arXiv:2305.05011v1 [math.CO] 8 May 2023

谨以此文纪念 Ted Swart

S.J. GISMONDI*

前言摘要。 这篇文章献给我亲爱的挚友、导师和同事 Ted Swart†。文中既有我们共度时光的趣闻与回忆，也包含一项为纪念他而作的新学术成果——Ted多面体。



自从我认识 Ted 以来，我们就喜欢讨论各种新想法。至于讨论的是什么，并不重要。几乎每次我们都会谈到如何通过线性规划为图论问题建模。我们通常在下午碰面，提出一个想法，然后彼此质疑、互相鼓励。如果是在 Ted 家见面，他的妻子 Diana 会为我们准备点心。我们合作起来就像在玩游戏。我们会开怀大笑，在白板上涂写，也许一起吃顿晚饭，然后各自回家。几小时后，我们中的一人就会打电话给另一人，提出一个更好的想法。这些想法有时能经得起几天、几周的推敲，有时甚至能持续几个月。但最终我们总会发现其中的漏洞，渐渐失去动力。Ted 只会简单地说："事实就是事实。"但几周后，我们又会讨论另一个新想法。这样的日子持续了35年，直到新冠肺炎防疫限制使我们难以面对面见面，才就此结束。偶尔，这些讨论也会催生论文；例如，在一次马拉松式的讨论中，我们发现了一个 coNP-完全问题的多面体模型。我会非常想念他。

现在谈谈 Ted多面体，对 Birkhoff 多面体 B_n 所做的"微调"赋予 Ted多面体 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 一个特殊的"可调"参数 $\epsilon = \epsilon(n)$。请注意， B_n 可以被视为旅行商问题多面体与非巡回排列极点集合的凸包，而且其扩展表述是紧凑的。巡回（作为邻接矩阵时的连通 2-因子"置换矩阵"）可以与非巡回（不连通 2-因子"置换矩阵"）区分开来，其中 ϵ 缩放了对 B_n所做微调的幅度。对于 $\epsilon > 0$， $\mathcal{T}_n(\epsilon)$经过"调节"，使得与变换后的巡回相对应的极值点的凸包从 B_n中抬升，并与对应于平移后的非巡回的极值点凸包（通过一个超平面）分离。这使得我们能够创建一个线性规划模型的可行域，该模型基于旅行商问题多面体的扩展表述，判定图中是否存在巡回。也就是说，通过设计可在多项式时间内区分的巡回极值点‡，使其嵌入与非巡回极值点不相交的子空间，**NP 完全性** 的作用便会显现，而这必然需要通过 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$的非紧凑扩展表述来表达；也就是说，旅行商问题多面体不可能存在紧凑的扩展表述。无妨，Ted一定会喜欢这些想法，而 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$或许终有一天会对研究**P** 与**NP** 之间的难题有所助益§。总而言之，$\mathcal{T}_n(\epsilon)$是一个经过扰动的 B_n，即一个经 ϵ拉伸的旅行商问题多面体与平移后的非巡回排列极点集合的凸包；换言之，这是一个类似旅行商问题的多面体，以及可分离的非巡回极值点。

* *University of Guelph, Canada, Email:* gismondi@uoguelph.ca

†Ted于2023年1月去世，享年94岁。我们曾是最好的朋友。§请记住，Ted提出了首次认真尝试解决**P** 与**NP** [23]问题的方法。

‡旅行商问题多面体的线性规划模型通常会构建为：哈密顿图在巡回极值处的最优值高于在非巡回极值处的最优值，本例也是如此。

1. 岁月流转。Ted 因四色定理方面的工作和许多其他成就而广为人知，[7, 13, 19, 20, 21] 正如 [17] 等人所引用的那样。不过，你可以自己上 Google 查阅这些内容。我想让大家知道的是，Ted 是一位善良、宽厚且富有人文关怀、善于鼓励他人的人。他很有创造力、聪明过人（这只是轻描淡写），工作也十分勤奋，而且天生懂得如何鼓励他人成长并实现自己的目标。

我第一次见到 Ted 是在1983年，那是我在圭尔夫大学数学与统计系读本科的最后一年。Ted 教我图论。后来，我申请了研究生院，并于1985/1986年左右成为 Ted 的硕士生（稍后再详谈）。大约就在同一时期，Ted 提出了他那条声名狼藉的（拟议）旅行商问题（TSP）的紧凑线性规划（LP）公式**NP-困难**。Ted 声称**P**=**NP** ，也就是说，$\Leftrightarrow$ 一个图是哈密顿图。你可以想象当时的兴奋和热烈争论。请记住，判定一个图是否具有哈密顿性是**NP-完全** [8] ，而线性规划最近才被证明属于**P** （Khachiyan 1979年，Karmarkar 1984年）。因此，Ted 提出他的线性规划可以作为多项式时间算法来求解旅行商问题。要使 Ted 的论证成立，可行性就必须意味着整数极值点的存在。分数极值点是否存在并不重要，重要的是整数极值点也必须存在。此后，研究热潮和大量研究随之而来。

Ted 建模的可行域是一个同时包含分数极值点和整数极值点的多面体；对于其线性规划表述中的可行解，目标函数的取值可能在两者上相同。即使不存在整数极值点，也能获得可行性与最优性。Ted 继续反复修改他的表述，以排除可行域的全部极值点均为分数极值点的可能性，也就是说，排除可行性可能并不意味着存在整数极值点的可能性。但在1988年，Yannakakis [24]证明，不存在具备这些性质的旅行商问题的紧凑型对称线性规划表述。我记得一向乐观的 Ted 曾谈到创建旅行商问题多面体紧凑表示的可能性，尽管这也已在 2012 [6]中被证明是不可能的。关于旅行商问题的研究有着极其丰富的历史，也汇聚了众多研究者，在此无法一一列举。 [16]列出了一些早期研究者的名字。

