵的情形一样，可以注意到，线性算子 T值域单调等价于条件： $T^2(X)$ $\succeq 0 \Longrightarrow T(X) \succeq 0$而平凡值域单调等价于： $T^2(X) \succeq 0 \Longrightarrow T(X) = 0.$

接下来，我们给出一个值域单调算子的例子，以及一个不具值域单调性的算子例子。

例 3.1。设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 相应的李雅普诺夫算子为

$$L_A(X) = \begin{pmatrix} 2(x_{11} + x_{12}) & x_{12} + x_{22} \\ x_{12} + x_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}$.取 $x_{11} = x_{22} = 1, x_{12} = -1$可知 L_A不可逆。容易看出，若 $X \in R(L_A)$，则 $x_{22} = 0$. 接下来，对于这样的X，若 $L_A(X)$ 是半正定矩阵，则 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 也为半正定。因此， L_A 是一个值域单调算子。它不是平凡值域单调的，因为 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R(L_A) \cap \mathcal{S}_+^n.$

例 3.2。令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则相应的斯坦算子为、】【

$$S_A(X) = -\begin{pmatrix} 2b + c & c \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

给定 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.，令 $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.。则 $S_A(Y) = X,$ 从而 $X \in R(S_A)$。此外， $S_A(X) = 0$。这表明 S_A 不是值域单调的。

容易证明，如果一个算子是幂等算子，那么它就是值域单调的。这里唯一用到的事实是：幂等算子在其值域上等同于恒等算子。我们将这一结论记录如下。

引理 3.3. 设 $T : V \to V$ 是幂等的。那么 T 是值域单调的。

首先，我们探讨 Lyapunov 算子和斯坦算子在何种情况下是幂等的。相关结果是定理 3.6 和定理 3.9。据我们所知，似乎此前尚未有人研究过这个问题。

我们再引入一些记号。 $\mathbb{R}^n$ 中的全 1 向量记为 e。对于任意$jj = 1$、.....、 n，我们定义对称矩阵 $E_{jj} = [0, \ldots, \overset{\downarrow}{e_j}, \ldots, 0]$；对于任意$i \quad j1 \le i < j \le n$，我们还定义对称矩阵 $E_{ij} = [0, \ldots, \overset{\downarrow}{e_j}, \ldots, \overset{\downarrow}{e_i}, \ldots, 0]$。显然， $\{E_{ij}\}_{1 \le i \le j \le n}$是 $\mathcal{S}^n$的一组基。因此，如果 $A = [c_1, \ldots, c_n] \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$，我们

$j \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \quad j$有， $AE_{jj} = [0, \ldots, \overset{\downarrow}{c_j}, \ldots, 0]$，对任意 j成立；而 $AE_{ij} = [0, \ldots, \overset{\downarrow}{c_j}, \ldots, \overset{\downarrow}{c_i}, \ldots, 0]$，对任意 $1 \le i < j \le n$成立。

下面我们列出李雅普诺夫算子的若干性质。我们只证明第二条，其余各条显然成立。

引理 3.4。
(a) 对任意 $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 和任意 $s, t \in \mathbb{R}$, $L_{tA+sB} = tL_A + sL_B$。(b) L_A 是零算子，当且仅当 $A = 0$； L_A 是恒等算子，当且仅当 $A = \frac{1}{2}I$。(c) 对任意 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$，$L_A(I) = A + A^T$，因此 $L_A(A + A^T) = L_A^2(I)$。(d) 对任意正交矩阵 P，有：$L_{PAP^T}(PXP^T) = PL_A(X)P^T$.

