arXiv:2305.04960v1 [math.NT] 8 May 2023

半群轨道中按高度计数点

JASON P. BELL、WADE HINDES、XIAO ZHONG

Abstract. 我们改进了关于极化动力系统的半群轨道中有界高度点数量的已知估计。特别地，我们给出了作用于射影直线上的一般半群的精确渐近。本文的主要新工具是维纳-池原陶伯定理，我们利用该定理对有界次数的半群中的函数进行计数。

1. Introduction

算术动力学中的一个一般性原理是，代数簇的有理点在自映射作用下的轨道的算术行为，往往可以通过相关动力系统的动力学性质来理解。特别是，代数动力系统的动力学性质通常会对有理点轨道的形态施加强有力的约束。因此，自然的问题是研究：有理点轨道的复杂性度量，在多大程度上会反映为动力系统相应的复杂性度量。通常，人们以轨道中高度的某种渐近行为来衡量轨道的复杂性，并以迭代映射的某种次数来衡量动力系统的复杂性。川口-西尔弗曼猜想 [9], 断言，对于 $\overline{\mathbb{Q}}$-点的扎里斯基稠密轨道，动力次数应当决定高度增长；这或许是关于这些看似无关的复杂性概念之间联系的最引人注目的预测。此后，他们的猜想已在若干情形下得到验证 [11, 12, 13, 14, 15],，但仍未得到完全解决。

本文基于第二作者 [6], 此前的工作，研究半群轨道下高度的增长。更确切地说，我们考虑如下情形：有一个射影簇 V，以及一个有限集 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$，其中的正则自映射定义在数域 K 上，并且相对于同一个丰正线丛是极化的；也就是说，存在一个丰正线丛 $\mathcal{L}$ 和整数 $d_1, \dots, d_r \geq 2$，使得 $\phi_i^*(\mathcal{L}) \cong \mathcal{L}^{\otimes d_i}$ 对于 $i = 1, \dots, r$成立。注意，当 $V = \mathbb{P}^N$ 且 $\mathcal{L} = \mathcal{O}$ 时，这种极化条件对每个不是自同构的正则映射集都成立 (1)。

Date：2023年4月。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：37P15；次要分类：37P05、37P55。*Key words and phrases.* 算术动力学、半群动力学、高度。

现在令 M_S 表示由 S在复合运算下生成的 V 的自同态半群。特别地，当 S 是极化的时，可以自然地为每个 $f \in M_S$ 定义次数：将 f的次数记为 $\deg_{\mathcal{L}}(f)$，它是满足 $f^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{\otimes d}$的唯一整数 d。同样，我们可以选择一个与 $\mathcal{L}$ 相关联的高度函数 $h_{\mathcal{L}} : V \to \mathbb{R}$，并对任意点 $P \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ 研究 P 的轨道增长，即函数

$$\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \leq X\}.$$

因此，上述一般原理表明，轨道增长的渐近式应受到相应次数增长函数的渐近行为的严格约束

$$\#\{f \in M_S : \deg_{\mathcal{L}}(f) \leq X\}.$$

根据次数增长给出轨道增长的上界相对直接。事实上，Kawaguchi 和 Silverman [9] 证明，对于支配有理自映射也存在类似现象。另一方面，一般来说，根据次数增长给出轨道增长的强下界非常困难。原因在于， M_S 中的不同映射可以将一个点 P 映至同一个点 Q ，而这种“坍缩”有时可能极为严重。例如，如果 P 是 S 中所有元素的公共不动点，那么轨道增长函数为 $O(1)$，而次数增长函数则可以关于 X呈指数增长。

在一篇较早的论文中，第二位作者 [6] 研究了可极化态射半群的轨道增长和次数增长。本文通过为射影直线上某些类的态射半群求得次数增长和轨道增长的最优渐近式，扩展了那些结果。然而，与迭代单个函数的情形类似，我们必须避开下文定义的预周期点。

定义 1.1. 设 $S = \{\phi_1, \ldots, \phi_r\}$ 是簇 V上的一组自同态。若存在f、$g \in M_S$，使得 g不是恒等映射，且 $g \circ f(P) = f(P)$，则称点 $P \in V$ 对 M_S 是前周期的。

我们的第一个主要结果如下。在下文中，给定实函数F和 G，若存在常数 C，使得对所有充分大的 x ，均有 $F(x) \leq C \cdot G(x)$，则记作 $F \ll G$。同样，记作 $F \asymp G$ 表示$F \ll G$和 $G \ll F$同时成立。最后，记作 $F \sim G$表示 $\lim_{x\to\infty} F(x)/G(x) = 1$。

定理 1.2. 设 V是一个射影簇，设 $S := \{\phi_1, \ldots, \phi_r\}$是 V上的一个极化自同态集，并且对某个 $d_i > 1$，有 $\phi_i^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{\otimes d_i}$。此外，假设 $r \geq 2$ ，并令 ρ 为满足下式的唯一实数

$$\frac{1}{d_1^{\rho}} + \cdots + \frac{1}{d_r^{\rho}} = 1.$$

那么以下陈述对所有非前周期的 $P \in V$ 均成立：

(1) *In all cases,* $\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \leq X\} \ll X^{\rho}$.

(2) 如果 M_S 包含一个自由有限生成的子半群，那么存在一个正常数 $\rho' \leq \rho$，使得

$$X^{\rho'} \ll \#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \leq X\} \ll X^{\rho}.$$

(3) *If M_S is free, then* $\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \leq X\} \asymp X^{\rho}$.

(4) 若 M_S是自由的，且 d_1、...、d_r并非两两乘法相关，则存在一个正数 c, 使得

$$\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \leq X\} \sim cX^{\rho}.$$

在所有情况下，隐含常数均取决于 P 和 S。

注 1.3. 特别地，若每个 $\phi \in S$ 的预周期点集合 Prep(ϕ) 并不完全相同，则可得到如下形式的界

$$X^{\rho'} \ll \#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \leq X\} \ll X^{\rho}$$

对所有非预周期的 $P \in V$，由 [1, 定理 1.3]可得。

注 1.4. 事实上，当 S 中映射的次数都是同一个整数的幂时，定理 1.2 的陈述 (4) 中那样的精确渐近式是不可能成立的。举一个具体例子，考虑多项式集合 $S = \{2x^8, 3x^8\}$ 和点 $P = 1$。注意，在这种情况下 $\rho = 1/3$。现在，对于 $X > 0$，定义函数

$$\Theta(X) = \#\{f \in M_S : h(f(P)) \leq X\}/X^{1/3},$$

其中， $h(\cdot)$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上通常意义下的 Weil 高度。于是可以证明，

$$0 < \liminf \Theta(X) < \limsup \Theta(X) < \infty$$

在这种情况下。

另一方面，由于 P 的整个半群轨道中的每个点，

$$\mathrm{Orb}_S(P) := \{f(P) : f \in M_S\},$$

高度至多为 X 的点由至少一个满足$h_{\mathcal{L}}(f(P)) \leq X$ 的函数 $f \in M_S$ 确定，因此我们很容易得到非前周期轨道中有界高度点数量的一般上界。不过，经过一些额外工作，我们可以证明这样的上界对所有轨道都成立。

定理 1.5. 设 V 是一个射影簇，设 $S := \{\phi_1, \ldots, \phi_r\}$ 是 V 上的一个极化自同态集。此外，假设 $r \geq 2$，并且 ρ 和 $\mathcal{L}$ 与定理 1.2 中的条件相同。那么

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : h_{\mathcal{L}}(Q) \leq X\} \ll X^{\rho}$$

对所有点 $P \in V$均成立。

另一方面，我们证明了对于 $V = \mathbb{P}^1$ 上的一般映射集，可以得到更强的结果，并给出了有界高度轨道中点数的渐近公式，而不仅仅是给出产生有界高度关系的函数数量的渐近公式。下文中，给定一个正整数 d，我们记 Rat_d 为次数为 d的单变量有理函数空间；详见 [21, §4.3] 。

定理 1.6。设 $d_1, \dots, d_r$ 均为不小于 4 的整数。此外，假设 $r \geq 2$，并令 ρ 为满足 $\sum d_i^{-\rho} = 1$ 的唯一正实数。那么存在一个真 Zariski 开子集 $U \subseteq \mathrm{Rat}_{d_1} \times \cdots \times \mathrm{Rat}_{d_r}$，使得

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : h(Q) \leq X\} \asymp X^\rho$$

对所有 $S \in U$ 以及所有满足 $\mathrm{Orb}_S(P)$ 为无限集的 P 均成立。此外，若进一步假设 $d_1, \dots, d_r$ 不全是两两乘法相关的，则

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : h(Q) \leq X\} \sim cX^\rho$$

其中某个正常数 c 取决于 P 和 S。

注 1.7。定理 1.6 中的常数并非显式给出，因为它们包含曲线上有理点的高度界。另一方面，子集 U 是显式的，由所有临界值分离且临界值简单的映射集组成（参见 [6, 定理 1.5]）；详情见第 3 节。