1988年获得理学硕士学位后，我参与了一个“圭尔夫独有的项目”。说来也奇怪，这还得归功于 Ted。当时 Ted 是计算与通信服务主任，他与《Byte》杂志和圭尔夫大学谈妥了一份合同，要开发一个名为 CoSy 的会议系统。但后来我渐渐失去了兴趣，便离开去渥太华工作了。或许是机缘巧合，也或许是命中注定，数学与统计系主任 William Smith 于1990年夏天给我打电话，邀请我申请圭尔夫大学新设的博士项目。于是我回到圭尔夫，成为 Ted 的博士研究生，从此再未回头。

那是一次绝佳的机会：我得以（兼职）钻研世界上最棘手的问题之一；更重要的是，我能跟随一位值得我信任和尊敬、著述颇丰且一心指导我的教授学习。Ted 鼓励我相信自己的想法，并把证明一个想法正确这件事，当作它已经正确来着手。他相信这样能够获得一些原本可能无法发现的新见解。“结果并无保证。”他常说，“但总会有所帮助。”

我们的友谊始于我攻读第一个研究生学位时，并在博士期间愈发深厚。我们经常结伴出行，一起参加了许多会议和演讲：巴吞鲁日（LSU）、博卡拉顿（FAU）、温尼伯和萨斯卡通。Ted 向我介绍了许多研究人员，例如，我记得曾在温尼伯吃着一盘饺子，与拉尔夫·斯坦顿见面。Ted 也曾在安大略省的滑铁卢大学工作，我们常常从圭尔夫开车过去，到戴维斯中心听更多讲座。我们相处得非常融洽，而他一直在为我的事业铺路。在社交方面，Ted 和 Diana 会与我的家人一起庆祝我孩子们的生日，我的家人也会去他们家参加圣诞派对等活动。我也和他们的孩子成了朋友，直到今天我们仍是好友。事实上，Ted 的儿子 Nicholas 曾与 Ted、我和其他人合著了一篇论文 [18]。我编写了代码，用来测试并实现 Ted 的一个想法，而 Nic 则在大型计算机集群上运行这些程序。我记得 2014 年在基洛纳的一处度假村里与 Ted 和 Nic 共事。我们总能找到办法，在工作的同时享受乐趣。见图 1.1。

不过，如果要说 Ted 只教会了我一件事，那也不会是数学。不知为何，研究生时期的我似乎总觉得需要证明自己。能遇见 Ted 是我的幸运，因为他察觉到了这一点。Ted 在任何方面都耐心而不咄咄逼人。每当我犯错或迟迟无法落实想法时，他只是鼓励我相信自己，不要把时间浪费在无谓的不安上。我再也没有遇到过像他这样的教授。

Ted 持有一些在其领域内并不常见的坚定观点。但他从不责难任何人。我希望我们所有人都能这样说。他不因小小的挫折而气馁，还经常冒险坚持某个立场，只为证明一个观点。他对自己的想法完全笃定，从不在意浪费时间通过争取他人的认可来为自己定位——有时甚至因此对自己不利。我从未告诉过他，人们曾多次在会议和演讲中惊讶地问我：“他真的相信 $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ 吗？”我只能说，没有人确切知道。但重点不在这里。当 Ted 的观点坚定而无可辩驳时，我始终无法理解人们为何要争夺地位并寻求 Ted 的认可，也无法理解后来 Ted 必然感受到的那种显而易见的疏远与抛弃。当 Ted 被证明是错的时，我从他的反对者眼中看到了隐秘的得意。我当然没想到专业人士会教给我这样的道理。但是

然后我对 Ted 有了更多了解。我明白了，他只是拒绝把时间花在他人那些无法改变的观点和态度上。他看得更长远，知道我们谁都没有第二次生命的奢侈。谁又承担得起欺骗自己、压抑自己想要相信的东西以及需要表达的话语呢？坦然地为自己负责，然后继续去完成下一项任务。

Ted退休后，我经常去看望他和他的家人。我永远不会忘记Ted的 75th 生日。那时我住在Nic家（聚会举办地），本打算帮忙准备。许多家人、朋友和大学同事都受邀参加。然而，基洛纳的森林大火（2003年）恰好在那个周末肆虐。因此，Swart一家决定更换聚会地点——“以防万一”。这真是太好了，也就是说，Swart一家总是照顾到每个人，办事体面又周到。Ted全家都来了，最远的亲人从南非赶来。许多老同事和朋友也来为Ted庆祝，例如Murray Alexander、Heinz Bauschke——这里只举几位。Ted欣喜不已！但有关撤离的传闻，以及房屋可能被大火吞噬的担忧，给整个活动蒙上了阴影。我记得灰烬甚至滚烫的火星落满了我的租车。我想开车时，就像扫雪一样把它们扫掉。太阳看起来是橙色的（我们看得见时）。但大多数时候，它只是被浓烟遮蔽的一团微光。后来我听说，所有进出基洛纳的航班都已取消，便知道事态严重了。十五名消防员险些丧命——被困在火场中，四周都是大火。我们很担心他们，那段时间令人焦虑。整座城市都处于紧张之中。接着，事情发生了。尽管Ted和Diana家里已经住满了从外地来的客人，基洛纳仍有2.5万名居民被要求撤离家园，却无处可去，其中包括Nic一家和我。我记得Ted和Diana敞开家门，热情地尽可能照顾大家。Nic一家和我与其他人一起去了Ted和Diana家，屋里很快就挤满了人。于是我搬到邻居家住，后来又去了酒店，不过白天仍与Ted的家人、客人和撤离者待在一起。那时我们已经有很多人，大家一起吃饭、分享故事。有些人给住在Swart一家家中的孩子们买了玩具——那些家庭根本来不及收拾任何东西。当时没人会想到，其中两个孩子的所有玩具都会被大火烧毁。我们都希望基洛纳能躲过这场灾难，一切很快恢复正常。但事实上，一场社区悲剧正在发生——238栋房屋被毁，其中包括一户曾住在我们这里的家庭的房子。不过，我最想分享的是，Ted和他的家人一贯善待他人。尊重是其中的一部分。挺身而出、勇于承担风险，即使已经力不从心，仍做正确的事——比如让别人住进自己的家——这才是真正有意义的付出。Ted和Diana以身作则。



