arXiv:2305.04984v2 [cond-mat.stat-mech] 3 Oct 2023

具有高形式对称性的量子场论中本征态热化假说的违反

福岛修*Department of Physics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

滨崎龙介†Nonequilibrium Quantum Statistical Mechanics RIKEN Hakubi Research Team, RIKEN Cluster for Pioneering Research (CPR), RIKEN iTHEMS, Wako, Saitama 351-0198, Japan(日期：2023年10月4日)

我们阐明了高阶形式对称性的存在如何影响孤立量子系统中的热化动力学。在合理假设下，我们通过解析方法证明，在一个 $(d+1)$ 维量子场论中，p 形式对称性会导致许多非平凡的 $(d-p)$ 维可观测量违反本征态热化假说（ETH）。对于离散高阶形式（即 $p \geq 1$）对称性，这意味着在不存在任何局域守恒量的情况下，那些非局域但尺度远小于整个系统的可观测量不会热化。我们通过数值计算验证了这一论证，研究对象为 (2+1) 维 $\mathbb{Z}_2$ 晶格规范理论。尽管面元算符等局域可观测量即使在混合对称扇区中也会热化，但能够激发磁偶极子的非局域可观测量最终会弛豫至将 $\mathbb{Z}_2$ 1形式对称性纳入考量的广义吉布斯系综。

引言。– 对称性在统计力学中发挥着至关重要的作用。当系统具有与对称性相对应的局域守恒量时，我们应将其纳入统计系综中。这一事实近年来在孤立量子多体系统的热化研究中受到了广泛关注 [1–10]。虽然没有任何对称性的典型非可积系统会局域地弛豫至正则系综，但对称性的存在可能会影响其动力学 [11–17]。例如，可积系统由于具有许多对称性而不会发生热化，而是弛豫至广义吉布斯系综（GGE） [18–27], , 后者将（准）局域守恒量纳入考量。

本征态热化假说（ETH） [2, 3,28] 为孤立量子系统实现热化提供了充分条件，并已在从凝聚态物理 [8, 9, 28]到全息理论 [29–36]等多个领域得到广泛研究。该假说指出，对于我们所关注的某个可观测量，每个能量本征态都会变得具有热性质；这一点已在各种非可积系统 [1, 28, 37–58]中得到验证。然而，由连续整体对称性或可积性等因素导致的局域守恒量，会破坏整个希尔伯特空间中的ETH；在这种情况下，在固定守恒量后，ETH得以恢复 [12, 16, 22]。相比之下，由离散对称性等因素导致的非局域守恒量所产生的影响则更为微妙。事实上，即使考虑混合对称扇区，它们通常也不会破坏（对角）ETH以及局域可观测量的热化 [12, 59, 60] ，但有时可能与非遍历性相关 [61–79]。

近年来，人们提出了高形式对称性，将其作为传统整体对称性的一种推广概念，用于量子场论相结构的分类 [80–91] （关于其在凝聚态物理中的应用，参见文献 [92] ）。

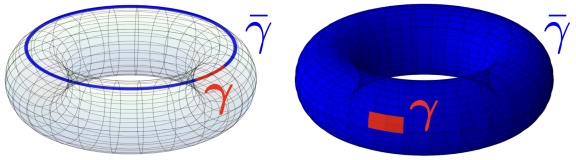


图 1. p形式对称性及其对本征态热化假说（ETH）的影响示意图。该图适用于 $\mathcal{M} = T^2$ $(d = 2)$。蓝色和红色区域分别表示 $U(\bar{\gamma})$和 $U(\gamma)$非平凡作用的区域，并且˜对称性算符由 $U(C) = U(\bar{\gamma})U(\gamma)$给出。如果$U(\gamma)$满足 ETH 且热平均非零，则 $U(\bar{\gamma})$的 ETH 将被破坏。（左）高阶形式对称性的情形。破坏 ETH 的算符 $U(\bar{\gamma})$是（$d-p$）维的（图中展示了$p=1$），其支撑远小于“热浴” $\mathcal{M}\backslash\bar{\gamma}$的尺寸。（右）具有常规对称性（$p=0$）的情形，此时 $U(\bar{\gamma})$的支撑与 $\mathcal{M}$的尺寸相当。

这种对称性由拓扑对称性算符表征，其关联函数在连续变形下保持不变。该推广涉及带荷对象和对称性算符的维数：对于 $(d+1)$ 维时空中的 p-形式对称性，带荷对象应为 p 维，而对称性算符为 $(d-p)$ 维。传统整体对称性对应于 0-形式对称性。

尽管关于高阶形式对称性静态方面的研究十分广泛，但人们对其动力学后果知之甚少。这类高阶形式对称性内在地存在于规范理论（例如杨–米尔斯理论）中；即使在凝聚态物理和原子、分子和光学领域 [93–110]，相关理论也一直受到积极研究，更不用说高能物理了。尽管已有少数研究探讨了特定情形下的热化动力学。

具有广义对称性 [111–115]，的模型——由高形式对称性导致的一般性后果很少被揭示。

在本研究快报中，我们解析地证明，在某些假设下，当存在高阶形式对称性时，非平凡的可观测量会破坏本征态热化假说（图 1）。对于离散对称群，本征态热化假说的失效是由非局域守恒量导致的。对于 p 形式对称性，这类破坏本征态热化假说的算符变为 $(d-p)$ 维，虽是非局域的，但当 $p \geq 1$ 时，其尺度远小于整个系统。我们以具有 $\mathbb{Z}_2$ 1 形式对称性 [116] 的二维 $\mathbb{Z}_2$ 晶格规范理论为例，展示这一结论。此外，局域可观测量会弛豫至正则系综，而激发磁偶极子的非局域算符则会弛豫至纳入高阶形式对称性的广义吉布斯系综。我们的结果表明，对称性会导致由非局域可观测量揭示的非平凡热化过程，这超出了传统统计力学的范畴。

高阶形式对称性。– 我们考虑在 $(d+1)$ 维时空 $\mathcal{M}\times\mathbb{R}$ 中的量子场论，其中$\mathcal{M}$ 是一个连通的 d 维空间流形。设 G 为一个阿贝尔群，并假定该系统具有 Gp 形式对称性，也就是说，存在一个 $(d-p)$ 维拓扑算符 $U_\alpha(\mathcal{C})$ $(\alpha \in G)$，其中 $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}\times\mathbb{R}$表示一个 $(d-p)$ 维闭曲面 [117]。

我们特别考虑每个固定时刻的空间中所包含的对称性算符 $U_\alpha(C)$，即 $C \subset \mathcal{M}$。于是，$U_\alpha(C)$ 的拓扑性质意味着，对于一个无穷小时间片 δt，有$[U_\alpha(C)$ $e^{-iH\delta t}] = 0$ ，从而 $[H, U_\alpha(C)] = 0$。重要的是，$U_\alpha(C)$ 的支撑是一个 $(d-p)$ 维对象 C，它虽是非局域的，却远小于整个 d 维系统（$p \geq 1$）。这与传统的 0-形式对称性形成对比：其对称性算符是 d 维的，也就是说，其支撑范围与整个系统相当（图 1）。尽管以下讨论对连续对称性和离散对称性均适用，我们将特别关注离散对称性，因为它通常只伴随非局域守恒量。

在这种设定下，哈密顿量由 $U_\alpha(C)$ 分块对角化。于是，对于 $U_\alpha(C)$，在对称性扇区混合的能壳内整个希尔伯特空间中，本征态热化假说显然失效。然而，这并不一定意味着其他非平凡可观测量的本征态热化假说也失效，因为$U_\alpha(C)$ 不一定提供一个局域守恒量。事实上，有若干证据 [12, 59, 60]表明，尽管存在离散对称性，尤其是 0-形式对称性，局域可观测量仍满足本征态热化假说。在这种情况下，即使不同本征态属于不同的对称性扇区，这些可观测量的本征态期望值也可能相同。例如，横场伊辛模型 $H_{\mathrm{TFIM}} = \sum_{\textbf{实数集},\ \textbf{实数集}'\in\mathcal{M}} J_{\mathbf{R},\ \mathbf{R}'}\sigma^3$**(实数集)**$\sigma^3$**(实数集′)** $+\sum_{\textbf{实数集}\in\mathcal{M}} g_{\mathbf{R}}\sigma^1$**(实数集)** 具有一种 $\mathbb{Z}_2$ 0-形式对称性 $U(C=\mathcal{M}) =$ $\prod_{\textbf{实数集}\in\mathcal{M}}\sigma^1$**(实数集)**，其中 $\sigma^{1,2,3}$**(实数集)** 表示作用于顶点 **实数集** 上的泡利矩阵。虽然我们有两个具有 $U=\pm1$ 的对称性扇区，但在热力学极限下，它们不会导致典型局域可观测量（例如σ^1**(实数集)**）的本征态期望值出现差异。

非平凡算符的本征态热化假说失效。– 现在我们陈述主要结果：非简并哈密顿量的高形式对称性会导致本征态热化假说失效，即使对于许多非平凡的 $(d-p)$ 维算符也是如此。为此，我们需要以下˜合理的假设：i）算符 $U_\alpha(C)$ 可以分解为 $U_\alpha(C) = U_\alpha(\gamma)U_\alpha(\bar\gamma)$，其中引入了一个 $(d-p)$ 维子流形 $\gamma(\subset C)$ 及其补集 $\bar\gamma := C\backslash\gamma$，二者都有边界。ii）对于至少一个非平凡闭曲面，例如 $\mathcal{C}(\subset\mathcal{M})$，能壳中包含属于由 $U_\alpha(C)$定义的不同对称性扇区的本征态。iii）由能壳定义的微正则平均值 $\langle U_\alpha(\gamma)\rangle^{\Delta E}{}_{\mathrm{mc}}(E)$ 在热力学极限下取非零值。

