Jaynes-Cummings模型中退相干与量子速度极限对量子门保真度的竞争

Sagar Silva Pratapsi, [1, 2, *] Lorenzo Buffoni, [3, †] 和 Stefano Gherardini[4, 5, 6, ‡]

[1] *Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Portugal* [2] *Instituto de Telecomunicações, Portugal*

[3] *Department of Physics and Astronomy, University of Florence, 50019 Sesto Fiorentino, Italy*

[4] *CNR-INO, Area Science Park, Basovizza, 34149 Trieste, Italy* [5] *LENS, Università di Firenze, I-50019 Sesto Fiorentino, Italy* [6] *ICTP, Strada Costiera 11, 34151 Trieste, Italy*

量子计算机由外部驱动场操控，例如激光、微波或传输线；这些驱动场在多量子比特寄存器上执行逻辑操作，使系统处于纯态。然而，驱动场与逻辑系统可能会产生关联，以至于在对驱动场的自由度进行迹运算后，输出态不再是纯态。先前的研究指出，由此产生的误差与驱动场的能量成反比，因而限制了量子计算的能效。本研究聚焦于 Jaynes-Cummings模型，表明同样的标度关系可以归因于两种相互竞争的现象：随时间增长的纠缠诱导误差，以及量子速度极限所施加的最短计算时间。通过使用与逻辑量子比特密度算符相关联的谱半径，对任意时刻的计算误差进行量化，便可得出这一结论。此外，我们还证明，要以指定的保真度达到给定的目标态，从能量效率上说，对逻辑量子比特进行一次驱动演化，优于将计算拆分为多个子程序，并分别由专用脉冲执行。

arXiv:2305.05019v3 [quant-ph] 5 Mar 2024

I. 引言

量子计算是在希尔伯特空间中利用量子态执行逻辑操作的科学。这些逻辑操作通过幺正门实现，原则上完全可逆 [1–3]。然而，在实际应用中，量子计算会受到量子操作保真度的限制 [4, 5]，这是多个量子平台共同面临的问题 [6–9]。量化在给定保真度要求下执行特定量子门所需的时间、能量和空间资源，至关重要 [3, 10, 11]。因此，无论从基础还是操作层面来看，我们都可以探讨：实现具有特定保真度的量子门所需的资源是否存在上限。

近年来，一些理论 [12–16]和实验 [17, 18]研究致力于理解借助外部驱动场 [19]执行量子逻辑运算所需的资源。已知，驱动系统（如激光或电传输线）与存储信息的逻辑系统（即量子比特寄存器）之间的纠缠，在对驱动场的自由度（DOF）进行迹运算时，会导致保真度损失。此前的研究已经量化了Jaynes-Cummings相互作用 [20],下的量子比特–驱动场纠缠，以及由此产生的保真度损失 [21]。另一些研究考察了双量子比特门 [12], 中产生的误差，并探讨了是否存在高效的驱动协议 [22]。

此外，M. Ozawa证明，守恒定律也会导致保真度损失 [23], ，此后人们针对一般酉算符和完全正迹保持映射 [24–27]对这一问题进行了研究。这些结果对量子计算提出了一些最低能量需求；例如，在 [12, 21, 22], 中已确定，计算误差按$1/\bar{n}$缩放，其中 $\bar{n}$ 是驱动场中初始的平均光子数（甚至可以是声子数）。这种缩放关系十分重要，因为它可能对能效量子计算产生影响 [28–30]。

在这项工作中，我们从基本原理出发，在 Jaynes-Cummings 模型中（重新）推导并解释了 $1/\bar{n}$ 标度。我们通过展示这种标度是两种相互竞争的现象所致来实现这一点。一方面，驱动-量子比特纠缠会引入一种随时间增长的最小误差。我们证明，这种基本误差与任何目标逻辑态无关，因为它可以通过逻辑量子比特密度算符的谱半径来量化（第三节）。另一方面，量子速度极限（QSL） [31, 32] 对达到目标态所需的最短演化时间施加了限制。随时间增长的纠缠误差与动力学所需的最短时间之间的平衡，恰好导致了 a $1/\bar{n}$ 标度（第四节）。