Proo。(b) 令 $c_j = (c_{1j}, \ldots, c_{nj})^T$ 为 A 的第 j 列，其中 $1 \le j \le n.$，则

$$L_A(E_{jj}) = [0, \ldots, c_j, \ldots, 0] + [0, \ldots, c_j, \ldots, 0]^T.$$

因此，当 $L_A = 0$ 时，我们推知 $c_{ij} = 0, j \ne i$ 和 $2c_{jj} = 0$。当 $L_A = I$ 时，则有 $c_{ij} = 0, j \ne i$ 和 $2c_{jj} = 1$。□

定义 3.5. 如果 L_A 是幂等的，即 $L_A^2 = L_A$，则称方阵 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 为李雅普诺夫幂等矩阵，简称 L-幂等矩阵。

显然，当 $A = 0$ 时， A 是 L-幂等的；当 $A = \frac{1}{2}I$ 时也是如此。此外，当 L_A 是幂等的时， L_{tA} 并非幂等的，除非 $A = 0$ 或 $t \ne 0$，1：由于对于任意 $t \in \mathbb{R}$，都有 $L_{tA} = tL_A$ ，因此我们有 $L_{tA}^2 = t^2 L_A^2 = t^2 L_A$。因此，如果 tA 是 L-幂等的，则 $tL_A = L_{tA} = L_{tA}^2 = t^2 L_A$，这意味着 $t = 0$ 或 $L_A = tL_A$。当 $t \ne 0$ 时，上述等式意味着 $t = 1$ 或 $L_A = 0$，这等价于： $A = 0$。

定理 3.6. 矩阵 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 是 L-幂等的，当且仅当它是对角矩阵，并且$\sigma(A) \subseteq \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$。特别地，唯一的非奇异 L-幂等矩阵是 $\frac{1}{2}I$。

证明。首先， A 是 L-幂等的，当且仅当对于任意 $X \in \mathcal{S}^n$ ，都有

$$A^2X + 2AXA^T + X(A^T)^2 = AX + XA^T.$$

特别地，如果 $A^2 = [\hat{c}_1、 \ldots、 \hat{c}_n]$，取 $X = E_{jj}、 j = 1、 \ldots、 n$，则左侧得到的表达式为

$$[0, \ldots, \hat{c}_j, \ldots, 0] + [0, \ldots, \hat{c}_j, \ldots, 0]^T + 2[c_{1j}c_j, \ldots, c_{jj}c_j, \ldots, c_{nj}c_j]^T,$$

而右侧则化简为

$$[0,\dots,c_j,\dots,0]+[0,\dots,c_j,\dots,0]^T.$$

这意味着，对于 i， $2c_{ij}c_{kj}=0$ $k\neq j$。特别地，对于 $i\neq j$， $c_{ij}^2=0$，因此 $c_j=c_{jj}e_j$，进而意味着 A 必为对角矩阵，故为对称矩阵。现在，令 $d_1,\dots,d_n$ 为 A 的对角元素。最后，将 $X=I$ 代入恒等式，可得 $4A^2=2A$，即对于任意 $j=1,\dots,n$， $d_j(2d_j-1)=0$，证明完毕。□

引理 3.7. 斯坦算子满足以下基本性质：
(a) 对任意 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$， S_A 都是线性的。(b) 若 P是正交矩阵，则， $S_{PAP^T}(PXP^T)=PS_A(X)P^T$.(c) S_A 是恒等算子当且仅当 $A=0$，且 S_A 是零算子当且仅当 $A=\pm I$。

证明。我们只证明性质 (c)，因为其他性质显而易见。对于第一部分，显然，对于任意对称矩阵 X， S_A 是恒等矩阵当且仅当 $AXA^T=0$。特别地，取 $X=I$，可得 $AA^T=0$，因此 $A=0$。
下面证明第二部分。注意，若对于任意 $j=1,\dots,n$， $c_j=(c_{1j},\dots,c_{nj})^T$是 A 的第 j 列，则

$$S_A(E_{jj})=[0,\dots,e_j,\dots,0]-[c_{1j}c_j,\dots,c_{jj}c_j,\dots,c_{nj}c_j]^T.$$

因此，当 $S_A=0$ 时，这意味着 $c_{jj}c_j=e_j$。于是，$c_{jj}^2=1$ 且 $c_{ij}=0$，$i\neq j$。

Fin最后，当 $i<j$ 时，考虑到 $A=[c_{11}e_1,\dots,c_{nn}e_n]$，我们得到 t

$$0=S_A(E_{ij})=[0,\dots,e_j,\dots,e_i,\dots,0]-[0,\dots,c_{ii}c_{jj}e_j,\dots,c_{jj}c_{ii}e_i\dots,0],$$

