arXiv:2305.04996v1 [math.NT] 8 May 2023

克莱因群的第一克罗内克极限公式

ZIHAN MIAO、ANH NGUYEN 和 TIAN AN W ONG

Abstract. 我们证明了一个适用于 SL(2, ℂ) 的余有限离散子群（亦称克莱因群）的第一克罗内克极限公式，将 Gold-stein 在 SL(2, ℝ) 上的方法加以推广。证明采用艾森斯坦级数的傅里叶展开，导出一个类似于戴德金 η 函数的对数的类似物；其变换律则产生一个类似于与戴德金和相关的函数。我们推导了这个新函数的若干基本性质。

1. Introduction

1.1. 第一克罗内克极限公式与戴德金和。第一克罗内克极限公式指出，对于上半平面中的任意点 z，

$$\lim_{s\to 1}\Bigg(\sum_{\substack{c,d=-\infty\\(c,d)\neq(0,0)}}^{\infty} y^s|cz+d|^{-2s}-\frac{\pi}{s-1}\Bigg)=2\pi(\gamma-\log 2-\log(\sqrt{y}|\eta(z)|^2)),$$

其中 γ 为欧拉–马歇罗尼常数，$\eta(z)$ 为戴德金 η 函数。η 函数满足如下变换律

$$\log\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\log\eta(z)+\frac{1}{2}\log(cz+d)+\pi\sqrt{-1}S(a,b,c,d),\quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\tag{1.1}$$

其中

$$S(a,b,c,d)=\frac{a+d}{12c}-\frac{1}{4}\frac{c}{|c|}-s(c,d)$$

且 $s(c,d)$ 为经典的戴德金和，其定义如下：

$$s(c,d)=\sum_{k=1}^{|c|-1}B_1\left(\frac{\pi k}{d}\right)B_1\left(\frac{\pi kc}{d}\right),$$

其中 B_1 为第一周期伯努利函数，且对数的所有分支均取主值分支。

利用与余有限（但非余紧）离散子群 Γ of PSL(2, ℝ亦称第一类福克斯群）相关的艾森斯坦级数的第一克罗内克极限公式类似物，Goldstein 为每个尖点 $\eta_{\Gamma,\,i}$ (z定义了一族半整数权自守形式 i，它们是戴德金 η 函数的类似物，定义在 Γ [Gol73] 上。随后，Goldstein 利用 $\eta_{\Gamma,\,i}$ 的变换性质，构造了一族函数 $S_{\Gamma,\,i}$ 它们类似于附属于 Γ 的函数 $S(a,b,c,d)$，并证明其满足与后者类似的性质。另一方面，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11F20 和 11F37。*Key words and phrases.* 椭圆 Dedekind 和、Bianchi 模形式、艾森斯坦级数、克罗内克极限公式。

极限公式的收敛性尚未得到证明，因此它被称为形式极限公式。

1.2. 推广到虚二次域。本文改编 Goldstein 的方法，为附属于非余紧余有限离散子群 Γ （即克莱因群）的艾森斯坦级数推导第一克罗内克极限公式，其中这些子群属于 PSL(2, $\mathbb{C}$)。设

$$u = z + rj, \qquad z \in \mathbb{C},\ r > 0 \in \mathbb{R},\ j^2 = -1$$

为上半空间 $\mathbb{H}$中的一点，并令 $s \in \mathbb{C}$。再设 $\zeta_1, .., \zeta_h$ 为 Γ中互不等价的尖点集合。接着，我们利用 Γ 上与 ζ_i相关的艾森斯坦级数的傅里叶展开，推导出在尖点 $\zeta_i = A_i^{-1}\infty$ 处、对于 $A_i \in$ PSL(2, $\mathbb{C}$) 的 Γ 的极限公式，

$$\lim_{s\to 1}\left(E_i(A_i^{-1}u, s) - \frac{|\Lambda_i'|\mathrm{vol}(\Gamma)^{-1}}{s-1}\right) = \frac{\pi}{|\Lambda_i|}b_{ii} - \left(\frac{|\Lambda_i'|}{\mathrm{vol}(\Gamma)} + \frac{\pi}{|\Lambda_i|}\right)\log|r\cdot\eta_{\Gamma,i}(u)^2|,$$

其中 $E_i(u, s)$ 是相应的艾森斯坦级数，而 $\eta_{\Gamma,\ i}(u)$ 是我们定义于（4.5）中的戴德金 η 函数的类似物；其他未定义的记号参见定理4.3 。正如所料，该结果的证明依赖于与 Γ相关的（标量值）艾森斯坦级数的解析理论，其所需性质已由 Elstrodt、Grunewald 和 Mennicke 得到 [EGM98]。

利用这个极限公式，我们进而证明了 $\eta_{\Gamma,i}(u)$ 的一个变换性质，

$$\log\eta_{\Gamma,i}(Mu) = \log\eta_{\Gamma,i}(u) + \frac{1}{2}\log(|cz+d|^2 + |c|^2r^2) + \pi\sqrt{-1}D_{\Gamma,i}(M),$$

对于任意

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A_i\Gamma A_i^{-1}$$

命题 5.2中，我们将函数 $D_{\Gamma,i}(M)$ 定义为一个与广义椭圆戴德金和相关的函数，它类似于上文 Goldstein 的 $S_{\Gamma,i}$ 和 $S(a, b, c, d)$。由推论5.3可知，它是从 $A_i\Gamma A_i^{-1}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个同态。遗憾的是，我们尚无法显式计算 $D_{\Gamma,i}(M)$，因此尚不清楚在 $\Gamma =$ PSL(2, $\mathcal{O}_K$) 的情形下，它是否会特化为椭圆戴德金和 $D(c, d)$。

1.3. 与其他工作的关系。 作为参照，我们将本文结果与 Ito 的工作进行比较 [Ito87a]。设 Λ 是 $\mathbb{C}$中的一个格，且 $\mathcal{O}_\Lambda = \{m \in \mathbb{C} :\ m\Lambda \subset \Lambda\}$是其乘子环。椭圆 Dedekind 和是 PSL(2, $\mathcal{O}_\Lambda$) 的 Dedekind 和的类似物。它们由 Sczech 引入 [Scz84], , 定义如下

$$D(c, d) = \frac{1}{d}\sum_{k\in\Lambda/d\Lambda} E_1\left(\frac{ck}{d}\right)E_1\left(\frac{k}{d}\right)$$

对于 $c, d \in \mathcal{O}_\Lambda$ ，其中 $d \neq 0$， $E_k(x)$ 是埃森斯坦–克罗内克级数。Ito 构造了一个函数 $H(u)$，类似于虚部 Im(log $\eta(z)$)，使得

$$H(Mu) = H(u) + \left(2iE_2(0)\mathrm{Im}\left(\frac{a+d}{c}\right) - D(a, c)\right)$$

当 $c \neq 0$。因此，括号中的表达式相差一个常数后，类似于我们的 $D_{\Gamma,\ i}(M)$，正如我们在命题 5.2 的证明中所用到的。事实上，众所周知， $D(c,\ d)$ 是纯虚数。与此同时，函数是否相同并非一目了然，因为 Ito 的方法使用了向量值埃森斯坦级数。