FIGURE 1.1。 *Ted, Nic and I working together.*

回首往事，Ted和他的家人改变了我的人生。我还可以讲述许多故事。总而言之，Ted坚定不移的支持和无尽的鼓励，成就了今天的我。他在许多方面给予了我帮助，远不止这里所能说的，例如经济上的帮助、父亲般的谈心，以及共度的时光。谢谢你，Ted。你的付出将继续产生影响，我会想念你。

2. 为纪念 Ted 所作的学术贡献。接下来的章节将阐述定义、一项关键思想，以及 Birkhoff 多面体极值点的变换，并在第 2.4 节据此定义 Ted多面体。随后将介绍 Hamilton回路判定问题的线性规划表述，其可行域是Ted多面体的非紧扩展表述。接着还将介绍另一种线性规划表述，其可行域是嵌入其定义空间中的 Ted多面体。本文计算了 Ted多面体一个实例的唯一外部表示（纯属创新），并报告了概要信息。

2.1. 定义与核心思想。所有图均为简单有向n顶点图，也可互换地用其邻接矩阵表示。

下面给出定义和主要思想。

Definition 2.1. P 是所有 $n!$ $n_x n$ *0/1* 置换矩阵（也称图／邻接矩阵）的集合；根据上下文，也可互换地称为单个置换矩阵，其分量为 $P[i,j]$。

Definition 2.2. B_n = *conv*（P），即著名的 *Birkhoff* 多面体。

当置换矩阵被解释为$n_x n$ 2-因子图的邻接矩阵时， B_n 被视为一个线性规划的可行域，该线性规划以最大化 $< P,\ G >$ 为目标，在 G 中寻找 2-因子；这是一个属于 **P** 的问题。其紧凑表示就是指派约束集。

Definition 2.3. P_t 是所有 $(n-1)$ *!/1* 非自反连通 *2*-因子置换矩阵（也称图／邻接矩阵）的集合；根据上下文，也可互换地称为单个置换矩阵，其分量为 $P_t[i,j]$。将其解释为图时，它们就是哈密顿回路，或更简单地说，就是回路。

Definition 2.4. TSP_n = *conv*（P_t），臭名昭著的旅行商问题多面体。

多面体 TSP_n 是一个用于著名的**NP-完全**旅行商问题的整数规划的可行域，以及决定是否存在巡回的相应可行性问题（**NP-完全**）。除了 William Cook（他是其中最优秀的研究者之一）之外，没有人确切知道如何处理旅行商问题多面体；人们只知道，它是一个难以求解的约束集的解集，嵌入在其极值点的凸组合的正交投影的像空间中。不同于 B_n，TSP_n 没有紧凑表示 [6]。随着 n增加，会出现新类型的面，甚至通常也不知道面的数量（作为 n的函数）。参见 [3, 4]，其中介绍了应用、实验和许多优秀的研究。

Definition 2.5. P_{nt} 是所有 $n!$ $-(n-1)!$ $n_x n$ *0/1* 个非连通 *2*-因子置换矩阵的集合（也称图/邻接矩阵），即相对于 P 的 P_t 的补集；根据上下文，也可交替地称为单个置换矩阵，其分量为 $P_{nt}[i,j]$。将其解释为图时，它们简单地被称为非巡回。

Remark 2.1. 所有回路和非巡回的并集就是所有 *2*-因子图的集合。也就是说，P=$P_t \cup P_{nt}$，且 $P_t \cap P_{nt} = \emptyset$。

Edmonds 等人曾提出，多面体结构与问题复杂度有关，见 [3], ; 分离定理 [14, 22] 的推论最能说明这一点。思考这一理念如何体现在排列集合上，也许排列集合具有完全对称性，使得 B_n 的结构可以表示为紧凑表示的解集；而回路子集 P_t 则具有完全非对称性，使得 TSP_n的结构永远无法拥有任何紧凑表示。关于这两个多面体的进一步思考见 [18]。

在早期的工作中， [9], 提出了一种构想：从一个立方体出发，通过 ϵ-拉伸（$\epsilon > 0$），从立方体内部构造其对偶体的极值点。

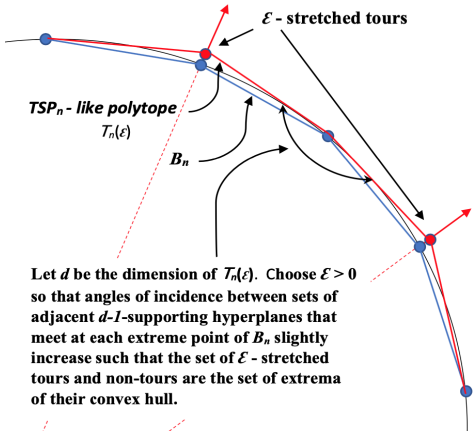

FIGURE 2.1。 *Key Idea: Crafting a TSP_n-like Polytope via ϵ-Stretched Tours of B_n.*