这意味着 $c_{ii}c_{ij}=1$，从而证明了 $A=\pm I$。 □

定义 3.8. 方阵 $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 称为 S-幂等的，当且仅当 S_A 是幂等的；也就是说，$S_A^2=S_A$。

显然，当 $A=0$ 时， A 是 S-幂等的；当 $A=\pm I$ 时亦然。

定理 3.9. 矩阵 $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 是 S-幂等的，当且仅当 $A^2=\pm A$。特别地，唯一的非奇异 S-幂等矩阵是 $\pm I$。

证明。首先，对于任意 $X\in\mathcal{S}^n(\mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned}S_A^2(X)=S_A(S_A(X)) &= S_A(X)-AS_A(X)A^T\\ &= X-AXA^T-A(X-AXA^T)A^T\\ &= X-2AXA^T+A^2X(A^T)^2\end{aligned}$$

因此， A 是 S-幂等的，当且仅当

$$AXA^T = A^2X(A^T)^2$$

对于任意 $X \in \mathcal{S}^n(\mathbb{R})$，这特别意味着

$$AE_{jj}A^T = A^2E_{jj}(A^T)^2$$

对于任意 $j = 1, \ldots, n$。因此，若对于任意 $j = 1, \ldots, n$，我们考虑 $c_j = (c_{1j}, \ldots, c_{nj})^T$（ A的第 j 列）以及 $\hat{c}_j = (\hat{c}_{1j}, \ldots, \hat{c}_{nj})^T$（ A^2的第 j 列），则

$$[c_{1j}c_j, \ldots, c_{nj}c_j] = [\hat{c}_{1j}\hat{c}_j, \ldots, \hat{c}_{nj}\hat{c}_j], \quad j = 1, \ldots, n.$$

对于固定的 $j = 1, \ldots, n$，上述等式意味着 $\hat{c}_j = 0$ 当且仅当 $c_j = 0$，并且还有 $\hat{c}_j = d_jc_j$，其中 $d_j \in \mathbb{R}$ 且 $d_j \neq 0$。此外，对于任意 $k = 1, \ldots, n$，我们也有 $c_{kj}c_j = \hat{c}_{kj}d_jc_j$，因此当 $c_j \neq 0$ 时，这意味着 $c_{kj} = d_j\hat{c}_{kj}$。于是 $c_j = d_j\hat{c}_j$。总之，若 $c_j \neq 0$，则有 $c_j = d_j\hat{c}_j = d_j^2c_j$，从而 $d_j^2 = 1$。由于当 $c_j = 0$ 时该结论也成立，因为此时 $\hat{c}_j = 0$，我们得出$A^2 = AD$，其中 $D^2 = I$。

最后，假设当 $1 \leq i < j \leq n$ 时 $d_id_j = -1$。由于

$$AE_{ij}A^T = A^2E_{ij}(A^T)^2, \ 1 \leq i \leq j \leq n.$$

我们还有

$$[c_{1j}c_i + c_{1i}c_j, \ldots, c_{nj}c_i + c_{ni}c_j] = [\hat{c}_{1j}\hat{c}_i + \hat{c}_{1i}\hat{c}_j, \ldots, \hat{c}_{nj}\hat{c}_i + \hat{c}_{ni}\hat{c}_j],$$

因此，对于任意 $k = 1, \ldots\ldots, n$

$$c_{kj}c_i + c_{ki}c_j = d_id_j(c_{kj}c_i + c_{ki}\ c_j) = -c_{kj}c_i - c_{ki}c_j$$

这意味着 $c_{kj}c_i + c_{ki}c_j = 0$，进而使我们得出结论：$c_{kj}c_{ki} = 0$。如果 $c_i \neq 0$，那么对于某些 $k = 1, \ldots\ldots, n$，有 $c_{ki} \neq 0$，因此上述等式意味着 $c_{kj} = 0$，从而有 $c_j = 0$。所以，当 $d_id_j = -1$ 时， c_i 或 c_j 必须是零向量。

令 $i = \min\{k = 1, \ldots, n : \ c_k \neq 0\}$。则，

$$AD = [d_1c_1, \ldots, d_ic_i, \ldots, d_nc_n] = d_i[c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n] = d_iA,$$

