arXiv:2305.04993v1 [math.GR] 8 May 2023

有限群的幂零残余

Eliana Rodrigues、Emerson de Melo 和 G¨ulin Ercan

Abstract. 设 F 是一个幂零群，群 H 通过自同构作用于它，并且群 G 以半直积FH作为自同构群，使得 $C_G(F) = 1$。我们证明，在以下情形中， $\gamma_\infty(G)$的阶、 $\gamma_\infty(G)$的秩分别由 $\gamma_\infty(C_G(H))$的阶和 H、 $\gamma_\infty(C_G(H))$的秩和 H的阶所界定： FH 是一个 Frobenius 群； FH 是满足某些条件的类 Frobenius 群；或者 $FH = \langle\alpha, \beta\rangle$ 是由对合 α 和 β 生成的二面体群，且 $F = \langle\alpha\beta\rangle$ 和 $H = \langle\alpha\rangle$。

1. 引言

全文中所有群均为有限群。设群 A 通过自同构作用于群 G。对于任意 $a \in A$，我们用 $C_G(a)$ 表示集合$\{x \in G : x^a = x\}$，并记作 $C_G(A) = \bigcap_{a\in A} C_G(a)$。本文关注一个特定问题，该问题与这类不动点子群的结构对 G 结构的强烈影响有关；当群 A 是 Frobenius 群、类 Frobenius 群或自同构二面体群时，我们给出了一些新的结果。

在下文中，我们用 $A^\#$ 表示 A 的所有非平凡元素组成的集合，并称 A 在 G 上以互素方式作用，如果 $(|A|, |G|) = 1$。回顾一下，具有核 F 和补群 H 的 Frobenius 群 $A = FH$ 可表征为正规子群 F 与 H 的半直积，其中 $C_F(h) = 1$ 对每个 $h \in H^\#$ 都成立。受 Mazurov 在 Kourokva 笔记本 [**26**], 中提出的问题 17.72 启发，人们对 Frobenius 群 $A = FH$ 通过自同构作用于群 G 的情形给予了一些关注。在核 F 无不动点地作用

2020年数学主题分类：20D45。关键词和短语：弗罗贝尼乌斯群、类 Frobenius 群、二面体群、自同构、幂零残余。

于 G 的情形下，Khukhro、Makarenko 和 Shumyatsky 在一系列论文 [8], [9], [10], [11],[12], [13], [14] 中得到了关于 G 结构的一些结果。他们指出， G 的各种性质在某种意义上与不动点子群 $C_G(H)$ 的相应性质相近，也可能取决于 H。特别是，当 FH 为亚循环时，他们证明了：若 $C_G(H)$ 的幂零类为 c，则 G 的幂零类可由 c 和 $|H|$ 控制。此外，他们还构造了一些例子，表明在非亚循环弗罗贝尼乌斯群的情形下，关于 G 幂零类的结论不再成立。然而，最近在 [6] 中证明，若 FH 为超可解群，且 $C_G(H)$ 的幂零类为 c，则 G 的幂零类可由 c 和 $|FH|$ 控制。

后来，作为 Frobenius 群概念的推广，Ercan 和 G¨ulo˘glu 在 [16], 引入了类 Frobenius 群的概念，并在一系列论文 [18], [19],[20],[23],[24],[21]中研究了这类群的作用。若有限群 FH 有一个非平凡的幂零正规子群 F，且有一个非平凡的补群 H，使得 FH/F' 是一个 Frobenius 群，其 Frobenius 核为 F/F'，补群为 H，其中 $F' = [F, F]$，则称 FH 为类 Frobenius 群。关于有限群 G 存在类 Frobenius 群自同构群 FH 时的性质，已有若干结果；这些结果旨在根据 $C_G(H)$ 对 G 加以限制，并主要关注 Fitting 高度及相关参数的界，从而推广早先关于 Frobenius 自同构群所得的结果；此外，基于新的表示论结果，也得出了一些关于类 Frobenius 群的新定理。在这些论文中，研究了类 Frobenius 群的两种特殊类型：一类是 FH，其中 F' 的阶为素数，且包含于 $C_F(H)$；另一类是 FH，其中 $C_F(H)$ 和 H 的阶均为素数。本文后续部分分别将它们称为 I 型和 II 型。

在 [25] 中，Shumyatsky 证明， [14] 中发展的技术可用于研究非必然为 Frobenius 群的群的作用。他考虑了一个二面体群 $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ 由两个对合 α 和 β 生成，并以如下方式作用于一个有限群 G： $C_G(\alpha\beta) = 1$。特别地，他证明，如果 $C_G(\alpha)$ 和 $C_G(\beta)$ 均为类为 c 的幂零群，那么 G 是幂零群，且 G 的幂零类仅由 c 决定一个上界。在 [5], 中，针对其他群也得到了类似的结果。还应指出，在 [24] 中，通过证明以相同方式容许一个二面体自同构群的群 G 的幂零长度等于子群 $C_G(\alpha)$ 和 $C_G(\beta)$ 的幂零长度的最大值，对 [25] 中关于幂零长度的结果进行了推广。

在全文中，我们将使用“$(a,b,\ldots)$-有界”这一表达，作为“仅由 a, $b,\ldots$ 控制的上界”的简写。回顾一下，有限群 G 的秩 r(G) 是满足以下条件的最小数 r： G 的每个子群都可以由至多 r 个元素生成。令 $\gamma_\infty(G)$ 表示群 G 的幂零残余，也就是 G 的所有商群为幂零群的正规子群的交。最近，DE MELO、Lima 和 Shumyatsky 在 [4], 中研究了这样的情形： A 是一个阶至少为 q^3 、指数为素数 q 的有限群，并作用于一个有限 q'-群 G。假设对任意 $a \in A^{\#}$，都有 $|\gamma_\infty(C_G(a))| \leq m$ ，他们证明了 $\gamma_\infty(G)$ 的阶是 (m,q)-有界的。此外，假设对任意 $a \in A^{\#}$， $\gamma_\infty(C_G(a))$ 的秩至多为 r ，他们证明了 $\gamma_\infty(G)$ 的秩是 (m,q)-有界的。后来，在 [3], 中证明了， $\gamma_\infty(G)$ 的阶可以由一个与 A 的阶无关的数所界定。

