arXiv:2305.04998v1 [math.GN] 8 May 2023

常客的弱 P 点格局

Joanna Jureczko

摘要

本文的主要结果是证明，对于任意紧空间X 以及任意一族开映射 $\{f_\alpha\colon \alpha < 2^\kappa, f_\alpha\colon X \xrightarrow{onto} \beta\kappa\}$，都存在一个点 $x \in X$，使得对每个 $\alpha < 2^\kappa$，要么 $f_\alpha(x)$属于 κ，要么 $f_\alpha(x)$是 κ^*中的弱 P_κ-点（只要 κ是正则的）。

1 引言

P点和弱 P点的研究由来已久。通常在 $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$中考察这两个概念的存在性，其中$\beta\omega$ 表示ˇCech-Stone紧化。回顾一下，Rudin在 [10] 中证明了，CH意味着 ω^* 中存在 2^{2^ω} P点；在马丁公理下也有相同的结论。但Shelah在 [11]中证明，与集合论公理相容的是： ω^*中不存在 P点。此外，Kunen在 [9]中证明， ω^* 中存在 2^{2^ω} 点，它们是弱 P点，但不是 P点。此外，Juh´asz和Kunen在 [6] 中得到了这类空间的两个例子。另外，在论文 [1] 中，Baker和Kunen推广了 [9]中得到的结果。

另一方面，在 [3] 中，Frankiewicz在某个较弱版本的马丁公理下证明，对于任意紧空间 X 以及任意一族开映射

$$\{\pi_\xi\colon \xi < 2^\omega\}$$

对于 $\pi_\xi\colon X \xrightarrow{onto} \beta\omega$，存在一点 $x \in X$，使得对每个 $\xi < 2^\omega$，要么 $\pi_\xi(x)$ 属于 ω，要么 $\pi_\xi(x)$ 不是 ω^* 中的极限点。此结果被用于证明以下陈述：

*数学主题分类：54D35、54E45、54C10。ˇ 关键词：弱 P 点、Čech 紧化、紧空间、开映射。

1. 在每个极端不连通紧空间中，任意可数离散子集都存在一个非极限点。
2. 在 $G(I)$（区间 $[0,1]$ 上的 Gleason 空间）中，任意基数为 $< 2^{\omega}$ 的离散子集都存在一个非极限点。 3. Kunen 关于来自 [8]的非极限点的定理。

此外，作者在 [7] 中在 ZFC 下得到了上述结果。本文推广了 [7] 的主要结果。为此，我们需要一种方法，使我们能够将归纳法继续到 2^{κ}，其中 $\kappa > \omega$。借助 Baker 和 Kunen 发表在 [1] 中的成果，作者提出了一种非常有用的方法，可以视为对 [9]中所述方法的推广。值得强调的是，这两种方法（分别来自 [9]和 [1]）都提供了有用的“技术”，使超滤子的超限构造不会在 $\mathfrak{c}$ 步之前结束（见 [9]），并且 2^{κ}，其中 κ 为无限基数（见 [1]）；但第二种方法有一些限制，其中之一是 κ 必须是正则的。

在本文的主要结果中，我们将采用对 [1, 定理 6.1] 中所用论证的改进，并借鉴 [3] 中的一些思路。

本文分为三个部分。第 2 节汇集了论文后续部分所用的主要定义和事实。第 3 节包含主要结果。第 4 节包含评论和开放问题。

本文使用的所有记号都是该领域的标准记号，且假定读者对此已熟知。对于此处未引用的定义和事实，请读者参阅 [2, 4, 5]。

2 定义与前期结果

2.1. 令 κ 为一个无限基数。令 Y 为一个拓扑空间且 $p \in Y$。我们称，

- p 是 Y 中的 P_{κ}-点，当且仅当任意少于 κ 个 p 的邻域的交集也是 p 的一个邻域，
- p 是 Y 中的弱 P_{κ}-点，当且仅当 p不是$Y \setminus \{p\}$ 中任何基数小于 κ的子集的极限点。

显然， P_{ω_1} 点和弱 P_{ω_1} 点分别称为 P 点和弱 P 点。

ˇ 2.2. 设 κ 是一个无限基数。那么 $\beta\kappa$ 表示 Čech–Stone 紧化，其中 κ 具有离散拓扑。因此， $\beta\kappa$ 是 κ 上超滤子的空间，而 $\kappa^* = \beta\kappa \setminus \kappa$ 是 κ 上非主超滤子的空间。令 $\mathcal{U}(\kappa)$ 表示一致超滤子的空间，即基数为 κ 的超滤子空间。显然， $\mathcal{U}(\kappa) \subseteq \kappa^* \subseteq \beta\kappa$。

2.3. 采用以下记号：

- $\mathcal{FR}(\kappa) = \{A \subset \kappa\colon\ |\kappa \setminus A| < \kappa\}$,
- $[A, B, C, ...]$ 表示由 A、 B、 C、 .....生成的滤子,
- $A \subseteq_* B$ 当且仅当对于任意 A, $|A \setminus B| < \kappa$ $B \subseteq \kappa$。

2.4. 函数 $\hat{}\varphi\colon [\kappa^+]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\omega}$ 是 κ-收缩的，当且仅当

- $p \subseteq q$ 蕴含 $\hat{}\varphi(p) \subseteq \hat{}\varphi(q)$，对任意 $p, q \in [\kappa^+]^{<\omega}$,
- $\hat{}\varphi(0) = 0$。

步族（关于 κ，相对于 $\hat{}\varphi$）是 κ 的子集族,

$$\{E_t\colon t \in [\kappa]^{<\omega}\} \cup \{A_\alpha\colon \alpha < \kappa^+\}$$

满足以下条件：

- $E_s \cap E_t = \emptyset$ 对所有满足 $s \neq t$ 的 $s, t \in [\kappa]^{<\omega}$,
- $|\bigcap_{\alpha\in p} A_\alpha \cap \bigcup_{t \not\supseteq \hat{}\varphi(p)} E_t| < \kappa$ 对每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$,
- 若 $\hat{}\varphi(p) \subseteq t$，则对每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$ 和 $t \in [\kappa]^{<\omega}$，都有 $|\bigcap_{\alpha\in p} A_\alpha \cap E_t| = \kappa$。