因为当 $1 \leq j < i$、 $0 = c_j = d_jc_j = d_ic_j$ 时，而当 $j > i$ 且 $d_j \neq d_i$ 时，则$c_j = 0$。因此 $0 = c_j = d_jc_j = d_ic_j$。 □

根据引理 3.3、定理 3.6 和定理 3.9，我们得到以下结果。证明略。

定理 3.10。设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$。则有如下结论：
(a) 如果 A 是一个对角矩阵，其对角元素为 0 或 1 2，那么李雅普诺夫算子 L_A 是值域单调的。
(c) 如果 A 满足 $A^2 = \pm A$，则斯坦算子 S_A 是值域单调的。

下面简要讨论有限维向量空间 V [9] 上线性算子的群逆这一概念。设 $T: V \to V$ 为线性算子。若 T 满足 $TLT = T$、$LTL = L$ 和 $TL = LT$，则称 T 存在群逆 L： $V \to V$。T 的群逆不一定存在，但当其存在时，它是唯一的，记为 $T^{\#}$. 。在下面的讨论中，我们将用到以下结论。

定理 3.11。 *[9,* 定理 *5]* 设 $T: V \to V$ 为线性的。则以下各项等价：

(a) $T^{\#}$ 存在。(b) V的子空间 $R(T)$ 和 $N(T)$ 互补。(c) $R(T^2) = R(T)$。(d) $N(T^2) = N(T)$。

回顾一下，内积空间上的算子 T 若满足 $TT^* = T^*T$，则称为正规算子，其中 T^* 表示 T 的伴随。容易看出，若 T 是正规算子，则 $R(T^*) = R(T)$。因此，若 T 是正规算子，则子空间 $R(T)$ 和 $N(T)$ 互补。由此得到定理 3.11 的如下推论。

推论 3.12. 设 T： $V \to V$ 为线性算子，其中 V 是有限维内积空间。若 T 是正规算子，则 $T^{\#}$ 存在。

定义 3.13. 若存在常数 α 使得 $T^k = \alpha T$.，则称算子 $T: \mathcal{S}^n \longrightarrow \mathcal{S}^n$ 为广义 k-幂等（$k \geq 2$）。

命题 3.14. 设 T： $\mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ 为广义 k-幂等算子，则 $T^{\#}$ 存在。特别地，任意幂等算子都是群可逆的。

证明。对于某个 $k \geq 2.$，我们有 $T^k = \alpha T$令 $T^2(x) = 0.$则 $0 = T^k(x) = 0 = \alpha T(x) = 0$，从而证明了 $T(x) = 0.$因此 $N(T^2) = N(T)$。所以， T的群逆存在。□

在下一个结果中，我们确定四类矩阵，对于这些矩阵，李雅普诺夫算子和斯坦算子都是群可逆的。我们将使用以下观察结果。设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$。那么， $L_A^* = L_{A^T}$ 和 $S_A^* = S_{A^T}$.
定理 3.15。
若 A满足以下任一条件，则群逆 $L_A^{\#}$ 和 $S_A^{\#}$ 存在：
(a) $A^2 = -I$。
(b) $A^2 = I$.
(c) $A^T = -A$。
(d) $A^T = A$.

证明。 (a) 设 $A^2 = -I$。首先，我们考虑李雅普诺夫算子 L_A。我们有

$$L_A(X) = AX + XA^T, X \in \mathcal{S}^n.$$

因此,

$$\begin{aligned} L_A^2(X) &= A^2X + AXA^T + AXA^T + X(A^T)^2 \\ &= -2(X - AXA^T). \end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned} L_A^3(X) &= -2(L_A(X) - L_A(AXA^T) \\ &= -2(AX + XA^T - A^2XA^T - AX(A^T)^2) \\ &= -4(AX + XA^T) \\ &= -4L_A(X). \end{aligned}$$

因此， $L_A^3 = -4L_A$ ，故由命题 3.14， $L_A^{\#}$ 存在。接下来，我们考虑斯坦算子的情形。我们有

$$S_A(X) = X - AXA^T, X \in \mathcal{S}^n.$$

So,

$$\begin{aligned} S_A^2(X) &= S_A(X - AXA^T) \\ &= X - AXA^T - AXA^T + A^2X(A^T)^2 \\ &= 2(X - AXA^T) \\ &= 2S_A(X). \end{aligned}$$