在上述假设下，我们证明，要么$U_\alpha(\gamma)$，要么 $U_\alpha(\bar\gamma)$ 必然会在能壳 $[E, E+\Delta E]$ 内破坏本征态热化假说（ETH）[118]（证明见补充材料 [119]）。我们的结果表明，尽管离散对称性和拓扑可能不会影响常规局域可观测量的热化，但它们的影响会显著体现在（$d-p$）维非局域对象的动力学中。我们强调，虽然这类非局域可观测量超出了常规统计力学的范畴，但由于它们在规范理论中发挥着重要的物理作用，因此长期以来一直受到积极研究 [120, 121]。此外，借助人工量子系统，最先进的实验已能够探测非局域算符 [122–124]。

我们想指出，对于具有 $p \geq 1$的高形式对称性，我们的结果有一个值得注意之处，尽管这些结果甚至为常规对称性 $p=0$带来了此前未知的推论。对于 $p=0$，破坏本征态热化假说（ETH）的算符（例如 $U_\alpha(\bar\gamma)$）是 d维的，其支撑区域的体积 $V_{\bar\gamma}$在大系统尺寸极限下与“热浴”的体积 $V_{\mathcal{M}\backslash\bar\gamma}$ 相当，即 $V_{\bar\gamma}/V_{\mathcal{M}\backslash\bar\gamma} \to$ 有限（见图1右图）。以 H_{TFIM}, $\prod_{\textbf{实数集}\in\mathcal{M}\backslash\gamma}\sigma^1$为例，如果**实数集**$_{\in\gamma}\,\sigma^1$满足本征态热化假说（ETH），那么$\prod_{\textbf{实数集}\in\gamma}\sigma^1$**(实数集)**就会破坏该假说。因此，本征态热化假说的失效也可能归因于热浴过小。相比之下，对于具有 $p \geq 1$的高形式对称性，在热力学极限（图1左图）下，我们有 $V_{\bar\gamma}/V_{\mathcal{M}\backslash\bar\gamma} \to 0$。因此，即使将热浴视为远大于我们所关注可观测量支撑区域的对象，高形式对称性仍会阻碍热化。

我们的主要结论可推广到算符$U(\bar\gamma)A(g)^\dagger$，其中 $A(g)$ 是定义在满足条件 $g\cap\bar\gamma = \phi$ 的任意区域 $g(\subset\mathcal{M})$ 上的算符。也就是说，如果我们采用假设 iii)’ $\langle A(g)U(\gamma)\rangle^{\Delta E}_{\mathrm{mc}}(E)$，那么 $A(g)U(\gamma)$ 或 $A(g)^\dagger U(\bar\gamma)$ 会违反ETH，而非 $\neq 0$

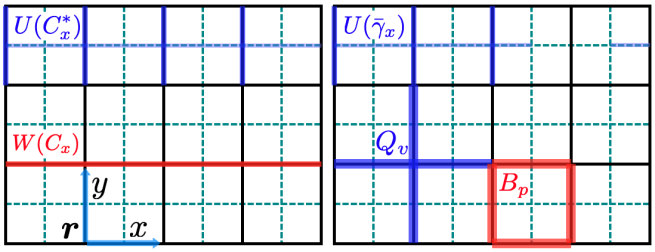


图2. 周期性边界条件下我们晶格模型（显示了 $N_x = 4$和 $N_y = 3$ ）的示意图。实线和绿色线分别表示晶格和对偶晶格。我们展示了算符 Q_v，$U(C_x^*)$ $W(C_x)$ $U(\bar{\gamma}_x)$ 以及 B_p 的示例，其中泡利矩阵 σ^3 和 σ^1 分别作用于红色和蓝色链路上。

iii)。这一推广表明，对于固定的 γ，对应于 g 和 $A(g)$ 的选择，我们有许多违反 ETH 的算符。请注意，对于 0-形式对称性， $g \subseteq \gamma$ ；而对于高阶形式对称性， g 可能不包含在 γ 中（甚至可能具有更大的维数）。

最后，对称性反过来也可以确保 *</style}*某些算符满足本征态热化假说 。事实上，对于所谓的带电算符，若 () () 对某个电荷 成立，则它们对所有均满足，只要 。于是，满足本征态热化假说，而 () 的长时间平均变为零。对于具有 *0* 形式对称性的，（实数集）满足这一条件。对于高形式对称性，后文讨论的晶格规范理论中的威尔逊线满足这一条件。

$\mathbb{Z}_2$ 晶格规范理论.– 我们通过在由方格晶格构成的二维环面 $\mathcal{M} = T^2$上研究（2+1）维 $\mathbb{Z}_2$ 晶格规范理论，来展示上述一般性讨论。哈密顿量 $H_{\mathbb{Z}_2}$ 定义为 [126–128]

$$-\sum_{\boldsymbol{r}} J_{\boldsymbol{r},xy}\sigma^3_{\boldsymbol{r},x}\sigma^3_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_x,y}\sigma^3_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_y,x}\sigma^3_{\boldsymbol{r},y} - \sum_{\boldsymbol{r},j}\sigma^1_{\boldsymbol{r},j}, \qquad (1)$$

其中 $\sigma^1_{\boldsymbol{r},\ 2\ 3\ ,j}$ 表示作用在链路 $(\boldsymbol{r}, j)$ 上的泡利矩阵，该链路由顶点坐标 $\boldsymbol{r}$和方向 $j = x, y$指定。该系统具有 $\mathbb{Z}_2$ 1形式对称性，其空间对称算符由 $H_1(T^2, \mathbb{Z}_2)$ $= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ [129]刻画。实际上，该系统具有两个独立的对称算符，分别对应于 x循环和 y循环。

为消除时间规范固定 [127]，后残留的规范冗余，我们将整个希尔伯特空间投影到物理希尔伯特空间上。在这里，空间规范变换由局部算符 $Q_v := \prod_{b:\text{空间链路}\ b\ni v}\sigma^1_b$，生成，其中 v 表示顶点。算符 Q_v 满足 $Q_v^2 = 1, [H_{\mathbb{Z}_2}, Q_v] = 0$。于是，物理希尔伯特空间由 [127] 张成 $\{|\psi\rangle \mid Q_v|\psi\rangle = +|\psi\rangle, {}^\forall v:$ 顶点$\}$，其中该约束可视为高斯定律的 $\mathbb{Z}_2$ 类比。在这一投影之后，期望物理态上的非规范不变算符值$|\psi\rangle$总是为零。

接下来，我们定义空间方向上的 't Hooft 算符和 Wilson 算符，如下： [130–132]

$$U(C^*) = \prod_{b^*\in C^*}\sigma^1_{b^*} = U^{-1}(C^*), \qquad (2)$$

以及 $W(C) = \prod_{b\in C}\sigma^3_b = W^{-1}(C)$。这里， C和 C^* 分别是晶格和对偶晶格上的闭合回路（见图2）。 $U(C^*)$ 和 $W(C)$ 都与算符 Q_v 对易，因此是规范不变的。

't Hooft 算符 $U(C^*)$ 充当该模型的 $\mathbb{Z}_2$1-形式对称性算符，满足$[H_{\mathbb{Z}_2}, U(C^*)] = 0$. 该算符是拓扑的，因为它满足 $U(C_1^*)|\psi\rangle = U(C_2^*)|\psi\rangle$ 当且仅当 C_1^*和 C_2^*同伦等价时。由此可知，若对偶闭合回路 C^* 是拓扑平凡的，即可以连续变形为一个点，则 $U(C^*)|\psi\rangle = |\psi\rangle$ 。

't Hooft 算符 $U(C^*)$ 测量 Wilson 算符的"电"电荷。我们将绕 x-/y-周回的晶格闭合回路定义为C_x 和 C_y （对偶晶格上的回路也类似地定义为 C_x^* 和 C_y^*）。于是，算符 W 和 U满足 $U(C_i^*)W(C_j)U^{-1}(C_i^*) = (-1)^{\delta_{ij}+1}W(C_j)$， 这是电 $\mathbb{Z}_2$ 1-形式对称性 [95]的算符实现。

ETH 破缺 $\mathbb{Z}_2$ *1*形式对称性。–让我们以 $\mathbb{Z}_2$ 晶格规范理论为例，展示 ETH 的违背。我们将式 (1) 中的耦合常数 $J_{\mathbf{r},xy}$ 设为弱随机（即从 $[0.7, 0.8]$ 中均匀选取 $J_{\boldsymbol{r},xy}$ ），以避免不希望出现的简并和可积性。我们考虑 $N_x \times N_y$ 2-环面，并将晶格和对偶晶格上的 x/y-环分别定义为 $C_{x/y}$ 和 $C^*_{x/y}$（图2）。

我们计算局域算符 $U(\gamma_x)$、 B_p 和非局域一维可观测量 $U(\bar{\gamma}_x)$ 的本征态期望值。这里， γ_x 只是包含在 C_x^* 中的一条链路，且 $\bar{\gamma}_x := C_x^*\backslash\gamma_x$。算符 $U(\gamma_x)$ 和 $U(\bar{\gamma}_x)$ 表示位于 γ_x [127] 端点处的磁偶极激发。面元算符 B_p 定义为 $B_p := \prod_{b\in\text{面元}\ p}\sigma^3_b$· 图 3(a) 显示，局域可观测量 $U(\gamma_x)$ 满足 ETH。相比之下，图 3(b) 表明，非局域一维可观测量 $U(\bar{\gamma}_x)$ 的本征态期望值分为两支，这表明由于上述一般机制，ETH 遭到破缺。即使不对 $U(C_y^*)$ 的扇区进行区分，只要考虑 $U(C_x^*) = 1\ (-1)$ 对应对称性扇区内的本征态，ETH 便会恢复。关于 B_p 的结果见补充材料 [119]。