设 I 为指标集， $\mathcal{F}$ 为 κ 上的滤子。族

$$\{E^i_t\colon t \in [\kappa]^{<\omega}, i \in I\} \cup \{A^i_\alpha\colon \alpha < \kappa^+, i \in I\}$$

is 关于 $\mathcal{F}$ 的 $|I|$ 个阶梯族（在 κ 上）的独立矩阵 $\hat{}\varphi$ 当且仅当

- 对于每个固定的 $i \in I$, $\{E^i_t\colon\ t \in [\kappa]^{<\omega}\} \cup \{A^i_\alpha\colon\ \alpha < \kappa^+\}$ 是一个阶梯族,

• 如果 $n \in \omega, p_0, p_1, ..., p_{n-1} \in [\kappa^+]^{<\omega}, t_0, t_1, ..., t_{n-1} \in [\kappa]^{<\omega}, i_0, i_1, ..., i_{n-1} \in I$ 满足 $i_k \neq i_m, k \neq m$ 且 $\hat{}\varphi(p_k) \subseteq t_k$，那么

$$\bigcap_{k=1}^{n-1}(\bigcap_{\alpha\in p_k} A_\alpha^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k}) \in \mathcal{F}^+,$$

其中 $\mathcal{F}^+ = \{D \subseteq \kappa\colon\ \kappa \setminus D \notin \mathcal{F}\}$。

事实 1（[1]）如果 κ 是正则基数，且 $\hat{}\varphi$ 是一个 κ-收缩函数，那么存在一个关于 κ 、相对于 $\mathcal{FR}(\kappa)$ 的 2^κ 阶梯族的独立矩阵，$\hat{}\varphi$。

2.5. 设 $\hat{}\varphi$ 是一个 κ-收缩函数，并设 $x \in Y$。点 x 称为 κ-收缩点，当且仅当对于 x 的任意邻域 $\{U_t、\ t \in [\kappa]^{<\omega}\}$，都存在 x 的邻域 $\{V_\beta、\ \beta < \kappa^+\}$，使得对于每个非空的 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$，$\bigcap_{\alpha\in p} V_\alpha \subseteq U_{\hat{\varphi}(p)}$。

事实 2.（[1]）。设 κ 是正则的，且 Y 是一个空间。存在一个 κ-收缩函数，使得 Y 中的每个 κ-收缩点 x 都是 Y 中的弱 P_κ-点。

事实 3.（[1]）。设 κ 是一个正则基数。存在一个 κ-收缩函数，使得只要 $x \in \mathcal{U}(\kappa)$是 $\mathcal{U}(\kappa)$中的一个 κ-收缩点，那么 x就是 $\beta\kappa$中的一个κ-收缩点。

请注意，κ-收缩函数和 κ-收缩点在 [1] 中分别以帽函数和帽点的形式引入。

3 主要结果

本节包含四个结果。前两个探讨单个函数存在 κ-收缩点的问题，后两个则探讨是否存在为2^κ 多个函数所共有的 κ-收缩点。由于这些结果的证明本质上各不相同，因此我们决定将它们全部详细呈现。

设 X 为一个空间，（从现在起，我们假设 X 是一个 T_2-空间），并令

$$\{f_\alpha\colon f_\alpha\colon X \xrightarrow{onto} \beta\kappa, \alpha < 2^\kappa\}$$

构成一族开映射。

设 $\{S_\beta\colon \beta < 2^\kappa\}$ 是 X 的一族非空闭子集。对于每个 $\gamma < 2^\kappa$，令

$$C_\gamma = \bigcap \{S_\beta\colon \beta < \gamma\}$$

and

$$B_\gamma = \begin{cases} C_\gamma \cap f_\nu^{-1}(\kappa^*) & \text{where } \nu = \min\{\beta < 2^\kappa\colon C_\gamma \cap f_\beta^{-1}(\kappa^*) \neq \emptyset\} \\ C_\gamma & \text{otherwise} \end{cases}$$

在定理 1 中，我们将考虑一个函数，因此必须稍微修改 B_γ 的定义，即当 $C_\gamma \cap f^{-1}(\kappa^*) \neq \emptyset$ 时，$B_\gamma = C_\gamma \cap f^{-1}(\kappa^*)$。

定理 1 设 κ 是一个正则基数，且 $\hat{\varphi}$ 是一个 κ-收缩函数。设 X 是一个紧空间，且 $f\colon X \xrightarrow{onto} \beta\kappa$ 是一个开映射。那么存在一族 $\{U_\beta\colon \beta < 2^\kappa\}$ 的非空闭子集，使得对每个 $\gamma < 2^\kappa$

(i) 对任意 $\beta' \leqslant \beta < \gamma$，$U_\beta \subseteq U_{\beta'}$；

(ii) if $f^{-1}(\kappa^*) \cap B_\gamma = \emptyset$, then $U_\gamma = f^{-1}(\{\xi\}) \cap B_\gamma$ for some $\xi \in \kappa$;

(ii) 若 $f^{-1}(\kappa^*) \cap B_\gamma \neq \emptyset$，则存在一个超滤子 $\bigcup_{\beta\in 2^\kappa} \mathcal{F}_\beta$，使得

(a) $\mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_{\beta'}$，每当 $\beta \leqslant \beta' < \gamma$(b) 对每个递减序列 $\{(V_\beta^r \subseteq \omega\colon r < [\kappa]^{<\omega})\ \beta \in 2^\kappa\}$ 若 $V_\beta^r \in \mathcal{F}_\beta$ 对于 $r < [\kappa]^{<\omega}$，则存在 $W_\beta^\eta \in \mathcal{F}_{\beta+1}$，对每个 $\eta \in \kappa^+$，使得对每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$ 和每个 $\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_k < 2^\kappa$

$$|\bigcap_{\nu\in p} W_\beta^\nu \setminus V_\beta^{\hat{\varphi}(p)}| < \kappa,$$