本文旨在研究这样一些有限群的幂零残余：它们存在一个 Frobenius 群、一个 I 型或 II 型类 Frobenius 群，或一个二面体群作为自同构群。具体而言，我们得到以下结果。

定理 A 设 FH 是一个 Frobenius 群或 I 型或 II 型类 Frobenius 群，其核为 F ，补群为 H。假设 FH 以这样的方式作用于有限群 G，使得 $C_G(F) = 1$。那么

a) $|\gamma_\infty(G)|$ 仅由 $|H|$ 和 $|\gamma_\infty(C_G(H))|$ 决定其上界；b) $\gamma_\infty(G)$ 的秩由 $|H|$ 和 $\gamma_\infty(C_G(H))$ 的秩决定其上界。

定理 B 设 $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ 是由两个对合 α 和 β 生成的二面体群。假设 D 以这样的方式作用于有限群 G ，使得 $C_G(\alpha\beta) = 1$。那么

a) $|\gamma_\infty(G)|$ 仅由 $|\gamma_\infty(C_G(\alpha))|$ 和 $|\gamma_\infty(C_G(\beta))|$ 决定其上界；b) $\gamma_\infty(G)$ 的秩由 $\gamma_\infty(C_G(\alpha))$ 和 $\gamma_\infty(C_G(\beta))$ 的秩决定其上界。

本文的组织结构如下。第 2 节列出了一些我们经常用到的结果。第 3 节用于证明两个关键命题，它们在证明定理 A 和定理 B 时发挥着关键作用；定理 A 和定理 B 的证明见第 4 节。

2. 预备知识

若 A 是 G的自同构群，我们用 $[G,A]$ 表示由形如 $g^{-1}g^a$的元素生成的子群，其中 $g \in G$ 和$a \in A$。首先，我们回顾一些关于互素作用的众所周知的事实，参见例如 [7], ；下文将直接使用这些事实，不再另行引用。

LEMMA 2.1. 设 Q 是有限群G 的自同构群，且$(|G|, |Q|) = 1$。则

(a) $G = C_G(Q)[G, Q]$。(b) 对于每个素数$p \in \pi(G)$， Q 使 G 的某个 Sylow p-子群保持不变。(c) 对任意 Q-不变正规子群N of G， $C_{G/N}(Q) = C_G(Q)N/N$。

下面列出一些关于 Frobenius 群和类 Frobenius 群作用的事实。在全文中，非 Frobenius 类 Frobenius 群始终是在下述假设下讨论的。

假设* 设 FH 是一个非 Frobenius 类 Frobenius 群，其核为 F，补群为 H。假设 H 的一个 Sylow 2-子群是循环且正规的，并且 F 没有阶为p^{2m+1} 的特异群截面，使得对于某个子群 $H_1 \leq H$有 $p^m + 1 = |H_1|$。

应注意，如果 $|FH|$ 为奇数或 $|H| = 2$，则假设*会自动满足。

THEOREM 2.2. 假设有限群 G受到一个自同构 Frobenius 群或类 Frobenius 群 FH 的作用，其核为 F、补群为 H，且满足 $C_G(F) = 1$。那么 $C_G(H) \neq 1$，并且 r(G) 可由 r($C_G(H)$) 和 $|H|$. 控制。

PROPOSITION 2.3. 设 FH 是 Frobenius 群，或 I 型或 II 型类 Frobenius 群。假设 FH 作用于一个 q群 Q，其中某个素数 q 与 H 的阶互素（当 FH 不是 Frobenius 群时）。设 V 是一个 $kQFH$-模，其中 k 是一个特征不整除 $|QH|$. 的域。进一步假设 F 在半直积 VQ上无不动点作用。那么 $C_V(H) \neq 0$，并且

$$Ker(C_Q(H) \ on \ C_V(H)) = Ker(C_Q(H) \ on \ V).$$

PROOF. 当 FH 是 Frobenius 群时，参见 [17] 命题 2.2；当 FH 是 I 型类 Frobenius 群时，参见 [18] 命题 C；当 FH 是 II 型类 Frobenius 群时，参见 [22] 命题 2.1。容易验证，当 $C_Q(F) = 1$ 时，即使没有互素条件 $(|Q|, |F|) = 1$. □，[17] 命题 2.2 仍然成立。

以下定理的证明可见于 [25] 和 [2]。

THEOREM 2.4. 设 $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ 为由两个对合 α 和 β生成的二面体群。假设 D 以这样的方式作用于有限群 G： $C_G(\alpha\beta) = 1$。则

(a) $G = C_G(\alpha)C_G(\beta)$; (b) G 的秩由 $C_G(\alpha)$和$C_G(\beta)$的秩所界定；

PROPOSITION 2.5. 设 $D = \langle \alpha, \beta \rangle$ 为由对合 α 和 β. 生成的二面体群。假设 D 作用于某个素数 q 的 q-群 Q 上，并设V是域 k 上的一个 kQD-模，该域的特征不同于 q，且群 $F = \langle \alpha\beta \rangle$ 在半直积 VQ 上无不动点地作用。若 C_Q(α)在 V 上作用非平凡，则有 $C_V(\alpha) \neq 0$，并且 Ker(C_Q(α)在 C_V(α)上的作用) $= Ker$(C_Q(α)在 V上的作用)。

PROOF. 这是 [24]中的命题 C。 □

接下来的两个结果已在 [15, 引理 1.6]中证明。

LEMMA 2.6. 假设群 Q 通过自同构作用于群 G。若 $Q = \langle q_1, \ldots\ldots, q_n \rangle$，则 $[G, Q] = [G, q_1] \cdots [G, q_n]$.

