arXiv:2305.04976v2 [cond-mat.stat-mech] 6 Aug 2023

朗之万动力学的鞅漂移与经典正则自旋统计

关健·关本本[1,2]

[1]巴黎西岱大学复杂物质与系统实验室，法国国家科学研究中心（*CNRS*）第*7057*联合研究单位，巴黎西岱大学，*10 Rue Alice Domon et Léonie Duquet*，*75013*，法国巴黎[2]古利弗实验室，法国国家科学研究中心（*CNRS*）第*7083*联合研究单位，巴黎高等物理化学工业学院，巴黎文理研究大学，*10 rue Vauquelin*，*75005*，法国巴黎。*（日期：2023年8月8日）

鞅是一种随机过程，它编码了一种公平性或无偏性，并与某个参考过程相关联。这里我们证明，如果参考过程 x_t 按照具有漂移项 $a(x)$，的朗之万方程演化，且如果 $a(x_t)$ 是鞅，那么其振幅就是朗之万函数，该函数最初用于描述静态场作用下单个经典海森堡自旋的正则响应。此外，x_t/t 的渐近极限遵循此类海森堡自旋的系综统计规律。

一、背景

保罗·朗之万于 1905 年推导出了如今所称的朗之万函数 [1]，该函数给出了静态磁场下顺磁性的正则平衡响应。它基于玻尔兹曼—爱因斯坦统计，并解释了居里定律；皮埃尔·居里早在十年前就已通过实验确立了该定律 [2]。用现代语言来说，处于沿某一轴方向的均匀磁场中的经典三维海森堡自旋，会根据玻尔兹曼权重（即相对概率）发生热涨落 $e^{x\,\text{余弦}\theta}$，其中 θ 是自旋相对于磁场轴的极角，而 x 是以温度和自旋磁矩为尺度的磁场强度。自旋的平均极化由 $\cos\theta$ 按上述概率加权，并在整个立体角上积分后取平均得到。结果就是朗之万函数 $\coth x - \frac{1}{x}$ [1]。它在 $|x|$ 较小时表现为 $\frac{1}{3}x$，这解释了居里定律。

Albert Einstein [3] 提出了 Guoy 关于布朗运动的定性观点 [4, 5], 三年后，P. Langevin 于 1908 年引入了第一个随机微分方程，如今称为朗之万方程 [6]。用现代语言来说，d维空间中的一种简单且通用的朗之万方程形式为

$$\frac{d\vec{x}_t}{dt} = \vec{a}(\vec{x}_t) + \vec{\xi}_t, \tag{1}$$

其中包含漂移项 $\vec{a}(\vec{x}_t)$，以及白高斯噪声 $\vec{\xi}$，其均值为零，协方差为对角线为单位值的矩阵 $\langle \xi_t,\ \xi_s\rangle = \mathbf{1}\delta(t-s)$，其中$\mathbf{1}$ 是单位张量。如今我们知道该方程如何满足热力学第一定律 [7, 8]和第二定律 [9, 10]，但将演化方程视为路径系综之间映射这一概念，是 Langevin 革命性地提出的。然而，据作者所知，在 20 世纪初，朗之万函数与朗之万方程之间尚无关联。

大约在 1940 年，JeanViller 和 Doob 将历史悠久的鞅概念现代化，使其成为一个强有力的现代概率论中的概念。有关历史回顾，可参见[11] 第 1 章。鞅是对未来公平这一思想的数学表达：如果（*i*） $\vec{Y}_t$ 由 $\{\vec{X}_s\}_{0\le s\le t}$ 因果决定，并且（*ii*）其对未来的条件期望体现了公平性，那么 Y_t 这一连续时间随机过程就称为与随机过程 $\{\vec{X}_s\}$ 相关的鞅：

$$\langle \vec{Y}_t | \{\vec{X}_u\}_{0\le u\le s}\rangle = \vec{Y}_s \quad \text{for } \forall t \ge s, \tag{2}$$

更不用说其他严格的数学条件了。这里，$\{\vec{X}_u\}_{0\le u\le s}$ 表示 $\vec{X}_u$ 在时间段 $0 \le u \le s$ 内的历史，$\langle R|cond\rangle$ 表示随机变量 R在条件*cond*下的期望。为便于后续讨论，我们引入微分形式，它由式（2）分别应用于Y_{t+dt} 和 Y_t得到：

$$\langle d\vec{Y}_t | \{\vec{X}_u\}_{0\le u\le s}\rangle = 0 \text{ for } \forall t \ge s, \tag{3}$$

概率论提供了许多关于鞅的有用定理，因此人们常常努力将感兴趣的参考过程转化为鞅过程，以推导出 X_t.的新性质。群体动力学和数理金融学早在很久以前就发展了这种方法 [11]。在随机热力学领域，研究者最近认识到，指数化的熵产生是一个属于路径概率比（或称拉东-尼科迪姆密度过程）这一类别的鞅过程 [12, 13]。