注 1.8。在 [7] 中，最近使用了类似的假设，以便对模素数的半群轨道中的点数给出强下界。此外，这些结果与关于阿贝尔簇的已知结果类似[17]。基于这种类比，数域 K 上阿贝尔簇 A 中高度至多为X 的点数渐近于 $X^{\rho/2}$，其中 ρ 是 Mordell-Weil 群 $A(K)$ 的秩；见 [19, p.54]。因此，本文以及论文 [6, 7]，表明这种类比。

$$\begin{pmatrix}\text{arithmetic of points}\\ \text{of an abelian variety}\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\text{arithmetic of points in orbits}\\ \text{of a dynamical system}\end{pmatrix}$$

在 [2] 和 [22, §6.5] 中描述的方法，在右侧的动力系统由至少两个不交换的映射生成时可能更加准确，而不是使用来自单个映射迭代的轨道。

1.1. 记号。本文中，我们使用以下记号。若 S是一个自映射集合，则用 M_S 表示在复合运算下由 S 生成的半群。若 M_S 在集合 S上是自由的，则用 S_n（分别用 $S_{\leq n}$）表示由 S 中的元素（分别由至多 n 个 S中的元素）构成的 n重复复合的集合；对于 $f \in M_S$，我们用 $|f|$表示唯一的自然数 n，使得 f 是由 S中的元素构成的 n重重复合。

2. Counting functions in polarized systems

2.1. 有界次数函数。设 V 为一个射影簇， $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 为 V上的一组自同态。此外，我们假设 S 关于 V上的某个丰线丛 $\mathcal{L}$ 是极化的，这意味着存在 $d_1, \dots, d_r > 1$ 满足$\phi_i^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{\otimes d_i}$。特别地，我们可以如下定义由 S 生成的半群中函数f 的 $\mathcal{L}$-次数（当 $\mathcal{L}$ 明确时，简称次数）：

$$\deg_{\mathcal{L}}(f) := \prod_{j=1}^{n} d_{i_j} \qquad \text{for } f = \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_n} \in M_S$$

特别地， $f^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{\otimes \text{次数}_{\mathcal{L}}(f)}$可由代数几何中的标准结果推出。另一方面，若我们固定一个与 $\mathcal{L}$ 在 V 上相关联的高度函数以及一个点 $P \in V$，那么 $f(P)$ 的高度会趋于按照 $\deg_{\mathcal{L}}(f)$ 增长（ Call 和 Silverman 利用这一事实定义了典范高度）。因此，作为统计轨道中有界高度点的第一步，我们统计有界次数函数。事实上，我们将在本节证明，若 M_S 是自由的，则存在正常数 ρ、 c_1和 c_2 （仅取决于初始次数 d_1、 $\dots d_r$），使得

$$c_1 X^{\rho} \le \#\{f \in M_S : \deg_{\mathcal{L}}(f) \le X\} \le c_2 X^{\rho} \tag{2.0.1}$$

对所有充分大的 X 均成立。这里，常数 ρ 是满足下式的唯一正实数:

$$\frac{1}{d_1^{\rho}} + \cdots + \frac{1}{d_r^{\rho}} = 1.$$

事实上，我们可以给出更精确的渐近式。不过，这些渐近式的形式似乎取决于 S 中映射的次数是否全为某个单一整数的幂，因此我们暂缓陈述这些更精确的结果，留待后文再述。

首先，我们汇集一些关于在权重有界且权重具有乘法性的自由半群中计数单词的基本事实。这个问题与一个经典的算术问题非常相似，即计数有界的整数乘法分拆 [3, 10], ，但并不完全相同，因为我们允许因子大小相等（确切地说，这是为了允许我们的主要动力系统定理中出现次数相同的映射）。尤其是，由于缺乏可供参考的确切文献，我们在此列出相关的命题和证明。先固定一些记号。设 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 为一个字母表， F_S为由 S生成的所有有限词的集合。于是， F_S 在串接运算下构成自由半群。给定一个由正实权重组成的向量 $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_r)$，定义乘法权重函数 $|\cdot|_{\boldsymbol{d}}$: $F_S \to \mathbb{R}$ 如下:

$$|\omega|_{\boldsymbol{d}} := \prod_{j=1}^{m} d_{i_j}, \qquad \omega = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_m} \in F_S. \tag{2.0.2}$$

那么，给定一个实数 X，我们希望得到权重不超过 X的单词数量的渐近公式，

$$\#\{\omega \in F_S : |\omega|_{\boldsymbol{d}} \le X\}. \tag{2.0.3}$$

特别地，我们有以下一般估计，它只假设 $r \ge 2$ 且 $\min\{d_i\} > 1$。

注 2.1。严格来说，以下结果并非证明本文主要定理所必需；定理 2.5 给出的渐近式已取代了它。尽管如此，我们仍将此结果列出，因为它可能对未来的研究有所帮助。首先，接下来更精确的渐近式假设权重为整数，而非整数权重在动力系统[8, 20]的其他地方确实会出现。因此，以下结果在更一般的情形下仍可能有用。

命题 2.2。设 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 是一个字母表， F_S是由 S生成的自由半群，且 $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_r)$ 是一个正权重向量。假设 $r \ge 2$, $\min\{d_1, \dots, d_r\} > 1$，并令 ρ为满足 $d_1^{-\rho} + \cdots + d_r^{-\rho} = 1$的唯一实数。那么存在正常数 c_1 和 c_2，使得

$$c_1 X^{\rho} \le \#\{\omega \in F_S : |\omega|_{\boldsymbol{d}} \le X\} \le c_2 X^{\rho}$$

对所有 X 充分大的情况均成立。

证明。令 $w(x)$表示 F_S 中权重不超过 x的单词数量，其中我们规定空词的权重为 1。于是，

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < 1, \\ 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} w\Big(\frac{x}{d_i}\Big) & \text{if } 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

事实上，不存在权重小于 1 的单词，并且任何权重不超过 x 的非空单词ω都唯一地具有 $\omega = \alpha_{i_1}\omega'$ 的形式，其中 ω'是权重不超过 x/d_{i_1} 的某个单词（这样的 ω'恰有 $w(x/d_{i_1})$个）。现在令$W(x) := w(x) + \frac{1}{r-1}$，并注意到只需证明 $W(x) \asymp x^{\rho}$，即可得出 $w(x)$的同样结论；之所以考虑 W 而不是 w，是因为它满足稍微简单一些的递推关系：

$$W(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x < 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{r} W\Big(\frac{x}{d_i}\Big) & \text{if } 1 \le x < \infty, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

这很容易由 w的函数方程推出。现在假设这些 d按非递减顺序排列，即 $d_1 \le \cdots \le d_r$，并令 $c_1 = W(1)/d_r^{\rho}$和 $c_2 = W(d_r)$。我们将证明

$$c_1 x^{\rho} \le W(x) \le c_2 x^{\rho} \qquad \text{for all } 1 \le x \le d_r \cdot d_1^n \tag{2.2.2}$$

并且全部 $n \ge 0$ 由 n上的归纳法得到。特别地，由于 $d_1 > 1$，可得$c_1 x^{\rho} \le W(x) \le c_2 x^{\rho}$ 对所有 $x \ge 1$均成立。首先注意，若 $1 \le x \le d_r$，则

$$c_1 x^\rho = \frac{W(1)}{d_r^\rho} x^\rho \le \frac{W(1)}{d_r^\rho} d_r^\rho = W(1) \le W(x) \le W(d_r) \le W(d_r) \cdot x^\rho = c_2 x^\rho,$$

由于 $W(x)$和 x^ρ 都是递增函数。因此，(2.2.2) 对$n = 0$成立。现在进行归纳步骤：假设(2.2.2)成立且$1 \le x \le d_r \cdot d_1^{n+1}$。特别地，由于我们已证明(2.2.2)对所有$1 \le x \le d_r$均成立，因此不妨假设 $d_r \le x \le d_r \cdot d_1^{n+1}$。但是，

$$1 \le \frac{d_r}{d_i} \le \frac{x}{d_i} \le d_r \cdot \frac{d_1}{d_i} \cdot d_1^n \le d_r \cdot d_1^n$$

对所有 $1 \le i \le r$。特别地， $1 \le x/d_i \le d_r \cdot d_1^n$ 因此我们有$c_1(x/d_i)^\rho \le W(x/d_i) \le c_2(x/d_i)^\rho$ 由归纳假设可得。因此，

$$c_1 x^\rho = c_1 x^\rho \Big(\sum_{i=1}^r \frac{1}{d_i^\rho} \Big) = \sum_{i=1}^r c_1 \Big(\frac{x}{d_i} \Big)^\rho \le \sum_{i=1}^r W\Big(\frac{x}{d_i} \Big) \le \sum_{i=1}^r c_2 \Big(\frac{x}{d_i} \Big)^\rho = c_2 x^\rho \Big(\sum_{i=1}^r \frac{1}{d_i^\rho} \Big) = c_2 x^\rho.$$