立方体各面的算术中心远离其中心的位置。它们通过小幅 ϵ 拉伸从各个面上“弹出”。 $2n$ 约束的解集（一个立方体）以及其对偶体的 $2n$ 极值点集的凸包，随后被嵌入两个互不相交的正交子空间中。立方体与其对偶体的凸包，是将这些集合投影到同一子空间（并投影到/定义凸包上）后取其凸组合而形成的，并且具有紧凑表示。对于较小的 $\epsilon > 0$，对偶体的极值点相对于这两个集合的凸包仍然是极点。这些想法引出了一个关键思路：以类似方式构造一个 ϵ拉伸的 TSP_n ，方法是在 B_n 内部通过对回路进行 ϵ 拉伸，使其远离 B_n 的算术中心；也就是说，TSP_n 的极值点集已经是 B_n 的极值点集的子集，只是尚未拉伸。或许可以构造一个类似 TSP_n的多面体，即取 1） B_n经拉伸的（巡回）极值点，与 2）未拉伸的（非巡回）极值点的补集的凸包；并且，经拉伸的巡回与未拉伸的非巡回或许仍能相对于它们的组合凸包保持为极点。如果可行，诀窍就在于以恰当的方式调整/调节 ϵ 。因此，Ted多面体的目标是内置一种能够区分极点巡回与极点非巡回的性质。图 2.1 给出了一个类比。起初，圆上有五个极值点。通过将 B_n 的两个原始极值点向远离圆心的方向拉伸，得到两个经 ϵ拉伸的巡回（极值点）。所有点仍然都是极点，而这两个经 ϵ拉伸的巡回（在引理 2.2 中形式化）与其余三个极值点组成的集合相区别，即它们位于半径更大的圆上；不过，对于Ted多面体，这一思路是以线性方式区分巡回与非巡回。

2.2. 多面体极值点的变换 B_n. P_t 中的所有成员首先都转换为拉伸回路，然后平移到正正交象限。 P_{nt} 中的成员则直接平移到正正交象限。

DEFINITION 2.6. 定义 $\overline{B_n}$ 为 B_n 的算术中心点，由下式给出

$$\overline{B_n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

步骤 1：将 P_t 转换为拉伸回路 P'_t。 将所有 $(n-1)!$ B_n的极点转换为沿远离 B_n 的方向创建拉伸回路，即 $P_t{}' = P_t + \epsilon\,(P_t - B_n)$，其中 $\epsilon > 0$。注意， $P_t[i,j] = 0$ 变为 $P_t{}'[i,j] = \frac{\epsilon}{n}$，而 $P_t[i,j] = 1$ 变为 $P_t{}'[i,j] = 1 + \epsilon - \frac{\epsilon}{n}$。请参见下面的示例，其中 P_t 是巡回（1−2−3−4）。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1+\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\epsilon \\ 1+\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\epsilon}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.2。 *How to Make A Stretched Tour.*

步骤 2：拉伸回路的平移 P'_t 与非巡回P_{nt} 至正正交象限。将 P'_t 平移 $\frac{\epsilon}{n}$，使其进入正正交象限，并将成员 $Q_t = P_t{}' + \epsilon B_n = P_t + \epsilon$ 重命名为 $P_t - B_n + \epsilon B_n = P_t(1+\epsilon)$。同样地，平移并重命名所有 P_{nt}，使其成为 $Q_{nt} = P_{nt} + \epsilon B_n$。参见图 2.3，其中 $P_t{}'$ 是拉伸回路（1 − 2 − 3 − 4），而 P_{nt}是非巡回（1 − 1）(2 − 2)(3 − 3)(4 − 4)。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1+\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\epsilon \\ 1+\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+\frac{\epsilon}{n} & \frac{\epsilon}{n} & \frac{\epsilon}{n} & \frac{\epsilon}{n} \\ \frac{\epsilon}{n} & 1+\frac{\epsilon}{n} & \frac{\epsilon}{n} & \frac{\epsilon}{n} \\ \frac{\epsilon}{n} & \frac{\epsilon}{n} & 1+\frac{\epsilon}{n} & \frac{\epsilon}{n} \\ \frac{\epsilon}{n} & \frac{\epsilon}{n} & \frac{\epsilon}{n} & 1+\frac{\epsilon}{n} \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.3. $Q_t = P_t(1+\epsilon)$, *and* $Q_{nt} = P_{nt} + \epsilon\overline{B_n}$.