我们在所谓的渐进淬火[14–17]中，还发现了一种不同于路径概率比的鞅类型。从一个处于平衡态的多自旋系统出发，我们依次将各个自旋固定在其瞬时取值上。研究发现，在这种无偏方案下，鞅过程并不出现在逐渐固定的自旋中，而是出现在待固定自旋的均值。那些已经固定的自旋通过分子场影响后者。我们将其称为“隐藏鞅”，因为在连续时间对应情形中，应当成为鞅的不是式（1）中的 $\vec{x}_t$，而是漂移 $\vec{a}(\vec{x}_t)$——这正是本研究的出发点。下文第 II 节将说明，若式（1）中的漂移 $\vec{a}(\vec{x}_t)$是与过程（1）自身相关的鞅，那么该漂移就是朗之万函数[18]。自旋相关函数的出现令人惊讶，因为朗之万方程（1）适用于非

* 通讯作者：ken.sekimoto@espci.fr

紧致空间。然而，第 III 节中还有一个进一步的惊喜：这种自旋的正则统计出现在 x_t/t.长时间渐近行为的系综中

II. 朗之万函数作为自调和漂移

IIA. 与漂移相关的调和函数族

当过程 $\vec{Y}_t = \vec{h}(\vec{X}_t)$ 是与过程 $\{\vec{X}_s\}$ 相关的鞅时，函数 $\vec{h}$ 被称为 [11] 调和。特别地，若过程 $\{\vec{X}_s\} = \{\vec{x}_t\}$ 由 (1) 生成，且 $\vec{h}(\vec{x}_t)$ 与 $\vec{x}_t$ 取值于相同的空间，则调和条件为

$$(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{h} + \frac{1}{2}\Delta\vec{h} = 0. \tag{4}$$

要证明这一点，只需将 $d\vec{h}(\vec{x}_t)$ 展开至 $\mathcal{O}(dt)$ 阶，即

$$d\vec{h}(\vec{x}_t) = (d\vec{x}_t \bullet \nabla)\vec{h} + \frac{1}{2}(d\vec{x}_t \bullet \nabla)^2\vec{h}, \tag{5}$$

其中 $\bullet$ 是伊藤型乘积 [11]。我们将 (1) 的随机微分形式代入其中：

$$d\vec{x}_t = \vec{a}(\vec{x}_t)dt + d\vec{W}_t, \tag{6}$$

其中 W_t 是 d 维标准化布朗运动，即维纳过程，满足 $dW_t dW_t = \mathbf{1}dt$，其中 $\mathbf{1}$ 为单位张量。对 $\vec{Y}_t = \vec{h}(\vec{x}_t)$ 施加鞅条件 (3)，即可得到 (4)。(4) 的形式解释了“调和”这一名称，因为在没有漂移 $\vec{a} \equiv 0$，的情况下，方程 (4) 即为向量拉普拉斯方程。

给定一个漂移 $\vec{a}$，我们可以设想与遵循式（1）的过程相关联的调和函数族。我们将此族记为 $\mathcal{H}_{\vec{a}}$：

$$\mathcal{H}_{\vec{a}} = \left\{\vec{h}\ ;\ (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{h} + \frac{1}{2}\Delta\vec{h} = 0\right\}. \tag{7}$$

IIB. 朗之万函数作为不动点

在与不同漂移相关联的函数族中，自指条件

$$\vec{a}^* \in \mathcal{H}_{\vec{a}^*} \tag{8}$$

将特殊漂移 $\vec{a}^*$ 定义为一种不动点；若其存在，我们称之为自调和漂移。更具体地说，

$$(\vec{a}^*\cdot\nabla)\vec{a}^* + \frac{1}{2}\Delta\vec{a}^* = \vec{0}. \tag{9}$$

这是本文的关键方程。

方程（9）可能存在非对称解。显然，低维解的柱面提升是一种各向异性解。然而，我们在此寻求关于原点各向同性的解，$\vec{x} = 0$.（注：过程 $\vec{x}_t$ 仍然可以从 $\vec{x}$ 原点以外的任意位置开始。）

接下来我们假设其形式为[19]:

$$\vec{a}^*(\vec{x}) = L_d(\|\vec{x}\|)\hat{x}, \tag{10}$$

其中，$\hat{}x \equiv \vec{x}/\|\vec{x}\|$ 是沿 $\vec{x}$ 方向的单位向量，后缀 d表示空间维数。于是式（9）意味着

$$L_d''(x) + 2L_d(x)L_d'(x) + \frac{d-1}{x}\left(L_d'(x) - \frac{L_d(x)}{x}\right) = 0. \tag{11}$$

在方程 (11) 的二维解族中，对相似变换 $L_d(x) \to \alpha L_d(\alpha x)$ 的不变性提供了一个参数。如果我们将方程 (11) 的第一积分写为

$$L_d'(x) + (L_d(x))^2 + \frac{d-1}{x}L_d(x) = \alpha^2, \tag{12}$$

然后，我们可以将问题简化为求解满足 $\alpha = 1.$ 条件的 (12) 式中的 $L_d(x)$。接着，对于 (12) 式剩余的一参数解族，利用 Mathematica® 进行一些分析后发现，至少对于 d =2、3 和 4，在 $x = 0.$ 处不发散的解是唯一的。例如，在 $d = 3,$ 解 $L_3^{(\beta)}(x) \equiv \coth(x+\beta) - \frac{1}{x}$ 仅在 $\beta = 0.$ 的情况下才是正则的。对于 $d = 1$，我们可以直接求解 (9) 式，从而得到 (12) 式中的 $\alpha = 1$，并适当地选取原点。综上，所确定的解如下：

$$\begin{aligned}
L_1(x) &:= \tanh(x)\\
L_2(x) &:= \frac{I_1(x)}{I_0(x)}\\
L_3(x) &:= \coth x - \frac{1}{x}\\
L_4(x) &:= \frac{x[I_0(x)+I_2(x)] - 2I_1(x)}{2xI_1(x)},
\end{aligned} \tag{13}$$