为了更定量地检验本征态热化假说，我们进行了有限尺寸标度分析。我们将可观测量 $\mathcal{O}$ [51]by$\Delta_\infty(\mathcal{O})$ 的偏差度量定义为：$= \max_{n,\ E_n\in[E,E+\delta E]} \left|\langle E_n|\mathcal{O}|E_n\rangle - \langle\mathcal{O}\rangle^{\delta E}_{\text{mc}}(E_n)\right|$，其中 $E_n = \langle E_n|H_{\mathbb{Z}_2}|E_n\rangle$ 是能量本征值。The

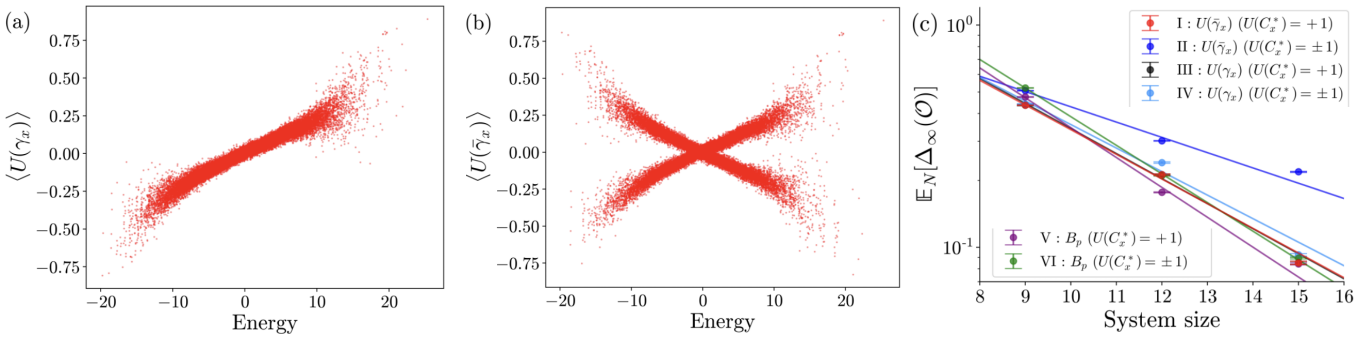


图 3. 5×3 晶格中能量本征态的期望值。(a) 局域可观测量 $U(\gamma_x)$ 满足本征态热化假说。(b) 具有一维支撑的可观测量 $U(\bar{\gamma}_x)$ 违反本征态热化假说。期望值分为两个扇区，根据 1-形式对称性的取值进行分类，即 $U(C_x^*)=\pm1$。(c) 本征态热化假说度量 Δ_∞ 对系统尺寸的依赖性。对于具有总对称性扇区（情形 II）的 $U(\bar{\gamma}_x)$，其衰减速度远慢于其他情形，这表明本征态热化假说受到阻碍。拟合参数见补充材料 [119]。

强本征态热化假说在 $\Delta_\infty\to0$ 热力学极限下成立。此外，对于完全混沌的系统，预期 Δ_∞ 会以指数形式衰减 $\sim e^{-s(E)N/2}$，其中 $s(E)$ 是能量 E [8, 51] 处的熵密度。图3(c)展示了无序平均量度 $\mathbb{E}[\Delta_\infty(\mathcal{O})]$，随系统尺寸的变化，并用函数 e^{-aN+b} 进行拟合。首先，局域可观测量 B_p 和 $U(\gamma_x)$（无论是否分辨对称性扇区），以及分辨对称性扇区后的非局域可观测量 $U(\bar{\gamma}_x)$，都呈现出足够快且速率相对相近的指数衰减。这表明这些可观测量满足本征态热化假说。相比之下，总对称性扇区的 $U(\bar{\gamma}_x)$ 衰减得比其他情况慢得多，尽管由于有限尺寸效应，它仍在不断减小。结合一般论证以及 $U(\gamma_x)$ 满足本征态热化假说这一点，我们得出结论：高形式对称性导致 $U(\bar{\gamma}_x)$ 不满足本征态热化假说。

注意，由于前面对带电算符的一般讨论，对于所有 n，威尔逊线始终满足 $\langle E_n|W(C_{x/y})|E_n\rangle=0$。因此，威尔逊算符的长时间平均始终为零。

含 $\mathbb{Z}_2$ *1-形式对称性。*– 接下来我们论证，沿 x 方向非局域、但沿 y 方向局域的可观测量（例如 $U(\bar{\gamma}_x)$）的稳态值，由考虑了 $\mathbb{Z}_2$ 1-形式对称性的广义吉布斯系综描述。也就是说，我们有 $\langle\mathcal{O}\rangle_{\rm GGE}=\mathrm{Tr}[\mathcal{O}\,\rho_{\rm GGE}(\beta,\ \lambda_x,\ \mu_x)]$ 其中

$$\rho_{\rm GGE}=\frac{1}{Z_{\rm GGE}}e^{-\beta H_{\mathbb{Z}_2}-\lambda_x U(C_x^*)-\mu_x U(C_x^*)H_{\mathbb{Z}_2}},\qquad(3)$$

其中，“化学势” λ_x 和 μ_x 由守恒量 $H_{\mathbb{Z}_2}, U(C_x^*)$, 和 $U(C_x^*)H_{\mathbb{Z}_2}$ 的初始值唯一确定，而 $Z_{\rm GGE}$ 是归一化常数。若假设对于可观测量 $\mathcal{O}$，每个 $U(C_x^*)$-对称性扇区都满足受限的本征态热化假说（参见补充材料 [119]），则我们的广义吉布斯系综可作为稳态。

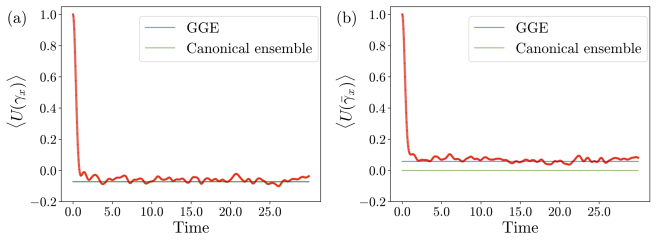


图 4. 4×3 晶格上 $U(\gamma_x)$ 和 $U(\bar{\gamma}_x)$ 期望值的时间演化。蓝线和绿线分别表示式 (3) 中广义吉布斯系综和标准正则系综的预测。对于局域可观测量 $U(\gamma_x)$（左图），稳态由正则系综描述，其结果与广义吉布斯系综的结果几乎重合。相比之下，$U(\bar{\gamma}_x)$ 的稳态值（右图）与正则系综的结果不同，由广义吉布斯系综描述。初态分别为 $U(\gamma_x)$（左图）或 $U(\bar{\gamma}_x)$（右图）的本征态随机叠加，其本征值为 $+1$，能量期望值位于 $[-5.0,-3.0]$ 范围内。

图 4 展示了 $\mathcal{O}=U(\gamma_x)$ 和 $U(\bar{\gamma}_x)$ 的时间演化。对于 $U(\gamma_x)$，其稳态值可由正则系综 $\rho_{\rm can}=Z_{\rm can}^{-1}e^{-\beta_{\rm can}H_{\mathbb{Z}_2}}$ 很好地描述，其中在大部分时间里，$\mathrm{Tr}[U(\gamma_x)\rho(t)]\simeq\mathrm{Tr}[U(\gamma_x)\rho_{\rm can}]$ 成立。相比之下，正则系综无法描述 $U(\bar{\gamma}_x)$。相反，在大部分时间里，$\mathrm{Tr}[U(\bar{\gamma}_x)\rho(t)]\simeq\mathrm{Tr}[U(\bar{\gamma}_x)\rho_{\rm GGE}]$ 成立。值得强调的是，尽管我们没有考虑 $U(C_y^*)$ 的影响，$\rho_{\rm GGE}$ 仍然表现良好，这可能是因为 $U(\bar{\gamma}_x)$ 在 y 方向上是局域的。

请注意，适用于一般有限阿贝尔群 G 的广义吉布斯系综，是通过假设每个对称性扇区都满足受限的本征态热化假说而得到的，如 $\rho_{\rm GGE}^G=e^{-\beta^G H-\sum_j\lambda_j^G P_j-\sum_j\mu_j^G P_j H}$，其中 P_i 是投影到各个对称性扇区的投影算符。对于由 $U(C_x^*)$ 定义且满足 $G=\mathbb{Z}_2$ 的对称性扇区，在重新定义化学势后，该系综确实等价于式（3）。

结论与展望。– 我们通过解析方法证明，在某些假设下，p 形式对称性的存在会导致本征态热化假说在以下形式的多个 维可观测量上失效：(p)。

在某些假设下， $U_\alpha(\bar{\gamma})$形式的多个 $d-p$ 维可观测量会违反本征态热化假说。该结论的一个重要特点是，违反本征态热化假说的可观测量具有非局域但低维的支撑，而非覆盖整个 d 维空间流形（对应于 $p \geq 1$）。这意味着，此类对象可以用适当的广义吉布斯系综而非正则系综来描述。我们以 $\mathbb{Z}_2$ 晶格规范理论为例，说明上述结论。关于本征态热化假说失效的讨论可推广至具有 p 形式对称性的系统，例如具有中心对称性的各种量子场论，如 $SU(N)$ 杨-米尔斯理论。

我们的结果表明，对称性会导致非局域可观测量出现非平凡的热化动力学，这超出了传统统计力学的范畴。我们强调，即使对哈密顿量施加局域微扰，这种对本征态热化假说的违反依然稳定存在，因为高形式对称性具有抵御此类微扰的稳健性。展望未来，高形式对称性可能会影响某些子系统的纠缠结构，包括纠缠熵动力学，而纠缠熵是一种非局域量。由于纠缠熵在全息理论中至关重要，对其进行研究或可通过规范／引力对偶揭示黑洞动力学。

我们感谢 Y. Hidaka 与我们进行了富有成果的讨论。我们也感谢 T. Fukuhara 告知我们有关非局域可观测量实验观测的一些参考文献。此外，我们还感谢京都大学 MACS 项目为我们的合作提供了良好契机。O.F. 获得了 JSPS 研究员资助金（编号：21J22806）的支持。R.H. 获得了 JST ERATO-FS 资助（编号：JPM-JER2204，日本）的支持。