LEMMA 2.7. 设 p 是一个素数， P 是一个有限 p群，而 Q是 P的一个 p'自同构群。

a) 如果对每个 $q \in Q$ 都有 $|[P, q]| \leq m$，那么 $|Q|$ 和 $|[P, Q]|$ 是 m- 有界的。b) 如果对每个 $q \in Q$ 都有 $r([P, q]) \leq m$，那么 $r(Q)$ 和 $r([P, Q])$ 是 m-有界的。

我们还需要以下事实，其证明可见 [1]。

LEMMA 2.8. 设 G 是一个有限群，满足 $\gamma_\infty(G) \leq F(G)$。设 P 是 $\gamma_\infty(G)$ 的一个 Sylow p-子群，且 H 是 G 的一个 Hall p'-子群。那么 $P = [P, H]$。

3. 关键命题

下面我们证明一个新的命题，该命题研究 Frobenius 群和类 Frobenius 群的作用，并构成证明定理 A 的基础。

PROPOSITION 3.1. 假设 FH 是一个 Frobenius 群，或一个核为 F、补群为 H 的 I 型或 II 型类 Frobenius 群。设 FH 对某个素数 q 对应的 q-群 Q 作用。设 V 是一个不可约 $\mathbb{F}_pQFH$-模，其中 $\mathbb{F}_p$ 是特征为 p 的域，且 p 不整除 $|Q|$，并且 F 在半直积 VQ 上无不动点地作用。此外，当 FH 不是 Frobenius 群时，我们假设 q 与 $|H|$ 互素。那么 r([V, Q]) 可由 r([$C_V(H)$ $C_Q(H)$]) 和 $|H|$ 界定。

PROOF. 令 r([$C_V(H)$ $C_Q(H)$]) $= s$. 我们可以假设 $V = [V, Q]$，因此 $C_V(Q) = 0$。根据克利福德定理， $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ 是 Q-齐次分量 V_i 的直和，这些分量在 PROOF. 的作用下传递地

置换。令 Ω $= \{V_1, \ldots, V_t\}$，并固定 Ω 中的一个 F-轨道 Ω_1。全文中，$W = \Sigma_{U \in \Omega_1} U$.

现在，我们将证明分解为一系列步骤。

(1) 我们可以假设 Q 忠实作用于 V。此外$Ker(C_Q(H)$ 作用于 $C_V(H)) = Ker(C_Q(H)$ 作用于 $V) = 1$。

Proof. 假设 $Ker(Q$ 作用于 V$) \neq 1$，并令 $\overline{Q} = Q/Ker(Q$ 作用于 V)。注意，由于 $C_Q(F) = 1$， F 是 QF 的 Carter 子群，因此也是 $\overline{Q}F$ 的 Carter 子群，这意味着 $C_{\overline{Q}}(F) = 1$。注意，当 FH 是 Frobenius 群时，等式 $C_Q(H) = C_{\overline{Q}}(H)$ 成立（参见 [14] 定理 2.3）。由于互素条件 $(q, |H|) = 1.$，当 FH为非 Frobenius 群时，同一等式也成立。于是$[C_V(H)\ C_Q(H)] = [C_V(H)\, C_{\overline{Q}}(H)]$，因此我们可以假设 Q 忠实作用于 V。注意，根据命题 2.3，我们有

$$Ker(C_Q(H) \text{ on } C_V(H)) = Ker(C_Q(H) \text{ on } V) = 1$$

从而证得该断言。 □

(2) 我们不妨假设，对于任意非单位元$c \in C_{Z(Q)}(H)$，其阶为 q。特别地， Q 是阿贝尔群。

Proof. 由命题 2.3 可得， $C_{Z(Q)}(H) \neq 1$，因为 $C_Q(F) = 1$。现在取阶为 q的 $1 \neq c \in C_{Z(Q)}(H)$，并考虑 $\langle c^{FH} \rangle = \langle c^F \rangle$，即包含 c的极小 FH-不变子群。由于 V是一个不可约的 QFH-模，且 Q 忠实作用于其上，因此有 $V = [V, \langle c^F \rangle]$。故我们不妨假设 $Q = \langle c^F \rangle$，正如所要证明的。□

(3) $V = [V, c] \cdot [V, c^{f_1}] \cdots [V, c^{f_n}]$其中 n是一个$(s, |H|)$-有界数。因此，只需给出 r$([W, c])$ 的上界。

Proof. 注意到，根据步骤 (1)，群 $C_Q(H)$ 嵌入到 $[C_V(H)\ C_Q(H)]$ 的自同构群中。于是，根据引理 2.7， $C_Q(H)$ 的秩为 s-有界。由此，根据定理 2.2， Q 的秩为 $(s, |H|)$-有界。因此，存在 $f_1 = 1, \ldots, f_n$，属于 F，其中元素个数 $(s, |H|)$-有界，且 $Q = \langle c^{f_1}, \ldots, c^{f_n} \rangle$。现在，根据引理 2.6，$V = [V, c]\ \{V, c^{f_2}] \cdots [V, c^{f_n}] = \prod_{i=1}^{n} [V, c]^{f_i}$。这表明我们只需适当地给 r$([V, c])$ 一个上界。事实上，只需证明 r$([W, c])$ 适当地有界，因为 $V = \Sigma_{h \in H} W^h$. □