对于任意维度的 $x \neq 0$ 和 $L_d(0) = 0$，$d,$ 其中 $I_n(x)$ 是 n 阶第一类修正贝塞尔函数。要从 (12) 得到这些解，一个标准但颇具启发性的方法是对$\alpha = 1$使用（Riccati）变换，

$$L_d \equiv \frac{Z_d'}{Z_d} = \frac{d}{dx}[\ln Z_d(x)], \tag{14}$$

它将 (12) 化为线性方程，

$$\frac{d^2Z_d}{dx^2} + \frac{d-1}{x}\frac{dZ_d}{dx} = Z_d. \tag{15}$$

注意到（15）左侧拉普拉斯算子的径向部分，我们发现

$$Z_d(\|\vec{x}\|) \propto \oint_{\|\hat{S}\|=1} e^{\hat{S}\cdot\vec{x}}d\Omega_S, \tag{16}$$

也就是说，这是无量纲化外场下单个经典海森堡自旋的配分函数，$\vec{x}$. 通过ˆ (14)，漂移因此是该外场下自旋的正则平均。S所有 $L_d(x)$都关于 x 为奇函数，其图像与最简单的函数 $L_1(x)$、或原始朗之万函数$L_3(x)$类似。它们还有唯一的极限，$\lim_{x\to\infty} L_d(x) = 1$.我们可将 $L_d(x)$称为 d维朗之万函数。无论如何，在鞅的语境下，朗之万方程在此与朗之万函数相遇。为完整起见，我们在下方列出带有数值系数的 $Z_d(x)$，使得 $Z_d(0)$是 d维单位超球面的表面积：

$$(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = \left(2\cosh(x), 2\pi I_0(x), 4\pi\frac{\sinh(x)}{x}, 4\pi^2\frac{I_1(x)}{x}\right). \quad (17)$$

关于解族的备注 — 长度和时间单位的改变会导致对（6）式进行改写。如果我们通过 $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ 和 $t = \alpha^2 C\tau$引入$\vec{y}$ 和 τ，那么，对于$\vec{a}$ （ $\vec{x}_t$），结合（ 10 ）式的（ 1 ）式可得

$$d\vec{y}_\tau = C\alpha\, L_d(\alpha\|\vec{y}_\tau\|)\hat{y}_\tau d\tau + \sqrt{C}d\vec{W}_\tau, \quad (18)$$

其中ˆ$y_\tau \equiv \vec{y}_\tau/\|\vec{y}_\tau\|$ ，我们利用了标准 d维维纳过程的统计等价性，$d\vec{W}_{\kappa t} \simeq \sqrt{\kappa}\, d\vec{W}_t$，。在式（18）中可以看到，除自谐函数的灵活性 $\alpha L_d(\alpha\|\vec{y}_\tau\|)$，之外，漂移与扩散之间还存在特定的尺度关系，使得漂移成为鞅。更多论证见附录 A。

III. 渐近极限的统计性质：“显微镜”

一般而言，朗之万函数 $L_d(x)$ 可能出现在与海森堡自旋的正则统计无关的场合。例如， $L_2(x)$ 曾作为 1+1 维成核控制的聚合物晶体生长速率 [20, 21],出现，与 XY 自旋无关。本节将说明，海森堡自旋的统计确实会出现在具有自谐漂移的朗之万动力学的渐近行为中。

IIIA.自谐漂移的收敛性与朗之万过程的渐近行为

由于速度 $d\vec{x}_t/dt$ 平均而言沿着$\vec{x}_t$ 定向（见式（10））， 并且对于任意非零$\vec{x}_t$， $L_d(\|\vec{x}_t\|)$均为非负值，因此我们可以预期， $\vec{x}_t$ 很可能会在较长时间内无限增长。然而，其进一步的细节乍看之下并不明确。因此，我们首先关注漂移$\vec{a}^*(\vec{x}_t)$的演化。由于鞅条件（9）， $d\vec{a}^*(\vec{x}_t)$的发展中不包含关于 $\mathcal{O}(dt)$的（漂移）项（见式（5）），结果为

$$d\vec{a}^*(\vec{x}_t) = d\vec{W}_t \bullet (\nabla\vec{a}^*), \quad (19)$$

$$\nabla\vec{a}^* = \frac{dL_d(\chi)}{d\chi}\hat{a}^*\hat{a}^* + \frac{L_d(\chi)}{\chi}(\mathbf{1} - \hat{a}^*\hat{a}^*), \quad (20)$$

其中，$\hat{a}^* \equiv \vec{a}^*/\|\vec{a}^*\|$和 χ是反向确定的，使得$L_d(\chi) = \|\vec{a}^*\|$. 因此， $(\nabla\vec{a}^*)$ 是 $\vec{a}^*$. 的函数。由 $d\vec{a}_t = d\vec{W}_t \bullet$ M($\vec{a}_t$)生成的过程，其中M($\vec{a}$)是 $\vec{a}$ 的任意秩二张量，是与维纳过程 $\vec{W}_s$ $(0 \le s < \infty)$相关的鞅。然而，上文定义的自谐漂移 $\vec{a}^*$ 还具有若干特殊性质，下面将对此进行讨论。