然而，(2.2.1) 意味着 $W(x) = \sum_{i=1}^r W(x/d_i)$，于是我们得出$c_1 x^\rho \le W(x) \le c_2 x^\rho$ 对所有 $x \ge 1$ 均成立，正如所声称的那样。□

特别地，根据命题 2.2 以及自同态的次数关于复合具有乘法性这一事实，我们立即得出自同态极化集合满足 (2.0.1) 中的界。另一方面，对于整数权重的情形，通过分析相关生成函数的解析性质，可以得到 (2.0.3) 中该量更精确的渐近式。鉴于此，在本节余下部分中，我们假设向量 $\boldsymbol{d}$ 由正整数权重组成。于是，对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，令

$$a_{\boldsymbol{d},n} := \#\{\omega \in F_S : |\omega|_{\boldsymbol{d}} = n\} \tag{2.2.3}$$

是权重等于 n 的单词数，并令

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{d}}(s) := \sum_{n \ge 0} a_{\boldsymbol{d},n} n^{-s} \tag{2.2.4}$$

是相应的狄利克雷级数生成函数。特别地，在这种情况下，我们将通过对 (2.2.4) 应用已知的陶伯定理，改进命题 2.2。不过，这里有个问题：我们必须根据生成权重是否全都是同一个整数的幂，分成两种情况。鉴于此，我们作如下定义。

定义 2.3. 若正整数向量 $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_r)$ 满足：存在唯一的正整数 d 以及一组正整数 $n_1, \dots, n_r$，使得 $d_j = d^{n_j}$ 对所有 $j \ge 1$ 均成立，则称其为循环的。反之，则称 $\boldsymbol{d}$ 为无环的。若 $(d_1, \dots, d_r)$ 是循环的，则存在唯一的

正整数 d，使得 $d_i = d^{a_i}$ 对某些正整数 $a_1, \dots, a_r$ 成立，且 $\gcd(a_1, \dots, a_r) = 1$；我们称该整数 d 为 $\boldsymbol{d}$ 的基。

注 2.4. 一个初等的算术事实是，$\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_r)$ 是循环的，当且仅当所有 d 两两乘法相关；我们在引言中采用了第二种观点。

有了这些概念，我们现在给出自由半群中乘法权重有界的单词数量的精确渐近式。

定理 2.5. 设 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 为一个字母表，F_S 为由 S 生成的自由半群，且 $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_r)$ 为一个各分量均至少为 2 的正整数向量。此外，假设 $r \geq 2$，并设 $\rho_{\boldsymbol{d}} > 0$ 为满足 $G_{\boldsymbol{d}}(\rho_{\boldsymbol{d}}) = 1$ 的唯一实数，其中

$$G_{\boldsymbol{d}}(s) = d_1^{-s} + d_2^{-s} + \cdots + d_r^{-s}.$$

则以下结论成立：

(1) 如果 $\boldsymbol{d}$ 是无环的，那么

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{d}}(s) = \frac{1}{1 - G_{\boldsymbol{d}}(s)}$$

对于所有 $\Re(s) \geq \rho_{\boldsymbol{d}}$ 均收敛，但在 $s = \rho_{\boldsymbol{d}}$ 处有一个简单的极点。因此，维纳-池原陶伯定理 [16,§8.3] 推出，

$$\#\{\omega \in F_S : |\omega|_{\boldsymbol{d}} \leq X\} = \sum_{n \leq X} a_{\boldsymbol{d},n} = \frac{-1}{\rho\, G'(\rho)}\, X^{\rho_{\boldsymbol{d}}} + o(X^{\rho_{\boldsymbol{d}}})$$

当 X 趋于无穷大时。

(2) 如果 $\boldsymbol{d}$ 是以 d为基的循环的，则存在一个正数常量 C，使得

$$\#\{\omega \in F_S : |\omega|_{\boldsymbol{d}} \leq X\} = C \cdot d^{\lfloor \log_d(X) \rfloor \cdot \rho} + o(d^{\lfloor \log_d(X) \rfloor \cdot \rho})$$

当 X 趋于无穷大时。

在证明定理 2.5 之前，我们需要先了解几个初等事实，其中第一个是强三角不等式的一个简单推论。

引理 2.6. 设 $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ 不全为零，且满足

$$z_1 + \cdots + z_n = |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

那么，对所有 i，都有 $z_i = |z_i|$（即，对于某个 $k_i \in \mathbb{Z}$，$\arg(z_i) = 2k_i\pi$）。

同样，我们还需要以下算术中的初等事实。

引理 2.7。设 $d_1, \dots, d_r$ 均为至少为 2 的正整数。若对所有 i, j，比值 $\log(d_i)/\log(d_j) \in \mathbb{Q}$，则向量 $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_r)$ 是循环的。

（定理 2.5 的证明）。对于所有 $m \geq 0$，令 $F_S(m)$ 表示 F_S 中长度为 m 的序列集合。由 (2.0.2) 中权重的定义可得

$$G_{\boldsymbol{d}}(s)^m = \sum_{\omega \in F_S(m)} |\omega|_{\boldsymbol{d}}^{-s} = \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{|\omega|_{\boldsymbol{d}}=n \\ \omega \in F_S(m)}} n^{-s} = \sum_{n \geq 1} a_{\boldsymbol{d},n,m}\, n^{-s},$$

其中 $a_{\boldsymbol{d},\ n,\ m} = \#\{\omega \in F_S(m) :\ |\omega|_{\boldsymbol{d}} = n\}$。特别地，我们看到

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - G_{\boldsymbol{d}}(s)} = \sum_{m \geq 0} G_{\boldsymbol{d}}(s)^m &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 1} (a_{\boldsymbol{d},n,m})\ n^{-s} \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} (a_{\boldsymbol{d},n,m})\ n^{-s} = \sum_{n \geq 1} a_{\boldsymbol{d},n} n^{-s} = \mathcal{D}_{\boldsymbol{d}}(s) \end{aligned}$$

形式上成立。至于该表达式的收敛性，首先注意到，由于 d_i 为正，$G_{\boldsymbol{d}}(s)$ 是实数轴上的严格递减连续函数。此外，$G_{\boldsymbol{d}}(0) = r \geq 2$ 且 $\lim_{x \to \infty} G_{\boldsymbol{d}}(x) = 0$，因此方程 $G_{\boldsymbol{d}}(x) = 1$ 有唯一的简单实数解 $x = \rho_{\boldsymbol{d}} > 0$。另一方面，对于所有 $\Re(s) > \rho_{\boldsymbol{d}}$，我们有

$$\begin{aligned} |G_{\boldsymbol{d}}(s)| &= |d_1^{-s} + d_2^{-s} + \cdots + d_r^{-s}| \\ &\leq |d_1^{-s}| + |d_2^{-s}| + \cdots + |d_r^{-s}| \\ &= d_1^{-\Re(s)} + d_2^{-\Re(s)} + \cdots + d_r^{-\Re(s)} \\ &< d_1^{-\rho_{\boldsymbol{d}}} + d_2^{-\rho_{\boldsymbol{d}}} + \cdots + d_r^{-\rho_{\boldsymbol{d}}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

特别地，亚纯函数 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{d}}(s) = (1 - G_{\boldsymbol{d}}(s))^{-1}$ 在 $\Re(s) > \rho_{\boldsymbol{d}}$ 中收敛，并在 $s = \rho_{\boldsymbol{d}}$ 处有一个简单极点。然而，直线 $\Re(s) = \rho_{\boldsymbol{d}}$ 上实际上只有这一个极点。为此，假设对于某个 $\Re(s) = \rho_{\boldsymbol{d}}$，有 $G_{\boldsymbol{d}}(s) = 1$，并令 $s = \rho_{\boldsymbol{d}} + ci$ 为某个 $c \in \mathbb{R}$。于是令 $z_i = d_i^{-s}$，由引理 2.6 可得

$$\log(d_i)c = 2\pi k_i$$

对于某个 $k_i \in \mathbb{Z}$。特别地，若 $c \neq 0$，则对于所有 i, j，$\log(d_i)/\log(d_j) \in \mathbb{Q}$，且引理 2.7 表明 $\boldsymbol{d}$ 是循环的。因此，若 $\boldsymbol{d}$ 无环，则 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{d}}(s) = (1 - G_{\boldsymbol{d}}(s))^{-1}$ 对所有 $\Re(s) \geq \rho_{\mathrm{d}}$ 均收敛，但在 $s = \rho_{\boldsymbol{d}}$ 处的简单极点除外。至此，陈述 (1) 得证。