我们还研究了多个量子门组合所引起的误差（第 V 节）。我们表明，为了以固定的保真度达到给定的目标态，采用“单脉冲”演化在能量上更有利，而不是将计算拆分为多个子程序，并分别由专用脉冲执行。

* spratapsi@tecnico.ulisboa.pt
† lorenzo.buffoni@unifi.it
‡ stefano.gherardini@ino.cnr.it

II. 受驱动量子系统

考虑一个受驱动的量子系统，我们旨在利用该系统执行逻辑操作。驱动场被建模为一个辅助量子系统，例如激光场或电传输线，因此逻辑系统与驱动场共同构成一个双体量子系统，其局域希尔伯特空间分别为 $\mathcal{H}_{\text{logical}}$ 和 $\mathcal{H}_{\text{drive}}$。双体系统的状态记为 $|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_{\text{drive}} \otimes \mathcal{H}_{\text{logical}}$。因此，在任意时刻 t，逻辑态均由约化密度算符 $\rho(t)$ 描述，该算符通过对驱动场的 DOF 求迹得到：

$$\rho(t) = \text{tr}_{\text{drive}} |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| =: \mathcal{E}_t[\rho(0)]\,, \tag{1}$$

其中 $\mathcal{E}_t[\cdot]$ 是一个完全正且保迹（CPTP）的量子映射 [33]。在量子信息理论中，$\mathcal{E}_t[\cdot]$ 通常记作量子信道 [34]。

在本文余下部分中，我们假设初始逻辑态是纯态，因此在密度算符形式下，对于某个态 $|\alpha\rangle$，有 $\rho(0) = \rho_\alpha := |\alpha\rangle\langle\alpha|$。

A. Jaynes-Cummings模型

本文将始终研究 Jaynes-Cummings（JC）模型这一典型范例。该双体系统的哈密顿量为

$$H = \hbar\omega\, b^\dagger b + \hbar\omega\, \ell^\dagger \ell + \hbar g i(b\ell^\dagger - b^\dagger \ell), \tag{2}$$

其中 b, ℓ 分别是驱动场和逻辑系统的升降算符。对于双体系统的状态，我们采用记号 $|n, m\rangle := |n\rangle_{\text{drive}} \otimes |m\rangle_{\text{logical}}$。

在适当的旋转参考系中，与 $\hbar\omega$ 成正比的项消失，剩下的就是相互作用哈密顿量

$$H_{\text{int}} = \hbar g i(b\ell^\dagger - b^\dagger \ell)\,.$$

从此处开始，我们将在这样的参考系中进行讨论。请注意，H_{int} 决定了逻辑量子比特的旋转轴（此处为 y 轴），以及驱动场作用所经由的相互作用。不过，这一选择是任意的，与驱动场任意相位的选择有关。后续分析不考虑任何与相位有关的论点，只考虑驱动场注入逻辑系统的平均光子数。

我们假设驱动场初始时处于某个初始态 $|\varphi_{\text{dr}}(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n_{\text{dr}}\rangle$，并且我们可以对其进行控制。能级 $|n, 0\rangle$ 和 $|n-1, 1\rangle$ 张成了 H 的一个不变子空间；在该子空间中求解描述 Jaynes–Cummings 模型整体演化的薛定谔方程较为方便。在这个子空间内，动力学以频率 $\omega_n := g\sqrt{n}$ 在 $|n, 0\rangle$ 和 $|n-1, 1\rangle$ 之间振荡。于是，计算 $|\Psi(t)\rangle$ 就很直接了。