(4) $H_1 = Stab_H(\Omega_1) \neq 1$. 此外，$\Omega_1$ 中那些不被 c 中心化且包含在一个正则H_1-轨道中的成员之和的秩有适当的界。

Proof. 固定 $U \in \Omega_1$，并令 $Stab_F(U) = F_1$。取 F_1 在 $F.$ 中的一个横截集T。令$W = \sum_{t\in T} U^t$，其中 T 是 F_1 在F中的一个横截集 $1 \in T.$。于是我们有$V = \sum_{h\in H} W^h$。注意，由(1)可知 $[V, c] \neq 0$，这意味着 $[W, c] \neq 0$，因而对某个$t \in T$有 $[U^t, c] = U^t$。不失一般性，我们可以假设 $[U, c] = U.$

假设 $Stab_H(\Omega_1) = 1$。那么对于所有 $t \in T$，我们还有 $Stab_H(U^t) = 1$，因此和 $X_t = \sum_{h\in H} U^{th}$ 对所有 $t \in T.$ 都是直和。现在， $U \leq X_1$。有

$$C_{X_t}(H) = \{\sum_{h\in H} v^h \ : \ v \in U^t\}.$$

那么 $|U| = |C_{X_1}(H)| = |[C_{X_1}(H)\ c]| \leq |[C_V(H)\ C_Q(H)]|$ 蕴含 $\mathbf{r}(U) \leq s.$。另一方面，$V = \bigoplus_{t\in T} X_t$，并且

$$[C_V(H), c] = \bigoplus\{[C_{X_t}(H), c] : t \in T \text{ with } [U^t, c] \neq 0\} \leq [C_V(H), C_Q(H)].$$

特别地， $\{t \in T\colon\ [U^t, c] \neq 0\}$ 有适当的界，因此 $\mathbf{r}([W, c])$ 有 $(s, |H|)$-界。因此我们可以假设 $Stab_H(\Omega_1) \neq 1.$

注意，Ω_1 中正则 H_1-轨道的每个元素都属于 Ω 中的一个正则H-轨道。设 $U \in \Omega_1$ 包含于 $\Omega_1.$ 的一个正则 H_1-轨道中。令 X 表示 Ω 中 U 的 H- 轨道中各成员之和，即 $X = \bigoplus_{h\in H} U^h$。那么 $C_X(H)$ $= \{\sum_{h\in H} v^h\colon\ \ v \in U\}$。如果 $[U, c] \neq 0$，那么通过在上一段中重复相同的论证，我们可以证明 $\mathbf{r}(U) \leq s$ 有适当的界。另一方面，设 Ω 中包含某个成员 U 且满足 $[U, c] \neq 0$ 的所有 H-轨道的个数为m；由于 $m \leq \mathbf{r}([C_V(H)\ c]) \leq s.$，该数有适当的界。因此，$\Omega_1$ 中那些不被 c 中心化且包含于正则 H_1-轨道的成员之和的秩有适当的界。□

（5）我们可以假设 FH 不是弗罗贝尼乌斯群。

Proof. 反设 FH 是弗罗贝尼乌斯群。令 $H_1 = Stab_H(\Omega_1)$，并取 $U \in \Omega_1$。设 $S = Stab_{FH_1}(U)$ 和 $F_1 = F \cap S$。于是 $|F\colon\ F_1| = |\Omega_1| = |FH_1\colon\ S|$，因此 $|S\colon\ F_1| = |H_1|$。由于 $(|F_1|, |H_1|) = 1$，根据舒尔-扎森豪斯定理，存在一个补群，记为 S_1，它是 S 中 F_1 的补群，且 $|H_1| = |S_1|$。因此存在 U 的一个共轭群，它是 H_1-不变的。不妨假设U是 H_1-不变的。另一方面，若 $1 \neq h \in H_1$ 和 $x \in F$满足$U^{xh} = U^x$，则 $[h, x] \in Stab_F(U) = F_1$，因此 $F_1x = F_1x^h = (F_1x)^h$。这意味着 $F_1x \cap C_F(h)$ 非空。现在， H 在 F 上的弗罗贝尼乌斯作用迫使 $x \in F_1$。这意味着，对每个 $x \in F \setminus F_1$，都有 $Stab_{H_1}(U^x) = 1$。因此， U是 Ω_1 中唯一的H_1-不变成员，除 $\{U\}$ 外，所有 H_1-轨道都是正则的。由 (4)，Ω_1 中除 U 外所有成员之和的秩适当有界

。特别地，$\mathbf{r}(U)$，进而 $\mathbf{r}([W,c])$，在 $[U^x,c]\neq 0$ 对某个 $x\in F\setminus F_1$ 成立时适当有界。因此我们可以假设，对于所有 $x\in F\setminus F_1$，c 在 U^x 上的作用是平凡的。现在我们有 $[W,c]=[U,c]=U.$

由于阿贝尔群 Q 对 U 的标量作用，可得 $[Q,F_1]\leq C_Q(U)$。我们还知道，对于每个 $x\in F\setminus F_1$，c^x 在 U 上的作用是平凡的。由于 $C_Q(F)=1$，$|F|$ 存在不同于 $q.$ 的素因子。令 $F_{q'}$ 表示 $F.$ 的 q'-Hall 子群。显然，我们有 $C_Q(F_{q'})=1$。现在令 $y=\prod_{f\in F_{q'}}c^f$。于是我们有

$$1=y=(\prod_{f\in F_1\cap F_{q'}}c^f)(\prod_{f\in F_{q'}\setminus F_1}c^f)\in c^{|F_1\cap F_{q'}|}C_Q(U).$$