Elstrodt-Grunewald-Mennicke [EGM85, 定理 5.3] 证明了一个第一克罗内克极限公式，并为 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_K)$ 构造了 $\log |\eta(z)|$ 的类似物 $g(u)$，而 Asai 则为类数为一的任意数域取得了类似结果 [Asa70]。我们在第 6 节将我们的极限公式与前者进行比较。特别是，我们证明 $g(u)$ 可以表示为我们的 $\log|\eta_{\Gamma,i}(u)|$ 的线性组合。我们还提及了近期一项研究，该研究探讨了 $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_K)$ 的极限公式在 Jensen-Rohrlich 型公式中的应用 [HIvPT19]。

鉴于经典结果，人们也可以问函数 $D_{\Gamma,\ i}$ 是否与 Γ 上的某个 1-上循环相关，例如 Sczech 为 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\ \mathcal{O}_K)$ [Scz84] 所展示的情形。如此一来，它便能参数化虚二次域的 Hecke L-函数的特殊值，正如 Ito [Ito87a] 以及最后一位作者在更高秩情形下所展示的那样 [FKW19]。此外，Goldstein 的工作近期衍生出的各种方法，已被用于获得广义戴德金和在 $\mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{R})$ [Bur17、SVY、JO'SS20、BJO'SS20], 上的诸多应用，因此，探究这些结果在虚二次域中的类似物将会很有意义。

2. Preliminaries

2.1. 上半空间上的群作用。我们首先回顾一些基本定义并固定记号。令 $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times (0, \infty)$ 为三维双曲空间的标准上半空间模型。点 $u \in \mathbb{H}$ 可表示为

$$u = (x, y, r) = (z, r) = z + rj, \qquad x, y \in \mathbb{R}, r > 0, z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C},$$

其中 1、i、j、k 构成四元数的通常基底；我们将点$u \in \mathbb{H}$ 视为第四个分量为零的四元数。群 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$通过线性分式变换作用于上半空间 $\mathbb{H}$

$$u \mapsto Mu = (au + b)(cu + d)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}),$$

其中，右侧可视为在四元数斜域中进行的运算。更明确地说，我们写作

$$Mu = z_M + r_M j,$$

其中

$$z_M = \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\,\overline{c}\,r^2}{|cz + d|^2 + |c|^2 r^2} \text{ and } \quad r_M = \frac{r}{|cz + d|^2 + |c|^2 r^2}. \tag{2.1}$$

射影线性群 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$可视为双曲度量下所有保定向等距变换构成的群，而 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$的每个离散子群 Γ 都在 $\mathbb{H}$ 上不连续地作用。

设 ∞ 为无穷远点。则对于另一个点 $\zeta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$，存在一个元素 $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, 使得 $\zeta = A^{-1}\infty$。给定任意这样的 ζ，我们将 Γ 中 ζ 的稳定子群定义为

$$\Gamma_\zeta = \{M \in \Gamma : M\zeta = \zeta\}$$

其极大幺幂子群为

$$\Gamma'_\zeta = \{M \in \Gamma_\zeta : \mathrm{tr}(M) = \pm 2\}.$$

于是我们有

$$(A\Gamma A^{-1})_\infty = A\Gamma_\zeta A^{-1} \text{ and } (A\Gamma A^{-1})'_\infty = A\Gamma'_\zeta A^{-1}.$$

如果一个元素 $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 满足 $M \neq \pm I$ 且 $\mathrm{tr}(M) = \pm 2$，我们就称其为抛物元。假设 $\zeta = A^{-1}\infty$ 被某个抛物元 $M \in \Gamma$, $M \neq I$ 固定。那么， ∞ 在 $A\Gamma A^{-1}$ 中的稳定子包含一个元素

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \omega \neq 0,$$

并且，当且仅当集合 ζ 是 Γ 的一个尖点时，我们称其为

$$\Lambda := \left\{ \omega : \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A\Gamma A^{-1} \right\}$$

是 $\mathbb{C}$中的一个格。若 Γ 是余有限的，则 Γ的抛物元的所有不动点都是尖点，因此，当 Γ_ζ 包含一个抛物元时， ζ 是 Γ 的一个尖点。若存在元素 $L_0 \in \Gamma$ 使得 $\eta = L_0\zeta$，则我们记为 $\eta \equiv \zeta$ (模 Γ)。

例如，设 $\mathcal{O}_K$ 是某个虚二次数域 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$的整数环，其中 $D < 0$是一个无平方因子整数；再设 h 是 K的类数。那么， $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_K)$的尖点集合等于 $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$ ，并且 $\mathbb{P}^1(K)$分解为关于 Γ的 h 个轨道。

2.2. 双陪集分解。我们希望利用相对于尖点稳定群的双陪集分解，将 Γ 的艾森斯坦级数傅里叶展开表示出来。为此，我们先描述一种布鲁阿型分解。设 Γ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$的一个离散子群。取 Γ 的两个尖点 ζ 和 η ，以及相应的缩放矩阵 A 和 B ，其中它们属于 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$，使得 $\zeta = A^{-1}\infty$ 且 $\eta = B^{-1}\infty$。设 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 是满足下式的格

$$B\Gamma'_\eta B^{-1} = (B\Gamma B^{-1})'_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \omega \in \Lambda \right\}, \tag{2.2}$$

其中 Γ_ζ 和 Γ_η 是相应尖点的稳定子群。记

$$\Omega_A = A\Gamma_\zeta A^{-1} \text{ and } \Omega_B = B\Gamma_\eta B^{-1}.$$

我们还定义上三角矩阵构成的子集，即在 ∞ 处有不动点的矩阵，记为

$$\Omega_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix} \in A\Gamma B^{-1} \right\},$$

并将由下列矩阵标记的 $\Omega_{d/c} = \Omega_A\omega_{d/c}\Omega_B$ 也记为

$$\omega_{d/c} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{pmatrix} \in A\Gamma B^{-1}$$

其中 $c \neq 0$。

我们将集合 $A\Gamma B^{-1}$ 按照这些集合划分为双陪集。

引理 2.1. 设 ζ、 η 是 Γ 的尖点。那么有如下不交并:

$$A\Gamma B^{-1} = \delta_{\eta,\zeta}\Omega_\infty \cup \bigcup_{c\neq 0} \bigcup_{d \bmod c\Lambda} \Omega_{d/c}, \tag{2.3}$$

其中，当 $\eta \equiv \zeta \pmod{\Gamma}$ 时，$\delta_{\eta,\zeta}$ 等于 1，否则等于 0。

证明。如前所述， Γ 有两个尖点 ζ和 η，其对应的缩放矩阵分别为 A 和 B 。首先假设 Ω_∞ 非空。那么 Ω_∞ 中存在一个元素 $\omega_\infty = A\gamma B^{-1}$ ，满足 $\gamma \in \Gamma$，因此

$$\gamma\eta = A^{-1}\omega_\infty B\eta = A^{-1}\omega_\infty\infty = A^{-1}\infty = \zeta.$$

这表明尖点 η 和 ζ 等价，稳定子群彼此共轭，且 ω_∞ 是一个平移。设 $\omega_1 = A\gamma_1 B^{-1}$ 是 Ω_∞中的另一个元素，则有

$$\gamma\gamma_1^{-1}\zeta = A^{-1}\omega_\infty{\omega_1}^{-1}A\zeta = A^{-1}\omega_\infty{\omega_1}^{-1}\infty = A^{-1}\infty = \zeta.$$