另一方面，循环的情形（例如以 d 为基）可以通过稍微简单一些的分析来处理。设 $d_i = d^{a_i}$ 为一些正整数 a_i，使得 $\gcd(a_1, \ldots, a_r) = 1$。由于 F_S 在 $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 上是自由的，对于所有 $i = 1, \ldots, r$，恰有 $\binom{n_1 + \cdots + n_r}{n_1 \ \ldots \ \ ,,n_r}$ 个单词，其中 α_i 出现 n_i 次。此外，每个这样的元素的权重恰为 $d^{\sum a_i n_i}$。特别地，F_S 中权重为 $\leq d^L$ 的元素个数，是 x^i 的系数之和，针对

$i = 0, \ldots, L$ 在多项式中

$$\sum_{n\geq 0}(x^{a_1}+\cdots+x^{a_r})^n.$$

特别地，我们看到，对于正整数 L， F_S 中权重为 $\leq d^L$ 的元素个数等于形式幂级数中 x^L 的系数。

$$F(x) := (1-x)^{-1}\cdot(1-x^{a_1}-\cdots-x^{a_r})^{-1}.$$

注意到 $G(x) := 1-x^{a_1}-\cdots-x^{a_r}$ 在 $(0,\infty)$ 上严格递减，并且由于该函数在 $x=0$ 时为 0、在 $x=1$ 时为负，因此它在 $(0,1)$ 内有唯一零点 θ。由于 G 的导数在 $(0,\infty)$ 上为负，因此这是一个简单零点。进一步注意到，$x=\theta$ 是 $F(x)$ 在半径为 θ的闭圆盘内的唯一极点。为说明这一点，注意到如果 β 是该圆盘内的另一个极点，那么必有 $G(\beta)=0$。于是

$$|G(\beta)| \geq 1-|\beta|^{a_1}-\cdots-|\beta|^{a_r} \geq 1-\theta^{a_1}-\cdots-\theta^{a_r}=0,$$

等号仅在 $|\beta|=\theta$ 时成立。因此，只需考虑形如 $\theta e^{2\pi i\mu}$ 的 β 。于是 $G(\beta)$ $=1-\theta^{a_1}\exp(2\pi i a_1\mu)-\cdots-\theta^{a_r}\exp(2\pi i a_r\mu)$，又因为$\sum\theta^{a_j}=1$，这只有在 $\exp(2\pi i a_1\mu)=\cdots=\exp(2\pi i a_r\mu)=1$ 时才可能为零。由于 a_j 的最大公因数为 1，我们由此可知这迫使 μ 为整数，因此$\beta=\theta$ ，正如所需。利用部分分式以及 $F(x)$ 在 $x=\theta$ 处有一个简单极点、且在半径为 θ 的闭圆盘内没有其他极点这一事实，我们得到

$$F(x) = C/(1-x/\theta)+F_0(x)$$

对于某个正数常量 C，以及某个有理函数 $F_0(x)$，其收敛半径严格大于 θ。特别地， x^L 在 $F(x)$ 中的系数渐近于 $C\theta^L$，因此我们有

$$\#\{\omega\in F_S : |\omega|_{\boldsymbol{d}}\leq d^L\}\sim C\theta^L.$$

由于 θ 是 $\sum\theta^{a_i}=1$ 的唯一正解，我们可知，若 ρ 满足 $d^\rho=\theta$，则 ρ 是 $\sum 1/d_i^\rho=1$ 的唯一正解，并且

$$\#\{\omega\in F_S : |\omega|_{\boldsymbol{d}}\leq d^L\}\sim C(d^L)^\rho.$$

现在，当 X 足够大时，存在唯一的 L 使得 $d^L\leq X<d^{L+1}$。因此，一般而言我们有

$$\#\{\omega\in F_S : |\omega|_{\boldsymbol{d}}\leq X\}\sim Cd^{\lfloor\log_d(X)\rfloor\cdot\rho},$$

这一事实等价于陈述 (2)。 □

特别地，我们得到了由极化集合生成的自由半群中有界次数函数个数的一个改进渐近公式。

推论 2.8. 设 V 为一个射影簇，设 $S:=\{\phi_1,\ldots,\phi_r\}$ 为 V 上的极化自同态集，并且对某些整数 $d_i\geq 2$，称 $\phi_i^*\mathcal{L}\cong\mathcal{L}^{\otimes d_i}$。此外，假设 $r\geq 2$， M_S 是自由的，并且 ρ 是满足 $d_1^{-\rho}+\cdots+d_r^{-\rho}=1$ 的实数。则以下陈述成立。

（1）如果 $\boldsymbol{d} = （d_1,\dots,d_r）$是无环的，则存在一个正的常数 c，使得

$$\#\{f \in M_S : \deg_{\mathcal{L}}(f) \le X\} \sim cX^{\rho}.$$

(2) 如果 $\boldsymbol{d} = (d_1,\dots,d_r)$ 是以 d 为底的循环的，则存在一个正数 C，使得

$$\#\{f \in M_S : \deg_{\mathcal{L}}(f) \le X\} \sim C \cdot d^{\lfloor \log_d(X) \rfloor \cdot \rho}$$

注 2.9. 我们注意到，本节关于次数的结果适用于任意基域。然而，在本文余下部分（即改为按高度计数时），我们将只考虑数域。

2.2. 从次数到高度。现在我们已经掌握了极化半群中次数的增长规律，接下来利用这一结果研究轨道中高度的增长。为此，我们先固定一些记号。与之前一样，设 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 是射影簇 V 上的一个极化自同态集，其中 $\phi_i^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{\otimes d_i}$ 对于某个 $d_i > 1$ 和某个丰线丛 $\mathcal{L}$ 成立。此外，我们可以选取一个与 $\mathcal{L}$ 相关联的高度函数 $h_{\mathcal{L}} : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，其定义在相差 O 的意义下是良好的（1）。那么，使次数与高度之间的转换成为可能的基本工具就是以下事实：对于每个 ϕ_i，都存在一个常数 C_i，使得

$$\left| h_{\mathcal{L}}(\phi_i(P)) - d_i\, h_{\mathcal{L}}(P) \right| \le C_i \tag{2.9.1}$$

对所有 $P \in V$ 均成立；例如参见 [21, 定理 7.29]。特别地，可以迭代上述界，并使用（归功于 Tate 的）望远镜论证，得到半群的类似结论；参见 [5, 引理 2.1]。

引理 2.10。设 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 是簇 V 上的极化自同态集，设 $d_S = \min\{d_i\}$，并设 $C_S = \max\{C_i\}$ 如 (2.9.1) 中所示。则

$$\left| \frac{h_{\mathcal{L}}(f(P))}{\deg_{\mathcal{L}}(f)} - h_{\mathcal{L}}(P) \right| \le \frac{C_S}{d_S - 1}$$

对所有 $f \in M_S$ 和所有 $P \in V$ 均成立。

特别地，我们可以推出以下结果：首先，M_S 的预周期点集是一个有界高度集；其次，若 P 不是前周期点，则当 $|f| \to \infty$ 时，$h(f(P)) \to \infty$。

引理 2.11。设 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 是簇 V 上的一个有限自同态集。则存在一个正数常量 C，使得：

(1) 如果 P 是半群 M_S 的前周期点，那么 $h_{\mathcal{L}}(P) \le C$;

(2) *if* $h_{\mathcal{L}}(P) > C$ *then* $h_{\mathcal{L}}(f(P)) > h_{\mathcal{L}}(P)$ *for all* $f \in M_S$.

特别地，如果 P 对于 M_S 和 $B > 0$不是前周期的，那么存在一个$N := N(V, S, P, B)$，使得对于所有满足 $|f| > N$的 $f \in M_S$，都有 $h(f(P)) > B$。

证明。注意，如果 P 是 M_S 下的前周期点，且 $Q := f(P) = g \circ f(P)$，那么

$$\left| \frac{h_{\mathcal{L}}(g(Q))}{\deg_{\mathcal{L}}(g)} - h_{\mathcal{L}}(Q) \right| \le \frac{C_S}{d_S - 1}$$

并且由于 $g(Q) = Q$，且 $\deg_{\mathcal{L}}(g) \geq 2$，我们便得到

$$h_{\mathcal{L}}(Q) \leq 2C_S \cdot (d_S - 1)^{-1}.$$

类似地，我们有

$$\left| \frac{h_{\mathcal{L}}(f(P))}{\deg_{\mathcal{L}}(f)} - h_{\mathcal{L}}(P) \right| \leq \frac{C_S}{d_S - 1}$$

且由于 $f(P) = Q$，我们利用 Q 的高度不等式得到 $h_{\mathcal{L}}(P) \leq 2\frac{C_S}{d_S-1}$。此外，注意若 $h_{\mathcal{L}}(P) \geq 2C_S$，则若 $f \in M_S$，由引理 2.10 可得 $h_{\mathcal{L}}(f(P))/\deg_{\mathcal{L}}(f) > h_{\mathcal{L}}(P)/2$，因此对所有 $f \in M_S$，都有 $h_{\mathcal{L}}(f(P)) > h_{\mathcal{L}}(P)$。特别地，令 $C = 2C_S$，即可推出结论 (1) 和 (2)。

