arXiv:2305.05018v1 [math.GT] 8 May 2023

辛群中的射影阿诺索夫子群

玛丽亚·比阿特丽斯·波泽蒂和康斯坦丁诺斯·楚瓦拉斯

Abstract. 我们证明，若字双曲群的 Gromov 边界真包含一个 2-球面，则它不能存在到 $\mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$，$m \in \mathbb{N}$ 的射影 Anosov 表示。我们还证明，若字双曲群存在到 $\mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ 的射影 Anosov 表示，则它或者虚自由，或者虚曲面群；这一结果由 Dey– Greenberg–Riestenberg 独立证明。

1. Introduction

Labourie 在研究 Hitchin 分支时引入了从字双曲群到实半单李群的 Anosov 表示 [13] ，Guichard– Wienhard 随后在 [10]中对其进行了推广。Anosov 表示构成实李群离散子群中一类丰富且稳定的对象，Kapovich–Leeb–Porti 对其进行了广泛研究[12], Gu´eritaud–Guichard–Kassel–Wienhard [9], Bochi–Potrie–Sambarino [1] 等人也对其进行了研究；如今，Anosov 表示被认为是秩一李群中凸余紧子群在高秩情形下恰当的推广。

设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，且整数 $1 \leqslant k \leqslant \frac{d}{2}$。字双曲群 ρ 的表示 $\Gamma \to \mathsf{SL}_d(\mathbb{K})$ 称为 Γ k-阿诺索夫表示，如果它关于 $\mathsf{SL}_d(\mathbb{K})$ 中一对相反抛物子群是阿诺索夫的，其中这对子群分别是一个 k-平面与一个互补的 $(d-k)$-平面的稳定子群（见 §2）。本文研究 1-阿诺索夫（或射影阿诺索夫）表示，其像是辛群 $\mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{K})$， $m \geqslant 1$的子群。本文的第一个主要结果如下。

定理 1.1。设 Γ 是一个字双曲群，它存在一个 1-阿诺索夫表示$\rho : \Gamma \to \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$。那么， Γ 是一个有限指数自由群或有限指数曲面群。

定理 1.1 由 Dey–Greenberg– Riestenberg 独立地以不同方法证明，见[5]。我们的第二个主要结果给出了到复辛群的 1-阿诺索夫表示所受的限制。

定理 1.2. 假设 Γ 是一个字双曲群，且它具有一个 1-阿诺索夫表示 $\rho : \Gamma \to \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$。那么， Γ 的 Gromov 边界不能真包含一个 2-球面。

由前两个定理以及辛群的奇数次外幂仍为辛群这一事实，可得以下推论。

推论 1.3. 假设 Γ 是一个字双曲群，且 $\rho : \Gamma \to \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{K})$ 是一个 k-阿诺索夫表示，其中 $1 \leqslant k \leqslant m$ 是奇数。
(i) 若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$，则 Γ 在有限指数意义下是一个曲面群或自由群。
(ii) 若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，则 Γ 的 Gromov 边界不能真包含一个 2-球面。

特别地，任何包含一个与 $\mathsf{SL}_2(\mathbb{K})$ 中的一致格同构的无限指数拟凸子群的字双曲群，都无法具有一个映入 $\mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{K})$ 的 k-阿诺索夫表示，其中 k 为奇数且 $1 \leqslant k \leqslant m$ 。

一个表示 $\rho : \Gamma \to \mathsf{SL}_d(\mathbb{K})$ 被称为 博雷尔阿诺索夫表示 ，如果 ρ 对于每个 k都是 $1 \leqslant k \leqslant \frac{d}{2}$-阿诺索夫的。据我们所知，目前已知的能够将博雷尔阿诺索夫表示映入 $\mathsf{SL}_d(\mathbb{C})$（其中某个 $d \geqslant 4$）的字双曲群实例，均与一个凸余紧克莱因群虚拟同构。定理 1.2 的以下推论给出了若干字双曲群实例，它们无法在无穷多个 $\mathsf{SL}_d(\mathbb{C})$ 中承认博雷尔阿诺索夫表示。 $d \in \mathbb{N}$。