这表明 $\gamma\gamma_1^{-1} \in \Gamma'_\zeta$，并且我们有

$$\omega_\infty{\omega_1}^{-1} = A\gamma\gamma_1^{-1}A^{-1} \in A\Gamma_\zeta A^{-1}.$$

因此，当且仅当 η 和 ζ 等价时，Ω_∞ 非空。我们还注意到，对于某个

$$\omega_\infty = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A\Gamma B^{-1},$$

因此，存在一个 Γ 中的矩阵，使得当且仅当 η 和 ζ 等价时，$c = 0$。AMB^{-1} 中的所有其他元素都落在双陪集中

$$\Omega_{d/c} = \Omega_A\omega_{d/c}\Omega_B.$$

对于 $\omega \in \Lambda$，我们有如下关系

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \cdot \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c\omega' & \cdot \\ c & d + c\omega \end{pmatrix}.$$

因此，双陪集由 c 唯一确定，而 d 则由 $c\Lambda$ 确定到平移为止。对于 $c \neq 0$，每个不同的元素 $\omega \in \Lambda$ 都生成一个来自 $\Omega_A\backslash A\Gamma B^{-1}$ 的陪集，而且 $\Omega_{d/c}$ 与 $\omega_{d/c}$ 的上行无关。□

3. Fourier expansion of Eisenstein series

接下来我们回顾艾森斯坦级数的一些基本事实 Γ，详细内容参见 [EGM98]。取 A_1，...，$A_h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$，使得$\zeta_1 = A_1^{-1}\infty$，...，$\zeta_h = A_h^{-1}\infty$构成 Γ的尖点 Γ-等价类的一个完备代表集。与尖点 ζ_i 相关联的 Γ 上的艾森斯坦级数定义为

$$E_{A_i}(u,s) = \sum_{M\in\Gamma'_{\zeta_i}\backslash\Gamma} (r_{A_iM})^{1+s},$$

其中 r_{A_iM} 定义如上。在上下文明确时，我们将记 $E_i(u,s) = E_{A_i}(u,s)$。该级数在 $\mathbb{H}\times\{s$ 的紧子集上一致绝对收敛：$\mathrm{Re}\, s > 1\}$，并且是 $\mathbb{H}$ 上的 Γ-不变函数。我们注意到，在缩放意义下，该级数与 A_i 的选取无关；也就是说，若另有$B_i \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 使得 $B_i\zeta_i = \infty$，则有

$$B_i = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} A_i,$$

其中 $a \neq 0$，且 $E_{B_i}(u,s) = |a|^{2+2s}E_{A_i}(u,s)$。此外，如果选择 A_i和 B_i，使得 $(A_i\Gamma A_i^{-1})'_\infty$ 和 $(B_i\Gamma B_i^{-1})'_\infty$ 的基本平行四边形的欧几里得面积均为一，则 $|a| = 1$。

用 $|\Lambda|$ 表示与格Λ相关的基本平行四边形的面积，用 $\mathrm{vol}(\Gamma)$ 表示 Γ的余体积。例如，若 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_K)$，Humbert 的一个著名结果表明

$$\mathrm{vol}(\Gamma) = |d_K|^{3/2}\zeta_K(2)/(4\pi^2), \tag{3.1}$$

其中 d_K 是 K 的判别式，而 $\zeta_K(s)$ 是 K[EGM85，定理 101]。映射 $z+rj \mapsto r^{1+s}$ 满足微分方程

$$-\Delta r^{1+s} = (1-s^2)r^{1+s}, \tag{3.2}$$

其中

$$\Delta = r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2}{\partial^2 r}\right)-r\frac{\partial}{\partial r}$$

是作用于 $\mathbb{H}$ 上的通常拉普拉斯-贝尔特拉米算子，因此由局部一致收敛还可推出

$$-\Delta E_i(u,s) = -(1-s)^2 E_i(u,s)$$

当 $\mathrm{Re}(s) > 1$。 $E_i(u,s)$ 是一个关于 Γ 的自守函数，含义见 [EGM98] 中的定义 3.3.5 及其后续内容。现在回顾我们将要用到的艾森斯坦级数的以下性质。本文余下部分中，当我们说 Γ 是余有限的时，也假设它不是余紧的。

命题 3.1. 设 Γ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的一个余有限离散子群，且令 $\zeta_i = A_i^{-1}\infty$，其对应的格为 Λ_i，对偶格为 Λ_i'。则

(i) $E_i(u,s)$ 可亚纯延拓至整个 s 平面；(ii) 除实轴上有限个简单极点外，它在 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 时全纯（$(0,1]$,；且 (iii) $s=1$ 处的简单极点的留数等于 $|\Lambda_i'|\,\mathrm{vol}(\Gamma)^{-1}$。

证明。 这由定理 6.1.2 和 6.1 得出。11 [EGM98]。 □

现在，设 $\zeta_i = A_i^{-1}\infty$、 $\zeta_j = A_j^{-1}\infty$ 是 Γ 的两个不同尖点，设 Λ_j 是 $\mathbb{C}$ 中满足下式的格

$$A_j\Gamma'_{\zeta_j}A_j^{-1} = (A_j\Gamma A_j^{-1})'_\infty = \left\{\begin{pmatrix}1 & \omega\\ 0 & 1\end{pmatrix} : \omega\in\Lambda_j\right\},$$

并设 Λ_j' 是 Λ_j 的对偶格。艾森斯坦级数 $E_i(A_j^{-1}u,s)$ 具有 Γ-不变性，因此可在尖点 ζ_i 的邻域内展开为傅里叶级数，

$$E_i(A_j^{-1}u,s) = \sum_{\omega'\in\Lambda_j'} a_{ij,\omega'}(r,s)q^{\omega'},$$

其中 $q^{\omega'} = e(\langle\omega',z\rangle)$，且 $e(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$， $\langle\cdot$ 是 $\mathbb{C}$ 中的欧几里得标量积。回忆一下，如果存在元素 $L_0\in\Gamma$ 使得 $\zeta_i = L_0\zeta_j$，则 $\zeta_i \equiv \zeta_j$ (模 Γ)，因此

$$A_jL_0A_i = \begin{pmatrix}\cdot & \cdot\\ 0 & d_0\end{pmatrix}.$$

此外，我们定义狄利克雷级数

$$\phi_{ij,\omega'}(s) = \sum_{c\neq 0}\sum_{d \bmod cA_j}\frac{e(\langle\omega',\frac{d}{c}\rangle)}{|c|^{2+2s}}, \qquad \omega'\in\Lambda_j'.$$

例如，如果 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])$，那么 $\phi_{ii,\ 0}(s) = \zeta_K(s)/\zeta_K(s+1)$。