(c) $f^{-1}(U) \cap B_\gamma \neq \emptyset$，其中 U 是属于 κ^* 标准基的闭开集，使得 $\bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{F}_\beta \in U$。

证明。根据事实 1，固定一个矩阵

$$\{E_t^i\colon t \in [\kappa]^{<\omega}, i \in 2^\kappa\} \cup \{A_\eta^i\colon \eta < \kappa^+, i \in 2^\kappa\}$$

2^κ 阶梯族关于 $\mathcal{FR}(\kappa)$、$\hat{\varphi}$ 在 κ 独立上的弱性质。假设对于每个 $i \in 2^\kappa$，我们都有

(a) $E^i_s \cap E^i_t = \emptyset$ 对所有 $s,t \in [\kappa]^{<\omega}$ 满足 $s \neq t$, (b) $|\bigcap_{\eta\in p} A^i_\eta \cap \bigcup_{t\not\supseteq \hat{}\varphi(p)} E^i_t| < \kappa$ 对于每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$, (c) 若 $\hat{}\varphi(p) \subseteq t$, 则 $|\bigcap_{\eta\in p} A^i_\eta \cap E^i_t| = \kappa$ 对于每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$ 和 $t \in [\kappa]^{<\omega}$ (d) $\bigcup\{E^i_t\colon t \in [\kappa]^{<\omega}\} = \kappa$ (e) $|\bigcap_{\eta\in p} A^i_\eta \setminus \bigcup_{t\supseteq \hat{}\varphi(p)} E^i_t| < \kappa$ 对于每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$。

注意，(b) 和 (d) 蕴含 (e)。此外，将 $\{E^i_t$ 扩展为 κ 的一个划分后，条件 (b) 仍然成立：$t \in [\kappa]^{<\omega}\}$。事实上，若存在 $p_0 \in [\kappa^+]^{<\omega}$ 和 $i_0 \in 2^\kappa$ 使得

$$|\bigcap_{\eta\in p_0} A^{i_0}_\eta \cap \bigcup_{t\not\supseteq \hat{\varphi}(p_0)} E^{i_0}_t| = \kappa,$$

那么 $|\bigcup_{t\not\supseteq \hat{}\varphi(p_0)} E^{i_0}_t| = \kappa.$ 于是，由 (d) 和 (a)，存在 $t_0 \supseteq \hat{}\varphi(p_0)$ 使得 $|E^{i_0}_{t_0}| < \kappa$。因此

$$|\bigcap_{\eta\in p_0} A^{i_0}_\eta \cap E^{i_0}_{t_0}| < \kappa.$$

这与（c）矛盾。

设 $\{Z_\beta\colon \beta < 2^\kappa, \alpha \equiv 0\,(mod\ 2)\}$ 为 κ 的所有子集构成的族，并令

$$\{(V^\beta_r\colon r < [\kappa]^{<\omega})\colon \beta < 2^\kappa, \beta \equiv 1\ (mod\ 2)\}$$

为单调序列族，即 $V^\beta_r \supseteq V^\beta_s$只要 $r \subseteq s$。（我们不要求 $(V^\beta_r\colon r < [\kappa]^{<\omega})$ 彼此不同）。

我们按归纳法经过 2^κ 步以如下方式构造 $\mathcal{F}_\beta$、I_β 和 U_β（B_β 的构造方式如定理之前所示，但使用集合 U_β）

（1） $\mathcal{F}_0 = \mathcal{FR}$（$\kappa$）、$I_0 = 2^\kappa$ 和 $U_0 = X$,

（2） $\mathcal{F}_\beta$ 是 κ上的一个滤子，$I_\beta \subset 2^\kappa$是 X 的非空闭子集，并且 U_β

$$\{E^i_t\colon t \in [\kappa]^{<\omega}, i \in I_\beta\} \cup \{A^i_\mu\colon \mu < \kappa^+, i \in I_\beta\}$$

剩余阶梯族相对于 $\mathcal{F}_\beta$、$\hat{}\varphi$是独立的,

(3) 如果 $\gamma < \beta$，那么 $\mathcal{F}_\gamma \subseteq \mathcal{F}_\beta$, $I_\gamma \supseteq I_\beta$, $U_\gamma \supseteq U_\beta$,

（4）如果 β 是极限，那么 $\mathcal{F}_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{F}_\gamma$、 $I_\beta = \bigcap_{\gamma<\beta} I_\gamma$、 $U_\beta = \bigcap_{\gamma<\beta} U_\gamma$,

(5) 对每个 $\beta \in 2^\kappa$， $I_\beta \setminus I_{\beta+1}$ 都是有限的,

(6) $Z_\beta \in \mathcal{F}_\beta$ 或 $\kappa \setminus Z_\beta \in \mathcal{F}_\beta$,

(7) 如果 $f(B_\beta) \cap \kappa^* = \emptyset$，那么对于某个 $\xi \in \kappa$， $U_\beta = B_\beta \cap f^{-1}(\{\xi\})$,

(8) 如果 $f(B_\beta) \cap \kappa^* \neq \emptyset$，那么

– 对某个属于 κ^* 和 $\bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{F}_\gamma \in U$ 的标准基的闭开集 U， $f(B_\beta) \cap U \neq \emptyset$, – $U_\beta = f^{-1}(U) \subseteq B_\beta$– 对于一个递减序列 $\{V_\beta^r : r \in [\kappa]^{<\omega}\}$，如果每个 $V_\beta^r \in \mathcal{F}_\beta$ 都成立，那么对于每个 $\eta \in \kappa^+$, 都存在 $W_\eta^\beta \in \mathcal{F}_{\beta+1}$，使得对每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$,

$$|\bigcap_{\nu\in p} W_\beta^\nu \setminus V_\beta^{\hat{\varphi}(p)}| < \kappa.$$