Date: 2023年5月10日。

推论 1.4. 假设 Γ 是一个字双曲群，其 Gromov 边界真包含一个 2-球面。那么不存在 $(2q+1)$-阿诺索夫表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{SL}_{4q+2}(\mathbb{C})$。

定理 1.1 和定理 1.2 的证明方法使我们能够对某些超凸表示类得到类似的限制。$,q,r)$-超凸表示这一概念（见定义 3.1）由波泽蒂–桑巴里诺–维恩哈德在 中引入，并且与希钦表示具有共同的横截性性质。

定理 1.5. 设 Γ 是一个字双曲群，$1 \leqslant p \leqslant \frac{d}{2}$ 是一个奇数。假设$\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$ 是一个 $(p,p,2p)$-超凸表示。(i) 若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，则 Γ 在有限指数意义下是一个曲面群或自由群。(ii) 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，则 Γ 的 Gromov 边界不能真包含一个 2-球面。

对于 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 和 $d=2p$，前一个定理重新得出了 Dey [6] 在维数 $2p$ 下的主要结果，以及第二位作者的结果[15]。

与取值于$\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$的博雷尔阿诺索夫表示的情形形成对比的是，在某些维数下，只会出现几乎自由群或几乎为曲面群的群（见 [6], [15] 和 [4, 定理 1.1 和 1.6]），目前尚无关于取值于$\mathrm{SL}_d(\mathbb{C})$ 的博雷尔阿诺索夫表示的定义域群的分类，无论$d \geqslant 3$为何。根据推论1.4，这引出了 Sambarino 关于复特殊线性群的问题的如下类似问题[1]。

问题1.6. 设 Γ 是一个字双曲群，并且存在一个取值于 $\mathrm{SL}_d(\mathbb{C})$ 的博雷尔阿诺索夫表示，其中 $d \geqslant 4$。那么，Γ 是否与 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$的某个凸余紧子群几乎同构?

我们在此要求 $d \geqslant 4$，因为每个一致格 $\Delta \subset \mathrm{SU}(2,1)$ 嵌入到 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ 中都是 1-阿诺索夫的，并且 Δ 的 Gromov 边界与 3-球面同胚。

致谢。第一位作者感谢德国研究联合会提供的资助（项目编号 427903332，埃米·诺特计划），并获德国研究联合会通过德国卓越战略 EXC-2181/1-390900948 提供支持。第二位作者感谢欧洲研究委员会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划下提供的支持（ERC 初始资助项目 DiGGeS，资助协议编号 715982）。

2. 背景

本节将介绍一些记号，定义阿诺索夫表示，并证明一个关键命题。

设 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。对于 $d \geqslant 2$, $(e_1,\dots,e_d)$ 是 $\mathbb{K}^d$ 的标准基，并配备标准 Hermitian 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，记 $\mathrm{S}^1(\mathbb{K}^d)$ 为单位球面。在本文中，$\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{K})$ 是辛双线性形式 ω 的自同构群：$\mathbb{K}^{2m}\times\mathbb{K}^{2m}\to\mathbb{K}$,

$$\omega(u,v) := u^T(\Omega_m v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_{i+n} - \sum_{i=1}^{n} u_{i+n}v_i \quad u,v\in\mathbb{K}^{2m},$$