* osamu.f@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp † ryusuke.hamazaki@riken.jp

[1] J. von Neumann, 《物理学杂志》**57**, 30（1929）。[2] J. M. Deutsch, 《物理评论 A》**43**, 2046（1991）。[3] M. Srednicki, 《物理评论 E》**50**, 888（1994）。[4] H. Tasaki, 《物理评论快报》**80**, 1373（1998）。[5] A. Polkovnikov、K. Sengupta、A. Silva 和 M. Ven- galattore, 《现代物理评论》**83**, 863（2011）。[6] J. Eisert、M. Friesdorf 和 C. Gogolin, 《自然·物理》**11**, 124（2015）。[7] C. Gogolin 和 J. Eisert, 《物理学进展报告》**79**, 056001（2016）。[8] L. D'Alessio、Y. Kafri、A. Polkovnikov 和 M. Rigol, 《物理学进展》**65**, 239（2016）。[9] T. Mori、T. N. Ikeda、E. Kaminishi 和 M. Ueda, 《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》**51**, 112001（2018）。[10] M. Ueda, 《自然·物理评论》**2**, 669（2020）。[11] K. R. Fratus 和 M. Srednicki, 《物理评论 E》**92**, 040103（2015）。[12] R. Hamazaki、T. N. Ikeda 和 M. Ueda, 《物理评论 E》**93**, 032116（2016）。[13] K. Fukai、Y. Nozawa、K. Kawahara 和 T. N. Ikeda, 《物理评论研究》2, 033403 (2020). [14] K. R. Fratus 和 M. Srednicki, arXiv 预印本 arXiv:1611.03992 (2016). [15] C. Murthy、A. Babakhani、F. Iniguez、M. Srednicki 和 N. Yunger Halpern, 《物理评论快报》130, 140402 (2023). [16] J. D. Noh, 《物理评论E》107, 014130 (2023). [17] M. Borsi、L. Pristy´ak 和 B. Pozsgay, (2023), arXiv:2302.07219 [凝聚态物理：统计力学]。[18] M. Rigol、V. Dunjko、V. Yurovsky 和 M. Olshanii, 《物理评论快报》 98, 050405 (2007). [19] M. Rigol, 《物理评论快报》103, 100403 (2009). [20] A. Iucci 和 M. Cazalilla, 《物理评论A》80, 063619 (2009). [21] P. Calabrese、F. H. Essler 和 M. Fagotti, 《物理评论快报》106, 227203 (2011). [22] A. C. Cassidy、C. W. Clark 和 M. Rigol, 《物理评论快报》106, 140405 (2011). [23] B. Pozsgay, 《统计力学杂志：理论与实验》2013, P07003 (2013). [24] B. Pozsgay、M. Mesty´an、M. A. Werner、M. Kormos、G. Zar´and 和 G. Tak´acs, 《物理评论快报》113, 117203 2014( ). [25] E. Ilievski 、 J. De Nardis 、 B. Wouters 、 J.-S. Caux 、 F. H. Essler 和 T. Prosen, 《物理评论快报》115, 157201 2015( ). [26] F. H. Essler 和 M. Fagotti, 《统计力学杂志：理论与实验》2016, 064002 (2016). [27] L. Vidmar 和 M. Rigol, 《统计力学杂志：理论与实验》2016, 064007 (2016). [28] M. Rigol、V. Dunjko 和 M. Olshanii, 《自然》452, 854 (2008). [29] D. Liska、V. Gritsev、W. Vleeshouwers 和 J. Min´aˇr, (2022), arXiv:2212.05962 [高能物理理论]。[30] J. de Boer 和 D. Engelhardt, 《物理评论D》94, 126019 (2016), arXiv:1604.05327 [高能物理理论]。[31] P. Basu、D. Das、S. Datta 和 S. Pal, 《物理评论E》96, 022149 (2017), arXiv:1705.03001 [高能物理理论]。[32] S. Datta、P. Kraus 和 B. Michel，高能物理学杂志 07, 143 (2019)，arXiv:1904.00668 [高能物理理论]。[33] A. L. Fitzpatrick、J. Kaplan 和 M. T. Walters，高能物理学杂志 11, 200 (2015)，arXiv:1501.05315 [高能物理理论]。[34] M. Be.sken、S. Datta 和 P. Kraus, 《统计力学杂志》2006, 063104 (2020)，arXiv:1907.06661 [高能物理理论]。[35] A. Dymarsky 和 K. Pavlenko, 《物理评论快报》123, 111602 2019 1903 ( )，arXiv: .03559 [高能物理理论]。[36] N. Lashkari、A. Dymarsky 和 H. Liu, 《统计力学杂志》1803, 033101 (2018)，arXiv:1610.00302 [高能物理理论]。[37] L. F. Santos 和 M. Rigol, 《物理评论E》81, 036206 2010( ). [38] T. N. Ikeda、Y. Watanabe 和 M. Ueda, 《物理评论E》84, 021130 (2011). [39] R. Steinigeweg、J. Herbrych 和 P. Prelov˘sek, 《物理评论E》87, 012118 (2013). [40] H. Kim、T. N. Ikeda 和 D. A. Huse, 《物理评论E》90, 052105 (2014). [41] W. Beugeling、R. Moessner 和 M. Haque, 《物理评论E》89, 042112 (2014). [42] R. Steinigeweg、A. Khodja、H. Niemeyer、C. Gogolin 和 J. Gemmer, 《物理评论快报》112, 130403 (2014). [43] V. Alba, 《物理评论B》91, 155123 (2015). [44] W. Beugeling、R. Moessner 和 M. Haque, 《物理评论E》91, 012144 (2015).

[45] R. Mondaini 和 M. Rigol, 《物理评论E》96, 012157 2017( ). [46] C. Nation 和 D. Porras, 《新物理学杂志》20, 103003 2018( ). [47] R. Hamazaki 和 M. Ueda, 《物理评论E》99, 042116 2019( ). [48] I. M. Khaymovich、M. Haque 和 P. A. McClarty, 《物理评论快报》122, 070601 (2019). [49] T. Yoshizawa、E. Iyoda 和 T. Sagawa, 《物理评论快报》120, 200604 (2018). [50] D. Jansen、J. Stolpp、L. Vidmar 和 F. Heidrich-Meisner, 《物理评论B》99, 155130 (2019). [51] S. Sugimoto、R. Hamazaki 和 M. Ueda, 《物理评论快报》126, 120602 (2021). [52] S. Sugimoto、R. Hamazaki 和 M. Ueda, 《物理评论快报》129, 030602 (2022). [53] S. Goldstein、J. L. Lebowitz、R. Tumulka 和 N. Zanghi, 《欧洲物理学杂志H》35, 173 (2010). [54] S. Goldstein、J. L. Lebowitz、C. Mastrodonato、R. Tumulka 和 N. Zanghi, 《物理评论E》81, 011109 (2010). [55] S. Goldstein、J. L. Lebowitz、C. Mastrodonato、R. Tumulka 和 N. Zangh`ı, 《英国皇家学会会刊A：数学、物理与工程科学》466, 3203 (2010). [56] P. Reimann, 《物理评论快报》115, 010403 (2015). [57] R. Hamazaki 和 M. Ueda, 《物理评论快报》120, 080603 (2018). [58] S. Sugimoto、R. Hamazaki 和 M. Ueda, arXiv 预印本 arXiv:2303.10069 (2023). [59] L. F. Santos 和 M. Rigol, 《物理评论E》82, 031130 2010( ). [60] R. Mondaini、K. R. Fratus、M. Srednicki 和 M. Rigol, 《物理评论E》

93, 032104 2016 1512 04947 ( ), [ ] arXiv: . 凝聚态物理：统计力学 . [61] H. Bernien、S. Schwartz、A. Keesling、H. Levine、A. Omran、H. Pichler、S. Choi、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、*et al.*, 《自然》551, 579 (2017). [62] N. Shiraishi 和 T. Mori, 《物理评论快报》119, 030601 2017( ). [63] C. J. Turner、A. A. Michailidis、D. A. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papi´c, 《自然·物理》14, 745 (2018). [64] C. Turner、A. Michailidis、D. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papi´c, 《物理评论B》98, 155134 (2018). [65] S. Moudgalya、S. Rachel、B. A. Bernevig 和 N. Regnault, 《物理评论B》98, 235155 (2018). [66] K. Bull、I. Martin 和 Z. Papi´c, 《物理评论快报》123, 030601 (2019). [67] W. W. Ho、S. Choi、H. Pichler 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》122, 040603 (2019). [68] C.-J. Lin 和 O. I. Motrunich, 《物理评论快报》122, 173401 (2019). [69] M. Schecter 和 T. Iadecola, 《物理评论快报》123, 147201 (2019). [70] N. Shibata、N. Yoshioka 和 H. Katsura, 《物理评论快报》124, 180604 (2020). [71] M. Serbyn、D. A. Abanin 和 Z. Papi´c, 《自然·物理》17, 675 (2021). [72] P. Sala、T. Rakovszky、R. Verresen、M. Knap 和 F. Pollmann, 《物理评论X》10, 011047 (2020), arXiv:1904.04266 [凝聚态物理：强关联电子系统]。[73] V. Khemani、M. Hermele 和 R. Nandkishore, 《物理》《物理评论B》101, 174204 (2020). [74] Z.-C. Yang, F. Liu, A. V. Gorshkov, and T. Iadecola, 《物理评论快报》124, 207602 (2020). [75] X. Feng and B. Skinner, 《物理评论研究》4, 013053 (2022), arXiv:2105.11465 [量子物理]. [76] N. Regnault, S. Moudgalya, and B. A. Bernevig, 《物理学进展报告》(2022). [77] S. Moudgalya and O. I. Motrunich, 《物理评论X》12, 011050 2022( ). [78] A. Yoshinaga, H. Hakoshima, T. Imoto, Y. Matsuzaki, and R. Hamazaki, 《物理评论快报》129, 090602 (2022). [79] O. Hart and R. Nandkishore, 《物理评论B》106, 214426 (2022). [80] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, 高能物理学杂志 02, 172 (2015), arXiv:1412.5148 [高能物理理论]. [81] F. Benini, P.-S. Hsin, and N. Seiberg, 高能物理学杂志 04, 135 (2017), arXiv:1702.07035 [凝聚态物理：强关联电子系统]. [82] D. Gaiotto, A. Kapustin, Z. Komargodski, and N. Seiberg, 高能物理学杂志 **05**, 091 2017 1703 00501 [ ] ( ), arXiv: . 高能物理理论 . [83] Y. Tanizaki and Y. Kikuchi, 高能物理学杂志 06, 102 (2017), arXiv:1705.01949 [高能物理理论]. [84] Z. Komargodski and N. Seiberg, 高能物理学杂志 01, 109 (2018), arXiv:1706.08755 [高能物理理论]. [85] H. Shimizu and K. Yonekura, Phys. Rev. D 97, 105011 (2018), arXiv:1706.06104 [高能物理理论]. [86] D. Gaiotto, Z. Komargodski, and N. Seiberg, 高能物理学杂志 01, 110 2018 1708 ( ), arXiv: .06806 [高能物理理论]. [87] R. Kitano, T. Suyama, and N. Yamada, 高能物理学杂志 09, 137 (2017), arXiv:1709.04225 [高能物理理论]. [88] J. Gomis, Z. Komargodski, and N. Seiberg, 《SciPost物理》5, 007 (2018), arXiv:1710.03258 [高能物理理论]. [89] M. M. Anber and E. Poppitz, Phys. Rev. D 98, 034026 (2018), arXiv:1805.12290 [高能物理理论]. [90] P.-S. Hsin, H. T. Lam, and N. Seiberg, 《SciPost物理》6, 039 (2019), arXiv:1812.04716 [高能物理理论]. [91] Z. Komargodski, K. Ohmori, K. Roumpedakis, and S. Seifnashri, 高能物理学杂志