所以， $S_A^2 = S_A$ ，同样由命题 3.14 可知， $S_A^{\#}$ 存在。事实上，在这种情形下，$S_A^{\#} = 2S_A$。这就证明了 (a)。
(b) 设 $A^2 = I.$。然后，像前面一样进行计算，得到公式

$$L_A^2(X) = 2(X + AXA^T).$$

这进而意味着

$$L_A^3 = 4L_A.$$

由此可得 L_A 的群逆存在。对于斯坦算子，与 $A^2 = -I$ 的情形一样，可以推出

$$S_A^2 = 2S_A$$

因此， $S_A^{\#}$ 存在。

(c) 由于 $A^T = -A$，我们有 $L_A(X) = AX - XA$. 现在，对于 $X, Y \in \mathcal{S}^n$,

$$\begin{aligned}
\langle X, L_A(Y)\rangle &= \mathrm{tr(X(AY - YA))} \\
&= \mathrm{tr(XAY) - tr(XYA)} \\
&= -(\mathrm{tr(XYA) - tr(XAY)}) \\
&= -(\mathrm{tr(AXY) - tr(XAY)}) \\
&= -(\mathrm{tr((AX - XA)Y)}) \\
&= -\langle L_A(X), Y\rangle.
\end{aligned}$$

因此 $L_A^* = -L_A$，这意味着 $R(L_A) = R(L_A^*)$。因此， $R(L_A)$ 和 $N(L_A)$ 是互补子空间。因此， $L_A^{\#}$ 存在。

接下来，我们考虑斯坦算子。由于 $A^T = -A$，我们有 $S_A(X) = X + AXA$. 现在，

$$\begin{aligned}
\langle X, S_A(Y)\rangle &= \mathrm{tr(X(Y + AYA))} \\
&= \mathrm{tr(XY + XAYA)} \\
&= \mathrm{tr(XY) + tr(AXAY)} \\
&= \mathrm{tr((X + AXA)Y)} \\
&= \langle S_A(X), Y\rangle.
\end{aligned}$$

因此 $S_A^* = S_A$. 再一次，子空间 $R(S_A)$ 和 $N(S_A)$ 互补，因此 $S_A^{\#}$ 存在。

(d) 当 $A = A^T$ 时，正如前面所指出的，我们有 $L_A^* = L_{A^T} = L_A$ 并且 $S_A^* = S_{A^T} = S_A$. 因此， $L_A^{\#}$ 和 $S_A^{\#}$ 存在。□

设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$。如果 A 的所有特征值的实部均非负，则称其为非负稳定的。若 A 的所有特征值都位于复平面的闭单位圆盘内，则称 A 为舒尔半稳定的。

注 3.16. 有几点需要说明。设矩阵 A是幂零的（因此 A是非负稳定的）。容易证明，算子 L_A 也幂零。正如前文所述，这意味着 L_A 不存在群逆。因此， L_A 并非平凡值域单调。尽管如此，我们还是确定了一类非负稳定矩阵 A，其对应的李雅普诺夫算子是平凡值域单调的。例 3.2 表明，并非所有 Schur 半稳定矩阵都是平凡值域单调的。不过，我们确定了一类 Schur 半稳定矩阵 A，其斯坦算子是平凡值域单调的。这两类结果都将在下一个定理中给出。

下文将探讨满足定理 3.15 前三个条件之一的矩阵所对应的李雅普诺夫算子和斯坦算子的平凡值域单调性问题。

定理 3.17. 对于李雅普诺夫算子 L_A 和斯坦算子 S_A，以下结论成立：

(a) 设 $A^2 = -I$. 则 L_A 和 S_A 是平凡值域单调的。(b) 设 $A^2 = I$. 则 S_A 是平凡值域单调的。(c) 设 $A^T = -A$. 则 L_A 是平凡值域单调的。