逻辑密度算符 $\rho(t)$ 在任意时刻 $\mathcal{E}_{ij} := \mathcal{E}_t[|i\rangle\langle j|]$ 都可以完全表示为算符 t 的线性组合。每个 $\mathcal{E}_{ij}$ 又由以下算符的平均值给出：2×2 算符 F_{ij}（为求完整起见，我们在附录A中回顾其显式表达式），并对初始驱动态的能级分布取平均。形式上，这意味着 $\mathcal{E}_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 F_{ij}(n) = \mathbb{E}_{\text{dr}}[F_{ij}]$，其中 $\mathbb{E}_{\text{dr}}[\cdot]$ 表示对驱动场系数集合 $\{b_n\}$ 取平均。因此，$\mathcal{E}_{ij}$ 由一个级数给出，而在一般情况下，我们无法求解该级数。

算符 $F_{ij}(n)$ 可在 $\bar{n}$ 附近展开为泰勒级数：$= \langle b^\dagger b\rangle$，即

$$F_{ij}(n) = F_{ij}(\bar{n}) + F'_{ij}\big|_{n=\bar{n}}(n-\bar{n}) + \frac{1}{2} F''_{ij}\big|_{n=\bar{n}}(n-\bar{n})^2 + \cdots$$

其中，$(\cdot)'$ 和 $(\cdot)''$ 分别表示 $(\cdot)$ 关于 n 的一阶和二阶导数。于是，回忆起 $\mathbb{E}_{\text{dr}}[n-\bar{n}] = 0$，可得

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathbb{E}_{\text{dr}}[F_{ij}] \approx F_{ij}(\bar{n}) + \frac{1}{2} F''_{ij}\big|_{n=\bar{n}} \Delta n^2\,, \tag{3}$$

其中 $\Delta n^2 := \mathbb{E}_{\text{dr}}[(n-\bar{n})^2]$ 是 n 的方差。通过选取驱动场的初始态，使得 $\Delta n \le \bar{n}$，即可确保此二阶展开有效；这意味着驱动场的初始分布大多集中在均值（例如光子数均值）$\bar{n}$ 附近。

为了给出具有实际意义的结果，我们将考虑驱动场初始态的两种不同情况：均值为 $\bar{n}$ 的相干态（因此服从泊松分布），以及均值为 $\bar{n}$、标准差为 Δn 的二项分布态。泊松分布和二项分布都集中在均值 $\bar{n}$ 附近，而驱动场初始态的系数 b_n 分别为

$$b_n^{\text{Pois.}} = \frac{1}{e^{\bar{n}/2}} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} \quad \text{and} \quad b_n^{\text{Bin.}} = \frac{1}{2^{N/2}} \sqrt{\binom{N}{k_n}}\,. \tag{4}$$

在式（4）中，$N := 2\Delta n^2$ 是二项分布的宽度，而 $k_n := n - (\bar{n} - N)$。在任意时刻 t，我们都可以根据式（$\mathcal{E}_{ij}$ 3）给出的二阶近似来估算每个3）。

III. 纠缠诱导误差

如引言中所述，本节旨在给出逻辑系统因存在“残余”驱动-量子比特纠缠而产生的计算误差界限；即使对驱动场的 DOF 进行迹运算后，这种纠缠仍然存在。由驱动-量子比特纠缠引起的此类误差与任何目标逻辑态无关。

一般而言，输出逻辑态 $\mathcal{E}_t[\rho_\alpha]$ 与某个目标密度算符 ρ_δ 之间的保真度为：$= |\delta\rangle\langle\delta|$ 是

$$F(\rho(t), \rho_\delta) = \langle\delta|\mathcal{E}_t\left[|\alpha\rangle\langle\alpha|\right]|\delta\rangle\,. \tag{5}$$

事实上，由于目标密度算符 ρ_δ 表示一个纯态， $F(\rho(t)$ $\rho_\delta)$ 对应于乌尔曼保真度 [35, 36]。后者与布雷斯角成反比，该角度度量了密度算符空间中 ρ_δ 与 $\mathcal{E}_t[|\alpha\rangle\langle\alpha|]$之间的距离，这些密度算符属于量子逻辑系统。另一方面， $\mathcal{E}_t$ 包含有关逻辑系统演化动力学的信息，以及表征驱动场注入能量大小的量的信息。