其中 $\Omega_m := \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$。

2.1. Anosov 表示。 在本文中，Γ 表示一个字双曲群，$\partial_\infty\Gamma$表示其 Gromov 边界。关于双曲群的更多背景知识，请参阅[8]。我们在 Γ 上赋予一个左不变字度量，对于 $\gamma\in\Gamma$，$|\gamma|_\Gamma$ 表示 γ 到Γ的单位元的距离。对于矩阵 $g\in\mathrm{SL}_d(\mathbb{K})$，令 $\sigma_1(g)\geqslant\sigma_2(g)\geqslant\ldots\geqslant\sigma_d(g)$ 为 g的奇异值。回顾一下，对于每个 i，$\sigma_i(g)=\sqrt{\lambda_i(gg^*)}$，其中 g^* 是 g的共轭转置，且 $\lambda_1(gg^*)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_d(gg^*)$是 gg^*的特征值模。

[1]Andr´es Sambarino 曾询问：一个存在 Borel Anosov 表示到 $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ 的无挠字双曲群，是否必然是自由群或曲面群。

固定 $k \in \mathbb{N}$，其中 $1 \leqslant k \leqslant \frac{d}{2}$。若存在 c、$\mu > 0$ 使得，那么双曲群 Γ 的表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{SL}_d(\mathbb{K})$ 称为 k-阿诺索夫，当且仅当

$$\frac{\sigma_k(\rho(\gamma))}{\sigma_{k+1}(\rho(\gamma))} \geqslant ce^{\mu|\gamma|_\Gamma} \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

上述奇异值间隙刻画与 Labourie 最初提出的动力学定义等价，这一事实归功于 Kapovich–Leeb–Portiin [12] 以及独立地归功于 Bochi–Potrie– Sambarino [1]。

若表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{SL}_d(\mathbb{K})$ 是一个 k-阿诺索夫表示，则存在唯一一对 ρ-等变连续映射 $\xi_\rho^k\colon \partial_\infty\Gamma \to \mathrm{Gr}_k(\mathbb{K}^d)$ 和 $\xi_\rho^{d-k}\colon \partial_\infty\Gamma \to \mathrm{Gr}_{d-k}(\mathbb{K}^d)$，称为 ρ 的 Anosov 极限映射。ρ 的极限映射具有两项关键性质：它们相容（即对每个 $x \in \partial_\infty\Gamma$，$\xi_\rho^k(x) \subset \xi_\rho^{d-k}(x)$），并且横截，也就是说，当 $x \neq y$ 时，$\mathbb{K}^d = \xi_\rho^k(x) \oplus \xi_\rho^{d-k}(y)$。关于 Anosov 表示及其极限映射的更多背景，请参阅 [13, 10, 12, 9, 1, 3]。

我们需要以下这个初等观察。

观察 2.1. 设 X 是一个可度量化空间，且 $\xi\colon X \to \mathbb{P}(\mathbb{K}^d)$ 是一个连续映射。假设存在 $W \in \mathrm{Gr}_{d-1}(\mathbb{K}^d)$，使得对每个 $x \in X$都有 $\mathbb{K}^d = W \oplus f(x)$。那么 ξ可提升为一个连续映射 $\widetilde{\xi}\colon X \to \mathbb{S}^1(\mathbb{K}^d)$。

证明。我们选取 $g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$，使得 $W = g\langle e_2, \dots, e_d\rangle$。那么可以直接定义 ξ的一个提升 ξ：对于 $x \in X$，写作 $\xi(x) = [a_x g e_1 + g v_x]$，其中 $a_x \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ 和 $v_x \in W$，并令

$$\widetilde{\xi}(x) = \frac{ge_1 + a_x^{-1} g v_x}{\left\| ge_1 + a_x^{-1} g v_x \right\|}.$$

不难验证，ξ 定义良好、连续，且是 ξ的一个提升。 □

我们用 K_d 表示 $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ 中保持内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$不变的极大紧子群。对于一点 $[k_1 e_1] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^d)$ 和一个超平面 $V = k_2\langle e_1, \dots, e_{d-1}\rangle$，其中 $k_1, k_2 \in K_d$，它们之间的距离定义为 $\mathrm{dist}([k_1 e_1], V) := |\langle k_1 e_1, k_2 e_d\rangle|$。