傅里叶系数 $a_{ij,\ \omega'}(r,\ s)$ 已在 [EGM85],中得到明确计算，我们采用双陪集分解，将其表述如下。

引理 3.2. 设 Re$(s) > 1$。则 $E_i(A_j^{-1}u, s)$ 的傅里叶展开的傅里叶系数为

$$a_{ij,0}(r,s) = \delta_{ij}[\Gamma_{\zeta_i} : \Gamma'_{\zeta_i}]|d_0|^{-2-2s}r^{1+s} + \frac{\pi}{s|\Lambda_j|}\phi_{ij,0}(s)r^{1-s}, \tag{3.3}$$

and

$$a_{ij,\omega'}(r,s) = \frac{2\pi^{1+s}}{|\Lambda_j|\Gamma(1+s)}|\omega'|^s\phi_{ij,\omega'}(s)rK_s(2\pi|\omega'|r), \qquad \omega' \neq 0,$$

其中， K_s 表示第二类修正贝塞尔函数。

证明。 这由 [EGM85，定理 2。1] 以及引理 2.1 中的双陪集分解可得。特别地，系数 $a_{ij,\ \omega'}(r,s)$ 可以计算为

$$a_{ij,\omega'}(r,s) = \frac{1}{|\Lambda_i|}\sum_{M\in\Gamma'_{\zeta_i}\backslash\Gamma}\int_{Q_i}(r_{A_iMA_j^{-1}})^{1+s}e(-\langle\omega', z\rangle)dx\ dy,$$

其中， Q_i 是 Λ_j. 的一个基本平行四边形。对 M 的求和可以改写为对 $\omega \in \Lambda_j$ 的双重求和，以及对商群中双陪集的一个代表元系 $\left(\begin{smallmatrix}\cdot & \cdot\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ 的求和。

$$A_i\Gamma'_{\zeta_i}A_i^{-1}\backslash A_i\Gamma A_j^{-1}/A_j\Gamma'_{\zeta_j}A_j^{-1}$$

使得 $c \neq 0$，我们可以将其与引理 2.1 中的数对集合（c， d）对应起来。 □

由命题3.1（i）及系数的显式形式可知，在直线 Re$(s) = 1$ 上，非零系数 $a_{ij,\omega'}(r,s)$ 是全纯的，而 $a_{ij,0}(r,s)$ 根据 $\phi_{ij,0}(s)$ 的性质具有亚纯延拓，后者仅在 $s = 1$ 处有一个简单极点。

最后，我们指出下面这个对我们将很有用的公式。对于 $\omega' \neq 0$，狄利克雷级数 $\phi_{ij,\omega'}(s)$ 在 s 中是全纯的，因此我们可以在 $s = 1$ 处将非零傅里叶系数计算为

$$a_{ij,\omega'}(r,1) = \frac{2\pi^2|\omega'|r}{|\Lambda_i|}K_1(2\pi|\omega'|r)\phi_{ij,\omega'}(1), \tag{3.4}$$

并利用贝塞尔函数 [MOS66, p.66], 的性质，即

$$K_1(2\pi|\omega'|r) = (2\pi|\omega'|r)K_0(2\pi|\omega'|r),$$

我们有

$$a_{ij,\omega'}(r,1) = \frac{4\pi^3|\omega'|^2r^2}{|\Lambda_i|}K_0(2\pi|\omega'|r)\phi_{ij,\omega'}(1). \tag{3.5}$$

此外，由 [Asa70, 引理 1-2] 可知，作为该微分方程的一个解，修正贝塞尔函数 K_{2s-1} 是 Δ 的特征函数，$4s(s-1)$ 为其特征值。特别地，当 $s = 0$时，它被 Δ湮灭。

4. The Kronecker Limit Formula

我们将利用艾森斯坦级数的傅里叶展开推导极限公式。已知当 $\omega' = 0$ 时，$\phi_{ii,\omega'}(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个简单极点；当 $\omega' \neq 0$ 时，它在 $s = 1$ 处连续。因此，我们有】【。

$$\lim_{s\to 1}\left(E_i(A_i^{-1}u, s) - a_{ii,0}(r,s)\right) = \sum_{\substack{\omega'\in\Lambda'\\ \omega'\neq 0}} a_{ii,\omega'}(r,1)q^{\omega'}. \tag{4.1}$$

现在我们要展开上述求和中的各项。我们知道，项$a_{ii,\ 0}(r,s)$包含艾森斯坦级数 $E_i($ $A_i^{-1}u,s)$在 $s=1$ 处的简单极点。因此，我们可以写出其在 $s=1$ 附近的洛朗展开式：

$$a_{ii,0}(r,s)=\frac{\alpha_{ii}}{s-1}+\beta_{ii}+O(s-1),$$

以及还

$$\phi_{ii,0}(s)=\frac{a_{ii}}{s-1}+b_{ii}+O(s-1),$$

其中，α_{ii}、β_{ii}、a_{ii} 和 b_{ii} 是与 s无关的常数。在 Γ =PSL(2, $\mathcal{O}_K$)的情形下，ϕ_{ii}，0(s) $=\zeta_K$ (s)/ζ_K($s+1$)（参见[Asa70，Sor02]）。我们希望推导出一个更为明确的公式，以 a_{ii} 和 b_{ii}表示 α_{ii} 和 β_{ii}。

引理 4.1。在 $a_{ii,0}(r,s)$ 关于 $s=1$ 的展开式中，我们有

$$\alpha_{ii}=a_{ii}\pi|\Lambda_i|^{-1}=|\Lambda_i'|\mathrm{vol}(\Gamma)^{-1}, \tag{4.2}$$

$$\beta_{ii}=\delta_{ii}[\Gamma_{\zeta_i}:\Gamma'_{\zeta_i}]|d_0|^{-4}r^2+\pi|\Lambda_i|^{-1}(b_{ii}-(a_{ii}+1)\log(r)). \tag{4.3}$$

证明。这 $\alpha_{ii}=|\Lambda_i'|$体积$(\Gamma)^{-1}$ 直接由命题 3.1(iii) 得出。另一方面，将$a_{ii,\ 0}(r,\ s)$中的其余项按照 (3.3) 在 $s=1$ 的一个邻域内展开，可写为

$$\frac{1}{s}=1-(s-1)+(s-1)^2+O((s-1)^3),$$

$$r^{1+s}=r^2+r^2(s-1)\log(r)+O((s-1)^2),$$

$$r^{1-s}=1-(s-1)\log(r)+\frac{1}{2}(s-1)^2\log^2(r)+O((s-1)^3),$$

and

$$|d_0|^{-2-2s}=\frac{1}{|d_0|^4}-\frac{2\log(|d_0|)}{|d_0|^4}(s-1)+\frac{2\log^2(|d_0|)}{|d_0|^4}(s-1)^2+O((s-1)^3).$$

特别地，我们看到 $\phi_{ii,0}(s)$ 在 $s=1$ 处有一个简单极点，而其余各项在 $s=1$ 处全纯。对幂级数取柯西乘积，我们得到第一项 $\delta_{ii}[\Gamma_{\zeta_i}$ ： 在 $s=1$ 处 $\Gamma'_{\zeta_i}]|d_0|^{-2-2s}r^{1+s}$ 的展开，其首项为

$$\delta_{ii}[\Gamma_{\zeta_i}:\Gamma'_{\zeta_i}]|d_0|^{-4}r^2+\dots,$$

而对于第二项，我们有 $\pi/|\Lambda_i|$ 与.....的乘积

$$s^{-1}\phi_{ii,0}(s)r^{1-s}=\frac{a_{ii}}{s-1}+(b_{ii}-(a_{ii}+1)\log(r))-b_{ii}(s-1)\log(r)+\dots$$