证明。首先，我们注意到，根据定理 3.15，在上述关于矩阵 A 的三个条件中任意一个成立时，李雅普诺夫算子和斯坦算子都是群可逆的。因此，在所有这些情况下，值域与零空间（无论是李雅普诺夫算子还是斯坦算子的）都是 $\mathcal{S}^n$. 的互补子空间。我们将在证明中反复用到这一事实。

(a) 令 $L_A(X) \succeq 0$ 且满足 $X \in R(L_A)$。则 $0 \preceq L_A^3(X) = -4L_A(X)$。这意味着 $L_A(X) = 0$. 因此，$X \in R(L_A) \cap N(L_A) = \{0\}$，从而证明 L_A 是平凡值域单调的。

接下来，我们证明斯坦算子的平凡值域单调性。设 $X \in R(S_A)$，使得存在 $Y \in \mathcal{S}^n$，满足 $S_A(Y) = X$。此外，设 $S_A(X) \succeq 0$. 。于是，根据前面的计算，我们有

$$0 \preceq S_A(X) = S_A^2(Y) = 2S_A(Y) = 2(Y - AYA^T).$$

令 $Z := Y - AYA^T$. 。于是，$Z \succeq 0$。这意味着

$$0 \preceq AZA^T = AYA^T - A^2Y(A^T)^2 = AYA^T - Y = -Z.$$

因此，$Z = 0$，即 $S_A(X) = 0$，这又意味着 $X = 0$，因为 $X \in R(S_A) \cap N(S_A)$。

(b) 斯坦算子的平凡值域单调性的证明与上述结果的第二部分完全类似，故略去。

(c) 令 $Z := L_A(X) = AX - XA \succeq 0$，其中 $X \in R(L_A)$。则Z 的所有特征值均为非负数。此外，$\mathrm{tr}(Z) = \mathrm{tr}(AX - XA) = 0$，因此，$Z$ 的所有特征值均为零。由于 Z 可对角化，$0 = Z = L_A(X)$。因此 $X = 0$，因为$X \in R(L_A) \cap N(L_A)$。这证明了 L_A的平凡值域单调性。□

设矩阵 A 满足 $A^2 = I$ 或 $A^2 = -I$. 。那么 A^{-1} 存在，且具有与 A相同的性质。若 A 是斜对称的，则 $A^{\#}$ 存在（因为 $R(A)$ 和 $N(A)$ 互补），且 $A^{\#}$ 也为斜对称。因此，我们立即得到定理 3.17 的以下推论。

推论 3.18。设 $A^2 = -I.$，则 $L_{A^{-1}}$ 和 $S_{A^{-1}}$ 平凡值域单调。若 $A^2 = I$，则 $S_{A^{-1}}$ 平凡值域单调。设 $A^T = -A.$，则 $L_{A^{\#}}$ 平凡值域单调。

下面的第一个例子说明了定理 3.17 的 (a) 部分。

例 3.19. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，使得 $A^2 = -I$.。对于任意 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^2$，我们有

$$S_A(X) = \begin{pmatrix} a-c & 2b \\ 2b & c-a \end{pmatrix}.$$

若 $S_A(X) \succeq 0$，则 $a = c$，因此 $b = 0$。于是，$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.。若施加条件 $X \in R(S_A)$，则 $a = -a$，从而证明 $X = 0$.。因此，S_A 是平凡值域单调的。

下一个例子说明定理 3.17 的 (b) 项。

例 3.20. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，使得 $A^2 = I$.。对于任意 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^2$，我们有

$$S_A(X) = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & c-a \end{pmatrix}.$$

若 $S_A(X) \succeq 0$，则 $a = c$，因此 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.。此外，若 $X \in R(S_A)$，则 $a = -a$ 且 $b = 0$，从而证明 $X = 0$.。因此，S_A 是平凡值域单调的。

下面用例子说明定理 3.17 的 (a)（针对李雅普诺夫算子）和 (c)。例 3.21。设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 则 A 是斜对称的，且 $A^2 = -I$. 对于任意 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^2$，我们有

$$L_A(X) = \begin{pmatrix} 2b & c-a \\ c-a & -2b \end{pmatrix}.$$

对 $L_A(X) \succeq 0$ 的要求得出 $b = 0$，因此 $a = c$。由此可得 $X = aI$。条件 $X \in R(L_A)$ 则意味着 $a = 0$，从而得到 $X = 0$，证明了 L_A. 的平凡值域单调性。