我们以如下命题结束本节，该命题对于证明下一节中的定理至关重要。

命题 2.2. 设 Γ 是一个非初等字双曲群，并固定 $w_0 \in \partial_\infty\Gamma$。假设 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{K})$ 是一个 1-阿诺索夫表示，其阿诺索夫极限映射为 $\xi_\rho^1\colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}(\mathbb{K}^{2m})$。那么存在一个连续提升 $\widetilde{\xi}_\rho^1\colon \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\} \to \mathbb{S}^1(\mathbb{K}^{2m})$，它是 ξ_ρ^1 在 $\partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\}$ 上的限制；并且对于任意一对不同的点 x、$y \neq w_0$，有

$$\omega\big(\widetilde{\xi}_\rho^1(x), \widetilde{\xi}_\rho^1(y)\big) \neq 0.$$

证明。令 $\xi_\rho^{2m-1}\colon \partial_\infty\Gamma \to \mathrm{Gr}_{2m-1}(\mathbb{K}^{2m})$ 为与 ξ_ρ^1横截的极限映射。注意，$\xi_\rho^1(x)$ 与超平面 $\xi_\rho^{2m-1}(w_0)$ 对每个 $x \neq w_0$均横截，因此，根据观察 2.1，我们得到一个连续提升 $\widetilde{\xi}_\rho^1\colon \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\} \to \mathbb{S}^1(\mathbb{K}^{2m})$，它是 ξ_ρ^1 在 $\partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\}$上的限制。

现在，如果 x、$y \neq w_0$ 不同，根据 ρ 的极限映射的相容性，我们可以选取 k_x、$k_y \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{K}) \cap K_d$，使得

$$\xi_\rho^1(x) = [k_x e_1], \xi_\rho^1(y) = [k_y e_1] \text{ and } \xi_\rho^{2m-1}(y) = k_y\big\langle e_1, \dots, e_m, e_{m+2}, \dots, e_{2m}\big\rangle.$$

随后，直接计算可得

$$\begin{aligned}\big|\omega\big(k_y e_1, k_x e_1\big)\big| &= \big|(k_y e_1)^T \Omega_m k_x e_1\big| = \big|e_1^T (k_y^T \Omega_m k_x e_1)\big| = \big|e_1^T (\Omega_m k_y^{-1} k_x e_1)\big| \\ &= \big|\langle \Omega_m k_y^{-1} k_x e_1, e_1\rangle\big| = \big|\langle k_y^{-1} k_x e_1, e_{m+1}\rangle\big| = \mathrm{dist}\big(\xi_\rho^1(x), \xi_\rho^{2m-1}(y)\big)\end{aligned}$$

因此，由横截性可得 $\big|\omega(\widetilde{\xi}_\rho^1(x), \widetilde{\xi}_\rho^1(y))\big| = \big|\omega(k_x e_1, k_y e_1)\big| \neq 0$。命题得证。□

3. PROOFS

默认情况下，如果表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{K})$ 作为从 Γ 到 $\mathsf{SL}_{2m}(\mathbb{K})$ 的表示时，ρ 是 k-Anosov 的，我们就称它为 k-Anosov。

定理的证明 *1.1*。假设存在一个 1-阿诺索夫表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$。

固定 $w_0 \in \partial_\infty\Gamma$ 并假设 Γ 不虚拟地同构于曲面群或自由群。根据 Gabai 的一个结果 [7]，$\partial_\infty\Gamma$ 不能是圆周，并且根据 [2] 我们可以找到一个嵌入 $\iota_1\colon S^1 \to \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\}$。