我们注意到，每条实现的 $\vec{a}^*(\vec{x}_t)$ 在 $t \to\infty$ 时收敛，且极限 $\vec{a}^*_\infty \equiv \lim_{t\to\infty}\vec{a}^*(\vec{x}_t)$ 位于超球面上，$\|\vec{a}^*_\infty\| = 1$. 。 $d = 1$ 的情形尤其简单：方程 (19) 和 (20) 可写为

$$da^*_t = (1 - a^{*2}_t) \bullet dW_t \quad (21)$$

因为 $(\tanh\, x)' = 1 - \tanh^2 x$. 与式 (21) 等价的福克–普朗克（FP）方程具有势 $\ln[(1 - a^{*2})^2]$，扩散系数为$\frac{1}{2}(1 - a^{*2})^2$. 变量 $\vec{a}^*_t$应当趋向于 ∓ 1 并停留在那里。事实上，奇异密度 $\delta(a^*_\infty \mp 1)$ 或它们的线性组合，都是该 FP 方程的稳态解。

与$d = 1$相比，() 在 时的行为不太明晰；不过，在超球面 （即在处）消失这一事实表明，该超球面是 ()演化的自然吸收边界。关于极限存在性的更形式化、更一般的论证，可由（次）鞅收敛定理给出（例如参见 [11] 的 §4.1.5）。根据该定理，由于 $\vec{a}^*(\vec{x})$ 有界，即 $\|\vec{a}^*\| \le 1$，鞅过程 $\vec{a}^*(\vec{x}_t)$ 应当存在极限；

$$\vec{a}^*_\infty \equiv \lim_{t\to\infty}\vec{a}^*(\vec{x}_t). \quad (22)$$

另一方面，如果极限 $\vec{a}^*_\infty$不在自然边界上，噪声仍可能使 $\vec{x}_t$ 发生迁移。因此，得出结论： $\|\vec{a}^*_\infty\| = 1$。

接下来，我们考虑导致 $\lim_{t\to\infty}\vec{a}^*(\vec{x}_t) = \vec{a}^*_\infty$ 的 $\vec{x}_t$ 轨迹? 图 1 显示了 $d = 2$, 中的三个样本，它们均从原点出发， $\vec{x}_0 = 0$. 。左图是轨迹初始部分的放大图，右图则显示了截至 $t = 16$ 的完整轨迹，其中包括左图所示部分 [22]。在 $\|\vec{x}_t\| \lesssim 1$， 的早期阶段，噪声项 $\vec{\xi}_t$占主导地位，超过了漂移；随后，系统缓慢过渡到长时间尺度下的弹道行为。结合这一观察以及式 (1) 或式 (6)，我们认为 $\vec{x}_t$ 渐近地呈现弹道行为，其意义是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\vec{x}_t}{t} = \vec{a}^*_\infty, \quad (23)$$

这也意味着 $\lim_{t\to\infty}\frac{\|\vec{x}_t\|}{t} = 1$. 。我们在附录 B 中更详细地证明式 (23)。请注意，轨迹的每一种实现最终都会对应 $\vec{a}^*_\infty$. 的一个特定取向

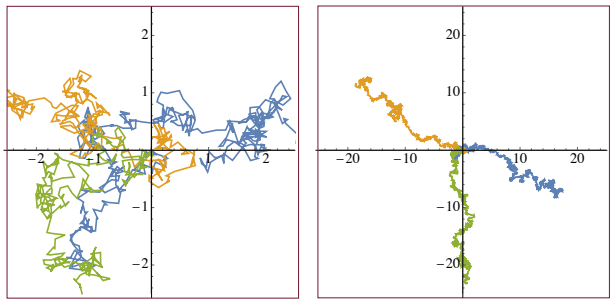


图1. 来自 $\vec{x}_0 = (0_+, 0_+)$。（左）原点附近的局部放大图。（右）截至 $t = 16.$ 的完整轨迹

IIIB. t → ∞ 时的轨迹分布，作为“自旋”显微镜

$\vec{x}_t$ 的每条轨迹，或 $\vec{a}^*(\vec{x}_t)$ 的每条轨迹，都有一个作为随机变量的极限值 $\vec{a}^*_\infty$；根据自谐性的定义，我们有如下鞅性质：

$$\langle \vec{a}^*_\infty | \vec{x}_0 \rangle = \vec{a}^*(\vec{x}_0). \tag{24}$$