第一步和极限步骤已经完成。假设我们已构造出$\mathcal{F}_\beta$、 I_β 和 U_β。下面证明后继步骤。

假设 $f(B_\beta) \cap \kappa^* \neq \emptyset$。否则，根据 (7)，我们对某个 $\xi \in \kappa$ 令 $U_{\beta+1} = B_{\beta+1} \cap f^{-1}(\{\xi\})$。于是 (ii) 成立。

分两种情形讨论。

情形 1。 $\beta \equiv 0\ (mod\ 2)$。令 $\mathcal{R} = [\mathcal{F}_\beta, \{Z_\beta\}]$ 为一个滤子。若 $\mathcal{R}$ 是真滤子且

$$\{E_t^i : t \in [\kappa]^{<\omega}, i \in I_\beta\} \cup \{A_\mu^i : \mu < \kappa^+, i \in I_\beta\}$$

相对于 $\mathcal{R}$、$\hat{}\varphi$ 独立，则令.....然后我们令

$$\mathcal{F}_{\beta+1} = \mathcal{F}_\beta, \quad I_{\beta+1} = I_\beta, \quad U_{\beta+1} = U_\beta.$$

否则，固定 $n \in \omega$、互异的 $i_k \in I_\beta$ 和 $\hat{}\varphi(p_k) \subseteq t_k$，对 $k < n$，使得

$$\kappa \setminus [Z_\beta \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} (\bigcap_{\mu\in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k})] \in \mathcal{F}_\beta.$$

然后，放置

$$\mathcal{F}_{\beta+1} = [\mathcal{F}_\beta, \{A_{p_k}^{i_k} : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}, \{E_{t_k}^{i_k} : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}]$$

$$I_{\beta+1} = I_\beta \setminus \{i_k : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

and

$$U_{\beta+1} = f^{-1}(U) \subseteq B_{\beta+1},$$

其中， U κ^* $\bigcup_{\gamma<\beta+1} \mathcal{F}_\gamma \in$ U 是属于和 的标准基的一个闭开集。然后 $\kappa \setminus Z_\beta \in \mathcal{F}_{\beta+1}$.

要证明 (2) 对 $\mathcal{F}_{\beta+1}$ 和 $I_{\beta+1}$ 成立，只需注意到 $\mathcal{F}_{\beta+1}$ 中的每个元素都具有如下形式。

$$A \cap (\bigcap_{\mu \in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k})$$

对于某些 $A \in \mathcal{F}_\beta$ 和 $0 \leqslant k \leqslant n-1$。然后，

$$\bigcap_{\mu \in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k} \supseteq \bigcap_{k=0}^{n-1} (\bigcap_{\mu \in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k})$$

and

$$\bigcap_{k=0}^{n-1} (\bigcap_{\mu \in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k}) \in \mathcal{F}_\beta.$$

因此， $\mathcal{F}_{\beta+1}$ 和 $I_{\beta+1}$ 满足 (2)，这由 $\mathcal{F}_\beta$ 和 I_β满足 (2) 可得。情况 2。 $\beta \equiv 1$ (mod 2)。

如果对某个 $r \in [\kappa]^{<\omega}$ 有 $V_\beta^r \notin \mathcal{F}_\beta$，那么我们令

$$\mathcal{F}_{\beta+1} = \mathcal{F}_\beta, \quad I_{\beta+1} = I_\beta, \quad U_{\beta+1} = U_\beta.$$

假设每个 $V_\beta^r \in \mathcal{F}_\beta$。选择 $i \in I_\beta$。然后对于每个 $\nu < \kappa^+$，考虑

$$W_\beta^\nu = A_\nu^i \cap \bigcup \{V_\beta^t \cap E_t^i : t \in [\kappa]^{<\omega}\}.$$

那么对于每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$，我们都有

$$\bigcap_{\nu \in p} W_\beta^\nu = \bigcap_{\nu \in p} A_\nu^i \cap \bigcup \{V_\beta^t \cap E_t^i : t \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq_*$$

然后按 (e)

$$\bigcup \{V_\beta^t \cap E_t^i : t \in [\kappa]^{<\omega}\} \cap \{E_t^i : t \supseteq \hat{\varphi}(p)\} =$$

$$\bigcup \{V_\beta^t \cap E_t^i : t \supseteq \hat{\varphi}(p)\} \subseteq$$

$$\{V_\beta^t\colon t \supseteq \hat{\varphi}(p)\} = \bigcap_{\nu\in\hat{\varphi}(p)} V_\beta^\nu.$$

最后一个等式由 $\{V_\beta^r\colon r \in [\kappa]^{<\omega}\}$. 的单调性得到。现在，令

$$\mathcal{F}_{\beta+1} = [\mathcal{F}_\beta, \{W_\beta^\nu\colon \nu < \kappa^+\}]$$
$$I_{\beta+1} = I_\beta \setminus \{i\}$$

and

$$U_{\beta+1} = f^{-1}(U) \subseteq B_{\beta+1},$$

其中 U 是属于 κ^* 的标准基的闭开集，且 $\bigcup_{\gamma<\beta+1} \mathcal{F}_\gamma \in U$。

要证明 (2) 对 $\mathcal{F}_{\beta+1}$ 和 $I_{\beta+1}$ 成立，只需注意到 $\mathcal{F}_{\beta+1}$ 的每个元素都具有如下形式

$$A \cap \bigcap_{\nu\in p} W_\beta^\nu$$

对于某个 $A \in \mathcal{F}_\beta$ 和 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$。但是

$$V_\beta^{\hat{\varphi}(p)} \cap \bigcap_{\nu\in p} A_\nu^i \cap E_{\hat{\varphi}(p)}^i \subseteq \bigcap_{\nu\in p} W_\beta^\nu$$

并且由于每个 $V_\beta^r \in \mathcal{F}_\beta$，我们有 $V^{\hat{}\varphi(p)}{}_\beta \in \mathcal{F}_\beta$。因此，(2) 对 $\mathcal{F}_{\beta+1}$ 和 $I_{\beta+1}$ 成立，这由 (2) 对 $\mathcal{F}_\beta$ 和 I_β 成立可得。 ■