由命题 2.2 可知存在一个提升 $\widetilde{\xi}^1_\rho\colon \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\} \to \mathsf{S}^1(\mathbb{R}^{2m})$ 满足 $\omega\big(\widetilde{\xi}^1_\rho(x), \widetilde{\xi}^1_\rho(y)\big) \neq 0$ 当$x \neq y$时。接下来我们考虑映射 $L_1\colon S^1 \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$L_1(z) := \omega\big(\widetilde{\xi}^1_\rho(\iota_1(z)), \widetilde{\xi}^1_\rho(\iota_1(-z))\big) \quad z \in S^1,$$

其中，$-z \in S^1$ 表示 z的对径点。映射 L_1 是奇映射，因为 ω 是辛的，并且处处非零。然而，这与 L_1 必须具有恒定符号这一事实相矛盾。因此，我们得出结论：Γ 在有限指数意义下是一个曲面群或自由群。□

定理的证明 *1.2*。假设存在一个 1-阿诺索夫表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$。我们证明 $\partial_\infty\Gamma$ 不可能真包含 S^2。

我们用反证法。事实上，假设存在 $w_0 \in \partial_\infty\Gamma$ 以及一个嵌入$\iota_2\colon S^2 \to \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\}$。根据命题 2.2，$\xi^1_\rho$的阿诺索夫极限映射 ρ可提升为一个连续映射$\widetilde{\xi}^1_\rho\colon \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\} \to \mathsf{S}^1(\mathbb{C}^{2m})$。利用这个提升，我们定义映射 $L_2\colon S^2 \to \mathbb{C}$,

$$L_2(z) := \omega\big(\widetilde{\xi}^1_\rho(\iota_2(z)), \widetilde{\xi}^1_\rho(\iota_2(-z))\big) \quad z \in S^2.$$

映射 L_2 是连续的，$L_2(z) \neq 0$ 对每个 $z \in S^2$，并且 L_2 是奇映射，因为 ω 是辛的。然而，根据博苏克–乌拉姆定理（例如参见 L_2，这样的映射 [11, 推论 2B。7]）。由此得到矛盾，因此 $\partial_\infty\Gamma$ 不可能真包含一个 2-球面。□

注: 命题 2.2 表明，如果 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{K})$ 是具有极限映射 $\xi^1_\rho\colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}(\mathbb{K}^{2m})$的 1-阿诺索夫表示，那么 $|\omega(\xi^1_\rho(x), \xi^1_\rho(y))| \neq 0$对于任意一对不同的点 x，$y \in \partial_\infty\Gamma$均成立。特别地，如果 Γ是 $\mathsf{Sp}_2(\mathbb{K}) \cong \mathsf{SL}_2(\mathbb{K})$中的一致格，那么 ξ^1_ρ 无法提升为连续映射 $\partial_\infty\Gamma \to \mathsf{S}^1(\mathbb{K}^{2m})$。

对于 $d \geqslant 2$ 和 $1 \leqslant k \leqslant d$，令 $\wedge^k\colon \mathsf{SL}_d(\mathbb{K}) \to \mathsf{SL}(\wedge^k\mathbb{K}^d)$ 为 k^{th} 外幂。我们将 $\tau_k\colon \mathsf{Gr}_k(\mathbb{K}^d) \to \mathbb{P}(\wedge^k\mathbb{K}^d)$ 和 $\tau_{d-k}\colon \mathsf{Gr}_{d-k}(\mathbb{K}^d) \to \mathsf{Gr}_{d_k-1}(\wedge^k\mathbb{K}^d)$, $d_k = \binom{d}{k}$ 记为 Pl¨ucker 嵌入。一个标准事实是：如果 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{SL}_d(\mathbb{K})$ 是 k-阿诺索夫表示，则 1-阿诺索夫表示 $\wedge^k\rho\colon \Gamma \to \mathsf{SL}(\wedge^k\mathbb{K}^d)$ 的一对阿诺索夫极限映射为 $(\tau_k \circ \xi^k_\rho, \tau_{d-k} \circ \xi^{d-k}_\rho)$。