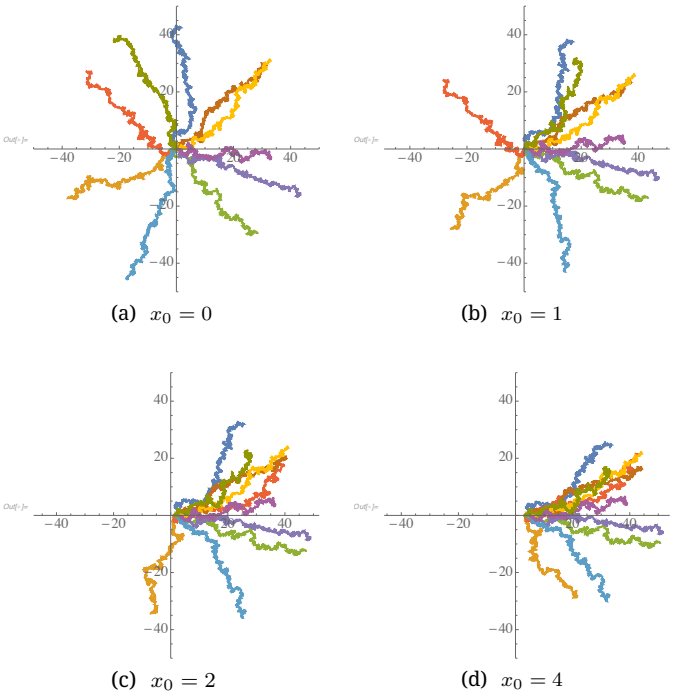
这是对 $\vec{a}^*_\infty$. 统计的约束。不过，只有对于 $d = 1$，实现 $a^*_\infty = \pm 1$ 的概率与初始数据 $a^*(x_0)$ 才能由式 (24) 直接关联，

$$Prob(a^*_\infty = s) = \frac{1 + s\, a^*(x_0)}{2}, \quad s = \pm 1.$$

相比之下， $\vec{a}^*_\infty$ 在 d（> 1）维超球面上的统计性质绝非平凡。图 2 定性地展示了 $\vec{x}_t$ 的轨迹截至 $t = 40$ 如何依赖于初始数据， $\vec{x}_0$. 大致而言， $\|x_0\|$，越大， $\vec{x}_t$.的取向就越趋于极化。

我们将用其在 $\vec{x}_0$ 轴上的正交投影 $\cos\theta \equiv \vec{a}^*_\infty \cdot (\vec{x}_0/\|\vec{x}_0\|)$ 来参数化 $\vec{a}^*_\infty$ 的取向，其中 $0 \le \theta \le \pi$. 当 $\vec{x}_0 = 0$，通过式 (23) 得到的 $\vec{a}^*_\infty$ 的分布必须是各向同性的，而 $\cos\theta$ 的累积概率分布应严格满足 $Prob^{(\mathrm{can})}(\cos\theta < \chi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\chi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos\chi$. 图 3 中顶部的虚线（红色）表示该公式。沿着这条曲线的一串点（蓝色）是根据超过 3000 条轨迹的数值数据得到的结果，其中 $\vec{a}^*_\infty = \lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{t}$用 $\frac{\vec{x}_t}{t}\big|_{t=40}$. 近似。与理论曲线的偏差表明了采样有限所导致的误差。图 3 中另外三串蓝点分别表示数值计算得到的、 $x_0 = 1$，2 和 4，时 $\cos\theta$ 的累积概率，按降序排列。（注意：我们采用累积概率，因为只需绘制归一化秩 $r/3000$ 与对应的 $\cos\theta_r$ 值之间的关系，就能根据经验重建累积概率，无需分箱或平滑处理。）

相当令人惊讶的是，这些结果几乎必然遵循无量纲化



(a) $x_0 = 0$ (b) $x_0 = 1$ (c) $x_0 = 2$ (d) $x_0 = 4$

图 2. 来自 $\vec{x}_0 = (x_0, 0_+)$ 的二维轨迹，其中 (a) $x_0 = 0$、(b) $x_0 = 1$、(c) $x_0 = 2$ 和 (d) $x_0 = 4.$ 。所有情况下，持续时间均截至 $t = 40$，且在 (1) 中，我们对 ξ_t 使用了完全相同的一组噪声历史。

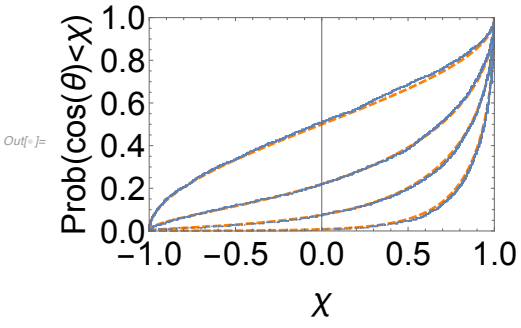


图 3. 不同起始点对应的 $\lim_{t\to\infty}(\vec{x}_t/t) = \vec{a}^*_\infty$ 的二维取向分布，$x_0 = 0$、1、2 和 4，从上到下排列。我们用 $\cos\theta$ 表示 $\vec{a}^*_\infty$ 的取向，其中 θ 是 $\vec{a}^*_\infty$ 与 $\vec{x}_0 = (x_0, 0)$ 之间的夹角，并用经验累积概率展示这些分布。在数值计算中， $\vec{a}^*_\infty$ 的系综由 3000 次 $\vec{x}_t/t|_{t=40}$. 实现近似。红色虚线表示无量纲化场 $\vec{x}_0$ 下单个西自旋的正则平衡分布，参见正文中的 (25)。