对于最后一个断言，假设 P 不是 M_S 的前周期点，并且$B > 0$。注意，不失一般性，我们可以假设 $B \geq C$。现在令 K 为一个数域，使得 P 以及 S 中的每个映射都定义在该数域上。于是，对于所有 $f \in M_S$， $f(P) \subseteq V(K)$，并且

$$N(B) := \#\{Q \in V(K) : h_{\mathcal{L}}(P) \leq B\}$$

根据 Northcott 定理，该集合是有限的。现在假设 $|f| = m > N$，并将 $f = \theta_m \circ \theta_{m-1} \circ \cdots \circ \theta_1$ 记作某个 $\theta_i \in S$。同样，对于 $1 \leq i \leq m$，令$f_i := \theta_i \circ \theta_{i-1} \circ \cdots \circ \theta_1$。首先注意，如果 $h(f_i(P)) > B \geq C$对某个i成立，那么根据性质（2）， $h(f(P)) > B$也成立。因此，我们可以假设对于所有 $i \leq m$， $h(f_i(P)) \leq B$。另一方面， $m > N$，因此根据鸽巢原理和 N的定义，对于某个 $i > j$，有$f_i(P) = f_j(P)$。但是随后

$$g_{ij} \circ f_j(P) = f_i(P) = f_j(P)$$

对于 $g_{ij} = \theta_i \circ \cdots \circ \theta_{j+1}$，这与我们的假设矛盾，即 P不是前周期的。因此，$h(f(P)) > B$，如所声称。□

最后，在证明定理 1.2 之前，我们需要以下结果，它为改进 [6] 中的估计提供了一个关键的新要素。

引理 2.12. 假设 M_S 是自由的，且 P 不是 V 的前周期点。那么存在一个正数常数 $\beta = \beta(S, \mathcal{L}, P)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{g \in S_n} h_{\mathcal{L}}(g(P)))^{-\rho} = \beta.$$

证明. 对于 n，令 $\beta_n = \beta_n(P) = \sum_{g\in S_n} h_{\mathcal{L}}(g(P))^{-\rho}$。由于 M_S 是自由的，S_{n+1}是 $\phi_1 \circ S_n$、...、 $\phi_r \circ S_n$ 的不交并。于是

$$|h_{\mathcal{L}}(\phi_i(f(P))) - d_i h_{\mathcal{L}}(f(P))| \leq C_S$$

因此

$$d_i h_{\mathcal{L}}(f(P)) - C_S \leq h_{\mathcal{L}}(\phi_i(f(P))) \leq d_i h_{\mathcal{L}}(f(P)) + C_S.$$

特别地，中值定理给出了不等式

$$\left|h_{\mathcal{L}}(\phi_i(f(P)))^{-\rho} - (d_i h_{\mathcal{L}}(f(P))^{-\rho}\right| \leq C_S\rho \left|d_i \cdot h_{\mathcal{L}}(f(P)) - C_S\right|^{-\rho-1}.$$

首先假设 $h(P) > C := 2C_S$。那么由于 $\sum_{i=1}^{r} 1/d_i^{\rho} = 1$，我们有

$$\begin{aligned}
|\beta_{n+1} - \beta_n| &= \left| \sum_{i=1}^{r} \sum_{f \in S_n} h_{\mathcal{L}}(\phi_i \circ f(P))^{-\rho} - (d_i h_{\mathcal{L}}(f(P)))^{-\rho} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{r} \sum_{f \in S_n} C_S \rho \left| d_i \cdot h_{\mathcal{L}}(f(P)) - C_S \right|^{-\rho-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{r} \sum_{f \in S_n} \frac{C_S \rho}{(C_S(d_i \deg_{\mathcal{L}}(f) - 1))^{\rho+1}} \\
&\leq C_S^{-\rho} 2^{\rho+1} \rho \sum_{i=1}^{r} \sum_{f \in S_n} 1/(d_i \deg_{\mathcal{L}}(f))^{\rho+1} \\
&= C_S^{-\rho} 2^{\rho+1} \rho \sum_{j_1 + \cdots + j_r = n+1} \binom{n+1}{j_1, \ldots, j_r} d_1^{-j_1(\rho+1)} \cdots d_r^{-j_r(\rho+1)} \\
&= C_S^{-\rho} 2^{\rho+1} \rho \cdot (1/d_1^{\rho+1} + \cdots + 1/d_r^{\rho+1})^{n+1}.
\end{aligned}$$

特别地，由于 $C' := \sum 1/d_i^{\rho+1} < 1$ 且由于 $\sum_j (C')^j$ 收敛，我们看到 $\{\beta_n(P)\}$ 是一个柯西序列，并收敛到某个 $\beta(P)$，如所声称的那样。当 $h(P) \geq 2C_S$ 时，证明至此完成。对于一般情形，只假设 P 对 S 不是前周期的。那么引理 2.11 表明，存在 N，使得对于所有 $|f| \geq N$，都有 $h(f(P)) > 2C_S$。另一方面，对于 $n > N$，我们有

$$\sum_{g \in S_n} h_{\mathcal{L}}(g(P))^{-\rho} = \sum_{f \in S_N} \sum_{F \in S_{n-N}} h_{\mathcal{L}}(F(f(P))^{-\rho} = \sum_{f \in S_N} \beta_{n-N}(f(P))$$

因为 M_S 是自由的。此外，对于每个 $f \in M_S$，序列 $\{\beta_{n-N}(f(P))\}$ 根据上述论证均收敛。因此，$\{\beta_n(P)\}$ 是收敛序列的有限和，也必然收敛。□

特别地，我们可以利用引理 2.10、引理 2.12 以及第 2 节中的次数增长估计，来界定极化半群中产生有界高度关系的函数数量；参见引言中的定理 1.2。

（定理 1.2 的证明）。假设 $r = \#S \geq 2$，令 ρ 为满足 ${d_1}^{-\rho} + \cdots + {d_r}^{-\rho} = 1$的唯一正数，并令 $b_S = C_S/(d_S - 1)$；这里 d_S 和 C_S 是引理 2.10 中的常数。我们首先假设$P \in V$满足 $h_{\mathcal{L}}(P) > b_S$，然后说明一般的非前周期情形如何由此推出。特别地，如果 $h_{\mathcal{L}}(P) > b_S$，那么引理 2.10

蕴含

$$\left\{f \in M_S : \deg_{\mathcal{L}}(f) \le \frac{X}{h_{\mathcal{L}}(P)+b_s}\right\} \subseteq \left\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\right\} \subseteq \left\{f \in M_S : \deg_{\mathcal{L}}(f) \le \frac{X}{h_{\mathcal{L}}(P)-b_s}\right\}$$

特别地，命题 2.2 表明存在常数 c，使得

$$\begin{aligned}\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\} &\le \#\left\{f \in M_S : \deg_{\mathcal{L}}(f) \le \frac{X}{h_{\mathcal{L}}(P)-b_s}\right\} \\ &\le \#\left\{\omega \in F(S) : |\omega|_{\boldsymbol{d}} \le \frac{X}{h_{\mathcal{L}}(P)-b_s}\right\} \\ &\le c\Big(\frac{X}{h_{\mathcal{L}}(P)-b_s}\Big)^{\rho}\end{aligned}$$

对所有充分大的 X 均成立；这里，$\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_r)$ 是 S 中函数的次数向量。因此，我们得到了所述的结论 (1)。另一方面，如果 M_S 包含一个有限基为 $S' \subset M_S$ 的自由半群，令 ρ' 为满足 $\sum_{g\in S'} 1/\deg(g)^{\rho'} = 1$ 的唯一正数。那么，命题 2.2 和引理 2.10 表明存在一个正常数 c'，使得

$$\begin{aligned}\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\} &\ge \#\left\{f \in M_S : \deg_{\mathcal{L}}(f) \le \frac{X}{h_{\mathcal{L}}(P)+b_s}\right\} \\ &\ge \#\left\{f \in M_{S'} : \deg_{\mathcal{L}}(f) \le \frac{X}{h_{\mathcal{L}}(P)+b_s}\right\} \\ &\ge c'\left(\frac{X}{h_{\mathcal{L}}(P)+b_s}\right)^{\rho'}\end{aligned}$$

对所有充分大的 X 均成立。特别地，我们得到了所述的结论 (2)；此外，显然 $\rho' \le \rho$，因为结合结论 (1) 和 (2) 中的界可得 $X^{\rho'} \ll X^{\rho}$。

接下来，假设 M_S 本身是自由的。那么，取上述命题 (2) 的证明中的 $S = S'$，我们便可得出，对于所有充分大的 X，都有 $\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\} \asymp X^{\rho}$，这正是命题 (3) 所声称的结论。