推论 *1.3* 的证明。注意，若 $1 \leqslant k \leqslant m$ 为奇数，则矩阵 $\wedge^k\Omega_m$ 是反对称的，因此 $\wedge^k\mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{K})$ 在 $\wedge^k\mathbb{K}^{2m}$ 上保持一个辛形式。若 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{K})$ 是 k-阿诺索夫的，则其外幂 $\wedge^k\rho$ 是 1-阿诺索夫的，因此由定理 1.1 和定理 1.2 分别立即得到 (i) 和 (ii)。□

推论 *1.4* 的证明。注意，群 $\wedge^{2q+1}\mathsf{SL}_{4q+2}(\mathbb{C})$ 保持辛双线性形式 $\omega_0\colon \wedge^{2q+1}\mathbb{C}^{4q+2} \times \wedge^{2q+1}\mathbb{C}^{4q+2} \to \mathbb{C}$ 其定义公式如下

$$\omega_0(u, v) = u \wedge v \quad u, v \in \wedge^{2q+1}\mathbb{C}^{4q+2}.$$

现在，若存在一个 $(2q+1)$-阿诺索夫表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{SL}_{4q+2}(\mathbb{C})$，则其外幂 $\wedge^{2q+1}\rho$ 是 1-阿诺索夫的，并且保持辛形式 ω_0。因此，根据定理 1.2，我们得出 $\partial_\infty\Gamma$ 不可能真包含一个 2-球面，这与我们的假设矛盾。因此，不存在 $(2q+1)$- 阿诺索夫表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{SL}_{4q+2}(\mathbb{C})$。□

在给出定理 1.5 的证明之前，我们先回顾 $(p、q、r)$-超凸表示的定义。

定义 3.1. ([14]) 设 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{GL}_d(\mathbb{K})$ 是一个 $\{p、q、r\}$-阿诺索夫表示，其中 $p+q \leqslant r$。称表示 ρ 为 $(p、q、r)$-超凸的，若对于任意三个互不相同的点 $x、y、w \in \partial_\infty\Gamma$，都有：

$$\big(\xi^p_\rho(x) \oplus \xi^q_\rho(y)\big) \cap \xi^{d-r}_\rho(w) = (0).$$

定理 1.5 的证明。假设 $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{GL}_d(\mathbb{K})$ 是 $(p,p,2p)$-超凸的，并固定 $w_0 \in \partial_\infty\Gamma$。对于 $x \neq w_0$, $\tau_p(\xi^p_\rho(x))$ 与超平面 $\tau_{d-p}(\xi^{d-p}_\rho(w_0))$横截，因此，根据观察 2.1，$\tau_p \circ \xi^p_\rho\colon \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\} \to \mathbb{P}(\wedge^p\mathbb{K}^d)$ 提升为一个定义良好的连续映射 $f_p\colon \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\} \to \mathsf{S}^1(\wedge^p\mathbb{K}^d)$。固定 $\tau_{d-2p}(\xi^{d-2p}_\rho(w_0))$的一个提升 $V_0 \in \wedge^{d-2p}\mathbb{K}^d$ 后，考虑定义如下的 $\mathcal{H}\colon (\partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\}) \times (\partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\}) \to \mathbb{K}$

$$\mathcal{H}(x,y) := f_p(x) \wedge f_p(y) \wedge V_0.$$

映射 $\mathcal{H}$ 连续，$\mathcal{H}(x,\ y) \neq 0$ 对每个 $x \neq y$ 都成立，因为 $\xi^p_\rho(x) \oplus \xi^p_\rho(y) \oplus \xi^{d-2p}_\rho(w_0) = \mathbb{K}^d$ 是一个 d

$$\mathcal{H}(y,x) = f_p(y) \wedge f_p(x) \wedge V_0 = (-1)^{p^2} f_p(x) \wedge f_p(y) \wedge V_0 = -\mathcal{H}(x,y)$$