场中的海森堡自旋的正则统计， $\vec{x}_0 = (x_0, 0)$，由此得到累积概率，

$$Prob^{(\mathrm{can})}(\cos\theta < \chi | \vec{x}_0) = \frac{1}{\pi I_0(x_0)} \int_{-1}^{\chi} \frac{e^{x_0\xi} d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{25}$$

该公式由图 3 中的红色虚线表示。因此，虚构自旋取向的热分布

若产生期望值 $\vec{a}^*(\vec{x}_0)$，则该分布已映射为“自旋”的静态分布，$\vec{a}^*_\infty$，其特征描述了在 $t\to\infty$. 极限下 $\vec{x}_t$ 的轨迹。与式 (24) 一致，我们提出的概率密度 $\rho(\vec{a}^*_\infty)$ 因此为：

$$\rho(\vec{a}^*_\infty)=\frac{e^{\vec{x}_0\cdot\vec{a}^*_\infty}}{Z_d(\|\vec{x}_0\|)},\qquad \vec{a}^*_\infty\in S^{d-1}, \tag{26}$$

其中 $\vec{a}^*_\infty$ 表示 $\lim_{t\to\infty}\frac{\vec{x}_t}{t}$，而 S^{d-1} 是 d维单位球面的（$d-1$）维表面。从 $\vec{x}_0$ 到 $\vec{a}^*_\infty$ 的这种映射，将 $\lim_{t\to\infty}\frac{x_t}{t}$ 的分布作为一种显微镜，使我们能够通过在足够大的 t. 下反复测量$\vec{x}_t$ 来评估 $\vec{x}_0$ 。请注意，该映射 $\vec{x}_0\mapsto Prob^{(\mathrm{can})}(\cos\theta<\chi|\vec{x}_0)$，渐近地独立于诸如 $\|\vec{x}_0\|/\|\vec{x}_t\|$. 这样的微观-宏观比率。这与根据布朗粒子在较晚时刻的位置 $\vec{x}_t$. 来评估其初始位置 $\vec{x}_0$ 的情形形成对比。在后一种情形中，信号与背景之比会随时间推移而减小。更多说明请见附录 C。

IV. 讨论

本研究可能带来两点启示。首先，我们通过鞅过程发现了朗之万方程与朗之万函数之间的联系。通常，朗之万方程与正则分布之间的关系是通过爱因斯坦关系建立的；借此，朗之万方程的稳态会成为正则分布（如果漂移项具有势函数）。然而在本研究中，$\vec{x}_t$和 $\vec{a}$（$\vec{x}_t$）的演化都没有正则 稳态密度；$\vec{x}_t$ 无界增长，而 $\vec{a}$（$\vec{x}_t$）则渐近地被限制在单位超球面上的某一点。尽管如此，能够产生朗之万函数响应的正则自旋统计，却出现在 $\vec{x}_t/t$. 渐近极限的分布中。附录 D 中，我们给出一个定性的寓言，帮助读者一窥研究结果。

其次，我们的研究是又一个例子，说明自指条件能够带来非平凡的结果；著名的例子包括康托尔和 G¨odel 的对角线论证、分形等，不一而足。通常，鞅过程是根据一个参考过程构造的，以便我们能够将鞅理论中的有用定理应用于前者，并最终获得关于参考过程的认识。而本研究则反过来提出这样的问题：什么类型的参考过程具有自指鞅性质?

鞅如何带来朗之万函数，其背后的物理机制尚不清楚。将 Riccati 方程线性化的变换 $L_d(x)=Z_d'(x)/Z_d(x)$，采取了典范响应的形式，这或许能为回答这一问题提供线索。鞅约束如何将初始分子场 $\vec{x}_0$ 传递到“自旋”的渐近分布$\vec{a}^*_\infty$.，同样尚不清楚。简言之，除了作为纯粹的数学工具之外，本研究的发现带给我们的是关于鞅在物理学中意义的问题，而非答案。因此，我们想以几个尚待解答的问题作为报告的结尾：时空调和函数（例如，参见 [11]的 §3.2.5.3）是否也可以是一个不动点？下文公式 (26) 中提出的显微镜思想能否推广到非鞅漂移？随机热力学 [23–25] 是否与之相关？对于拓扑不同于欧几里得空间的状态空间，能否建立一种平行的理论框架？是否存在量子对应物？自谐漂移是否会使某种物理量或信息达到最优?

致谢

作者感谢 Charles Moslonka 定期就鞅和渐进淬火进行讨论。作者衷心感谢 Matteo Polettini 对早期稿件提出的宝贵意见，以及与 Felix Ritort 进行的富有见地的讨论。

附录 A：通过重缩放得到的自谐漂移族

对于 $\vec{x}_t$ 的不同解释，漂移的自谐性意味着漂移项与噪声项之间存在不同的约束。例如，当 $\vec{y}_t$ 表示温度为 T、摩擦系数为 γ，的热浴中一个粒子的 位置时，在（18）中取 $(\alpha,\ C)=(1,\ 2\mathcal{D})$，其中 $\mathcal{D}=\frac{k_\mathrm{B}T}{\gamma}$，可得到

$$d\vec{y}_\tau=\frac{2k_\mathrm{B}T}{\gamma}L_d(\|\vec{y}_\tau\|)\hat{y}_\tau d\tau+\sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{\gamma}}\,d\vec{W}_\tau, \tag{A1}$$