LEMMA 2.1. 尺寸（*aff*（Q_t、Q_{nt}））$= n^2 - 2n + 1$。

证明。Aff(Q_t, Q_{nt}) 是 aff(B_n) 的平移。众所周知，dim(aff(B_n)) $= n^2 - 2n + 1$。因此，dim(aff(Q_t, Q_{nt})) $= n^2 - 2n + 1$。更具体地说，步骤 1 可以看作：1）将所有 P 平移 B_n，即移动 B_n，使其中心位于原点；2）仅将 P_t 中平移后的成员乘以一个标量倍数；3）再从原点平移回去。由于对这些向量的任意子集进行任何非零缩放，都不会影响所有平移后极值点的张成空间的维数，因此 dim($(P_t - \frac{1}{n})(1+\epsilon)$ $P_{nt} - \frac{1}{n}$) $=$dim($P_t - \frac{1}{n}, P_{nt} - \frac{1}{n}$)。但是 dim($P_t - \frac{1}{n}, P_{nt} - \frac{1}{n}$) $=$dim($P - \frac{1}{n}$)$=$dim(aff((P))$=$dim(aff(B_n)) $= n^2 - 2n + 1$，也就是说，从原点平移回去后维数保持不变；而步骤 2 只是将步骤 1 中构造的仿射子空间平移（$\frac{\epsilon}{n}$），即 aff(Q_t, Q_{nt})。 □

2.3. Q_t 和 Q_{nt}中的点的性质及其与图的关系。令 Q 为 B_n的所有变换和平移后的极值点组成的集合，即 Q_t 和 Q_{nt}中的所有点。Q_t 和 Q_{nt} 的元素称为点，而非极值点；也就是说，尚未证明存在 $\epsilon > 0$，使得 Q_t 和 Q_{nt} 中的点集就是 conv(Q_t,Q_{nt}) 的极值点集。

Remark 2.2. Q 中的每个点按构造都满足缩放后的双随机约束集。

$$\begin{aligned}&\sum_j Q[i,j] = 1+\epsilon, i = 1,2,...,n\\&\sum_i Q[i,j] = 1+\epsilon, j = 1,2,...,n\\&q(i,j) \in [0,1]\end{aligned}$$

Remark 2.3. Q_t 中的每个点相对于 *conv*(Q_t)都是极值点；也就是说，每个 Q_t 都位于半径为$(1+\epsilon)\sqrt{n}$的严格凸超球面上，并且是非自反的。

Remark 2.4. Q_{nt} 中的每个点相对于 *conv*(Q_{nt})都是极值点；也就是说，每个 Q_{nt} 都位于半径为$\sqrt{n(1+\frac{\epsilon}{n})^2 + (n^2 - n)\frac{\epsilon^2}{n^2}}) = \sqrt{1+\epsilon\binom{2+\epsilon}{n}}\sqrt{n}$的严格凸超球面上，并且是自反的。

Theorem 2.1. 考虑有限集合 $|Q| = n!$ 上的 $max < G_H, Q >$ 点，其中图 G_H 是哈密顿的。于是

$$max < G_H, Q > is \begin{cases} = n(1+\epsilon),\ attained\ for\ a\ Q \in Q_t \\ \leq n(1+\epsilon) - \epsilon,\ may\ be\ attained\ for\ a\ Q \in Q_{nt} \end{cases}$$

证明。首先考虑 $max < G_H$，$Q_t >$。对于 Q_t 中的每个点，在 $1+\epsilon$ 级有 n 个非对角分量，其余分量均处于零级。这些点中的每一个都覆盖一条巡回，分别对应于 $(n-1)!$ 条回路。因此，Q_t 中存在一个对应点，覆盖 G_H 中的每条巡回；对于每个点，内积和因此为 $n(1+\epsilon)$。接下来考虑 $max < G_H$，$Q_{nt} >$。G_H 是简单的，因此对角分量处于零级。为了最大化 $< G_H$，$Q_{nt} >$，选择 G_H 为完全的（从而至多有 $n^2 - n$ 个非对角】【。

G_H 的分量处于单位级别），并且仅考虑那些 Q_{nt}，其对角分量处于 $\frac{\epsilon}{n}$ 级别，这意味着对于每个点，处于$1+\frac{\epsilon}{n}$级别的非对角分量最多出现（n）次，而处于 $\frac{\epsilon}{n}$级别的非对角分量最多出现 n^2-2n次。$< G_H$的最大可能值，$Q_{nt}>=n(1+\frac{\epsilon}{n})+(n^2-2n)(\frac{\epsilon}{n})=n(1+\epsilon)-\epsilon$.□

THEOREM 2.2. 考虑 $max < G_{NH}, Q >$在由$|Q| = n!$ 个点组成的有限集合上，其中图 G_{NH} 是非哈密顿图。那么

$$max < G_{NH}, Q >= \begin{cases} \leq (n-1)(1+\epsilon), \textit{ may be attained for a } Q \in Q_t \\ \ll n(1+\epsilon)-\epsilon, \textit{ for all } Q \in Q_{nt} \end{cases}$$

证明。首先考虑 $max < G_{NH}, Q_t >$。回顾上文，对于 Q_t 中的每个点，在 $1+\epsilon$ 级都有 n 个非对角分量，其余分量均处于零级。与之前一样，这些点中的每个点都覆盖一个巡回，对应于 $(n-1)!$ 个回路中的每一个。由于G_{NH} 没有巡回，因此 Q_t 中没有点会在 G_{NH} 中覆盖一个巡回，内积之和至多为 $(n-1)(1+\epsilon)$。接下来，考虑 $max < G_{NH}, Q_{nt} >$。由于 G_{NH} 是简单的，对角分量同样处于零级。为使 $< G_{NH}, Q_{nt} >$最大，选择 G_{NH} 为临界非哈密顿，并使其在单位级上的弧尽可能多；也就是说，与上文不同， G_{NH} 不能是完全图，否则它就会变成哈密顿图。假设 G_{NH} 在单位级上有 $f(n) <n^2-n$ 个分量。现在只考虑那些对角分量处于 $\frac{\epsilon}{n}$ 级的 Q_{nt}，这样每个点在$1+\frac{\epsilon}{n}$ 级的非对角分量出现次数（n）达到最大，且有 n^2-2n 个非对角分量处于 $\frac{\epsilon}{n}$ 级。$< G_{NH}, Q_{nt} > = n(1+\frac{\epsilon}{n})+f(n)(\frac{\epsilon}{n}) \ll n(1+\epsilon)-\epsilon$ 的最大可能值。□