03, 103 2021 2008 07567 ( ), arXiv: . [ ] 高能物理理论 . [92] J. McGreevy, (2022), arXiv:2204.03045 [凝聚态物理：强关联电子系统]. [93] L. V. Delacr´etaz, D. M. Hofman, and G. Mathys, 《SciPost物理》8, 047 (2020), arXiv:1908.06977 [高能物理理论]. [94] J. Zhao, Z. Yan, M. Cheng, and Z. Y. Meng, 《物理评论研究》3, 033024 (2021), arXiv:2011.12543 [凝聚态物理：强关联电子系统]. [95] S. D. Pace and X.-G. Wen, (2023 2301 05261), arXiv: . 凝 [ ] 聚态物理：强关联电子系统 . [96] E. A. Martinez *et al.*, 《自然》534, 516 (2016), arXiv:1605.04570 [量子物理]. [97] H.-N. Dai, B. Yang, A. Reingruber, H. Sun, X.-F. Xu, Y.-A. Chen, Z.-S. Yuan, and J.-W. Pan, 《自然·物理》13, 1195 (2017). [98] C. Kokail *et al.*, 《自然》569, 355 (2019), arXiv:1810.03421 [量子物理]. [99] B. Yang, H. Sun, R. Ott, H.-Y. Wang, T. V. Zache, J. C. Halimeh, Z.-S. Yuan, P. Hauke, and J.-W. Pan, 《自然》587, 392 (2020), arXiv:2003.08945 [凝聚态物理：量子气体]. [100] N. Klco, E. F. Dumitrescu, A. J. McCaskey, T. D. Mor- ris, R. C. Pooser, M. Sanz, E. Solano, P. Lougovski, and M. J. Savage, 《物理评论A》98, 032331 (2018), arXiv:1803.03326 [量子物理]. [101] F. G¨org, K. Sandholzer, J. Minguzzi, R. Desbuquois,

M. Messer, and T. Esslinger, 《自然·物理》15, 1161 (2019), arXiv:1812.05895 [凝聚态物理：量子气体]. [102] C. Schweizer, F. Grusdt, M. Berngruber, L. Barbiero, E. Demler, N. Goldman, I. Bloch, and M. Aidelsburger, 《自然·物理》15, 1168 (2019), arXiv:1901.07103 [凝聚态物理：量子气体]. [103] A. Mil, T. V. Zache, A. Hegde, A. Xia, R. P. Bhatt, M. K. Oberthaler, P. Hauke, J. Berges, and F. Jen- drzejewski, 《科学》 **367**, 1128 2020 1909 07641 ( ), [ ] arXiv: . 凝聚态物理：量子气体 . [104] F. M. Surace, P. P. Mazza, G. Giudici, A. Lerose, A. Gambassi, and M. Dal monte, 《物理评论X》10, 021041 2020 1902 ( ), arXiv: .09551 [凝聚态物理：量子气体]. [105] W. A. de Jong, K. Lee, J. Mulligan, M. P losko´n, F. Ringer, and X. Yao, Phys. Rev. D 106, 054508 (2022), arXiv:2106.08394 [量子物理]. [106] Z.-Y. Zhou, G.-X. Su, J. C. Halimeh, R. Ott, H. Sun, P. Hauke, B. Yang, Z.-S. Yuan, J. Berges, and J.- W. Pan, 《科学》 **377**, 6277 2022 2107 13563 abl ( ), [ ] arXiv: . 凝聚态物理：量子气体 . [107] H.-Y. Wang, W.-Y. Zhang, Z.-Y. Yao, Y. Liu, Z.-H. Zhu, Y.-G. Zheng, X.-K. Wang, H. Zhai, Z.-S. Yuan, and J.-W. Pan, (2022), arXiv:2210.17032 [凝聚态物理：量子气体]. [108] W. L. Tan *et al.*, 《自然·物理》17, 742 (2021), arXiv:1912.11117 [量子物理]. [109] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z.-X. Gong, and C. Monroe, 《自然》551, 601 (2017). [110] E. Zohar, Phil. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci. 380, 20210069 2021 2106 ( ), arXiv: .04609 [量子物理]. [111] C. Stahl, R. Nandkishore, and O. Hart, (2023), arXiv:2304.04792 [凝聚态物理：统计力学]. [112] D. T. Stephen, O. Hart, and R. M. Nandkishore, (2022), arXiv:2209.03966 [凝聚态物理：统计力学]. [113] A. Khudorozhkov, A. Tiwari, C. Chamon, and T. Neupert, 《SciPost物理》13, 098 (2022). [114] M. Fagotti, V. Mari´c, and L. Zadnik, (2022), arXiv:2205.02221 [凝聚态物理：统计力学]. [115] B. Bu˘ca, (2023), arXiv:2301.07091 [凝聚态物理：统计力学].[116] 请注意，已有若干研究 [133–137] 考察了规范理论中的热化及其破缺。例如，文献 [138–140] 研究了由规范对称性定义的混合超选扇区中的无无序局域化。然而，我们的研究范围有所不同，因为我们关注的是满足高斯定律的单一物理扇区 [127].[117] 这里，当且仅当跃迁振幅满足以下条件时，算符 $U_\alpha(\mathcal{C})$才称为拓扑算符：$\langle f|\mathcal{T}(U_\alpha(\mathcal{C})e^{-i\int_{t_i}^{t_f}Hdt})|i\rangle = \langle f|\mathcal{T}(U_\alpha(\mathcal{C}')e^{-i\int_{t_i}^{t_f}Hdt})|i\rangle$对于任意初态和末态 $|i\rangle$ 与 $|f\rangle$，以及同伦等价的闭曲面 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{M}\times\mathbb{R}$，其中 $\mathcal{T}$ 表示时间排序。[118]请注意， $U_\alpha(\gamma)$和 $U_\alpha(\bar{\gamma})$通常不是厄米的。然而，这些算符对本征态热化假说（ETH）的破坏也会导致某些厄米算符的本征态热化假说破缺。事实上，如果 $U_\alpha(\bar{\gamma})$破坏了本征态热化假说，