因此 $c\in C_Q(U)$，因为 q 与 $|F_{q'}|$ 互素。这个矛盾证明了所声称的结论。□

(6) 我们可以假设群 FH 是 II 型类弗罗贝尼乌斯群。

Proof. 反之，我们假设 FH 是 I 型类弗罗贝尼乌斯群。由 (4)，可得 $H_1=Stab_H(\Omega_1)\neq 1$。取 $H.$ 中 H_1 的一个横截集 T_1。现在 $V=\bigoplus_{h\in T_1}W^h.$。此外，按照 (5) 中的方法，利用舒尔-扎森豪斯定理，我们可以保证 U 的某个共轭是 H_1-不变的。不妨假设 U 是 H_1-不变的。

现在令 $Y=\Sigma_{x\in F'}U^x$和 $F_2=Stab_F(Y)$，以及 $F_1=Stab_F(U)$。显然，$F_2=F'F_1$ 和 Y是 H_1-不变的。注意，对所有非恒等元 $h\in H$，都有 $C_F(h)\leq F'\leq F_2$。先假设 $F=F_2$。这迫使我们有 $V=Y$。显然，$Y\neq U$，也就是说 $F'\not\leq F_1$，因为否则，由阿贝尔群Q对 U的标量作用可知 $Q=[Q,F]=1$。因此 $F'\cap F_1=1$，这意味着 $|F\colon F_1|$是素数。于是 $F_1\trianglelefteq F$和 $F'\leq F_1$，这不可能。因此 $F\neq F_2$。

若 $1\neq h\in H$和 $t\in F$满足 $Y^{th}=Y^t$，则 $[h,t]\in F_2$。现在，$F_2t=F_2t^h=(F_2t)^h$，这意味着在$F_2t\cap C_F(h)$中存在一个元素。由于 $C_F(h)\leq F'\leq F_2$，我们得到 $t\in F_2$。特别地，对每个 $t\in F\setminus F_2$，都有 $Stab_H(Y^t)=1$。

令 S为 F中 F_2的一个横截集。对于任意的 $t\in S\setminus F_2$集 $Y_t=Y^t$，考虑 $Z_t=\Sigma_{h\in H}Y_t^h$。注意到$V=Y\oplus\bigoplus_{t\in S\setminus F_2}Z_t$。由于和 Z_t 是直和，我们有

$$C_{Z_t}(H)=\{\sum_{h\in H}v^h\ :\ v\in Y_t\}$$

对于 $|C_{Z_t}(H)|=|Y_t|.$，于是对每个$t\in S\setminus F_2$满足 $[Y_t,c]\neq 0$，都有 $\mathbf{r}([Y_t,c])=\mathbf{r}([C_{Z_t}(H)\ c])\leq s$。另一方面，

$$\Sigma\{\mathbf{r}([C_{Z_t}(H),c]):t\in S\text{ with }[Y_t,c]\neq 0\}\leq\mathbf{r}([C_V(H),c])\leq s$$

由此 $|\{t \in S \setminus F_2 : \ [Y_t, c] \neq 0\}|$ 受到适当的界定。因此，只要存在 $t \in S \setminus F_2$ 使得 $[Y_t, c] \neq 0$，结论便得以证明，因为我们有 $V = Y \oplus \bigoplus_{t \in S \setminus F_2} Z_t$。于是我们可以假设 c 在$\bigoplus_{t \in S \setminus F_2} Z_t$ 上是平凡的，从而 $[V, c] = [Y, c]$.

现在有两种情况：要么是 $F' \cap F_1 = 1$，要么是 $F' \leq F_1$.。首先假设 $F' \leq F_1$.。于是得到 $F_1 = F_2$，因为 $F_2 = F'F_1$.。现在 $U = Y$. 。由于阿贝尔群 Q 在U 上的标量作用，可知 $[Q, F_1] \leq C_Q$（U）。从这里开始，我们可以按照步骤（5）的证明继续，并注意到 C_Q（$F_{q'}$）$= 1$。现在令 $y = \prod_{f \in F_{q'}} c^f$，则有

$$1 = y = (\prod_{f \in F_1 \cap F_{q'}} c^f)(\prod_{f \in F_{q'} \setminus F_1} c^f) \in c^{|F_1 \cap F_{q'}|} C_Q(U).$$

这意味着 $c \in C_Q$（U），因为 q 与 $|F_{q'}|$互素。

因此我们有 $F_1 \cap F' = 1$。首先假设 $H_1 = H$。那么 Y 是 H-不变的，且 F_1H 是一个 Frobenius 群。注意到 C_U（F_1）$= 1$，因为C_V（F）$= 1$; 因此 C_Y（F_1）$= 1$，因为 $F' \leq Z$（F）。现在考察 QF_1H 对 Y 的作用，以及 r([C_Y（H） C_Q（H）]) $\leq s$. 这一事实。由步骤（5），我们得到 r(Y) $=$ r([Y, Q]) 是 ($s, |H|$)-有界的。接下来假设 $H_1 \neq H$. 。取 H_1 在 H 中的一个横截集，并令$Y_1 = \Sigma_{h \in T_1} Y^h$。显然，这个和是直和，因此

$$C_{Y_1}(H) = \{\sum_{h \in T_1} v^h \ : \ v \in Y\}$$

其中 $|[C_{Y_1}(H) \ c]| = |[Y, c]|$. 于是 r([$Y, c$]) $=$ r([$C_{Y_1}(H)$ c]) $\leq s$，从而确立结论 (6)。□