比较各项即可得到所需的公式。 □

我们希望将 (Λ_j' 4.1)中对偶格的求和，利用这对对合拆分为在较小区域上的求和

$$\omega\mapsto-\omega \text{ and } \omega\mapsto\overline{\omega}$$

作用于 Λ_j' 上。定义集合

$$\Lambda'_{j,+}=\{\omega'\in\Lambda'_j:\mathrm{Re}(\omega')>0\}\cup\{\omega'\in\Lambda'_j:\mathrm{Re}(\omega')=0,\mathrm{Im}>0\}$$

因此，$\Lambda'_{j,\ +}$ 与 $\Lambda'_{j,\ +}$ 的并集等于 $\overline{\Lambda'_j\cap\mathbb{C}^\times}$。

引理 4.2. 傅里叶系数满足以下恒等式：

$$a_{ij,\omega'}(r,1)=a_{ij,\overline{\omega}'}(r,1),\quad and\quad a_{ij,-\omega'}(r,1)=\overline{a_{ij,\omega'}(r,1)}\,.$$

证明。我们首先考虑复共轭 $\omega \mapsto \overline{\omega}$ 对非零傅里叶系数的作用

$$a_{ij,\omega'}(r,1) = \frac{4\pi^3|\omega'|^2 r^2}{|\Lambda_j|} K_0(2\pi|\omega'|r)\phi_{ij,\omega'}(1).$$

只需证明 $\phi_{ij,\omega'}(1) = \phi_{ij,\overline{\omega}'}(1)$，于是 $a_{ij,\omega'}(r,s) = a_{ij,\overline{\omega}'}(r,s)$。考虑

$$\phi_{ij,\overline{\omega}'}(1) = \lim_{s\to 1} \sum_{(c,d)} \frac{e(\langle \overline{\omega}', \frac{d}{c}\rangle)}{|c|^{2+2s}},$$

其中求和遍历满足 $c \neq 0$ and $d \bmod c\Lambda_j$ 的不同对 $(c,\ d)$。利用该性质

$$\langle \overline{\omega}', \overline{d/c}\rangle = \overline{\langle \omega', d/c\rangle} = \langle \omega', d/c\rangle,$$

¯以及如下事实：如果 (c,d) 出现在求和中，那么 $(\bar{c},d)$ 也会出现，因此

$$\sum_{(c,d)} \frac{e(\langle \overline{\omega}', d/c\rangle)}{|c|^{2+2s}} = \sum_{(\bar{c},\bar{d})} \frac{e(\langle \overline{\omega}', \overline{d/c}\rangle)}{|c|^{2+2s}} = \sum_{(c,d)} \frac{e(\langle \omega', d/c\rangle)}{|c|^{2+2s}},$$

因此 $\phi_{ij,\omega'}(1) = \phi_{ij,\overline{\omega}'}(1)$。

接下来考虑映射 $\omega \mapsto -\omega$。我们注意到 $e(\langle -\omega', d/c\rangle) = \overline{e(\langle \omega', d/c\rangle)}$，因此

$$\phi_{ij,-\omega'}(1) = \overline{\phi_{ij,\omega'}(1)}.$$

此外，利用修正贝塞尔函数的积分表示

$$K_0(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2+1}} dt,$$

可得 $K_0(2\pi|\omega'|r) = \overline{K_0(2\pi|\omega'|r)}$，因此结合式(3.5)，得到

$$a_{ij,-\omega'}(r,1) = \overline{a_{ij,\omega'}(r,1)},$$

从而得到第二个恒等式。 □

现在我们准备证明艾森斯坦级数 $E_i(A_i^{-1}u,s)$ 的克罗内克第一极限公式的类似物。为简化记号，定义常数

$$C_{\Gamma,i} = \frac{|\Lambda_i'|}{\mathrm{vol}(\Gamma)} + \frac{\pi}{|\Lambda_i|}.$$

结合前面的结果并取 $i=j$，可得以下公式。

定理 4.3。采用上述记号，我们有

$$\lim_{s\to 1}\left(E_i(A_i^{-1}u,s) - \frac{|\Lambda_i'|\mathrm{vol}(\Gamma)^{-1}}{s-1}\right) = \frac{\pi}{|\Lambda_i|}b_{ii} - C_{\Gamma,i}\log|r\cdot\eta_{\Gamma,i}(u)^2|, \tag{4.4}$$

其中函数 $\eta_{\Gamma,i}(u)$ 定义为

$$C_{\Gamma,i}\log\eta_{\Gamma,i}(u) = \frac{1}{2}[\Gamma_{\zeta_i}:\Gamma'_{\zeta_i}]|d_0|^{-4}r^2 + \sum_{\omega'\in\Lambda'_{i,+}} a_{ii,\omega'}(r,1)q^{\omega'}. \tag{4.5}$$

证明。 式（4.4）右端的收敛性可通过对艾森斯坦级数 $E_i(A_i^{-1}u, s)$ 的非恒定傅里叶系数进行估计得到。特别地，根据 [EGM98，式（6.3.21）]，，或者更直接地，注意到非恒定傅里叶系数在 $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上全纯，且由于贝塞尔函数而呈指数衰减，我们有

$$E_i(A_i^{-1}u, s) - a_{ii,0}(r, s) = O(e^{-Kr})$$

当 s 不是 $E_i(\cdot, s)$ 的极点时， $r \to \infty$ 对某个固定的 $K > 0$ 恒成立。

现在我们来考察这个极限。利用a_{ij}的展开式，$_0(r,\ s)$，我们可以将（4.1）重新整理为

$$\lim_{s\to 1}\left(E_i(A_j^{-1}u, s) - \frac{\alpha_{ij}}{s-1}\right) = \beta_{ij} + \sum_{\substack{\omega'\in\Lambda_i'\\ \omega'\neq 0}} a_{ij,\omega'}(r,1)q^{\omega'}.$$

利用引理 4.1 并令 $i = j$，右端等于

$$\frac{\pi}{|\Lambda_i|}(b_{ii} - (a_{ii}+1)\log(r)) + [\Gamma_{\zeta_i} : \Gamma'_{\zeta_i}]|d_0|^{-4}r^2 + \sum_{\substack{\omega'\in\Lambda_i'\\ \omega'\neq 0}} a_{ii,\omega'}(r,1)q^{\omega'}. \tag{4.6}$$

由于 $C_{\Gamma,i} = \pi(a_{ii}+1)/|\Lambda_i|$，第一项可以写为

$$\pi|\Lambda_i|^{-1}b_{ii} - C_{\Gamma,i}\log(r).$$

另一方面，映射 $\omega' \mapsto -\omega'$ 关于原点对称，因此根据引理4.2(ii)，我们可以将 (4.6) 中的级数拆分为分别对 $\Lambda'_{i,+}$ 求和。记 $a(\omega') = a_{ii,\omega'}(r, 1)$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{Re}(\omega')\geq 0} a(\omega')q^{\omega'} + \sum_{\mathrm{Re}(\omega')<0} a(\omega')q^{\omega'} &= \sum_{\mathrm{Re}(\omega')\geq 0} a(\omega')q^{\omega'} + \sum_{\mathrm{Re}(\omega')>0} a(-\omega')q^{-\omega'}\\ &= \sum_{\mathrm{Re}(\omega')\geq 0} a(\omega')q^{\omega'} + \sum_{\mathrm{Re}(\omega')>0} \overline{a(\omega')q^{\omega'}},\end{aligned}$$