最后，假设 M_S 是自由的，且次数向量 $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_r)$ 是无环的。此外，令 $\epsilon > 0$，并令

$$\beta := \lim_{n\to\infty} \sum_{g\in S_n} h_{\mathcal{L}}(g(P))^{-\rho}$$

为引理 2.12 中的常数。于是，引理 2.11 推出 $h_{\mathcal{L}}(g(P)) \to\infty$，当 $|g| \to \infty$ 时，因此存在一个自然数 n，使得

$$\left| \sum_{g\in S_n} h_{\mathcal{L}}(g(P))^{-\rho} - \beta \right| < \epsilon$$

and

$$h_{\mathcal{L}}(g(P)) - b_s > (1-\epsilon)h_{\mathcal{L}}(g(P))$$

对所有 $g \in S_n$均成立。因此，推论 2.8 的结论 (1) 表明，对所有 $g \in S_n$以及所有足够大的 X，我们有

$$\begin{aligned}
&\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f \circ g(P)) \le X\} \\
&\le \#\left\{ f \in M_S : \deg_{\mathcal{L}}(f) \le \frac{X}{h_{\mathcal{L}}(g(P)) - b_s} \right\} \\
&\le c(1+\epsilon)\Big(\frac{X}{h_{\mathcal{L}}(g(P)) - b_S}\Big)^{\rho} \\
&\le c(1+\epsilon)(1-\epsilon)^{-\rho} X^{\rho} / h_{\mathcal{L}}(g(P))^{\rho}.
\end{aligned}$$

另一方面，对于足够大的 X，我们有

$$\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\} = \#S_{<n} + \sum_{g\in S_n} \#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f\circ g(P)) \le X\}$$

因此我们得到

$$\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\} \le \#S_{<n} + c(1+\epsilon)(1-\epsilon)^{\rho} X^{\rho}(\beta+\epsilon)$$

当 X 足够大时成立。此外，通过完全类似的论证，我们得到一个下界

$$\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\} \ge \#S_{<n} + c(1-\epsilon)(1+\epsilon)^{\rho} X^{\rho}(\beta-\epsilon)$$

对所有足够大的 X。于是，由于 n 是固定的，而 ϵ 可以任意小，我们得到 менам

$$\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\} = c\beta X^{\rho}(1+o(1)).$$

正如命题（4）所述。

最后，现在只假设 P 是 M_S 的非前周期点。那么由引理 2.11 可知，存在 N，使得 $h(g(P)) > b_S$ 对所有 $|g| \ge N$ 都成立。特别地，对于所有充分大的 X，我们有

$$\#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\} = \#S_{\le N} + \sum_{g\in S_N} \#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(g(P))) \le X\}.$$

然而，通过在上述论证中用 $g(P)$ 替换 P，我们可以看出，在相应假设成立的前提下，对于每个 $g \in S_N$，有限个项 $\#\{f \in M_S: h_{\mathcal{L}}(f(g(P))) \le X\}$ 都按照定理 1.2 的陈述 (1) 至 (4) 所描述的规律增长。特别地，总计数 $\#\{f \in M_S: h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X\}$ 也呈现出所期望的增长规律。□

最后，我们注意到，对于非预周期基点 P，满足 $h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X$ 的函数 $f \in M_S$ 的数量上界 $\le X$，可导出轨道中有界高度点数量的一般上界；参见引言中的定理 1.5。最后一步是以下引理：

引理 2.13. 设 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 是簇 V 上的一个可极化自同态集合，设 $P \in V$ 满足 $\mathrm{Orb}_S(P)$ 是无限的，并设 $B > 0$。那么存在有限子集 $F \subseteq \mathrm{Orb}_S(P)$ 以及 $\mathrm{Orb}_S(P)$ 中互不相同的点 $Q_1, \dots, Q_n$，使得以下结论成立：

(1) *Each* Q_i *satisfies* $h_{\mathcal{L}}(Q_i) > B$.
(2) $\mathrm{Orb}_S(P) = F \cup \mathrm{Orb}_S(Q_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Orb}_S(Q_n)$.

特别地，我们可以假设 $Q_1, \dots, Q_n$ 对于 S 都不是前周期的。

证明. 设 C 为引理 2.11 中的常数。提醒一下，$C = 2C_S$，其中 C_S 是引理 2.10 中的常数。此外，令 $d = \max\{d_i\}$，其中 d_i 如 (2.9.1) 中所述。现在令 $P \in V$ 具有无限轨道，且 $B > 0$。不失一般性，我们可以假设 $B \ge C$。注意，若 $h_{\mathcal{L}}(P) > B$，则取 $n = 1$、$P = Q_1$ 和 $F = \varnothing$，即可轻易得到所需结论。因此，我们可以假设 $h_{\mathcal{L}}(P) \le B$。现在定义集合

$$T := \big\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : B < h_{\mathcal{L}}(Q) \le 2dB\big\}.$$

特别地，根据 Northcott 定理，$T = Q_1, \dots, Q_n$ 是一个有限集（也可能为空；只需在固定的数域 K 上考察即可，P 及 S 中的每个映射都定义在该数域上）。同样，$F := \{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : h_{\mathcal{L}}(Q) \le B\}$是一个有限集，我们将证明 F 及点 Q_i 具有所需性质。为此，假设某个 $\theta_i \in S$满足 $h_{\mathcal{L}}(Q) > B$，且 $Q = \theta_m \circ \cdots \circ \theta_1(P)$（这样的 Q 必定存在，因为 $\mathrm{Orb}_S(P)$ 是无限集），并定义

$$m_0 = \min\big\{s : h_{\mathcal{L}}(\theta_s \circ \cdots \circ \theta_1(P)) > B\big\}.$$

注意，由于 m 属于上述定义集，m_0 存在。此外，根据假设，$h_{\mathcal{L}}(P) \le B$，因此 $m_0 \ge 1$。我们断言 $Q' := \theta_{m_0} \circ \cdots \circ \theta_1(P) \in T$（特别是，$T$ 非空）：否则，必有 $h_{\mathcal{L}}(Q') > 2dB$。然而，此时我们看到

$$\begin{aligned} 2dB < h_{\mathcal{L}}(Q') &= h_{\mathcal{L}}(\theta_{m_0}(\theta_{m_0-1} \circ \cdots \circ \theta_1(P))) \\ &\le \deg(\theta_{m_0})(h_{\mathcal{L}}(\theta_{m_0-1} \circ \cdots \circ \theta_1(P)) + C_S) \le 2dB, \end{aligned}$$

矛盾；这里我们使用引理 2.10 以及 m_0 的极小性。特别是，我们已经证明，对于任何高度大于B 的 $Q \in \mathrm{Orb}_S(P)$，都存在一个点 $Q_i \in T$，使得 $Q \in \mathrm{Orb}_S(Q_i)$。因此，我们可以推导出 $\mathrm{Orb}_S(P) = F \cup \mathrm{Orb}_S(Q_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Orb}_S(Q_n)$，正如所声称的那样。□

特别是，由于高度至多为 X 的 $\mathrm{Orb}_S(P)$ 中的每个点，都由至少一个满足 $h_{\mathcal{L}}(f(P)) \le X$ 的函数 $f \in M_S$ 决定，并且（除有限多个情况外）所有轨道都包含在非前周期的轨道中，我们可知

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : h_{\mathcal{L}}(Q) \le X\} \ll X^{\rho}$$

通过结合定理 1.2 的第 (1) 部分与引理 2.13，对所有 $P \in V$ 均成立。

3. Orbit counts in $\mathbb{P}^1$

3.1. 一般界。既然我们已经对半群中具有各种有界性质的函数的增长有了一定了解，现在转而研究有界高度点在轨道中的渐近增长。为了实现这一转变，我们需要对在某个特定值处相等的函数进行一定控制。当 $V = \mathbb{P}^1$ 时，这一点之所以可能，恰恰是因为我们对曲线上有理点（或整点）的集合有一定控制。为了在维数 1 的情形下陈述这一改进，下面的一般定义将很有用。

定义 3.1. 设 S 是簇 V 上的有理映射的可极化集合，并且 $P \in V$。如果存在正常数 $B = B(P)$，使得对于某些 f、$g \in M_S$ 以及某个 Q_1、$Q_2 \in \mathrm{Orb}_S(P)$（其中 $f(Q_1) = g(Q_2)$，且 $h_{\mathcal{L}}(Q_i) > B$），有 $f = \phi \circ f_0$ 和 $g = \phi \circ g_0$（其中 $\phi \in S$ 以及 f_0、$g_0 \in M_S$），则称 M_S 具有消去性质。此外，$f_0(Q_1) = g_0(Q_2)$。

特别地，若 M_S 具有上述消去性质，则关于产生有界高度关系的函数数量的渐近估计，将导出轨道中有界高度点数量的渐近估计。

命题 3.2. 设 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 是簇 V 上的一个可极化有理映射集合，它生成一个具有消去性质的自由半群，并假设 $P \in V$ 使得 $\mathrm{Orb}_S(P)$ 是无限集。那么存在一个 $B > 0$ 以及点 $Q_1, \dots, Q_t \in \mathrm{Orb}_S(P)$，使得 $h(Q_i) > B$ 并且