定理 2 设 κ 是一个正则基数，且 $\hat{}\varphi$ 是一个 κ-收缩函数。设 X 是一个紧空间，且 $f\colon X \xrightarrow{onto} \beta\kappa$ 是一个开映射。那么存在一个集合族 $\{U_\beta\colon \beta < 2^\kappa\}$，满足定理 1 的 $(i) - (iii)$，使得对于每个 $x \in \bigcap\{U_\beta\colon \beta < 2^\kappa\}$，要么 $f(x)$ 属于 κ，要么 $f(x)$ 是 κ^* 中的一个 κ-收缩点。

证明。根据定理 1，存在一个由非空闭子集组成的族 $\{U_\beta\colon \beta \in 2^\kappa\}$，其所在空间为 X，以及一个具有性质 $(i) - (iii)$ 的超滤子 $\bigcup_{\beta\in 2^\kappa} \mathcal{F}_\beta$。于是，对每个 $x \in \bigcap\{U_\beta\colon$ 只要 $f_\alpha(B_\beta) \cap \kappa^* = \emptyset$，则 $\beta \in 2^\kappa\}$ $f(x)$ 就属于 κ；或者，当 $f(x)$ 是 κ^* 中的一个 κ-收缩点（形式为 $\bigcup_{\beta\in 2^\kappa} \mathcal{F}_\beta$）且 $f(B_\beta) \cap \kappa^* \neq \emptyset$ 时，亦然。 ■

令 $<_*$ 表示 $2^\kappa\times 2^\kappa$ 上的典范良序。令 $j(\alpha,\beta)\in 2^\kappa\times 2^\kappa$ 为 (α,β) 的紧接后继，即 $(\alpha,\beta)<_* j(\alpha,\beta)$，并且不存在 (γ,δ) 使得 $(\alpha,\beta)<_*(\gamma,\delta)<_* j(\alpha,\beta)$。

设 X 是一个空间，且 $\{f_\alpha\colon f_\alpha\colon X\xrightarrow{onto}\beta\kappa,\alpha<2^\kappa\}$ 是一个开映射族。设 $\{S_{\alpha,\beta}\colon (\alpha,\beta)<2^\kappa\times 2^\kappa\}$ 是 X 的一个非空闭子集族。对于每个 $(\gamma,\delta)\in 2^\kappa\times 2^\kappa$，令

$$C_{\gamma,\delta}=\bigcap\{S_{\alpha,\beta}\colon(\alpha,\beta)<_*(\gamma,\delta)\}$$

and

$$B_{\gamma,\delta}=\begin{cases} C_{\gamma,\delta}\cap f_\mu^{-1}(\kappa^*) & \text{where } \mu=\min\{\beta<2^\kappa\colon C_{\gamma,\delta}\cap f_\beta^{-1}(\kappa^*)\neq\emptyset\}\\ C_{\gamma,\delta} & \text{otherwise}\end{cases}$$

定理 3 设 κ 是一个正则基数，且 $\hat{}\varphi$ 是一个 κ-收缩函数。设 X 是一个紧空间，且 $\{f_\alpha\colon f_\alpha\colon X\xrightarrow{onto}\beta\kappa,\alpha<2^\kappa\}$ 是一个开映射族。那么存在一个族 $\{U_{\alpha,\beta}\colon(\alpha,\beta)<2^\kappa\times 2^\kappa\}$，由 X 的非空闭子集构成，使得对于每个 $(\gamma,\delta)<2^\kappa\times 2^\kappa$

(i) $U_{\alpha,\beta}\subseteq U_{\alpha,\beta'}$ *for any* $(\alpha',\beta')\leqslant_*(\alpha,\beta)<_*(\gamma,\delta)$;

(ii) 若 $f_\gamma^{-1}(\kappa^*)\cap B_{\gamma,\ \delta}=\emptyset$，则 $U_{\gamma,\ \delta}=f_\gamma^{-1}(\{\xi\})\cap B_{\gamma,\ \delta}$ 对某个 $\xi\in\kappa$;

(iii) 如果 $f_\gamma^{-1}(\kappa^*)\cap B_{\gamma,\delta}\neq\emptyset$，那么存在一个超滤子 $\bigcup_{(\alpha,\beta)\in 2^\kappa\times 2^\kappa}\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ 使得

(a) $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}\subseteq\mathcal{F}_{\alpha',\ \beta'}$，每当 $(\alpha,\beta)\leqslant_*(\alpha',\beta')<_*(\gamma,\delta)$;

(b) 对于每个递减序列 $\{(V^r_{\alpha,\beta}\subseteq\omega\colon r<[\kappa]^{<\omega}),(\alpha,\beta)\in 2^\kappa\times 2^\kappa\}$ 如果 $V^r_{\alpha,\ \beta}\in\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 那么对于 $r<[\kappa]^{<\omega}$，存在 $W^\eta_{\alpha,\ \beta}\in\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$ 对于每个 $\eta\in\kappa^+$，使得对于每个 $p\in[\kappa^+]^{<\omega}$ 和每个 $\eta_1<\eta_2<\ldots<\eta_k<2^\kappa$

$$|\bigcap_{\nu\in p}W^\nu_{\alpha,\beta}\setminus V^{\hat{\varphi}(p)}_{\alpha,\beta}|<\kappa,$$

(c) $f_\gamma^{-1}(U)\cap B_{\gamma,\ \delta}\neq\emptyset$，其中 U 是 κ^* 的标准基中的一个闭开集，使得 $\bigcup_{(\alpha,\ \beta)<_*(\gamma,\ \delta)}\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}\in U$。

证明。根据事实 1，固定一个矩阵

$$\{E^i_t\colon t\in[\kappa]^{<\omega},i\in 2^\kappa\}\cup\{A^i_\eta\colon\eta<\kappa^+,i\in 2^\kappa\}$$