(7) 命题得证。

Proof. 从现在起， FH 是一个 II 型类 Frobenius 群，即 H和 C_F(H)的阶均为素数。由步骤 (4)，我们有 $H = H_1 = Stab_H(\Omega_1)$，因为 $|H|$是素数。现在 $V = W$。如前面各步所示，根据舒尔-扎森豪斯定理，我们还可假设存在一个 H-不变元，记作 U，且 U 属于 Ω。令 T 为 $F_1 = Stab_F$ (U)在 F中的一个横截集。于是由 $F = \bigcup_{t \in T} F_1 t$ 可得 $V = \bigoplus_{t \in T} U^t$。还应注意，我们有 $|\{t \in T : \ [U^t, c] \neq 0\}|$ 受到适当的界定，如下所示:

$$[C_V(H), c] = \bigoplus \{[C_{X_t}(H), c] : t \in T \text{ with } \ [U^t, c] \neq 0\} \leq [C_V(H), C_Q(H)]$$

其中 $X_t = \bigoplus_{h \in H} U^{th}$。

令 X 为 Ω 上所有正则 H-轨道的分量之和，并令 Y 表示 Ω 中所有 H-不变元素之和。于是

$V = X \oplus Y$. 假设 $U^{th} = U^t$ 对于 $t \in T$ 和 $1 \neq h \in H$成立。现在 $[t,h] \in F_1$，因此陪集 F_1t 被 H 固定。由于 F 和 H 的阶互素，我们可以假设 $t \in C_F(H)$。反过来，对于每个 $t \in C_F(H)$，U^t都是 H-不变的。因此，Y中的分支数为 $|T \cap C_F(H)| = |C_F(H)\colon C_{F_1}(H)|$，所以我们有 $C_F(H) \leq F_1$，或者没有。

若 $C_F(H) \not\leq F_1$ 则 $C_{F_1}(H) = 1$ 由此可知，F_1H 是作用于 U上的 Frobenius 群，且满足 $C_U(F_1) = 1$。接着，根据步骤 (5)，$\mathbf{r}(U)$ 是 $(s, |H|)$-有界的，因为 $\mathbf{r}([C_U(H)\ C_Q(H)]) \leq s$成立。这迫使 $\mathbf{r}([V,c])$ 具有适当的有界性，从而得证。

因此，我们可以假设 $C_F(H) \leq F_1$. 那么，$Y = U$ 是唯一的 H-不变 Q-齐次分量。若对某个 $t \in F \setminus F_1$，有 $[U^t, c] \neq 0$，则可以适当地给出 $\mathbf{r}(U)$ 的界，从而也可给出 $\mathbf{r}([V,c])$ 的界。因此，我们可以假设对每个 $t \in F \setminus F_1.$，c在 U^t 上的作用是平凡的。由于阿贝尔群 Q 对 U 的作用，有 $[Q, F_1] \leq C_Q(U)$。从这里开始，我们可以按照步骤 (5) 的证明继续，并注意到 $C_Q(F_{q'}) = 1$。现在令 $y = \prod_{f \in F_{q'}} c^f$，得到

$$1 = y = (\prod_{f \in F_1 \cap F_{q'}} c^f)(\prod_{f \in F_{q'} \setminus F_1} c^f) \in c^{|F_1 \cap F_{q'}|} C_Q(U).$$

这意味着 $c \in C_Q(U)$，因为 q 与 $|F_{q'}|$互素。这个最终矛盾完成了命题 3.1 的证明。□

□

下一个命题研究一个二面体群的自同构作用，这对证明定理 B 至关重要。

Proposition 3.2. 设 $D = \langle \alpha、\ \beta \rangle$ 是由两个对合 α 和 β生成的二面体群。假设 D 作用于某个 q-群 Q，其中 q为素数。设 V 是一个不可约 $\mathbb{F}_pQD$-模，其中 $\mathbb{F}_p$ 是特征不整除 $|Q|$的域，且 p为该域的特征。假设 $C_{VQ}(F) = 1$，其中 $F = \langle \alpha\beta \rangle$。若 $\mathbf{r}([C_V(\alpha)\ C_Q(\alpha)])\ max\{\mathbf{r}([C_V(\beta)\ C_Q(\beta)])\} \leq s$，则 $\mathbf{r}([V,Q])$ 是 s-有界的。

Proof. 我们令 $H = \langle \alpha \rangle$。因此 $D = FH$。由引理 2.6 和定理 2.4，我们有 $[V,Q] = [V, C_Q(\alpha)][V, C_Q(\beta)]$。于是，只需对 $[V, C_Q(H)]$的秩给出界。按照命题 3.1 证明中的相同步骤，以命题 2.4 替换命题 2.3，我们注意到 Q 忠实地作用于 V，且 $Q = \langle c^F \rangle$ 为阿贝尔群，其 $c \in C_{Z(Q)}(H)$ 的阶为 q。此外，$Ker(C_Q(H)$ 在 $C_V(H)$ 上的作用$) = Ker(C_Q(H)$ 在 V 上的作用$) = 1$。注意，只需适当地对 $\mathbf{r}([V,c])$ 给出界即可。

令 Ω 表示不可约 QD-模 $V.$ 的 Q-齐次分量集合。令 Ω_1 为 Ω 的一个 F-轨道，并设 $W = \Sigma_{U \in \Omega_1} U.$