我们可以证明，厄米算符 $U_\alpha(\bar{\gamma})+U_\alpha^\dagger(\bar{\gamma})$ 或 $i(U_\alpha(\bar{\gamma})-U_\alpha^\dagger(\bar{\gamma}))$ 任一者都会破坏本征态热化假说。[119]主要结论的证明、 $\mathbb{Z}_2$ 规范理论的数值细节以及广义吉布斯系综的细节，请参见补充材料。 [120] C. Cordova, T. T. Dumitrescu, K. Intriligator, and S.- H. Shao, in *Snowmass 2021* 2022 2205 09545 ( ) [ ] arXiv: . hep-th . [121] P. R. S. Gomes, (2023), arXiv:2303.01817 [高能物理理论]. [122] M. Endres, M. Cheneau, T. Fukuhara, C. Weitenberg, P. Schauss, C. Gross, L. Mazza, M. C. Banuls, L. Pollet, I. Bloch, *et al.*, 《科学》334, 200 (2011). [123] T. A. Hilker, G. Salomon, F. Grusdt, A. Omran, M. Boll, E. De mler, I. Bloch, and C. Gross, 《科学》357, 484 (2017). [124] G. Semeghini, H. Levine, A. Keesling, S. Ebadi, T. T. Wang, D. Bluvstein, R. Verresen, H. Pichler, M. Kali- nowski, R. Samajdar, *et al.*, 《科学》374, 1242 (2021)。[125] 本文仅考虑对角 ETH，不讨论非对角 ETH； [141], 后者指出，相对于能量本征态而言，非对角矩阵元在热力学极限下趋于零。[126] J. B. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D 11, 395 (1975). [127] E. H. Fradkin and L. Susskind, Phys. Rev. D 17, 2637 (1978). [128] E. H. Fradkin and S. H. Shenker, Phys. Rev. D 19, 3682 (1979). [129] K. Roumpedakis, S. Seifnashri, and S.-H. Shao, (2022), arXiv:2204.02407 [高能物理理论]. [130] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B 138, 1 (1978). [131] A. Ukawa, P. Windey, and A. H. Guth, Phys. Rev. D 21, 1013 (1980). [132] T. Shimazaki and A. Yamamoto, Phys. Rev. D 102, 034517 2020 2006 ( ), arXiv: .02886 [hep-lat]. [133] T. Hayata and Y. Hidaka, Phys. Rev. D 103, 094502 (2021), arXiv:2011.09814 [hep-lat]. [134] A. Bazavov, B. A. Berg, and A. Dumitru, Phys. Rev. D 78, 034024 (2008), arXiv:0805.0784 [hep-ph]. [135] N. Mueller, T. V. Zache, and R. Ott, 《物理评论快报》129, 011601 (2022), arXiv:2107.11416 [量子物理]. [136] G. Giudici, F. M. Surace, J. E. Ebot, A. Scardicchio, and M. Dalmonte, 《物理评论研究》2, 032034 (2020), arXiv:1912.09403 [凝聚态物理：强关联电子系统]. [137] S. Pai and M. Pretko, 《物理评论研究》2, 013094 (2020), arXiv:1909.12306 [凝聚态物理：强关联电子系统]. [138] M. Brenes, M. Dalmonte, M. Heyl, and A. Scardicchio, 《物理评论快报》 **120**, 030601 2018 1706 05878 ( ), [ ] arXiv: . 凝聚态物理：强关联电子系统 . [139] A. Smith, J. Knolle, R. Moessner, and D. L. Kovrizhin, 《物理评论B》 **97**, 245137 2018 1803 06574 ( ), [ ] arXiv: . 凝聚态物理：强关联电子系统 . [140] P. Karpov, R. Verdel, Y. P. Huang, M. Schmitt, and M. Heyl, 《物理评论快报》126, 130401 (2021), arXiv:2003.04901 [凝聚态物理：强关联电子系统]. [141] E. Khatami, G. Pupillo, M. Srednicki, and M. Rigol, 《物理评论快报》111, 050403 (2013).

arXiv:2305.04984v2 [cond-mat.stat-mech] 3 Oct 2023

《具有高形式对称性的量子场论中本征态热化假说的违反》的补充材料

1 对称性下本征态热化假说失效的证明

正如正文所述，非简并哈密顿量的高形式对称性会导致本征态热化假说（ETH）失效，即使对于许多非平凡算符也是如此。这里我们将证明这一点。下文中的情形 $A(g) = 1$ 对应正文中的主要结论，在此情形下，违反ETH的算符是（$d-p$）维的。

如正文所述，我们需要以下合理假设：i）拓扑算符 $U_\alpha(C)$可以有边界，即，对于任意（$d-p$）维子流形 $\gamma(\subset C)$，$U_\alpha(\gamma)$是定义良好（非零）的算符。于是可以将该算符分解为 $U_\alpha(C) = U_\alpha(\gamma)U_\alpha(\bar{\gamma})$，其中我们将 γ 的补集定义为 $\bar{\gamma} := C\backslash\gamma$。ii）对于至少一个非平凡闭曲面，例如 $C(\subset \mathcal{M})$，存在能量本征态 $|E_n\rangle, |E_m\rangle$，满足 $E_n, E_m \in [E, E+\Delta E]$，使得 $\langle E_n|U_\alpha(C)|E_n\rangle \neq \langle E_m|U_\alpha(C)|E_m\rangle$。换言之，我们感兴趣的能壳包含由 $U_\alpha(\tilde{C})$定义的不同对称性扇区中的本征态。iii）'算符 $A(g)U_\alpha(\gamma)$的微正则平均 $\langle A(g)U_\alpha(\gamma)\rangle_{\rm mc}^{\Delta E}(E)$（由能壳 $[E, E+\Delta E]$ 定义）在热力学极限下取非零值。这里，算符 $A(g)$定义在满足 $g\cup\bar{\gamma} = \phi$（空区域）的任意区域 $g(\subset \mathcal{M})$上。如果 $A(g)$是恒等算符，那么假设iii）'便简化为iii）。

在这些假设下，我们可以证明，$A(g)U_\alpha(\gamma)$ 或 $U_\alpha(\bar{\gamma})A(g)^\dagger$ 必然会在能壳 $[E, E+\Delta E]$ 内破坏本征态热化假说。为说明这一点，我们考虑一个带边界的（$d-p$）维曲面 γ，它满足性质 iii)'。如果算符 $A(g)U_\alpha(\gamma)$ 不满足本征态热化假说，则我们的结论成立；因此，我们考虑 $A(g)U_\alpha(\gamma)$ 满足本征态热化假说的情形，即

$$\langle E_n|A(g)U_\alpha(\gamma)|E_n\rangle \simeq \langle E_m|A(g)U_\alpha(\gamma)|E_m\rangle \simeq \langle A(g)U_\alpha(\gamma)\rangle_{\rm mc}^{\Delta E}(E). \tag{S-1}$$

由于假设 H 不存在简并，其本征态 $|E_n\rangle$、$|E_m\rangle$ 也是 $U_\alpha(C)$ 的本征态。由于群 G 是阿贝尔群，本征值可表示为

$$U_\alpha(\tilde{C})|E_n\rangle = e^{i\alpha q_n}|E_n\rangle \tag{S-2}$$

and

$$U_\alpha(\tilde{C})|E_m\rangle = e^{i\alpha q_m}|E_m\rangle, \tag{S-3}$$

其中 q_n，$q_m \in \mathbb{R}$。根据假设 ii)，我们可以假设 $|E_n\rangle$ 和 $|E_m\rangle$ 属于不同扇区，即 $e^{i\alpha q_n} \neq e^{i\alpha q_m}$。

现在，$\bar{\gamma}$ 的定义表明

$$\langle E_n|A(g)U_\alpha^{-1}(\bar{\gamma})|E_n\rangle = \langle E_n|A(g)U_\alpha(\gamma)U_\alpha(\tilde{C})^{-1}|E_n\rangle = e^{-i\alpha q_n}\langle E_n|A(g)U_\alpha(\gamma)|E_n\rangle \tag{S-4}$$

以及 $\langle E_m|A(g)U_\alpha^{-1}(\bar{\gamma})|E_m\rangle = e^{-i\alpha q_m}\langle E_m|A(g)U_\alpha(\gamma)|E_m\rangle$。回顾本征态热化假说的假设以及 iii)'，即，

$$\langle E_n|A(g)U_\alpha(\gamma)|E_n\rangle \simeq \langle E_m|A(g)U_\alpha(\gamma)|E_m\rangle \simeq \langle A(g)U_\alpha(\gamma)\rangle_{\rm mc}^{\Delta E}(E) \neq 0, \tag{S-5}$$

我们得到关系式 $\langle E_n|A(g)U_\alpha^{-1}(\bar{\gamma})|E_n\rangle \neq \langle E_m|A(g)U_\alpha^{-1}(\bar{\gamma})|E_m\rangle$.最后，取复共轭后，我们得到

$$\langle E_n|U_\alpha(\bar{\gamma})A(g)^\dagger|E_n\rangle \neq \langle E_m|U_\alpha(\bar{\gamma})A(g)^\dagger|E_m\rangle. \tag{S-6}$$

因此， $U_\alpha(\bar{\gamma})A(g)^\dagger$ 违反了本征态热化假说，我们的论断也由此得到了证明。

2 $\mathbb{Z}_2$ 规范理论中本征态热化假说的数值细节

2.1 有限尺寸标度分析的拟合参数

正文中的图3(c)展示了偏差度量的有限尺寸标度

$$\Delta_\infty(\mathcal{O}) := \max_{n,E_n\in[E,E+\delta E]} \left|\langle E_n|\mathcal{O}|E_n\rangle - \langle\mathcal{O}\rangle_{\mathrm{mc}}^{\delta E}(E_n)\right|. \tag{S-7}$$

对无序取平均后的度量 $\mathbb{E}[\Delta_\infty(\mathcal{O})]$ 用函数 e^{-aN+b}进行拟合。表S-1列出了各个情形的拟合参数。总对称性扇区（情形II）中 $U(\bar{\gamma}_x)$的衰减速度远慢于其他情形，这表明只有在该情形下本征态热化假说受到阻碍。我们使用方格晶格（N_x, N_y） $=$(3,3), (4,3), (5,3)，分别采用 10^4, 10^3, 和 10^2 个样本。能量窗口设为 $[E, E+\delta E] = [-1.3\,N_x, -1.0\,N_x]$。

表S-1：六种不同情形下的可观测量、对称性扇区以及拟合参数 a 和 b 。

Case	可观测量	对称性扇区	a	b
I	$U(\bar{\gamma}_x)$	<escape>$U(C_x^*) = 1$</escape>	0.256 ± 0.017	1.47 ± 0.16
II		$U(C_x^*) = \pm 1$	0.158 ± 0.020	0.74 ± 0.20
III	$U(\gamma_x)$	$U(C_x^*) = 1$	0.260 ± 0.021	1.52 ± 0.23
IV		$U(C_x^*) = \pm 1$	0.244 ± 0.036	1.41 ± 0.40
V	B_p	$U(C_x^*) = 1$	0.310 ± 0.024	2.03 ± 0.24
VI		$U(C_x^*) = \pm 1$	0.297 ± 0.005	2.02 ± 0.05

2.2 面元算符的本征态热化假说

这里，我们将沿用正文中对 U（γ_x）和 U（$\bar{\gamma}_x$）的分析思路，详细说明面元算符 B_p 的本征态热化假说。尽管该算符可视为最小 Wilson 算符，但它会对面元 p周围的链路产生非平凡作用。从这个意义上说，算符 B_p 可视为局域可观测量。