4 个反例

一般来说，当 A 是对合矩阵时，李雅普诺夫算子并非平凡值域单调。

例 4.1。设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，使得 $A^2 = I$，对于任意 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^2$，我们有

$$L_A(X) = \begin{pmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{pmatrix}.$$

注意，如果 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，那么 $L_A(X) = 0$，这证明了 L_A 是奇异的。接下来，取 $Y = A$和 $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.。那么 $L_A(U) = Y$，使得 $Y \in R(L_A)$。我们有$L_A(Y) = 2I \succeq 0$，但是 $Y \not\succeq 0$. 。因此，如果 A是对合的，那么李雅普诺夫算子甚至不是值域单调的。

上述结论同样适用于高阶矩阵。例如，若 A 是对合矩阵，且令 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$，

则 $L_{\tilde{A}}$ 不是值域单调的。细节从略。

例 4.2. 考虑以下情形，其中 $A^T = -A$. 对于 $n = 1, S_A(X) = X$. 这里，S_A 甚至是单调的。对于 $n = 2$，（经过归一化后） A 必须具有以下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么，对于任意对称矩阵 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$，我们有

$$S_A(X) = \begin{pmatrix} a-d & 2b \\ 2b & d-a \end{pmatrix}.$$

S_A 是奇异的，因为 $S_A(I) = 0$. 接下来，若 $S_A(X) \succeq 0$，则 $a = d$，因此 $b = 0$。此外，若 $X \in R(S_A)$，则有 $a = -d$，因此 $a = d = 0$，这证明了$X = 0$。这证明了 S_A 的平凡值域单调性，其中 $n = 2$.

在接下来的两个例子中，我们将证明，对于斜对称矩阵 A，斯坦算子对于 $n = 3$, 4 并非平凡值域单调。

例 4.3. 设 $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，使得对于任意对称矩阵

$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, *we have*

$$S_A(X) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a-d & 3b-e & 2c+d \\ 3b-e & 2d+2c-a-f & 3e-2b \\ 2c+d & 3e-2b & 2f-d \end{pmatrix}.$$

S_A 是奇异的，因为对于 $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $S_A(X) = 0$。接下来，如果 $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 且 $Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $S_A(U) = Y$，从而 $Y \in R(S_A)$。我们有 $S_A(Y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \succeq 0$ 以及 $Y \succeq 0.$。由于 $Y \neq 0$，我们得出斯坦算子并非平凡值域单调。

例 **4.4.** 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，则对于任意对称矩阵 $X = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$，

有

$$S_A(X) = \begin{pmatrix} a-e & 2b & c-2g & d+2f \\ 2b & e-a & f+2d & g-2c \\ c-2g & f+2d & h-4j & 5i \\ d+2f & g-2c & 5i & j-4h \end{pmatrix}.$$

显然，若 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $S_A(X) = 0$，这证明了 S_A 是奇异的。

接下来，若 $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 且 $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $S_A(U) = Y$因此

$Y \in R(S_A)$。我们有 $S_A(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \succeq 0$. 然而， $Y \not\succeq 0$，这证明斯坦算

子甚至不是值域单调的。

例 4.5. 对于 $n = 5$，考虑斜对称分块对角矩阵 B，其左上主子块为 A（如例 4.3 所示），右下主子块矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 。然后，根据前面给出的论证，可以证明 S_B

不是平凡值域单调的。这一归纳论证使我们得出结论：一般而言，当 A 是任意阶数 $n \geq 3$ 的斜对称矩阵时， S_A 不是平凡值域单调的。

至此，斜对称情形的讨论结束。

接下来，设 A 为对称矩阵。例 4.1 表明， L_A 不是平凡值域单调的。下面的例子表明， S_A 不是平凡值域单调的。

例 4.6。考虑对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，因此对于任意 $X = \begin{matrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^2$, S_A 均由以

下给出。

$$S_A(X) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & -3c \end{pmatrix}.$$