由于 $L_d(\|\vec{y}_\tau\|)\hat{}y_\tau=\nabla\ln Z_d(\|\vec{y}\|)$，该方程描述了势 $(-2k_\mathrm{B}T\ln Z_d(\|\vec{y}\|))$。因此，为保证自谐性，势的能量尺度受到约束。

应用 (18) 的另一种情形，是类比完全网络 [14–17]，上 d 维海森堡自旋的渐进淬火 d。我们在第 I 节最后一段提到了这一点。在此背景下，合适的选择是 $(\alpha,\ C)=(\frac{J}{k_\mathrm{B}T},\ \frac{k_\mathrm{B}T}{J})$，由此可将 (18) 写成如下形式：

$$d\vec{y}_\tau=L_d\!\left(\frac{J\|\vec{y}_\tau\|}{k_\mathrm{B}T}\right)\hat{y}_\tau d\tau+\sqrt{\frac{k_\mathrm{B}T}{J}}\,d\vec{W}_\tau. \tag{A2}$$

在这一图景中，我们将 (A2) 右侧的 $L_d(J\|\vec{y}_\tau\|/k_\mathrm{B}T)\hat{}y_\tau$ 视为分子场 $J\vec{y}_\tau$ 作用下海森堡自旋的平衡均值，其中 J 为自旋-自旋耦合常数，$k_\mathrm{B}T$ 为温度。随后，每隔 $d\tau$ 就会出现一段新的自旋$d\vec{y}_\tau$，并加入淬火部分，$\vec{y}_\tau$. 与此同时，$d\vec{y}_\tau$ 的条件均值遵循正则统计，而其上还叠加着维纳噪声 $\propto dW_\tau$。为确保自谐性，噪声的振幅必须为 $\sqrt{k_\mathrm{B}T/J}$.

附录 B：$\vec{x}_t/t$的长时间收敛

在正文中我们看到，对于每一条从 $x_t=x_0,$出发的特定轨迹$\vec{a}^*(\vec{x}_t)$，都存在一个极限 $\vec{a}^*_\infty$，且满足 $\|\vec{a}^*_\infty\|=1$。下面我们将看到，比值 $\vec{x}_t/t,$也收敛到 $\vec{a}^*_\infty$.

一旦承认极限 $\vec{a}^*_\infty$, 存在，就存在一个 u，使得对于给定的常数ϵ (>0)， $\|\vec{a}^*(x_t) - \vec{a}^*_\infty\| < \epsilon$适用于 $\forall t \geq u$。当我们在区间 $[u,t]$ 上对 (6) 积分时，得到

$$\vec{x}_t = \vec{x}_u + \int_u^t \vec{a}^*(\vec{x}_s)ds + \int_{s=u}^{s=t} dW_s, \qquad \text{(B1)}$$

我们看到，对于 $t \to \infty.$， $\vec{x}_u/t \sim t^{-1}$ 和 $\int_{s=u}^{s=t} dW_s/t \sim t^{-1/2}$。因此，我们聚焦于 $\int_u^t \vec{a}^*(\vec{x}_s)ds$，其表达式为

$$\int_u^t \vec{a}^*(\vec{x}_s)ds = (t-u)\vec{a}^*_\infty + \int_u^t [\vec{a}^*(\vec{x}_s) - \vec{a}^*_\infty]ds.$$

虽然右侧被积函数的大小已经由 ϵ，所界定，但我们预计该被积函数几乎以 s^{-1} 的速度衰减，因为当 $\vec{x}_s$ 很大时，朗之万方程 (1) 大致意味着$d\vec{x}_s/ds \simeq (1-\mathcal{O}(\|\vec{x}_s\|))\hat{}x_s + d\vec{W}_t$，其中我们注意到，对于 $x \to \infty.$， $L_d(x) = 1-\mathcal{O}(x^{-1})$。因此，右侧的时间积分由 $(t-u)\epsilon.$ 主导。将 (B1) 中的每一项除以 t，便得到所声称的结果；

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\vec{x}_t}{t} = \vec{a}^*_\infty, \text{ when } \lim_{t\to\infty} \vec{a}^*(\vec{x}_t) = \vec{a}^*_\infty.$$

附录 C：事后推断布朗粒子的初始位置

当布朗粒子从$\vec{x}_0$出发时，其在时间 t的$\vec{}$位置，即 $\vec{x}_t = \vec{x}_0 + W_t$，是与维纳过程 $\vec{W}_t$. 相关联的鞅。虽然均值 $\langle \vec{x}_t|\vec{x}_0\rangle$ 保持不变 $\vec{x}_0$，方差$\langle(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2|\vec{x}_0\rangle$ 随时间线性增长。因此，不同于自谐漂移的情况，在信噪比随 $R.$ 衰减的条件下，通过观测“宏观”距离 $R(\gg \|\vec{x}_0\| \geq 0)$处的 $\vec{x}_t$ 来推断 $\vec{x}_0$ 难以实现。事实上，通过分析退出问题 [26], , 圆周上的检测位置 $\|\vec{x}\| = R$，服从累积的概率，

$$\begin{aligned} Prob(\cos\theta < \chi) &= \frac{1-\epsilon^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\epsilon\chi+\epsilon^2}} - \frac{1}{1+\epsilon}\right) \\ &= \frac{1+\chi}{2}\left[1 - \frac{3(1-\chi)}{2}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right], \end{aligned} \qquad \text{(C1)}$$