因为 p 是奇函数。

(i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$。假设 Γ 既非虚曲面群，也非自由群。来自[7]和 [2]的主要结果表明，存在一个嵌入 $j_1\colon S^1 \to \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\}$。那么映射 $h_1\colon S^1 \to \mathbb{R}$,

$$h_1(z) = \mathcal{H}\big(j_1(z), j_1(-z)\big) \quad z \in S^1,$$

是奇函数且处处不为零，矛盾。因此，Γ 是虚自由群或虚曲面群。

(ii) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。假设 $\partial_\infty\Gamma$ 真包含一个 2-球面。固定一个嵌入 $\iota_2\colon S^2 \to \partial_\infty\Gamma \smallsetminus \{w_0\}$，于是我们看到映射 $h_2\colon S^2 \to \mathbb{C}$,

$$h_2(z) = \mathcal{H}\big(j_2(z), j_2(-z)\big) \quad z \in S^2,$$

是奇函数且处处不为零，这与博苏克-乌拉姆定理矛盾。这说明 $\partial_\infty\Gamma$不能包含一个 2-球面。□

References

[1] J. Bochi、R. Potrie 和 A. Sambarino, *Anosov representations and dominated splittings*, 《欧洲数学会杂志》21 (2019), 3343-3414。[2] M. Bonk 和 B. Kleiner, *Quasi-hyperbolic planes in hyperbolic groups*, 《美国数学会会刊》133 (2005), 2491-2494。[3] R. D. Canary, 《阿诺索夫表示非正式讲义》, 网址: http://www.math.lsa.umich.edu/canary/, 2021。[4] R. Canary 和 K. Tsouvalas, *Topological restrictions on Anosov representations*, 《拓扑学杂志》13 (2020) 1497- 1520。[5] S. Dey、Z. Greenberg 和 J. M. Riestenberg, *Restrictions on Anosov subgroups of* Sp$(2n,\ \mathbb{R})$, 预印本, arXiv:2304.13564, 2023年。[6] S. Dey, 关于 SL$(d$ 的博雷尔阿诺索夫子群 $\mathbb{R})$, 预印本, arXiv:2208.02109, 2022年。[7] D. Gabai, *Convergence groups are Fuchsian groups*, 《数学年刊》136 (1992), 447-510。[8] M. Gromov, 《双曲群》, 载于《群论论文集》, M. Gersten 编, MSRI 出版物, 第 75-263 页, Springer Verlag, 1987年。[9] F. Gu´eritaud、O. Guichard、F. Kassel 和 A. Wienhard, *Anosov representations and proper actions*, 《几何与拓扑》21 (2017), 485-584。[10] O. Guichard 和 A. Wienhard, *Anosov representations: Domains of discontinuity and applications*, 《数学发明》190 (2012), 357-438。[11] A. Hatcher, 《代数拓扑》, 剑桥大学出版社, 2002年。[12] M. Kapovich、B. Leeb 和 J. Porti, *A Morse Lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and Euclidean buildings* **22** 2018 3827 3923 ,

《几何与拓扑》（），-。[13] F. Labourie, *Anosov flows, surface groups and curves in projective space*, 《数学发明》165 (2006), 51-114。[14] B. Pozzetti、A. Sambarino 和 A. Wienhard, *Conformality for a robust class of non-conformal attractors*, 《纯数学与应用数学杂志》2021 (2021), 1-51。[15] K. Tsouvalas, *On Borel Anosov representations in even dimensions*, 《瑞士数学通讯》95 (2020), 749–763。

Mathematical Institute, Heidelberg University, Im Neuenheimerfeld 205, 69120 Heidelberg, Germany
E-mail address: pozzetti@mathi.uni-heidelberg.de
CNRS and Laboratoire Alexander Grothendieck,
Institut des Hautes Études Scientifiques, Univer-site Paris-Saclay, 35 route de Chartres,
91440 Bures-sur-Yvette, France
E-mail address: tsouvkon@ihes.fr