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) \colon h_{\mathcal{L}}(Q) \le X\} \sim \sum_{i=1}^{t} \#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(Q_i)) \le X\}. \tag{3.2.1}$$

特别地，我们可以选择非前周期点 $Q_1, \dots, Q_t \in \mathrm{Orb}_S(P)$，使得 (3.2.1) 成立。

证明. 设 B_0 为引理 2.11 中的常数，B_1 为定义 3.1 中的常数，并令 $B = \max(B_1, B_0)$。那么引理 2.13 蕴含存在一个有限集 F 以及满足 $h_{\mathcal{L}}(Q_i) > B$ 的点 $Q_1, \dots, Q_n$，使得

$$\mathrm{Orb}_S(P) = F \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Orb}_S(Q_i). \tag{3.2.2}$$

我们将证明，$\mathrm{Orb}_S(Q_i)$ 上的并可以写成不交并。为此，假设对于某些 f、$g \in M_S$，有 $f(Q_i) = g(Q_j)$。如果 $|f| = |g|$，那么反复应用消去性质可推出 $Q_i = Q_j$。另一方面，如果 $|f| \neq |g|$，不妨设 $|f| > |g|$，那么反复应用消去性质可推出，对于某个 $f_0 \in M_S$，有 $f_0(Q_i) = Q_j$。因此，在此情况下，$\mathrm{Orb}_S(Q_j) \subseteq \mathrm{Orb}_S(Q_i)$。所以，如有必要重新排序后，我们可以选择 $t \le n$ 使得

$$\mathrm{Orb}_S(P) = F \cup \bigsqcup_{i=1}^{t} \mathrm{Orb}_S(Q_i). \tag{3.2.3}$$

另一方面，对于每个 Q_i ，类似的论证表明取值映射 $f \to f(Q_i)$ 是单射：若对某个 $|f| = |g|$ 有 $f(Q_i) = g(Q_i)$，则反复应用消去性质可推出 $f = g$。同样，若 $|f| > |g|$ ，则反复应用消去性质可推出，对某个非恒等映射 $f_0 \in M_S.$ ，有 $f_0(Q_i) = Q_i$ 。但这样一来，Q_i 就是前周期的，这与引理 2.11 以及 $h_{\mathcal{L}}($ $Q_i) > B$ 这一事实矛盾。因此，对于每个 Q_i ，取值映射 $f \to f(Q_i)$ 都是单射，从而

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(Q_i) : h_{\mathcal{L}}(Q) \le X\} = \#\{f \in M_S : h_{\mathcal{L}}(f(Q_i)) \le X\}. \tag{3.2.4}$$

因此，结合 (3.2.3) 和 (3.2.4)，我们得到所要求的 (3.2.1)。 □

接下来我们注意到，许多作用于 $V = \mathbb{P}^1$ 上的有理映射集合都生成具有上述消去性质的半群。为准确表述这一点，回顾一下：如果 $w \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ 包含的元素少于 $\deg(\phi)$ 个，则称 $w \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ 是 $\phi \in \overline{\mathbb{Q}}(x)$ 的临界值。同样地，如果 $\phi^{-1}(w)$ 恰好包含 $\deg(\phi)$ 个 -1 点，则称临界值 w 是 ϕ 的简单的。特别地，对于集合，我们有相应的概念：

定义 3.3。设 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上的一组有理映射，并令 $\mathcal{C}_{\phi_i}$ 表示 ϕ_i的临界值集合。如果对于所有 $i \ne j$均有 $\mathcal{C}_{\phi_i} \cap \mathcal{C}_{\phi_j} = \varnothing$ ，则称 S 为临界值分离的。此外，如果每个 $\phi \in S$ 的每个临界值都是简单的，则称 S 为临界值简单的。

特别地，临界值分离且临界值简单的映射集合具有消去性质；另见 [6] 中的命题 4.1 和引理 4.8。

命题 3.4. 设 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 是定义在 $\mathbb{P}^1$ 上的一组临界值分离且临界值简单的有理映射，且其次数均至少为四。以下陈述成立：

(1) M_S 是自由半群。

(2) 对所有非前周期的 P ，存在常数 $t_{S,\ P}$ ，使得

$$\#\{f \in M_S \ : \ f(P) = Q\} \le t_{S,P}$$

对所有 $Q \in \mathrm{Orb}_S(P)$ 均成立。

(3) 半群 M_S 具有消去性质。

证明。前两个结论已在 [6, §4] 中证明。因此，只需证明 (3)。由 [18] 中的主要结果（另见 [6, 命题 4.6]），可知形如 $(\phi_i, \phi_j)^{-1}(\Delta) \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的曲线的不可约分支，要么是 Δ，要么是几何亏格为 ≥ 2 的不可约曲线，其中 Δ 是对角子簇。因此，根据法尔廷斯定理，位于某个非 Δ 分支上的 K-点集合 Σ 是有限的。令

$$B_0 = \max_{(P_1,P_2)\in\Sigma} \big\{ \max\{h_{\mathcal{L}}(P_1), h_{\mathcal{L}}(P_2)\}\big\},$$

令 B_1 为引理 2.11 中的常数，并令 $B = \max\{B_0, B_1\}$。现在假设 $f, g \in M_S$ 和 $Q_1, Q_2 \in \mathbb{P}^1$ 满足

$$\min(h_{\mathcal{L}}(Q_1), h_{\mathcal{L}}(Q_2)) > B$$

且 $f(Q_1) = g(Q_2)$。我们将证明 B 满足定义 3.1 中所需的条件。为此，记 $f = \phi_i \circ f_0$ 和 $g = \phi_j \circ g_0$ 分别为 f_0、$g_0 \in M_S$ 和 $1 \le i$、$j \le r$。注意，如果 $i \ne j$ 或 $i = j$，且 $f_0(Q_1) \ne g_0(Q_2)$，那么 $(f_0(Q_1)\ g_0(Q_2))$ 位于 $(\phi_i, \phi_j)^{-1}(\Delta)$ 的一个不可约分支上，而该分支不等于 Δ。因此，$(f_0(Q_1)\ g_0(Q_2))$ 是 Σ 上的一点，于是

$$\max(h_{\mathcal{L}}(f_0(Q_1)), h_{\mathcal{L}}(g_0(Q_2))) \le B_0 \le B.$$

另一方面，由于 $\min(h_{\mathcal{L}}(Q_1)\ h_{\mathcal{L}}(Q_2)) > B \ge B_1$，由引理 2.11 可得

$$\min(h_{\mathcal{L}}(f_0(Q_1)), h_{\mathcal{L}}(g_0(Q_2))) > B,$$

矛盾。因此，$i = j$ 和 $f_0(Q_1) \ne g_0(Q_2)$，如所需。 □

现在我们可以改进 [6] 中的主要结果。

定理 3.5. 设 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 是定义在 $\mathbb{P}^1$ 上的有理映射的一个临界值分离且临界值简单的集合，其中所有映射的次数至少为四。此外，假设 $r \ge 2$，并令 ρ 为满足 $\sum \deg(\phi_i)^{-\rho} = 1$ 的正实数。那么

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : h(Q) \le X\} \asymp X^{\rho}$$

对于所有满足 $\mathrm{Orb}_S(P)$ 为无限集的 $P \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$，均有此结论。此外，若 S 中映射的次数是无环的，则

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : h(Q) \le X\} \sim cX^{\rho}$$

对某个正数常数 c 成立，该常数取决于 P 和 S。

证明。假设 P 是 $\mathbb{P}^1$ 中满足 $\mathrm{Orb}_S(P)$ 为无限集的一个点。则命题 3.4 表明 M_S 是自由的且具有消去性质。因此，命题 3.2 表明存在非预周期点 $Q_1, \dots, Q_t \in \mathrm{Orb}_S(P)$，使得

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : h(Q) \le X\} \sim \sum_{i=1}^{t} \#\{f \in M_S : h(f(Q_i)) \le X\}. \tag{3.5.1}$$

由此，结果现在可直接由定理 1.2 得出。例如，如果 S 中映射的次数是无环的，那么定理 1.2 的陈述 (4) 蕴含，对于每个 Q_i，存在正常数 $c_{S,\,Q_i}$ 使得

$$\#\{f \in M_S : h(f(Q_i)) \le X\} \sim c_{S,Q_i} X^{\rho}. \tag{3.5.2}$$

这里，我们利用 Q_i 不是前周期的这一事实。特别地，结合 (3.5.1) 和 (3.5.2) 即可得到所需的结论。同样，一般情形可由 (3.5.1) 和定理 1.2 的陈述 (3) 得出。