REMARK 2.5. 注意到 Q_t 是非自反的，而 Q_{nt} 是自反的，因此存在许多超平面将 $conv(Q_t)$ 与 $conv(Q_{nt})$ 分隔开来。这种分离性质是定理 *2.1* 和 *2.2* 证明背后的根本原因。

LEMMA 2.2. 考虑有限的 $|Q| = n!$ 点集上的 $max < G, Q >$。那么 $max < G, Q >=n(1+\epsilon) \Leftrightarrow$ 图 G 是哈密顿的。

2.4. Ted多面体。

DEFINITION 2.7. $\mathcal{T}_n(\epsilon) = conv(Q_t, Q_{nt})$ 其中 $\epsilon > 0$，即*Ted*多面体。

回顾引理 2.1，dim(aff(Q_t, Q_{nt}))=dim(aff($\mathcal{T}_n(\epsilon)$)) $= n^2-2n+1$；由注释 2.3 可知，$\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 至少有 $|Q_t|$ 个极值点。

2.4.1. $n(\epsilon)$、ϵ_g 和 ϵ_{max}的极值点。

DEFINITION 2.8. 给定 n、ϵ 以及 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 假设 Q 的所有成员恰好构成 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 的极值点集。则称 ϵ 是良好的，称为ϵ_g。

DEFINITION 2.9. 给定 n、ϵ_g 和 $\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$，最大的 ϵ_g 是 ϵ_{max}。

创建、编写并运行了一个线性规划模型，以便对于 n=4、5 和 6，确定 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 关于所选 ϵ的极值点集。对于 Q_{nt}中的每个 Q_i ，注意到 Q_t 的集合是极值点，线性规划模型尝试将 Q_i 创建为 Q_t 与 Q_{nt}的并集中各成员的凸组合，但不包括 Q_i。如果每个 Q_i 都不是这些成员的凸组合，那么 Q_t 和 Q_{nt} 中的所有成员相对于 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$都是极值点。

表 2.1 展示了 ϵ=1、5、10 和 20 对应的结果；对于 n=4、5 和 6 中的每一个值，都存在一个 ϵ_g 。表中的数值是 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 的极值点数量†† ，以 1 - 2 - 3 的形式表示，并分类如下：

1. 变换后的无自反回路，即无自反 Q_t、拉伸回路 2. 平移后的无自反非回路，即自反 Q_{nt}3. 平移后的自反非回路，即自反 Q_{nt}

未加粗的条目表示 Q_t 与 Q_{nt} 的并集就是 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 的极值点集。随着 ϵ 增大，对应于 ϵ-拉伸回路的无自反 Q_t 的凸包不断扩张，因此所有 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 也随之扩张，因为所有 Q_{nt} 都进一步远离原点，深入正正交象限。因而，Q_{nt} 中的一些成员会成为无自反Q_t 与 Q_{nt}中其他成员的凸组合，不再是 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 的极值点。有趣的是，很容易证明，只有对应于平移后的无自反非回路的那些 Q_{nt} 才可能位于 $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ 的内部；表中加粗的条目表示这种情况。

对于 n=4，没有任何与非自反非回路对应的 Q_{nt} 落在 $\mathcal{T}_4(\epsilon)$ 内部（对于 ϵ 的所有取值）。对于 n=5，所有与非自反非回路对应的 Q_{nt} 都落在 $\mathcal{T}_5(\epsilon)$ 内部，适用于 $\epsilon \geq 5$。对于 n=6，从 $\epsilon = 5$ 开始，一些与非自反非回路对应的 Q_{nt} 落在 $\mathcal{T}_6(\epsilon)$ 内部；随着 ϵ 增大并超过 5，更多 Q_{nt} 继续落在 $\mathcal{T}_6(\epsilon)$ 内部。

TABLE 2.1*Classification and Counts of Extrema of $\mathcal{T}_n(\epsilon)$ as a Function of n and ϵ.*

n	B_n	$\mathcal{T}_n$(1)	$\mathcal{T}_n$(5)	$\mathcal{T}_n$(10)	$\mathcal{T}_n$(20)
4	6-3-15	6-3-15	6-3-15	6-3-15	6-3-15
5	24-20-76	24-20-76	**24-0-76**	**24-0-76**	**24-0-76**
6	120-145-455	120-145-455	**120-26-455**	**120-19-455**	**120-13-455**

这些结果本身就很有趣。无论如何，对于 n=4、5 和 6，都存在 $\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$（$\epsilon_g = 1$ 已足够），由此得到猜想 2.1。

CONJECTURE 2.1. 多面体 $\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$ 对所有 $n \geq 4$均存在。

†或许存在一些 E，其 ϵ 是分别参数化的，针对各自的巡回区段；它们共同在 $\mathcal{T}_n(E)$ 中形成理想对称性。也就是说，当参数调整越过 $\mathcal{T}_n(E)$ 达到理想对称性的临界点后，或许会立即发生彻底的转变。引理 2.2 或许可以改写为类似“... $max < G, Q > \geq n(1 + E_{min})$ $\Leftrightarrow$ 图 G ...” ††这些计数会因机器零点不同而变化，范围在 10^{-8} 到 10^{-10} 之间。