关于相对于 $\mathcal{FR}(\kappa)$、$\hat{}\varphi$ 而言的 κ 独立的 2^κ 阶梯族。假设对于每个 $i\in 2^\kappa$，我们都有

(a) 对所有 s、$t \in [\kappa]^{<\omega}$，若满足 $s \neq t$，则 $E^i_s \cap E^i_t = \emptyset$；(b) 对每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$，$|\bigcap_{\eta\in p} A^i_\eta \cap \bigcup_{t\not\supseteq \hat{}\varphi(p)} E^i_t| < \kappa$；(c) 如果 $\hat{}\varphi(p) \subseteq t$，那么对于每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$ 和 $t \in [\kappa]^{<\omega}$，$|\bigcap_{\eta\in p} A^i_\eta \cap E^i_t| = \kappa$；(d) $\bigcup\{E^i_t\colon t \in [\kappa]^{<\omega}\} = \kappa$；(e) 对每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$，$|\bigcap_{\eta\in p} A^i_\eta \setminus \bigcup_{t\supseteq \hat{}\varphi(p)} E^i_t| < \kappa$。

注意，(*b*) 和 (*d*) 蕴含 (*e*)。此外，将 $\{E^i_t\colon t \in [\kappa]^{<\omega}\}$ 扩展为 κ 的一个划分后，条件 (*b*) 仍然成立。事实上，若存在 $p_0 \in [\kappa^+]^{<\omega}$ 和 $i_0 \in 2^\kappa$ 使得

$$|\bigcap_{\eta\in p_0} A^{i_0}_\eta \cap \bigcup_{t\not\supseteq \hat{\varphi}(p_0)} E^{i_0}_t| = \kappa,$$

那么 $|\bigcup_{t\not\supseteq \hat{}\varphi(p_0)} E^{i_0}_t| = \kappa$. 于是，由 (*d*) 和 (*a*)，存在 $t_0 \supseteq \hat{}\varphi(p_0)$ 使得 $|E^{i_0}_{t_0}| < \kappa$。因此

$$|\bigcap_{\eta\in p_0} A^{i_0}_\eta \cap E^{i_0}_{t_0}| < \kappa.$$

这与 (*c*) 矛盾。

设 $\{Z_{\alpha,\beta}\colon (\alpha,\beta) < 2^\kappa \times 2^\kappa, \alpha+\beta \equiv 0 (mod\ 2)\}$ 为 κ 的所有子集组成的族，并设

$$\{(V^r_{\alpha,\beta}\colon r < [\kappa]^{<\omega})\colon (\alpha,\beta) < 2^\kappa \times 2^\kappa, \alpha+\beta \equiv 1\ (mod\ 2)\}$$

为单调序列组成的族，即当 $r \subseteq s$ 时，$V^r_{\alpha,\beta} \supseteq V^s_{\alpha,\beta}$。（我们不要求 $(V^r_{\alpha,\beta}\colon r < [\kappa]^{<\omega})$）彼此不同。）

我们按归纳法用 2^κ 步构造 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$,$I_{\alpha,\beta}$ 和 $U_{\alpha,\beta}$，具体如下（$B_{\alpha,\beta}$ 的定义与定理前所述相同），

(1) $\mathcal{F}_{0,0} = \mathcal{FR}(\kappa)$、$I_{0,0} = 2^\kappa$ 和 $U_{0,0} = X$,

(2) $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ 是 κ 上的一个滤子，$I_{\alpha,\beta} \subset 2^\kappa$, $U_{\alpha,\beta}$ 是 X 的一个非空闭子集，并且

$$\{E^i_t\colon t \in [\kappa]^{<\omega}, i \in I_{\alpha,\beta}\} \cup \{A^i_\mu\colon \mu < \kappa^+, i \in I_{\alpha,\beta}\}$$

剩余阶梯族独立于 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$, $\hat{}\varphi$,

(3) 若 $(\gamma,\delta) <_* (\alpha,\beta)$，则 $\mathcal{F}_{\gamma,\delta} \subseteq \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$, $I_{\gamma,\delta} \supseteq I_{\alpha,\beta}$, $U_{\gamma,\delta} \supseteq U_{\alpha,\beta}$,
(4) 如果 (α,β) 是极限，那么 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta} = \bigcup_{(\gamma,\delta)<_*(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\gamma,\delta}$, $I_{\alpha,\beta} = \bigcap_{(\gamma,\delta)<_*(\alpha,\beta)} I_{\gamma,\delta}$,$U_{\alpha,\beta} = \bigcap_{(\gamma,\delta)<_*(\alpha,\beta)} U_{\gamma,\delta}$,

(5) 对每个 $(\alpha,\beta) \in 2^\kappa \times 2^\kappa$，$I_{\alpha,\beta} \setminus I_{j(\alpha,\beta)}$ 都是有限的,

(6) 或 $Z_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 或 $\kappa \setminus Z_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$,

(7) 若 $f_\alpha(B_{\alpha,\beta}) \cap \kappa^* = \emptyset$ 则 $U_{\alpha,\beta} = B_{\alpha,\beta} \cap f_\alpha^{-1}(\{\xi\})$ 对某个 $\xi \in \kappa$,

(8) 如果 $f_\alpha(B_{\alpha,\ \beta}) \cap \kappa^* \neq \emptyset$ 则

- $f_\alpha(B_{\alpha,\beta}) \cap U \neq \emptyset$, for some clopen set U belonging to the standard base of κ^* and $\bigcup_{(\gamma,\delta)<_*(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\gamma,\delta} \in U$,
- $U_{\alpha,\beta} = f_\alpha^{-1}(U) \subseteq B_{\alpha,\beta}$
- for a decreasing sequence $(V^r_{\alpha,\beta} : r \in [\kappa]^{<\omega})$ if each $V^r_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ then there are $W^\nu_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$, for each $\eta \in \kappa^+$, such that for each $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$,
$$|\bigcap_{\nu\in p} W^\nu_{\alpha,\beta} \setminus V^{\hat{\varphi}(p)}_{\alpha,\beta}| < \kappa.$$