其中，在最后一行中我们利用了第二个求和在$\omega' \mapsto \overline{\omega'}$下保持不变这一事实。此外，第一个求和中 $\mathrm{Re}(\omega') = 0$ 的贡献可以写成

$$\sum_{\mathrm{Re}(\omega')=0} a(\omega')q^{\omega'} = \sum_{\substack{\mathrm{Re}(\omega')=0\\ \mathrm{Im}(\omega')>0}} a(\omega')q^{\omega'} + \sum_{\substack{\mathrm{Re}(\omega')=0\\ \mathrm{Im}(\omega')>0}} \overline{a(\omega')q^{\omega'}}$$

因为我们假设 ω' 非零。因此，综上可得

$$\sum_{\substack{\omega'\in\Lambda_i'\\ \omega'\neq 0}} a_{ii,\omega'}(r,1)q^{\omega'} = \sum_{\omega\in\Lambda'_{j,+}} a(\omega')q^{\omega'} + \sum_{\omega\in\Lambda'_{j,+}} \overline{a(\omega')q^{\omega'}}.$$

由 $\log\eta_{\Gamma、i}$ 在（4.5）中的定义可知

$$\frac{\pi}{|\Lambda_i|}b_{ii} - C_{\Gamma,i}\left(\log(r) + \log\eta_{\Gamma,i}(u) + \overline{\log\eta_{\Gamma,i}(u)}\right),$$

所需的公式由此得出。 □

5. The function $D_{\Gamma,\ i}$

现在我们来考察函数 $\log\eta_{\Gamma,\ i}$ 的性质，并利用它构造一个 $D_{\Gamma,\ i}$，使之与经典情形类似。回顾一下，函数 $f\colon \mathbb{H}\to\mathbb{C}$ 称为调和函数，当且仅当它二阶可微且 $\Delta f=0$。

引理 5.1. $\log\eta_{\Gamma,i}$ 是调和的。

证明。逐项求导，根据（3.2），常数项被 Δ消去。对于更高阶的傅里叶系数，推导与 [Asa70，引理 1-2]（另见[Ito87a，（20）]）中的情况相同。具体而言，修正贝塞尔函数 $K_s(r)$ 满足微分方程

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}K_s(r)+r\frac{d}{dr}K_s(r)-(r^2+s^2)K_s(r)=0,$$

以及后续的 [MOS66，第77] 函数 $w=rK_s(2\pi|\alpha|r)$ 随后满足以下微分方程

$$r^2\frac{d^2w}{dr^2}-r\frac{dw}{dr}+((2\pi|\alpha|r)^2+(1-s^2))w=0.$$

另一方面，将 Δ 应用于傅里叶系数 $h_\alpha(r)=rK_s(2\pi|\omega'|r)e(\langle\omega',z\rangle)$ 的相关部分，可得

$$\left(r^2\frac{d}{dr^2}-r\frac{d}{dr}+(1-s^2)-4\pi|\alpha|^2r^2\right)h_\alpha(r)=0.$$

这与前面的等式一致。在 $s=1$ 处取值即可得到所需性质。□

利用函数 $\log\eta_{\Gamma\text{的}i}$解析性质，我们可以定义与尖点 $S(a,b,c,d)$ 在（1.1）中的类似物，该类似物现在与克莱因群 Γ 在尖点 ζ_i处相关联。以下公式可以视为将（1.1）推广到我们当前情形的结果。

命题 5.2。对于任意 $M\in A_i\Gamma A_i^{-1}$，我们有

$$\log\eta_{\Gamma,i}(Mu)=\log\eta_{\Gamma,i}(u)+\frac{1}{2}\log(|cz+d|^2+|c|^2r^2)+\pi\sqrt{-1}D_{\Gamma,i}(M),$$

其中，$D_{\Gamma,i}(M)$ 是一个实值函数，依赖于 Γ、i 和 M。

证明。根据定理4.3，由 $E_i(u,\ s)$ 在 u中是自守的，且 α_{ii}，β_{ii} 与 u无关，我们可知

$$\log|r_M\eta_{\Gamma,i}(Mu)^2|=\log|r\eta_{\Gamma,i}(u)^2|.$$

另一方面，由（2.1）可得

$$\log|r_M\eta_{\Gamma,i}(Mu)^2|=\log r-\log(|cz+d|^2+|c|^2r^2)+\log|\eta_{\Gamma,i}(Mu)|^2,$$

由此可知

$$\log|\eta_{\Gamma,i}(Mu)|=\log|\eta_{\Gamma,i}(u)|+\frac{1}{2}\log(|cz+d|^2+|c|^2r^2).\tag{5.1}$$

因此，由下式定义的函数

$$F(M,u)=\log\eta_{\Gamma,i}(Mu)-\log\eta_{\Gamma,i}(u)-\frac{1}{2}\log(|cz+d|^2+|c|^2r^2)$$

其实部恰好为零。因此，我们得出结论：$F(M,u)$ 等于一个纯虚常数，该常数至多依赖于 Γ、i、M 和 u。

至于对 u 的依赖，考虑虚部。

$$\mathrm{Im}(F(M,u)) = \mathrm{Im}(\log \eta_{\Gamma,i}(Mu)) - \mathrm{Im}(\log \eta_{\Gamma,i}(u)).$$

由引理 5.1 和 Δ 对 (4.4) 右端的作用可知，$\log|\eta_{\Gamma,i}(u)|$ 是调和函数，因此 $\mathrm{Im}(\log \eta_{\Gamma,i}(u))$ 也是调和函数。由 (4.4) 我们还可知，$\mathrm{Im}(\log \eta_{\Gamma,i}(u))$ 是 Γ-不变的，并且在尖点处快速衰减。接着利用拉普拉斯算子的谱性质，即任何在 Γ 的一个基本域上平方可积的 Γ-不变调和函数都是常数这一事实 [EGM98，推论 3.3。4], ，我们得出 $\mathrm{Im}(\log \eta_{\Gamma,i}(u))$ 与 u 无关。[1] □

接下来 [EGM98，§3.3], 我们在 $\mathbb{H}$ 上为群Γ 定义参数为 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的一个自守函数 Γ，它是一个 f上的 $\mathbb{H}$函数，满足二次可微且取复值，并具有 $-\Delta f = \lambda f$以及 $f(A^{-1}u) = O(r^K)$，其中某个固定常数$K > 0$ 当 $r \to \infty$时，对 $z \in \mathbb{C}$一致成立。

推论 5.3. $\log|\eta_{\Gamma,i}(u)|$ 是关于$A_i\Gamma A_i^{-1}$、权为1 2 、自守因子为 $\log(|cz+d|^2+|c|^2r^2)$ 的调和自守函数，并且映射

$$D_{\Gamma,i} : A\Gamma_i A^{-1} \to \mathbb{R}$$

是一个同态。

证明。变换性质由命题5.2推出，而调和性可由与引理5.1相同的论证得到。最后，令 M， $N \in A\Gamma_i A^{-1}$并写作

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \quad MN = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