期望值与本征能量的关系如图 S-1(a) 所示。结合正文中的图 3(c)，我们得出结论：算符 B_p 即使在不区分对称性扇区的情况下也满足本征态热化假说。图 S-1(b) 展示了期望值 $\langle B_p(t)\rangle$ 的时间演化。稳态可以很好地由广义吉布斯系综（GGE）和正则系综的系综平均值描述，两种系综给出的预测几乎相同。

3 广义吉布斯系综的合理性

3.1 对 $H_{\mathbb{Z}_2}$情况的论证

在正文中，我们介绍了考虑离散 1-形式对称性的广义吉布斯系综 $U(C_x^*)$。这里我们将说明，若假设本征态热化假说在每个对称性扇区内分别适用于

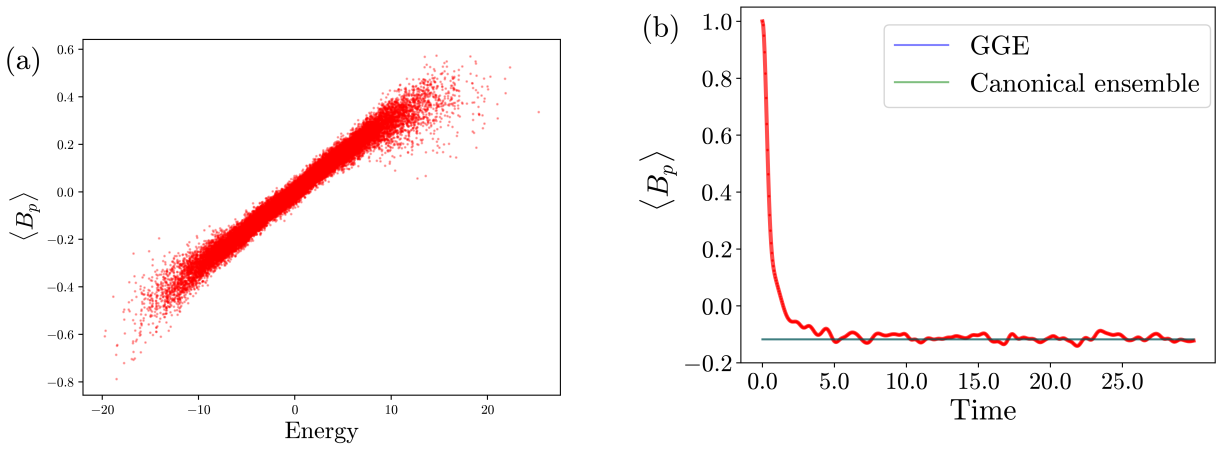


图 S-1：（a）对于 5×3 晶格，局域算符 B_p 在能量本征态中的期望值。我们看到，即使不区分与 $U(C_x^*)$ 和 $U(C_y^*)$ 相关的对称性扇区，B_p 也满足本征态热化假说（另见正文中的图 3(c)）。（b）4×3 晶格中 B_p 的期望值随时间的演化。初态是 B_p 的本征值为 $+1$ 的本征态的随机叠加，其能量期望值位于能量窗口 $E \in [-5.0, -3.0]$ 内。广义吉布斯系综和正则系综的预测没有差别（即两项结果几乎重合），而 $\langle B_p \rangle$ 的稳态值由它们描述。

$U(C_x^*)$，则可以论证这一假设。我们考虑的、计入 $\mathbb{Z}_2$ 1-形式对称性的广义吉布斯系综为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle_{\mathrm{GGE}} &= \mathrm{Tr}(\mathcal{O}\rho_{\mathrm{GGE}}), \\ \rho_{\mathrm{GGE}}(\beta, \lambda_x, \mu_x) &:= \frac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}(\beta, \lambda_x, \mu_x)} e^{-\beta H_{\mathbb{Z}_2} - \lambda_x U(C_x^*) - \mu_x U(C_x^*) H_{\mathbb{Z}_2}}, \\ Z_{\mathrm{GGE}}(\beta, \lambda_x, \mu_x) &:= \mathrm{Tr}[e^{-\beta H_{\mathbb{Z}_2} - \lambda_x U(C_x^*) - \mu_x U(C_x^*) H_{\mathbb{Z}_2}}], \end{aligned} \tag{S-8}$$

其中，β, λ_x, μ_x 由守恒量 $H_{\mathbb{Z}_2}, U(C_x^*)$ 和 $U(C_x^*)$ $H_{\mathbb{Z}_2}$ 的初始值确定（见公式（S-19））。

为了说明广义吉布斯系综描述了稳态，我们首先求出稳态的表达式，也就是可观测量 $\mathcal{O}$ 的期望值的长时间平均（我们假设在热力学极限下，长时间平均附近的时间涨落可以忽略不计）。为此，我们将投影到各个对称性扇区的投影算符定义为

$$P_{\pm}^x := \frac{1}{2}\big(1 \pm U(C_x^*)\big), \tag{S-9}$$

一旦假设每个对称性扇区都满足本征态热化假说，期望值 $\langle P_+^x \rangle$、$\langle P_+^x H_{\mathbb{Z}_2} P_+^x \rangle$和 $\langle P_-^x H_{\mathbb{Z}_2} P_-^x \rangle$便足以确定稳态。为此，我们考虑初态 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle$ 在能量本征态 $|E_n\rangle$下的时间演化。接着，若假设能量本征值不存在简并，则长时间平均 $\langle \psi|\mathcal{O}|\psi\rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \langle \psi(t)|\mathcal{O}|\psi(t)\rangle$ 为

$$\begin{aligned} \overline{\langle \psi|\mathcal{O}|\psi\rangle} &= \sum_n |c_n|^2 \langle E_n|\mathcal{O}|E_n\rangle \\ &= \sum_{n_+ : U(C_x^*)=+1 \text{ sector}} |c_{n_+}|^2 \langle E_{n_+}^+|\mathcal{O}|E_{n_+}^+\rangle + \sum_{n_- : U(C_x^*)=-1 \text{ sector}} |c_{n_-}|^2 \langle E_{n_-}^-|\mathcal{O}|E_{n_-}^-\rangle \\ &\simeq \langle P_+^x \rangle \langle P_+^x \mathcal{O} P_+^x \rangle_{\mathrm{mc}}^{\delta E_+}(\mathcal{E}_+) + \langle P_-^x \rangle \langle P_-^x \mathcal{O} P_-^x \rangle_{\mathrm{mc}}^{\delta E_-}(\mathcal{E}_-), \end{aligned} \tag{S-10}$$

其中， $|E^+_{n_+}\rangle$和 $|E^-_{n_-}\rangle$分别表示满足 $U(C^*_x) = +1$和 $U(C^*_x) = -1$的本征态。这里，我们对每个对称性扇区都使用了本征态热化假说

$$\langle E^\pm_{n_\pm}|\mathcal{O}|E^\pm_{n_\pm}\rangle \simeq \langle P^x_\pm \mathcal{O} P^x_\pm\rangle^{\delta E_\pm}_{\rm mc}(E^\pm_{n_\pm}) \tag{S-11}$$

and 假设 $\sum_{n_\pm}^{|c_{n_\pm}|^2}$ 在每个对称性扇区的平均能量附近局域化 tor

$$\mathcal{E}_\pm = \frac{\sum_{n_\pm}|c_{n_\pm}|^2 E_{n_\pm}}{\sum_{n_\pm}|c_{n_\pm}|^2} = \frac{\langle P^x_\pm H_{\mathbb{Z}_2} P^x_\pm\rangle}{\langle P^x_\pm\rangle}, \tag{S-12}$$

其中， $\sum_{n_\pm}$ 在下文中表示 $\sum_{n_\pm:U(C^*_x)=\pm1\text{扇区}}$。请注意， $\delta E_\pm$ 的精确取值并不重要，后文将不予考虑。

接下来，我们考虑广义吉布斯系综。为此，我们为每个扇区定义正则系综

$$\langle\mathcal{O}\rangle_{\text{can},\pm} := \frac{1}{Z_\pm}\sum_{n_\pm}\mathcal{O}_{n_\pm n_\pm} e^{-(\beta\pm\mu_x)E^\pm_{n_\pm}\mp\lambda_x}, \qquad Z_\pm := \sum_{n_\pm} e^{-(\beta\pm\mu_x)E^\pm_{n_\pm}\mp\lambda_x}. \tag{S-13}$$

用这些系综表示，广义吉布斯系综（S-8）可写为

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\mathcal{O}\rho_{\text{GGE}}) &= \frac{1}{Z_{\text{GGE}}}\left(\sum_{n_+} e^{-\beta E_{n_+}-\lambda_x-\mu_x E_{n_+}}\mathcal{O}_{n_+n_+} + \sum_{n_-} e^{-\beta E_{n_-}+\lambda_x+\mu_x E_{n_-}}\mathcal{O}_{n_-n_-}\right)\\ &= \sum_{s=\pm}\frac{Z_s}{Z_{\text{GGE}}}\langle\mathcal{O}\rangle_{\text{can},s} = \sum_{s=\pm}\langle P^x_s\rangle_{\text{GGE}}\langle\mathcal{O}\rangle_{\text{can},s}\,.\end{aligned} \tag{S-14}$$

与标准正则系综一样，通过适当地选择 $\beta\pm\mu_x$，我们可以 s et

$$\mathcal{E}_\pm = \langle H\rangle_{\text{can},\pm} = \frac{\langle P^x_\pm H_{\mathbb{Z}_2} P^x_\pm\rangle_{\text{GGE}}}{\langle P^x_\pm\rangle_{\text{GGE}}}. \tag{S-15}$$