2.4.2. 的极点表述$\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$。给定一个$\epsilon_g$，将 Q_t 中的每个点写成一个长度为 n^2 的、无粗体的列向量 q_t，其分量 $Q_t[i,j]$ 按从左到右、从上到下的顺序读取。共有（$n-1$）！个 q_t。类似地，构造 $n!$ 个 $-$（$n-1$）！ q_{nt}。定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 为一个非负列向量，其变量标量之和为 1；并定义长度为 n^2的列向量变量$\boldsymbol{q}$，使其为q_t 和 q_{nt} 中元素的凸组合，具体取决于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的赋值方式。参见图 2.4。

$\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$ 的极点表述是一种扩展表述，其规模为 $\mathcal{O}(n!)$，其极值点集嵌入在 $\mathcal{R}^{n^2}$ 中，并由$\boldsymbol{q}$编码。相比之下， B_n 由指派约束建模，其紧凑型线性规划表述的规模为 $\mathcal{O}(n^2)$。其极值点集同样嵌入在 $\mathcal{R}^{n^2}$ 中。两个多面体在 $\mathcal{R}^{n^2-2n+1}$ 中都具有唯一表示，即对于B_n，存在 n^2 个唯一的相交半空间，这些半空间由 n^2 个唯一的诱导面不等式定义。现在自然会提出一个问题：“有多少个唯一的相交半空间定义了 $\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$？”第 2.4.3 节对唯一表示进行了简要讨论，其中包括一个示例。

$$\left(\begin{array}{cc|c} q_t & q_{nt} & -I \\ \hline \mathbf{1} & & \mathbf{0} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{q} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 1 \end{array}\right)$$
$$\boldsymbol{\alpha} \geq 0$$

FIGURE 2.4。 *Extreme Point Formulation Where $\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$ is Embedded in R^{n^2}.*

图 2.5 展示了 Hamilton回路判定问题的一个非紧凑型线性规划表述，随后图 2.6 展示了第二种表述，其中可行域为 $\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$，嵌入于 R^{n^2} 中。设 G 为任意图，将其写成一个 n^2 列向量$\boldsymbol{g}$，其分量 $G[i,j]$ 按从左到右、从上到下的顺序读取。

$$max <\boldsymbol{g}^T,\boldsymbol{q}> \text{ subject to;}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} q_t & q_{nt} & -I \\ \hline \mathbf{1} & & \mathbf{0} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{q} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 1 \end{array}\right)$$
$$\boldsymbol{\alpha} \geq 0$$

其中，当且仅当 $max <\boldsymbol{g}^T,\boldsymbol{q}>=n(1+\epsilon)$ 时， G 是哈密顿的。

FIGURE 2.5. *LP Formulation of the Hamilton Tour Decision Problem.*

2.4.3. $\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$ 的唯一外部表示。一般而言，多面体的（满维）面定义为多面体与某个界定超平面（诱导面不等式）的解集的交集，其仿射包的维数为 dim(polytope) - 1。详见 [2] for

$$max <\boldsymbol{g}^T, \boldsymbol{q}> \text{ subject to;}$$
$$\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{\mathcal{T}_n(\epsilon_g)}$$
$$\boldsymbol{q} \geq 0$$

where G is Hamiltonian if and only if $max <\boldsymbol{g}^T, \boldsymbol{q}>=n(1+\epsilon)$.

FIGURE 2.6. *LP Formulation of the Hamilton Tour Decision Problem.*

详细信息。将多面体的极点表述正交投影到嵌入于 dim(polytope) 维向量空间中的图像上，会得到一个规模最小、有限且唯一的不冗余面诱导不等式集，并且可以使用多种方法计算这些不等式 [1, 5, 9, 10, 11, 12, 15]。这组不等式（称为）多面体的唯一外部表示。

示例。$\boldsymbol{\mathcal{T}_n(\epsilon_g)}$。一般情况下，适用于$n$ 的像空间变量集如图 2.7 所示。对于 n=4 和 ϵ_g=1，并在每个 24 个极值点（6 Q_t 和 18 Q_{nt}）中删去最后一行和一列后，可计算出一组唯一的 508* 不可约诱导面不等式（唯一外部表示），其对应的 508 个半空间交集维数为 9，且为 $\mathcal{T}_4(1_g) \in \mathcal{R}^9$。

$$\begin{pmatrix} Q[1,1] & Q[1,2] & ... & Q[1,n-1] & X \\ Q[2,1] & Q[2,2] & ... & Q[2,n-1] & X \\ ... & ... & ... & ... & X \\ Q[n-1,1] & Q[n-1,2] & ... & Q[n-1,n-1] & X \\ X & X & X & X & X \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.7. *Image Space Variables for $\mathcal{T}_n(\epsilon_g)$ in $\mathcal{R}^{n^2-2n+1}$.*

3. 讨论。有两点值得注意，它们是将回路集合从 B_n提升而得，其形式为 Q_t，并与 Q_{nt}分离。

按照设计，所有与所有 非自反回路 P_t 相对应的 Q_t 均位于超平面 $\sum Q_t[i,i] = 0$中。其余非自反非巡回则被映射到 Q_{nt}的一个子集中，该子集满足 $Q_{nt}[i,i]=\frac{\epsilon}{n}$。因此，它们同样与回路和自反非巡回相分离，并且位于超平面$\sum Q_{nt}[i,i] = \epsilon$中。这是第一个观察结果/说明。