然后应用命题5.2，我们一方面可以将 $\log \eta_{\Gamma,i}(MNu)$ 展开为

$$\log \eta_{\Gamma,i}(u) + \frac{1}{2}\log(|c''z+d''^2| + |c''|^2r^2) + \pi\sqrt{-1}D_{\Gamma,i}(MN),$$

另一方面，作为

$$\begin{aligned} &\log \eta_{\Gamma,i}(Nu) + \frac{1}{2}\log(|cz_M+d|^2+|c|^2r_M^2) + \pi\sqrt{-1}D_{\Gamma,i}(M) \\ =\ &\log \eta_{\Gamma,i}(u) + \frac{1}{2}\log(|cz_M+d|^2+|c|^2r_M^2) + \frac{1}{2}\log(|c'z+d'|^2+|c'|^2r^2) \\ &+ \pi\sqrt{-1}D_{\Gamma,i}(M) + \pi\sqrt{-1}D_{\Gamma,i}(N). \end{aligned}$$

然后利用 Γ 在 $\mathbb{H}$ 上的群作用性质，或者通过直接计算，可以验证。

$$\begin{aligned} &\log(|cz_M+d|^2+|c|^2r_M^2) + \log(|c'z+d'|^2+|c'|^2r^2) \\ =\ &\log\left(\left|c\frac{(az+b)(\overline{cz+d})+a\,\overline{c}\,r^2}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}+d\right|^2 + \left(\frac{|c|r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}\right)^2\right) \\ &+ \log\left(|c'z+d'|^2+|c'|^2r^2\right) \\ =\ &\log(|c''z+d''|^2+|c''|^2r^2), \end{aligned}$$

利用 $c'' = ca' + dc'$ 和 $d'' = cb' + dd'$这一事实。因此我们得出结论：

$$D_{\Gamma,i}(MN) = D_{\Gamma,i}(M) + D_{\Gamma,i}(N),$$

并且同态性质随之成立。 □

[1]我们感谢审稿人提出这一独立性证明。

我们记录一些简单性质，它们可由同态性质直接推出。

推论 5.4。函数 $D_{\Gamma,\ i}$ 满足

(i) $D_{\Gamma,i}(M) = -D_{\Gamma,i}(M^{-1})$
(ii) $D_{\Gamma,i}(M) = D_{\Gamma,i}(N)$ *if* $M, N \in \Gamma$ *are conjugate.*

我们注意到，第一个性质可以视为恒等式的类似物

$$D(c,d) = -D(\bar{c},\bar{d})$$

通常椭圆戴德金和满足 [Ito87b，定理 1]。

6. Comparison with the limit formula of a modified Eisenstein series

在本文余下部分，我们固定 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_K)$。在这种情况下，我们可以将我们的结果与 [EGM85 中得到的极限公式进行比较，即定理 5.3]，其中参考文献中 (5.17) 的函数 $g(u)$ 类似于经典的 $\log|\eta(z)|$，而我们的 $\eta_{\Gamma,i}(u)$ 则被定义为得到一个不含绝对值的函数。为了说明二者之间的关系，我们首先引入一些记号。令 $\mathcal{M}$为 $\mathcal{O}_K$ 的所有分式理想构成的集合。那么，对于任意满足 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 的 $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$、$u \in \mathbb{H}$、$s \in \mathbb{C}$，定义

$$\hat{E}_{\mathfrak{m}}(u,s) = N(\mathfrak{m})^{1+s} \sum_{\substack{c,d\in\mathfrak{m}\\(c,d)\neq(0,0)}} \left(\frac{r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}\right)^{1+s}$$

and

$$\zeta(\mathfrak{m},\mathfrak{n},s) = N(\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1})^s \sum_{\substack{\lambda\in\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}\\\lambda\neq 0}} N(\lambda)^{-s}.$$

后一个 ζ 函数早先也由 Lang 研究过 [Lan94]。两个函数都只取决于 $\mathfrak{m}$ 在理想类群中的等价类 $\mathcal{M}/K^*$。根据[EGM98，定理 8.3。1], $\hat{}E_{\mathfrak{m}}(u,\ s)$ 对所有 s均为全纯函数，但在 $s = 1$ 处有一个留数为 $4\pi^2/|d_K|$它们与我们之前的艾森斯坦级数之间满足以下关系

$$E_{\mathfrak{u}_A}(u,s) = 2N(\mathfrak{u}_A)^{1+s}E_A(u,s) \tag{6.1}$$

and

$$\hat{E}_{\mathfrak{m}}(u,s) = \frac{1}{|\mathcal{O}_K^*|} \sum_{\mathfrak{u}_A\in\mathcal{M}/K^*} \zeta(\mathfrak{m},\mathfrak{u}_A,s+1)E_{\mathfrak{u}_A}(u,s), \tag{6.2}$$

根据 [EGM98], 的命题 8.1.4 和定理 8.1.7，其中 $A\zeta = \infty$ 和 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$, $\mathfrak{u}_A$是由 c生成的理想，d作为一个 $\mathcal{O}_K$-模。注意，尖点数等于 h 的类数 K，这与求和项数相同。

现在，[EGM98定理 8.3 中给出的极限公式3] 形式如下

$$\lim_{s\to 1}\left(\hat{E}_{\mathfrak{m}}(A_i^{-1}u,s) - \frac{4\pi^2}{|d_K|}\frac{1}{s-1}\right) = \frac{4\pi^2}{|d_K|}g(u) + \dots$$

其中，与 [EGM98（8.3.17）中一样],

$$g(u) = \frac{|d_K|}{4\pi^2}\zeta(\mathfrak{m},\mathfrak{u},2)N(\mathfrak{u})^2 r^2 + 2N(\mathfrak{u})\sum_{0\neq w\in\mathfrak{u}^2} |w|\sigma_{-1}(\mathfrak{m},\mathfrak{u},w) r K_1\left(\frac{4\pi|w|r}{\sqrt{|d_K|}}\right) e^{2\pi i\langle 2\bar{w}|d_K|^{-1/2},z\rangle}$$

with

$$\sigma_s(\mathfrak{a},\mathfrak{b},w) = N(\mathfrak{a})^{-s}\sum_{\substack{\lambda\in\mathfrak{a}\mathfrak{b}\\ w\in\lambda\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}}} N(\lambda)^s.$$

函数 $g(u)$ 是满足变换性质的调和函数

$$g(Mu) + \log(|cz+d|^2 + |c|^2 r^2) = g(u)$$

平行于 (5.1)。相比之下，在定理 4.3 的表述中，我们本应从艾森斯坦级数中减去的项，根据 (3.1)，为

$$\lim_{s\to 1}\left(E_i(A_i^{-1}u,s) - \frac{4\pi^2|\Lambda_i'|}{|d_K|^{3/2}\zeta_K(2)}\cdot\frac{1}{s-1}\right) = -2C_{\Gamma_i}\log|\eta_{\Gamma_i}(u)| + \dots.$$

于是，我们可以将 $g(u)$ 表示为 $\log|\eta_{\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_K)\,i}(u)|$ 的线性组合。