于是有 $V = W + W^{\alpha}$。假设 $W^{\alpha} \neq W$。那么，对任意 $U \in \Omega_1$，有 $Stab_H(U) = 1$。令 T 为 F 中 $Stab_F(U) = F_1$ 的一个横截系。于是有 $V = \Sigma_{t\in T} X_t$，其中 $X_t = U^t + U^{t\alpha}$。现在 $[V, c] = \Sigma_{t\in T}[X_t, c]$ 且 $C_V(H) = \Sigma_{t\in T} C_{X_t}(H)$，其中 $C_{X_t}(H) = \{w + w^{\alpha} : \ w \in U^t\}$。由于 $[V, c] \neq 0$，存在 $t \in T$ 使得 $[U^t, c] \neq 0$，也就是说 $[U^t, c] = U^t$。于是 $[C_{X_t}(H)\ c] = C_{X_t}(H)$。由于 $\mathbf{r}([C_V(H)\ C_Q(H)]) \leq s$，可得 $\mathbf{r}(U) = \mathbf{r}(C_{X_t}(H)) \leq s$。此外，由此可知 $|\{t \in T : \ [U^t, c] \neq 0\}|$ 是 s-有界的，因此 $\mathbf{r}([V, c])$ 也具有适当的界。故可假设 $W^{\alpha} = W$，这意味着 $\Omega_1 = \Omega$，且 H 固定了 Ω 的一个元素（记作 U），这正是所需结论。

令 $U^t \in \Omega$ 为 H-不变。则 $[t, \alpha] \in F_1$. 另一方面$t^{-1}t^{\alpha} = t^{-2}$ 因为 α 反演了 F。因此 $F_1 t$ 是 F/F_1 中一个阶至多为 2 的元素，这意味着 Ω 中 H- 不变元素的个数至多为 2。现在令 Y 为 Ω 中所有 H- 不变元素之和。则 $V = Y \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} X_i$，其中 X_1、$\ldots X_m$ 分别是 H-轨道长度为 2 的元素之和。令 $X_i = U_i \oplus U_i^{\alpha}$。注意，若对某个 i有 $[U_i, c] \neq 0$，则通过与上文类似的论证，我们得到 $\mathbf{r}(U) = \mathbf{r}(U_i) \leq s$。另一方面，我们注意到，由假设 $\mathbf{r}([C_V(H)\ c]) \leq s$，满足 $[U_i, c] \neq 0$ 的 i 的个数有 s-界。因此，当对某个 i有 $[U_i, c] \neq 0$时，$\mathbf{r}([V, c])$ 有适当的界。

因此，我们可以假设 c 中心化 $\bigoplus_{i=1}^{m} X_i$，且 $[U, c] = U$。由于阿贝尔群 Q 中的标量在 U上作用为标量，故有 $[Q, F_1] \leq C_Q(U)$。由于 $F_1 \trianglelefteq FH$，我们有 $[Q, F_1] \leq C_Q(V) = 1$。显然，我们有 $C_Q(F_{q'}) = 1$，其中 $F_{q'}$ 表示 F 的 Hall q'- 部分，其存在性由 $C_Q(F) = 1$. 这一事实保证。现在令$y = \prod_{f\in F_{q'}} c^f$。于是我们有

$$1 = y = (\prod_{f\in F_1\cap F_{q'}} c^f)(\prod_{f\in F_{q'}\setminus F_1} c^f) \in c^{|F_1\cap F_{q'}|} C_Q(U).$$

因此 $c \in C_Q(U)$，因为 q与 $|F_{q'}|$互素。这一矛盾完成了命题 3.2 的证明。

□

4. 定理的证明

首先，我们将详细证明定理 A 的 (b) 部分。只需对 (b) 部分的证明作显而易见的修改，即可轻松得到定理 A 的 (a) 部分的证明。

首先，假设 $G = PQ$，其中 P 和 Q 是 FH-不变子群，且 P 是一个正规 p-子群，其中 p 为素数，而 Q 是

一个幂零 p'-群，满足 $|[C_P(H)\ C_Q(H)]| = p^s$。我们将证明 r($\gamma_\infty(G)$) 是 ($s, |H|$)-有界的。显然 $\gamma_\infty(G) = [P, Q]$。考虑一个不可细化的 FH-不变正规级数

$$P = P_1 > P_2 > \cdots > P_k > P_{k+1} = 1.$$

注意，其各个因子 P_i/P_{i+1} 都是初等阿贝尔群。设 $V = P_k$。由于 $C_V(Q) = 1$，可知 $V = [V, Q]$。我们还可以假设Q 忠实地作用于 V。由命题 3.1 可知，r(V) 是 ($s, |H|$)-有界的。令 $S_i = P_i/P_{i+1}$。若 $[C_{S_i}(H)\ C_Q(H)] = 1$，则由命题 2.3 可得 $[S_i, Q] = 1$。由于 $C_P(Q) = 1$，我们得出结论：每个因子 S_i 都包含 $[C_P(H)\ C_Q(H)]$ 中某个元素的非平凡像。这迫使 $k \leq s$。然后我们对 k 进行归纳，得到 r($[P, Q]$) 是一个 ($s, |H|$)-有界数，证毕。

令 $F(G)$ 表示群 G 的 Fitting 子群。记 $F_0(G) = 1$，并令 $F_{i+1}(G)$ 为 $F(G/F_i(G))$ 的原像。众所周知，当 G 可解时，使 $F_h(G) = G$成立的最小数 h 称为 G的 Fitting 高度 $h(G)$。现在令 $\gamma_\infty(C_G(H))$ 的秩为 r。那么，$C_G(H)$ 的 Fitting 高度是 r-有界的（例如参见 [15]的引理 1.4），因此 G 的 Fitting 高度是 ($r, |H|$)-有界的。

我们将对 $h(G)$进行归纳。首先，考虑 $h(G) = 2$的情形。事实上，设 P 为 $\gamma_\infty(G)$的一个 Sylow p-子群，Q 为 G的一个 FH-不变 Hall p'-子群。那么，根据前面几段以及引理 2.8，$P = [P, Q]$ 的秩是($r, |H|$)-有界的，因此 $\gamma_\infty(G)$的秩也是($r, |H|$)-有界的。接下来，假设 $h(G) > 2$，并令 $N = F_2(G)$为 G的 Fitting 级数的第二项。显然，$G/\gamma_\infty(N)$的 Fitting 高度为 $h-1$，且 $\gamma_\infty(N) \leq \gamma_\infty(G)$。因此，由归纳假设可知，$\gamma_\infty(G)/\gamma_\infty(N)$具有($r, |H|$)-有界秩。由此可得，

$$\mathbf{r}(\gamma_\infty(G)) \leq \mathbf{r}(\gamma_\infty(G)/\gamma_\infty(N)) + \mathbf{r}(\gamma_\infty(N))$$