其中 $\epsilon \equiv \|\vec{x}_0\|/R.$ 我们看到，信号项 $-\frac{3(1-\chi)}{2}\epsilon$，在宏观极限下消失， $\epsilon \to 0.$

附录 D：本作品内容的寓言

这里我们用一个定性的寓言，来让读者一窥我们发现并分析的系统；为此，我们不拘泥于正文中的逻辑顺序和某些记号。

设想存在一个 d 维空间，其度规为欧几里得度规，其中“场”沿径向向外，位置 $\vec{x}$ 处的场强为 $\vec{x}.$。一艘在这个空间中航行的飞船配有一个由 d维自旋 S 构成的“指南针”，其中 $\|S\| = 1$ 感受到飞船所在位置的场 $\vec{x}$。然而，这个自旋的热涨落如此迅速，以至于飞船导航员只能观测到其热平均值，即 $\langle S\rangle = L_d(\|\vec{x}\|)x$，其中 x 是沿 $\vec{x}$ 方向的单位向量，而 $L_d(x)$ 是朗之万函数，当 $x \to \infty.$ 时趋于 1。从时刻 $t = 0,$ 的 $\vec{x}_0$ 出发，飞船在位置 $\vec{x}_t$ 处的瞬时速度等于漂移与标准白高斯噪声之和；漂移就是自旋的均值，即 $\langle S_t\rangle(= L_d(\|\vec{x}_t\|)x_t)$，白高斯噪声为 ξ_t，也就是维纳过程 $W_t.$ 的时间导数，其中$\vec{}$。经过足够长的时间后，飞船远离原点，平均速度 $\vec{x}_t/t$ 收敛为一个单位向量，我们将其记为 $S_\infty.$。第一个发现（鞅性质）是，从 $\vec{x}_0$ 出发的所有轨迹中，渐近平均速度 S_∞ 的系综平均与初始速度相同，即 $\langle S_\infty\rangle_{\vec{x}_0} = \langle S_0\rangle_{\vec{x}_0}$，其中右边是 $\vec{x}_0.$ 处自旋的热平均值。第二个发现是， S_∞ 的系综分布与起点 $\vec{x}_0$处 S_0 的热分布相同，这正是导航员无法获取的信息。

[1] P. Langevin, 《理论与应用物理杂志》**4**, 678（1905）。[2] P. Curie, 《不同温度下物体的磁性》（论文：Gauthier-Villars，巴黎（法国），1895）。[3] A. Einstein, 《物理年鉴》（莱比锡）**17**, 549（1905）。[4] Gouy, 《物理学杂志》第2辑**7**, 561（1888）。[5] Gouy, 《科学院院报》**109**, 102（1889）。[6] P. Langevin, 《科学院院报》（巴黎）**146**, 530（1908）。[7] K. Sekimoto, 《日本物理学会志》**66**, 1234（1997）。[8] K. Sekimoto, 《理论物理进展增刊》**130**, 17（1998）。[9] U. Seifert, 《物理评论快报》**95**, 040602（2005）。[10] U. Seifert, 《物理学进展报告》**75**, 126001（2012）。[11] Edgar Rold´an, I. Neri, R. Chetrite, S. Gupta, S. Pigolotti, F. J¨ulicher 和 K. Sekimoto, 《物理学家的鞅》（2023）, arXiv:2210.09983 [cond-mat.stat-mech]。[12] R. Chetrite 和 S. Gupta, 《统计物理学杂志》**143**, 543（2011）。[13] I. Neri、E. Rold´an 和 F. J¨ulicher, 《物理评论 X》**7**, 011019（2017）。[14] B. Vent´ejou 和 K. Sekimoto, 《物理评论 E》**97**, 062150（2018）。[15] M. Etienne 和 K. Sekimoto, 《波兰物理学报 B》**49**, 883（2018）。[16] C. Moslonka 和 K. Sekimoto, 《物理评论 E》**101**, 062139（2020）。[17] C. Moslonka 和 K. Sekimoto, 《物理评论 E 》**105**, 044146 （ 2022 ）。[18] 截至第二节的内容基本上可通过 arXiv:2305.04976v1 查阅。[19] 我们使用记号 $\vec{x}$ 而不是 $\vec{r}$，因为它通常不是一个 a

空间位置，而且在文献中， $L(x)$比 $L(r)$更常见。[20] C. H. Bennett、M. B¨uttiker、R. Landauer 和 H. Thomas，统计物理学杂志**24**，419（1981）。[21] N. Goldenfeld，物理学杂志 A：数学与一般物理**17**，2807（1984）。[22] 该 0_+ 是一个数值上的人工无穷小量，用于避免 $L_d(x)$在 $x=0$处的可去奇点。[23] K.Sekimoto，《随机能量学》（物理学讲义，第799卷）

（施普林格，2010）。[24] L. Peliti 和 S. Pigolotti，《随机热力学：导论》（普林斯顿大学出版社，2021）。[25] N. Shiraishi，《随机热力学导论：从基础到 A。

（施普林格，2023）。[26] K. Sekimoto，《离散网络上马尔可夫过程的首次通过时间分布推导》（2021）。