命题 6.1。设 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_K)$，并设 $\mathfrak{u}_i = \mathfrak{u}_{A_i}, i = 1,\dots,h$ 是 $\mathcal{M}/K^*$ 的一组完备代表元。我们有

$$g(u) = -\frac{|d_K|}{\pi^2|\mathcal{O}_K^*|}\sum_{i=1}^{h} N(\mathfrak{u}_i)^2\zeta(\mathfrak{m},\mathfrak{u}_i,2)C_{\Gamma,i}\log|\eta_{\Gamma,i}(u)| + B_\Gamma(r),$$

其中 $B_\Gamma(r)$ 是函数 (6.4)，它依赖于 Γ和 r。

证明。 由前面的讨论，我们通过（6.1）和（6.2）将两个艾森斯坦级数联系起来，

$$\hat{E}_{\mathfrak{m}}(u,s) = \frac{1}{|\mathcal{O}_K^*|}\sum_{\mathfrak{u}_A\in\mathcal{M}/K^*} 2N(\mathfrak{u}_A)^{1+s}\zeta(\mathfrak{m},\mathfrak{u}_A,s+1)E_A(u,s). \tag{6.3}$$

右侧的和是有限和，因此两边在 $s=1$ 处的极点作为 s中的亚纯函数必定重合。因此，从方程两边减去首项后，我们可以比较极限公式，推出这一恒等式。函数 $B_\Gamma(r)$ 等于（ $\pi b_{ii}/|\Lambda_i|$ 4.4）中的项与 EGM98定理 8.3 中其余各项之差，具体为 3],

$$\frac{4\pi^2}{|d_K|}(2\gamma - 1 - \log|d_K| - \log(r) - \frac{1}{6}\log\tilde{g}(\mathfrak{m})), \tag{6.4}$$

其中 $\tilde{g}(\mathfrak{m}) = (2\pi)^{-12}N(\mathfrak{m})^6|\Delta(\mathfrak{m})|$，而 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$是椭圆函数理论中的判别式。此外， γ 是通常所说的欧拉–马歇罗尼常数。□

作为一个推论，我们得到 Dedekind ζ 函数特殊值的如下表达式。

推论 6.2。沿用上述记号，我们有

$$\zeta_K(2) = |d_K|^{-1/2}\sum_{i=1}^{h}|\Lambda_i'| = |d_K|^{-1/2}\sum_{i=1}^{h}N(\mathfrak{u}_i)^2.$$

证明。直接比较式（6.3）两边在 $s=1$ 处的留数即可得出此结论，

$$\frac{4\pi^2}{|d_K|}=\sum_{i=1}^{h}\frac{4\pi^2|\Lambda_i'|}{|d_K|^{3/2}\zeta_K(2)}.$$

第二个等式由恒等式 $|\Lambda_i'|=N(\mathfrak{u}_i)^2$ 得出，这是 [EGM98]中的 $\Lambda_i'=2|d_K|^{-1/2}\bar{\mathfrak{u}}_i^2$（8.2.16）的直接应用，且 $|\mathcal{O}_K^*|=\frac{1}{2}|d_K|^{-1/2}$。□

顺便提一下，根据 $|\Lambda_i|=\frac{1}{2}|d_K|^{1/2}N(\mathfrak{u}_i)^{-2}$，[EGM98（8.2.12）]，也可以得到这一结论。

致谢。前两位作者获史密斯学院暑期研究奖学金（SURF）项目资助。第三位作者获得了美国国家科学基金会（NSF）DMS-2212924号资助，并感谢Jorge Fl´orez就本文相关问题进行了有益讨论。作者感谢审稿人仔细审阅本文，并提出了有益意见，大大加强了本文的结果。

References

[Asa70] T. Asai, 《论一种类似于 log|η(z)| 的函数》, 《名古屋数学杂志》40（1970）, 193–211。[Bur17] C. Burrin, 《广义戴德金和与模 1 均匀分布》, 《数论杂志》 **172** 2017 270 286 3573154 ( ), –。MR BJO'SS C. Burrin 等, 《与 Fuchs 群相关的广义戴德金和的变换律》, 《算术学报》 **196** 2020 2, 139 162 4146372 ( ), 第 – 期。MR EG[20] M J. Elstrodt、F. Grunewald 和 J. Mennicke, 《三维双曲空间与虚二次数域上的艾森斯坦级数》, 《纯数学与应用数学杂志》360（1985）, 160–213。MR0799662[EGM98] J. Elstrodt、F. Grunewald 和 J. Mennicke, *Groups acting on hyperbolic space*, 《施普林格数学专著》, Springer-Verlag, 柏林, 1998。MR1483315[FKW19] J. Fl´orez、C. Karabulut 和 T. A. Wong, 《虚二次域上的艾森斯坦余循环与 *L*-函数的特殊值》, 《数论杂志》204（2019）, 497–531。[Gol73] Goldstein, Larry Joel, *Dedekind sums for a Fuchsian group*。I.《名古屋数学杂志》50（1973）, 21–47。[HIvPT19] S. Herrero 等, 《双曲三维空间的 Jensen-Rohrlich 型公式》, 《美国数学会汇刊》 **371** 2019 9, 6421 6446 3937331 ( ), 第 – 期。MR Ito a H. Ito,[87] 《上半空间上的一种类似于 log η(z) 虚部的函数》, 《纯数学与应用数学杂志》373（1987）, 148–165。[Ito87b] H. Ito, 《椭圆 Dedekind 和的一种性质》, 《数论杂志》27（1987）, 第 1 期, 17–21。MR 0904003[JO'SS20] J. Jorgenson、C. O'Sullivan 和 L. Smajlovi´c, 《与 Fuchs 群相关的模 Dedekind 符号与高阶艾森斯坦级数》, 《数论研究》6（2020）, 第 2 期, 论文编号 22, 共 42 页。[Lan94] S. Lang, *Algebraic number theory*, 第二版, 《研究生数学教材》第 110 卷, Springer-Verlag, 纽约, 1994 1282723 。MR MOS W. Magnus、F. Oberhettinger 和[66] R. P. Soni, *Formulas and theorems for the specialfunctions of mathematical physics*, 增订第三版, 《数学科学基础丛书》第 52 卷, Springer-Verlag New York, Inc., 纽约, 1966。[Scz84] R. Sczech, 《椭圆函数的戴德金和》, 《数学发明》76（1984）, 第 3 期, 523–551。MR 0746541[Sor02] C. M. Sorensen, 《希尔伯特模群上的艾森斯坦级数的傅里叶展开与希尔伯特类域》, 《美国数学会汇刊》 **354** 2002 12, 4847 4869 1926839 ( ),[ ] 第 – 期。MR SVY T. Stucker、A. Vennos 和 M. P. Young, 《由新形式艾森斯坦级数产生的戴德金和》, 《国际数论杂志》16（2020）, 第 10 期, 2129–2139。MR4167772

Email address: zmiao@smith.edu

Smith College, Burton Hall 115, Northampton, MA 01063, USA*Email address*: anguyen29@smith.eduSmith College, Burton Hall 115, Northampton, MA 01063, USA *Email address*: tiananw@umich.eduUniversity of Michigan-Dearborn, 4901 Evergreen Rd, 2002 CASL Building, Dear-born, MI 48128, USA