S_A 不可逆，因为对于 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ， $S_A(X) = 0$。注意，根据命题 3.15 的第 (*d*) 项， $S_A^{\#}$ 存在。接下来，如果 $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，那么 $S_A(U) = Y$，其中 $U = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，这表明 $Y \in R(S_A)$。此外， $Y \not\succeq 0$，而 $S_A(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \succeq 0$。

我们将研究结果总结在下表中。请注意，“是”表示肯定回答，“否”则表示存在反例，表明一般而言答案是否定的。

矩阵类	平凡值域单调性	
	L_A	S_A
$A^2 = -I$	是 [定理 3.17(a)]	是 [定理 3.17(a)]
$A^2 = I$	否 [示例 4.1]	是 [定理 3.17(b)]
$A^T = -A$	是 [定理 3.17(c)]	是（$n = 2$） [示例 4.2] 不（$n \geq 3$） [例 4.3、4.4、4.5]
$A^T = A$	否 [例 4.1]	否 [例 4.6]

5 结论性评述

我们研究了四类矩阵，考察与之相关的李雅普诺夫算子和斯坦算子的平凡值域单调性这一概念。正如引言中所述，研究动机是将奇异不可约 M-矩阵的平凡值域单调性推广到更一般的情形。若能在更一般的框架下，将我们已得到肯定结果的矩阵类统一起来，将会很有意思。同样，也可以将那些已证明其算子类比不成立的矩阵类统一起来。另一个值得研究的问题，是李雅普诺夫算子和斯坦算子的不可约性概念。值得指出的是，定义“正”算子的不可约性有多种不同方式（它们可能并不等价）。因此，可以为斯坦算子提出这样一种概念：将其表示为I 减去一个正算子 $X \to AXA^T$，并假设第二项（即正算子）具有不可约性；这里正算子是指，只要 X是半正定的，矩阵AXA^T 就是对称且半正定的。然而，如何为李雅普诺夫算子及类似算子提出不可约性的定义，目前尚不明确。我们将在未来继续探讨这些问题；同时指出，受本文相关讨论的启发，已有研究考察了欧几里得 Jordan 代数上的 Z-算子的不可约性概念 [3]。

6 致谢

Samir Mondal 感谢印度政府教育部总理研究奖学金（PMRF）为开展本项工作提供的资助。第一作者和第三作者感谢 ASEM-DUO 提供的经费支持，使前者得以访问印度，后者得以访问西班牙。第一作者还获得了西班牙 I+D+i 计划项目 PID2021- 122501NB-I00 的部分资助。作者感谢 M.S. Gowda 教授提出的建议和意见，这些建议和意见有助于更清晰地呈现相关内容。他建议采用“正稳定 Z-算子”这一术语。

参考文献

[1] A. Ben-Israel 和 T. N. E. Greville, 《广义逆——理论与应用》, CMS 数学丛书第 15 卷。施普林格出版社，纽约，2003 年。[2] A. Berman 和 R.J. Plemmons, 《数学科学中的非负矩阵》, 应用数学经典丛书第 9 卷，工业与应用数学学会，费城，1994 年。[3]M.S. Gowda, 《对应于自对偶锥上的 Z-变换的完全混合线性博弈》, 2023 年 4 月，私人通信。[4] M.S. Gowda 和 T. Parthasarathy, 《Lyapunov 和 Stein 定理的互补形式及相关结果》, 《线性代数及其应用》, 320（2000）, 131–144。[5] M.S. Gowda 和 Y. Song, 《半定线性互补问题》, 《数学规划》, 88（2000）, A 辑，575–587。勘误, 《数学规划》, 91（2001）, A 辑，199–200。[6] Wen Li, 《奇异不可约 M-矩阵的刻画》, 《线性与多重线性代数》, 38（1995）, 241–247[7] D. Mishra 和 K.C. Sivakumar, 《矩阵单调性的推广及其与正规分裂某些子类的关系》, 《线性代数及其应用》, 436（2012）, 2604–2614。[8] R.J. Plemmons, 《导致半收敛分裂的 M-矩阵》, 《线性代数及其应用》, 15（1976）, 243–252。[9] P. Robert, 《关于线性变换的群逆》, 《数学分析及其应用杂志》, 22（1968）, 658–669。