第一步和极限步已经完成。假设我们已经构造了$\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$、$I_{\alpha,\ \beta}$ 以及$U_{\alpha,\ \beta}$。我们将证明后继步。

假设 $f_\alpha(B_{\alpha,\ \beta}) \cap \kappa^* \neq \emptyset$。否则，根据 (7)，我们令

$$U_{j(\alpha,\beta)} = B_{j(\alpha,\beta)} \cap f_\alpha^{-1}(\{\xi\})$$

对于某个 $\xi \in \kappa$。于是 (ii) 成立。

考虑两种情形。

情形 1。 $\alpha + \beta \equiv 0\ (mod\ 2)$。令 $\mathcal{R} = [\mathcal{F}_{\alpha,\beta}, \{Z_{\alpha,\beta}\}]$ 为一个滤子。如果 $\mathcal{R}$ 是适当的，并且

$$\{E^i_t : t \in [\kappa]^{<\omega}, i \in I_{\alpha,\beta}\} \cup \{A^i_\mu : \mu < \kappa^+, i \in I_{\alpha,\beta}\}$$

相对于 $\mathcal{R}$是独立的，$\hat{}\varphi$，然后放入，我们再放入

$$\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)} = \mathcal{F}_{\alpha,\beta},\quad I_{j(\alpha,\beta)} = I_{\alpha,\beta},\quad U_{j(\alpha,\beta)} = U_{\alpha,\beta}.$$

否则，固定 $n \in \omega$，取不同的$i_k \in I_{\alpha,\ \beta}$ 和$\hat{\varphi}(p_k) \subseteq t_k$，对于 $k < n$，使得

$$\kappa \setminus [Z_{\alpha,\beta} \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} (\bigcap_{\mu \in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k})] \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}.$$

于是，令

$$\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)} = [\mathcal{F}_{\alpha,\beta}, \{A_{p_k}^{i_k} : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}, \{E_{t_k}^{i_k} : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}]$$

$$I_{j(\alpha,\beta)} = I_{\alpha,\beta} \setminus \{i_k : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

and

$$U_{j(\alpha,\beta)} = f^{-1}(U) \subseteq B_{j(\alpha,\beta)},$$

其中，U 是属于 κ^* 的标准基的闭开集，而$\bigcup_{(\gamma,\ \delta) <_* j\ (\alpha,\ \beta)} \mathcal{F}_{\gamma,\ \delta} \in U$。于是 $\kappa \setminus Z_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$.

为了证明（2）对 $\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$ 和 $I_{j(\alpha,\beta)}$ 成立，只需注意到 $\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$ 的每个元素都具有如下形式

$$A \cap (\bigcap_{\mu \in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k})$$

对于某个$A \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$和 $0 \leqslant k \leqslant n-1$。于是，

$$\bigcap_{\mu \in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k} \supseteq \bigcap_{k=0}^{n-1} (\bigcap_{\mu \in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k})$$

and

$$\bigcap_{k=0}^{n-1} (\bigcap_{\mu \in p_k} A_\mu^{i_k} \cap E_{t_k}^{i_k}) \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}.$$

因此，（2）对 $\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$ 和 $I_{j(\alpha,\beta)}$ 成立，这由（2）对$\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 以及$I_{\alpha,\ \beta}$成立推出。

情况 2。 $\alpha + \beta \equiv 1\ (mod\ 2)$。
如果对于某个 $r \in [\kappa]^{<\omega}$，$V_{\alpha,\beta}^r \notin \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$，那么我们设

$$\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)} = \mathcal{F}_{\alpha,\beta},\quad I_{j(\alpha,\beta)} = I_{\alpha,\beta},\quad U_{j(\alpha,\beta)} = U_{\alpha,\beta}.$$

假设每个 $V_{\alpha,\beta}^r \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$。选取 $i \in I_{\alpha,\beta}$。那么对于每个 $\nu < \kappa^+$，考虑

$$W_{\alpha,\beta}^\nu = A_\nu^i \cap \bigcup \{V_{\alpha,\beta}^t \cap E_t^i : t \in [\kappa]^{<\omega}\}.$$

那么对于每个 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$，我们有

$$\bigcap_{\nu\in p} W^\nu_{\alpha,\beta} = \bigcap_{\nu\in p} A^i_\nu \cap \bigcup\{V^t_{\alpha,\beta} \cap E^i_t \colon t \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq_*$$

然后由（e）

$$\bigcup\{V^t_{\alpha,\beta} \cap E^i_t \colon t \in [\kappa]^{<\omega}\} \cap \{E^i_t \colon t \supseteq \hat{\varphi}(p)\} =$$

$$\bigcup\{V^t_{\alpha,\beta} \cap E^i_t \colon t \supseteq \hat{\varphi}(p)\} \subseteq$$

$$\{V^t_{\alpha,\beta} \colon t \supseteq \hat{\varphi}(p)\} = \bigcap_{\nu\in\hat{\varphi}(p)} V^\nu_{\alpha,\beta}.$$

最后一个等式由 $\{V^r_{\alpha,\beta} \colon r \in [\kappa]^{<\omega}\}$. 的单调性得到

现在，令

$$\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)} = [\mathcal{F}_{\alpha,\beta}, \{W^\nu_{\alpha,\beta} \colon \nu < \kappa^+\}]$$

$$I_{j(\alpha,\beta)} = I_{\alpha,\beta} \setminus \{i\}$$

and

$$U_{j(\alpha,\beta)} = f^{-1}(U) \subseteq B_{j(\alpha,\beta)},$$

其中 U 是属于 κ^* 的标准基的闭开集，并且 $\bigcup_{(\gamma,\ \delta)\ <_* j\ (\alpha,\ \beta)} \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta} \in U$。