□

特别是，如果我们固定整数 d_1、 $\dots d_r$，且它们都至少为四，那么定理 3.5 中关于轨道的界在 $\mathrm{Rat}_{d_1} \times \cdots \times \mathrm{Rat}_{d_r}$ 的一个 Zariski 开子集上成立。

（定理 1.6 的证明）。对于每个 d_i，定理 1.4] 的 [18, 证明表明，存在一个真开子集 $U_i \subset \mathrm{Rat}_{d_i}$，使得曲线

$$C_\phi := \left\{(x,y) \,:\, \frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y} = 0\right\} \tag{3.5.3}$$

对于所有 $\phi \in U_\phi$，它都是不可约的，且亏格至少为 2。同样，[18, 定理 1. 的2] 证明表明，对于每一对 (d_i, d_j)，都存在真开子集 $V_{ij} \subset \mathrm{Rat}_{d_i}$ 和 $W_{ij} \subset \mathrm{Rat}_{d_j}$，使得曲线

$$C_{\phi,\psi} := \left\{(x,y) \,:\, \phi(x) = \phi(y)\right\} \tag{3.5.4}$$

对于所有 $\phi \in V_{ij}$ 和所有 $\psi \in W_{ij}$，它都是不可约的，且亏格至少为 2。现在定义开集

$$U := O_1 \times \cdots \times O_r \subset \mathrm{Rat}_{d_1} \times \cdots \times \mathrm{Rat}_{d_r}, \quad \text{where} \quad O_i = \bigcap_{j=1}^{r} (U_i \cap V_{ij} \cap W_{ji}).$$

特别地，如果 $(\phi_1, \dots, \phi_r) \in U$，那么对于所有 i 和 j， C_{ϕ_i} 和 C_{ϕ_i,ϕ_j} 都是不可约的，且亏格至少为 2。现在令 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$。那么命题 3.4 的结论对 S 仍然成立——该结果的证明只用到 C_{ϕ_i} 和 C_{ϕ_i,ϕ_j} 只有有限多个有理点，而这可由 Faltings 定理推出。特别地，如同上文定理 3.5 的证明，结合定理 1.2 的陈述 (3) 或 (4) 与命题 3.4，即可直接得到所需的渐近式。□

虽然定理 3.5 和 1.6 不能直接应用于多项式，但在假设仿射临界值彼此不相交且均为单临界值，并且 S 中多项式的次数至少为 5 的情况下，也可以得到类似的结论；例如参见 [4, §3]。不过，这些条件比下面结果中的条件更强；与 [6,定理 1.6] 比较。

定理 3.6. 设 $S = \{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ 是定义在数域 K 上的一组多项式，其次数互不相同且均为至少 2 的无环次数。此外，设 ρ 是满足 $\sum_{\phi \in S} \deg(\phi)^{-\rho} = 1$ 的实数，并假设以下条件成立：

(1) 每个 $\phi_i \in S$ 都不能表示为某个多项式 $R \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$、某个次数为 ≥ 2 的循环的或 Chebyshev 多项式 E，以及某个线性多项式 $L \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$ 所构成的 $R \circ E \circ L$；(2) 对所有 $i \neq j$，对于任意 $F \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$，我们都有 $\phi_j \neq \phi_i \circ F$。

那么， M_S 是一个自由半群，并且对于所有满足 $\mathrm{Orb}_S(P)$ 为无限集的点 $P \in \mathbb{P}^1(K)$，我们有给主人留下些什么吧

$$\#\{Q \in \mathrm{Orb}_S(P) : h(P) \leq X\} \sim cX^\rho$$

其中某个正的常数 c 取决于 S 和 P。

证明。由 [6, 定理 1.6]可知，半群 M_S 是自由的。其余部分，取$\mathcal{O} \subset K$ 为 K 中的一个由 $\mathcal{S}$-整数构成的环，它包含 P 以及 S中多项式的所有系数。于是， [6, 命题 4.5] 意味着，对于由 (3.5.3) 和 (3.5.4) 定义的所有 ϕ, $\psi \in S$ ，曲线 C_ϕ和$C_{\phi,\ \psi}$ 都只有有限多个$\mathcal{O}$-点；也就是说，集合

$$\Sigma := \{(x, y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} : (x, y) \in C_\phi \text{ or } (x, y) \in C_{\phi,\psi} \text{ for some } \phi, \psi \in S\}$$

是有限的。由此，沿用命题 3.4 中陈述 (3) 的相同证明可知， M_S 具有消去性质；具体而言，若

$$B_0 = \max_{(x,y)\in\Sigma} \big\{ \max\{h(x), h(y)\}\big\},$$

若 B_1 是引理 2.11 中的常数，且 $B = \max\{B_0, B_1\}$，那么$B = B(P)$满足定义 3.1 的条件。特别地，所需的渐近式现在可直接由命题 3.2 和定理 1.2 得出。□

References

[1] Jason P. Bell、Keping Huang、Wayne Peng 和 Thomas J. Tucker。有理函数的 Tits 二择一。 *J. Eur. Math. Soc.*即将刊出。预印本见 arXiv:2103.09994。[2] Robert Benedetto、Patrick Ingram、Rafe Jones、Michelle Manes、Joseph H. Silverman 和 Thomas J. Tucker。算术动力学的当前趋势与未决问题。*Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*，56(4):611–685，2019年。[3] P. Erd¨os。关于“因子分解数”理论中的一些渐近公式。 *Ann. of Math. (2)*，42:989–993，1941年。[4] Huy Khoai Ha 和 C. C. Yang。关于函数方程

$P\ f\ = Q\ g$ *Value* ( ) ( )。载 *distribution theory and related topics* 3 *Adv. Complex Anal. Appl.* 于 ，第 卷，第 201–207 页。Kluwer Acad. Publ.，美国马萨诸塞州波士顿，2004年。[5] Vivian Olsiewski Healey 和 WADE HINDES。随机典范高度。

J. Number ，：–。

Theory 201 228 256, 2019

[6] WADE HINDES。在幺半群轨道中计数有界高度点。 *Math. Z.*，301 4 3395 3416，2022年（）：–。[7] WADE HINDES 和 Joseph H Silverman。半群轨道模素数的大小，2023年。预印本见 arXiv:2303.14819。[8] Shu Kawaguchi。线丛的典范高度、不变流与态射的动力特征系统。 *J. Reine Angew. Math.*，597:135–173，2006年。[9] Shu Kawaguchi 和 Joseph H. Silverman。关于代数簇的有理自映射的动力次数与算术次数。 *J. Reine Angew. Math.*，713:21–48，2016年。[10] A. Knopfmacher 和 M. E. Mays。因子分解计数函数综述。

Int. ， （）：–。

J. Number Theory 1 4 563 581, 2005

[11] John Lesieutre 和 Matthew Satriano。超K¨ahler簇上的典范高度与川口-西尔弗曼猜想。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，（10）：7677– 7714，2021年。[12] Jan-Li Lin。关于单项式映射的算术动力学。

Ergodic Theory Dynam. ， （）：–。

Systems 39 12 3388 3406, 2019

[13] Yohsuke Matsuzawa。若干类簇上自同态的川口-西尔弗曼猜想。 *Adv. Math.*，366:107086，26，2020年。[14] Yohsuke Matsuzawa 和 Kaoru Sano。半阿贝尔簇自映射的算术次数与动力次数。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，40(6):1655– 1672，2020年。

[15] Yohsuke Matsuzawa 和 Shou Yoshikawa。关于允许存在 int-amplified 自同态的有理连通簇上的自同态的 Kawaguchi-Silverman 猜想。 *Math. Ann.*, 382(3-4):1681–1704, 2022。[16] Hugh L. Montgomery 和 Robert C. Vaughan。 *Multiplicative number theory. I. Clas-* , 第 卷。剑 *sical theory* 97 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 桥大学出版社，剑桥，2007 年。[17] M. Ram Murty、Michael Rosen 和 Joseph H. Silverman。Romanoff 主题的变体。 *Internat. J. Math.*, 7(3):373–391, 1996。[18] F. Pakovich。代数曲线 $P\ x\ -Q\ y\ =0$ *Complex* ( ) ( ) 与函数方程。 , (-): – 。 *Var. Elliptic Equ.* 56 1 4 199 213, 2011 [19] Jean-Pierre Serre、Martin Brown 和 Michel Waldschmidt。 *Lectures on the Mordell-* *Weil theorem* 1989 。Springer，。[20] Joseph H. Silverman。关于 $K3$ *Invent.* 曲面上的有理点：一种新 *Math.* 105 2 347 373, 1991 的典范高度。 , ( ): – 。[21] Joseph H. Silverman。 *The arithmetic of dynamical systems* 241 *Graduate* , 第 卷。Springer，纽约，。 *Texts in Mathematics* 2007 [22] Joseph H. Silverman。 *Moduli spaces and arithmetic dynamics* 30 *CRM* , 第 卷。美国数学学会， *Monograph Series* 2012 普罗维登斯，罗得岛州，。