在此条件下，我们假设分布 $\langle E^\pm_{n_\pm}|\rho_\pm|E^\pm_{n_\pm}\rangle = \exp(-(\beta\pm\mu_x)E^\pm_{n_\pm}\mp\lambda_x)/Z_\pm$ 在 $\mathcal{E}_\pm$附近充分局域化。然后，利用每个对称性扇区的本征态热化假说，我们可以将算符平均值写为

$$\langle\mathcal{O}\rangle_{\text{can},\pm} \simeq \frac{1}{Z_\pm}\sum_{n_\pm} e^{-(\beta\pm\mu_x)E^\pm_{n_\pm}\mp\lambda_x}\langle P^x_\pm\mathcal{O}P^x_\pm\rangle_{\text{mc}}(\mathcal{E}_\pm) = \langle P^x_\pm\mathcal{O}P^x_\pm\rangle_{\text{mc}}(\mathcal{E}_\pm). \tag{S-16}$$

通过适当选择 λ_x ，我们可以设定

$$\langle P^x_+\rangle_{\text{GGE}} = \langle P^x_+\rangle, \qquad \big(\Rightarrow \quad \langle P^x_-\rangle_{\text{GGE}} = 1-\langle P^x_+\rangle_{\text{GGE}} = 1-\langle P^x_+\rangle = \langle P^x_-\rangle\big). \tag{S-17}$$

总之，通过设定 β,μ_x 和 λ_x ，使得方程 (S-15) 和 (S-17) 成立，我们可以证明可观测量 $\mathcal{O}$ (S-10) 的长时间平均可与 GGE 预测等同:

$$\overline{\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle} \simeq \sum_\pm\langle P^x_\pm\rangle_{\text{GGE}}\langle\mathcal{O}\rangle_{\text{can},\pm} = \text{Tr}(\mathcal{O}\rho_{\text{GGE}}). \tag{S-18}$$

注意，方程（S-15）和（S-17）的条件等价于 GGE 中守恒量满足以下条件,

$$\langle H_{\mathbb{Z}_2}\rangle_{\text{GGE}} = \langle H_{\mathbb{Z}_2}\rangle, \langle U(C^*_x)\rangle_{\text{GGE}} = \langle U(C^*_x)\rangle, \langle U(C^*_x)H_{\mathbb{Z}_2}\rangle_{\text{GGE}} = \langle U(C^*_x)H_{\mathbb{Z}_2}\rangle, \tag{S-19}$$

正如预期。

上述讨论聚焦于在 x 方向上非局域、但在y方向上局域的可观测量。若要采用同样延伸至 y 方向的算符，则总共至多应包含七个化学势，即 $\tilde{\rho}_{\text{GGE}} = \tilde{Z}^{-1}$广义吉布斯系综 $\exp\big(-\beta H_{\mathbb{Z}_2} - \sum_{i=x,\ y}\lambda_i U(C^*_i) - \sum_{i=x,\ y}\mu_i U(C^*_i)H_{\mathbb{Z}_2} - \alpha U(C^*_x)U(C^*_y) - \alpha' U(C^*_x)U(C^*_y)H_{\mathbb{Z}_2}\big)$。

3.2 一般情形的论证

对于一般有限阿贝尔群 G，我们提出以下密度矩阵可作为广义吉布斯系综:

$$\rho^G_{\mathrm{GGE}}(\beta^G,\{\lambda^G_j\},\{\gamma^G_j\})=\frac{1}{Z^G_{\mathrm{GGE}}(\beta^G,\{\lambda^G_j\},\{\gamma^G_j\})}e^{-\beta^G H-\sum_{j=1}^{N-1}\lambda^G_j P_j-\sum_{j=1}^{N-1}\mu^G_j P_j H}, \tag{S-20}$$

其中， $P_j(j=1,\ldots,N)$ 是投影到各个对称性扇区的投影，而扇区的数量由 $N=|H_{d-p}(\mathfrak{M},G)|$ 给出。这里需要注意，化学势的求和是在$1\le j\le N-1$ 上进行的，因为算符 P_N 和 $P_N H$ 并不独立于其他守恒量。

假设每个对称性扇区都满足本征态热化假说，

$$\langle E^j_{n_j}|\mathcal{O}|E^j_{n_j}\rangle=\langle P_j\mathcal{O}P_j\rangle^{\delta E_j}_{\mathrm{mc}}\,(E^j_{n_j})\quad(1\le j\le N), \tag{S-21}$$

我们可以像在 $\mathbb{Z}_2$ 情形（S-10）中那样得到稳态:

$$\begin{aligned}\overline{\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle}&=\sum_n|c_n|^2\langle E_n|\mathcal{O}|E_n\rangle=\sum_{j=1}^N\sum_{n_j}|c_{n_j}|^2\langle E^j_{n_j}|\mathcal{O}|E^j_{n_j}\rangle\\&\simeq\sum_{j=1}^N\langle P_j\rangle\langle P_j\mathcal{O}P_j\rangle^{\delta E_j}_{\mathrm{mc}}(\mathcal{E}_j),\end{aligned} \tag{S-22}$$

其中 $|E^j_{n_j}\rangle$ 是各对称性扇区中的能量本征态，并且

$$\mathcal{E}_j=\frac{\langle P_jHP_j\rangle}{\langle P_j\rangle}. \tag{S-23}$$

这里， $\sum_{n_j}$ 表示求和仅针对属于对称性扇区 j的本征态进行。我们还假设每个扇区中的能量分布都局域化在 $\mathcal{E}_j$附近。在下文中，我们省略δE_j，因为其细节在热力学极限下并不重要。

与 $\mathbb{Z}_2$ 情形类似，广义吉布斯系综 (S-20) 可以写成

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{O}\rangle^G_{\mathrm{GGE}}&=\frac{1}{Z^G_{\mathrm{GGE}}}\left(\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{n_j}e^{-(\beta^G+\mu^G_j)E_{n_j}-\lambda_j}\mathcal{O}_{n_jn_j}+\sum_{n_N}e^{-\beta^G E_{n_N}}\mathcal{O}_{n_Nn_N}\right)\\&=\sum_{j=1}^N\frac{Z_j}{Z^G_{\mathrm{GGE}}}\langle\mathcal{O}\rangle_{\mathrm{can},j}=\sum_{j=1}^N\langle P_j\rangle^G_{\mathrm{GGE}}\langle\mathcal{O}\rangle_{\mathrm{can},j}\,,\end{aligned} \tag{S-24}$$

其中限制在每个扇区内的正则系综定义为

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{O}\rangle_{\mathrm{can},j}&:=\frac{1}{Z_j}\sum_{n_j}\mathcal{O}_{n_jn_j}e^{-(\beta^G+\mu^G_j)E_{n_j}-\lambda^G_j},\qquad Z_j:=\sum_{n_j}e^{-(\beta^G+\mu^G_j)E_{n_j}-\lambda^G_j},\qquad(j=1,\ldots,N-1),\\\langle\mathcal{O}\rangle_{\mathrm{can},N}&:=\frac{1}{Z_N}\sum_{n_N}\mathcal{O}_{n_Nn_N}e^{-\beta^G E_{n_N}},\qquad Z_N:=\sum_{n_N}e^{-\beta^G E_{n_N}}.\end{aligned} \tag{S-25}$$

在此，我们可以选择 β^G和 $\mu^G_j(j=1,\cdots,N-1)$，使得

$$\mathcal{E}_j=\langle H\rangle_{\mathrm{can},j}=\frac{\langle P_jHP_j\rangle^G_{\mathrm{GGE}}}{\langle P_j\rangle^G_{\mathrm{GGE}}} \tag{S-26}$$

对 $1 \leq j \leq N$成立。现在，假设分布 $\langle E_{n_j}|\rho_j|E_{n_j}\rangle := \exp(-(\beta^G + \mu_j^G)E_{n_j} - \lambda_j^G)/Z_j$和 $\langle E_{n_N}|\rho_N|E_{n_N}\rangle := \exp(-\beta^G E_{n_N})$再次集中在 $\mathcal{E}_j$附近，可得:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathrm{can},j} = \langle P_j \mathcal{O} P_j \rangle_{\mathrm{mc}} (\mathcal{E}_j), \qquad (j = 1, \ldots, N). \tag{S-27}$$

我们可以唯一地确定 $\lambda_j^G (j = 1, \ldots, N-1)$，使得以下关系成立 :

$$\langle P_j \rangle_{\mathrm{GGE}}^G = \langle P_j \rangle, \qquad (j = 1, \ldots, N-1), \tag{S-28}$$

$$\Rightarrow \quad \langle P_N \rangle_{\mathrm{GGE}}^G = \frac{Z_N}{Z_{\mathrm{GGE}}} = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{Z_j}{Z_N} = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \langle P_j \rangle = \langle P_N \rangle . \tag{S-29}$$

总之，通过选择 β^G, λ_j^G, 以及 $\mu_j^G (j = 1, \cdots, N-1)$，使得式 (S-26) 和 (S-28) 成立，我们可以证明时间平均 (S-22) 为

$$\overline{\langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle} = \sum_{j=1}^{N} \langle P_j \rangle_{\mathrm{GGE}}^G \langle \mathcal{O} \rangle_{\mathrm{can},j} = \langle \mathcal{O} \rangle_{\mathrm{GGE}}^G . \tag{S-30}$$

最后，式 (S-26) 和 (S-28) 中的条件等价于广义吉布斯系综中守恒量满足以下条件:

$$\langle H \rangle_{\mathrm{GGE}}^G = \langle H \rangle , \langle P_j \rangle_{\mathrm{GGE}}^G = \langle P_j \rangle , \langle P_j H \rangle_{\mathrm{GGE}}^G = \langle P_j H \rangle \ \ (1 \leq j \leq N-1), \tag{S-31}$$

这里我们用到了 $P_j H P_j = P_j H$ 和 $\langle H \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle P_j H P_j \rangle$。

回顾关系式 (S-9)，通过为 $G = \mathbb{Z}_2$ 情形重新定义 β^G、 λ_j^G 和 μ_j^G，我们可以恢复广义吉布斯系综 (S-8)。此外，类似的推理也证明了正文中讨论的 $G = \mathbb{Z}_2$ 的广义吉布斯系综 $\tilde{\rho}_{\mathrm{GGE}}$，其中我们考虑了 x 方向和 y 方向的非局域可观测量。