第二条评论更具推测性，也带有质疑意味。回想表 2.1，以及与非自反非回路相对应的 Q_{nt} 子集似乎落在 $\mathcal{T}_n(\epsilon > \epsilon_{max})$ 的内部，且随着 ϵ 增大而如此（对于 n=6，中间的数字会随着 ϵ 增大而减小）。也就是说，作为 n 和 ϵ 的函数，

*使用 Ray 算法 [10] 计算得出。这种方法具有概率性，只能提供面数量的下界。

存在由 Q_{nt} 和 Q_t 中至少一个元素构成的凸组合，严格位于 $\mathcal{T}_n($ $\epsilon > \epsilon_{max}$) 的内部。回想注 2.4。这里究竟发生了什么并不清楚，这种情况是否普遍成立也不清楚；理解这一奇怪的推论是否有用，同样尚不确定。

我对 Ted 的致敬至此完成。如果他今天还在这里，我想他一定会对我把送他礼物多胞体这件事“合理化”的说辞会心一笑。我甚至能想象听见他评论道：“你送我一个多胞体……？？哈！”然而，你看，这的确是一份完美的礼物。我们就是这样相识的，也是在20世纪80年代，当 Ted 展示他最初的线性规划模型时，我们由此开始携手合作；而我们的合作也以此画上句号。因此，我怀着深情缅怀之心，将$\mathcal{T}_n(\epsilon_9)$献给 Ted Swart——我最亲爱的、温和而富有创造力的朋友之一，我的同事，也是我的导师。

参考文献

[1] H.G. Bartels and S.G. Bartels, *The facets of the asymmetric 5-city traveling salesman polytope* 33 1989 193 197 , 运筹研究杂志, ( ), 页码 – 。[2] A. Brøndsted, *An Introduction to Convex Polytopes*, 数学研究生教材，施普林格出版社，纽约，1983年。[3] W. Cook, *Information, computation, optimization: Connecting the dots in the traveling salesman problem*, https://www.youtube.com/watch?v=q8nQTNvCrjE，检索于2020年3月26日（2018），18:00分钟–20:00分钟。[4] , *Personal web page of william cook*, https://www.math.uwaterloo.ca/ bico/，检索于2023年~~2月10~~日（2018）。[5] M. Demers and S.J. Gismondi, *Enumerating facets of $Q_{0/1}$*,《实用数学》，77（2008），页码 125–134。[6] S. Fiorini, S. Masser, S. Pokutta, H. R. Tiwary, and R. de Wolf, *Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds* 44th 2012 95 106 , 计算理论研讨会论文集, ( )，页码 – 。[7] P. Fischer and F.R. Swart, *Three-dimensional, line stochastic matrices and extreme points.* 69 1985 179 203 ,《线性代数及其应用》, ( )，页码 – 。[8] M.R. Gary, D.S. Johnson, and R.E. Tarjan, *The planar hamilton circuit problem is np-complete* 5 1976 704 714 ,《SIAM计算杂志》, ( ), 页码 – 。[9] S.J. Gismondi, *Dueling cubes*,《实用数学》，54（1998），页码 241–251。[10] , *The ray algorithm - an easy to implement facet finding algorithm for convexpolytopes*, 1999年度会议论文集, ~~加拿大~~行政科学协会管理科学分部，20（1999），页码 23–30。[11] , *An O n^3 sized external representation of a factorial faceted factorial extreme point polytope* 63 2003 109 114 , 《实用数学》, ( ), 页码 ~~– 。[12]~~ S.J. Gismondi and E.R. Swart, *A factorial faceted factorial extreme point polytope crafted from the assignment polytope* 60 2001 181 192 , , 《实用数学》, ( ), 页码 – 。[13] S.J. Gismondi, E.R. Swart, and A. Lee, *using matching to detect infeasibility of some integer programs* 228 2017 173 188 ,《数论大会》, ( ), 页码 – 。[14] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver, *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization.* 1 1981 169 197 ,《组合数学》, ( ), 页码 – 。[15] I. Heller, *On the travelling salesman's problem*, 载于《第二届线性规划研讨会论文集》，华盛顿特区，1955年，华盛顿特区，1955年，国家标准局，页码 643–665。[16] University of Waterloo, *Tsp annotated bibliography*,

https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/biblio/1990.html，检索于2023年1月31日（2005）。[17] N. Robertson, D. Sanders, and R. Thomas, *The four-colour theorem*, 组合理论杂志 B 辑，70（1997），页码 2–44。[18] E.R. Swart, S.J. Gismondi, N.R. Swart, C.E. Bell, and A. Lee, *Decidinggraph non-hamiltonicity via a closure algorithm*, 算法与计算杂志，48（2016），页码 1–35。[19] E. R. Swart, *The philosophical implications of the four-color problem*, 《美国数学月刊》，87（1980），页码 697–707。[20] E. R. Swart and F. Allaire, *A systematic approach to the determination of reducible configurations in the four color conjecture*, 组合理论杂志 B 辑，25（1978），页码 339–362。[21] E. R. Swart and S. J. Gismondi, *A new type of four-colour reducibility*, 《数值组合论》，82（1991），页码 33–48。[22] E. Tardos, *A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs*. 34 1986 250 256 ，《运筹学》，( )，页码 – 。[23] G.J. Woeginger, *Website of: Gerhard J Woeginger The P-versus-NP page. Re- ,,, trieved November 7 2012* http://www.win.tue.nl/ gwoegi/P-versus-NP.htm，（2012）。[24] M. Yannakakis, *Expressing combinatorial optimization problems by linear programs* 20th 1988 223 228 , ACM STOC 年度会议论文集，( )，页码 – 。