完成定理 A(b) 的证明。

将定理 B 的证明中的命题 3.1 替换为命题 3.2，并将命题 2.3 替换为命题 2.5，即可直接按照上述论证得出。

参考文献

[1] C. Acciarri、P. Shumyatsky 和 A Thillaisundaram，《有限群中互素交换子的简洁性》，《澳大利亚数学会公报》89（2014），252-258。[2] E. de Melo，《具有元交换自同构群的有限群的 Fitting 高度》，《代数通讯》43（2015），4797-4808。[3] E. de Melo，《有限群中不动点的幂零残余与 Fitting 子群》，《群论杂志》22（2019），1059-1068。

[4] E. de Melo、A. S. Lima 和 P. Shumyatsky, 《不动点的幂零残余》, 《数学档案》111（2018）13-21。[5] E. de Melo、J. Caldeira, 《允许具有幂零中心化子的自同构的有限群》, 《代数杂志》493（2018）185-193。[6] E. de Melo、J. Caldeira, 《具有幂零中心化子的超可解弗罗贝尼乌斯群》, 《纯粹与应用代数》223（2019）1210-1216。[7] D. Gorenstein, 《有限群》, Harper and Row, 伦敦、纽约, 1991。[8] N. Y. Makarenko 和 P. Shumyatsky, 《作为自同构群的弗罗贝尼乌斯群》, 《美国数学会会刊》138 第10期（2010）3425-3436。[9] N. Yu. Makarenko、E. I. Khukhro 和 P. Shumyatsky, 《自同构弗罗贝尼乌斯群的不动点》, 《科学院通报》437 第1期（2011）20-23。[10] E. I. Khukhro, 《具有无不动点核的自同构弗罗贝尼乌斯群作用下有限群的幂零长度》, 《代数与逻辑》49（2010）, 819-833；英文译本, 《代数逻辑》49（2011）551-560。[11] E. I. Khukhro, 《具有自同构弗罗贝尼乌斯群的有限群的 Fitting 高度》, 《代数杂志》 366 （ 2012 ）, 1-11。[12] E. I. Khukhro, 《允许自同构弗罗贝尼乌斯群作用的有限群的秩与阶》, 《代数与逻辑》52（2013）99-108；英文译本, 《代数逻辑》52（2013）72-78。[13] E.I. Khukhro EI、N.Yu Makarenko, 《具有元循环弗罗贝尼乌斯自同构群的有限群与李环》, 《代数杂志》386（2013）77-104。[14] E. I. Khukhro、N. Yu Makarenko 和 P. Shumyatsky, 《自同构弗罗贝尼乌斯群及其不动点》, 《数学论坛》26（2014）, 73-112。[15] E. I. Khukhro、P. Shumyatsky, 《具有有界秩恩格尔汇的有限群》, 《格拉斯哥数学杂志》60（2018）, 695-701。[16] I.S.. G¨ulo˘glu、G. Ercan, 《类 Frobenius 群的作用》, JAlgebra 402, （2014）533–543。

. .[17] G. Ercan、I.S.. G¨ulo˘glu、E. O˘g¨ut, 《具有自同构弗罗贝尼乌斯群作用的有限可解群的幂零长度》, 《通讯代数》42 第11期, （2014）4751-4756。[18] G. Ercan、I.S.. G¨ulo˘glu, 《具有无不动点核的类 Frobenius 群的作用》, 《群论杂志》17, （2014）863-873。[19]G. Ercan、I.S.. G¨ulo˘glu、E.I. Khukhro, 《允许类 Frobenius 自同构群作用的有限群的秩与阶》, 《代数与逻辑》53 第3期, （2014）258–265。[20] G. Ercan、I.S.. G¨ulo˘glu、E.I.Khukhro, 《类 Frobenius 核的导出长度》, J Algebra 412, （2014）179-188。[21] G. Ercan、I.S.. G¨ulo˘glu, 《具有中心导出子群核的类 Frobenius 群的作用》, 《国际代数与计算杂志》26 第6期（2016）1257–1265。[22] G. Ercan、I.S.. G¨ulo˘glu, 《无不动点幂零自同构群的影响》, 《数学月刊》184（2017）531–538。[23] G. Ercan、I.S.. G¨ulo˘glu、E.I. Khukhro, 《作为自同构群的类 Frobenius 群》, 《土耳其数学杂志》38（2014）965–976。[24] G. Ercan、I.S.. G¨ulo˘glu, （2017）《允许二面体自同构群作用的有限群》, 《代数与离散数学》23 第2期, 223–229。[25] P. Shumyatsky, 《作为自同构群的二面体群》, 《代数杂志》375（2013）, 1-12。

[26] 群论中的未解问题。《库罗夫卡笔记》第18版，俄罗斯科学院新西伯利亚数学研究所，2014年。

Department of Academic Areas, Instituto Federal de Goiás, Formosa-GO 73813-816, Brazil
电子邮箱：eliana.rodrigues@ifg.edu.br

Department of Mathematics, University of Brasília, Brasília-DF 70910-900, Brazil
电子邮箱：emerson@mat.unb.br

Department of Mathematics, Middle East Technical University, 06800, Ankara/Turkey
电子邮箱地址：ercan@metu.edu.tr