要证明（2）对 $\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$ 和 $I_{j(\alpha,\beta)}$ 成立，只需注意到 $\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$ 的每个元素都具有如下形式

$$A \cap \bigcap_{\nu\in p} W^\nu_{\alpha,\beta}$$

对于某个 $A \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 和 $p \in [\kappa^+]^{<\omega}$。但是

$$V^{\hat{\varphi}(p)}_{\alpha,\beta} \cap \bigcap_{\nu\in p} A^i_\nu \cap E^i_{\hat{\varphi}(p)} \subseteq \bigcap_{\nu\in p} W^\nu_{\alpha,\beta}$$

并且由于每个 $V^r_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$，我们有 $V^{\hat{}\varphi(p)}_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$。因此，由 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 和 $I_{\alpha,\ \beta}$ 的 (2) 可知，$\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$ 和 $I_{j(\alpha,\beta)}$ 的 (2) 得以满足。 ■

定理 4 设 κ 是一个正则基数，且 $\hat{\varphi}$ 是一个 κ-收缩函数。设 X 是一个紧空间，并设

$$\{f_\alpha : \alpha < 2^\kappa, f_\alpha : X \xrightarrow{onto} \beta\kappa\}$$

是一族开映射。那么存在一族 $\{U_{\alpha,\beta} : (\alpha,\beta) \in 2^\kappa \times 2^\kappa\}$，使得对于每个 $x \in \bigcap\{U_{\alpha,\beta} : (\alpha,\beta) \in 2^\kappa \times 2^\kappa\}$ 以及每个 $\alpha \in 2^\kappa$，要么 $f_\alpha(x)$ 属于 κ，要么 $f_\alpha(x)$ 是 κ^* 中的一个 κ-收缩点。

证明。根据定理 3，存在一个由 X 的非空闭子集组成的族 $\{U_{\alpha,\beta} : (\alpha, \beta) \in 2^\kappa \times 2^\kappa\}$，以及一个具有性质 (i) –(iii) 的超滤子 $\bigcup_{(\alpha,\beta)\in 2^\kappa\times 2^\kappa} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ 。

然后对于每个 $x \in \bigcap\{U_{\alpha,\beta} : (\alpha,\beta) \in 2^\kappa \times 2^\kappa\}$ 以及对于每个 $\alpha \in 2^\kappa$， $f_\alpha(x)$ 属于 κ，只要 $f_\alpha(B_{\alpha,\beta}) \cap \kappa^* = \emptyset$ 或者 $f_\alpha(x)$ 是一个 κ-收缩点，在κ^*（形如 $\bigcup_{(\alpha,\beta)\in 2^\kappa\times 2^\kappa} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$) 只要 $f_\alpha(B_{\alpha,\beta}) \cap \kappa^* \neq \emptyset$。 ■

4 注记与开放问题

请注意，如果我们考虑函数族 $\{f_\alpha : \alpha < 2^\lambda, f_\alpha : X \xrightarrow{onto} \beta\kappa\}$，其中 λ, κ 是正则的，且 $\lambda < \kappa$ 和 X 是紧空间，那么第 3 节中证明的定理同样成立。

我们知道，在定理 2 和定理 4 中，不能用“弱 P_κ 点”替换“弱 P_{κ^+}-点”，因为在 $\beta\kappa$ 中不存在弱 P_{κ^+}-点，参见 [1]。然而，下面的定理是事实 2、事实 3 和定理 4 的一个直接推论。

定理 5 令 κ 为正则基数，且 $\hat{\varphi}$ 是一个 κ-收缩函数。令 X 为紧空间，并令

$$\{f_\alpha : \alpha < 2^\kappa, f_\alpha : X \xrightarrow{onto} \beta\kappa\}$$

是一族开映射。那么存在一族 $\{U_{\alpha,\beta} : (\alpha,\beta) \in 2^\kappa \times 2^\kappa\}$，使得对于每个 $x \in \bigcap\{U_{\alpha,\beta} : (\alpha,\beta) \in 2^\kappa \times 2^\kappa\}$，以及每个 $\alpha \in 2^\kappa$，要么 $f_\alpha(x)$ 属于 κ，要么 $f_\alpha(x)$ 是 κ^* 中的弱 P_κ-点。

我们不知道第 3 节中证明的定理是否适用于 κ 奇异情形，尽管已知 $\beta\kappa$ 中也存在奇异的弱 P_κ点，见 [1]。

参考文献

[1] Baker J.、Kunen K.，《一致超滤子中的极限》，Trans. AMS，353(10)（2001），4083–4093。[2] Engelking, R.，《一般拓扑学》，Heldermann Verlag，1989[3] Frankiewicz, R.，《极端不连通紧空间中的非可达点，I》，Fund. Math. 111(3)（1981）115–123。[4] Frankiewicz, R.、Zbierski, P.，《Hausdorff 间隙与极限》，《逻辑与数学基础研究》，North-Holland，1994。[5] Jech, T.，《集合论：第三个千年版，修订并扩充》，Springer 数学专著，Springer-Verlag，柏林，2003。[6] Juh´asz I.、Kunen K.，《小权空间中的一些点》，Studia Sci. Math. Hungar. 39(3-4)（2002），369—376。[7] Jureczko J.，《关于极端不连通紧空间中一些特殊点的评论》，（已投稿）。[8] Kunen, K.，《βN中的一些点》，Proc. Cambridge Phil. Soc. 80（1976），385-398。[9] Kunen, K.，《 N^* 中的弱 P 点》，Topology，第 II 卷（第四届专题讨论会论文集，布达佩斯，（1978），第 741–749 页，Colloq. Math. Soc. J´anos Bolyai，23，North-Holland，阿姆斯特丹—纽约，1980。[10] Rudin, W.，《˘Cech 紧化理论中的齐性问题》，Duke Math. J.，（1956），409-420。[11] Shelah, S.，《正规与非正规强迫》，剑桥大学出版社，2017。

Joanna Jureczko波兰弗罗茨瓦夫科技大学，弗罗茨瓦夫，波兰。*e-mail: joanna.jureczko@pwr.edu.pl*