首先，我们介绍一些量，它们为保真度 $F(\rho(t)$ $\rho_\delta)$ 提供了基本界限；该保真度与针对 $|\alpha\rangle$个$|\delta\rangle$纯态的目标变换 $|\alpha\rangle \to |\delta\rangle$ 相关。这些界限不依赖于初态和目标态 $|\alpha\rangle$ 与 $|\delta\rangle$的具体选择。不过，我们可以刻画逻辑系统和驱动场的约化态因纯度损失而产生的内禀误差。此外，我们还得到了能够深入揭示计算保真度最佳情形的预测，从而一窥由基本限制所决定的可达精度上限。进一步地，通过消除对目标态 $|\delta\rangle$的了解需求，我们得到一个可直接从 $\rho(t)$测量的量，并且有望将其扩展至大型量子系统；在这类系统中，计算上无法获知目标态。

A. 状态本征保真度

我们首先引入的量是状态本征保真度。为此，考虑如下命题（证明见附录 B）：

命题 1。 与一般密度算符 ϱ 距离最近的纯态，是与其最大本征值 $r(\varrho)$ 对应的本征态（或在非简并情形下的本征态） $|\psi\rangle$ ，该最大本征值也称为其谱半径。形式上，

$$F(\varrho, \rho_\varphi) \leq r(\varrho) \tag{6}$$

对于任意纯态 ρ_φ ： $= |\varphi\rangle\langle\varphi|$，且 $F(\varrho, \rho_\varphi) = r(\varrho)$ 当且仅当 $\varrho\,|\varphi\rangle = r(\varrho)\,|\varphi\rangle$。

因此，在任意时刻 t 通过量子信道 $\mathcal{E}_t$执行变换 $|\alpha\rangle \to |\delta\rangle$ 时——即在真实情境中实际实现该变换时——所产生的误差至少为 $1 - r\,(\mathcal{E}_t[|\alpha\rangle\langle\alpha|])$。对于保真度 $F(\varrho,$ $\rho_\varphi)$，谱半径 $r(\varrho)$ 是由 ϱ纯度不足所导致的界限。因此，我们将 $r(\varrho)$称为 ϱ的本征保真度，并将 $\epsilon(\varrho) := 1 - r$ (ϱ)称为相应的本征误差。尽管此定义足以满足我们的目的，但我们指出，在一般情况下，本征保真度不能作为衡量某个量子门性能优劣的保证，而应视为该量子门在最佳情形下所能达到性能的上限。关于这一点，参见文献 [37, 38] ，其中给出了一个非幺正过程的例子，尽管如此，其本征保真度仍然很高。

接下来，我们将给出本征误差 $\epsilon(\varrho)$ 的下界和上界。为此，我们先考虑线性算子的 Schatten p-范数。对于密度算符 ϱ，Schatten p-范数定义为 $\|\varrho\|_p := ($ $f_1^p + \cdots + f_n^p)^{1/p} = (\mathrm{tr}\ \varrho^p)^{1/p}$，其中 f_i 是 ϱ的第 i个本征值，且 p为正实数。因此，我们得到：

命题 2。 对于任意 $p > 1$，密度算符 ϱ 的谱半径具有如下上下界：

$$\|\varrho\|_p^q \leq r(\varrho) \leq \|\varrho\|_p\,, \tag{7}$$

其中 q 满足 $1/q + 1/p = 1.$

证明见附录B，并利用了这样一个事实：一般密度算符 ϱ的谱半径是任意矩阵范数（用 p 表示） ϱ的下界。此外，从证明中还可以推得，命题2 中的界会变得更紧，并在 $r(\varrho)$ 趋于无穷大时收敛到本征保真度 p 。对于量子技术的应用，只需使用 Frobenius 范数 $\|\varrho\|_F$ ： $= \sqrt{\mathrm{tr}\,\varrho^2} = \|\varrho\|_2$–即可。这样，对（7）中的上界在 tr $\varrho^2 = 1$ 处作泰勒级数的一阶展开，对于 $r(\varrho)$，即可得到以下具有操作意义的界：

定理 1. 本征保真度 $r(\varrho)$ 和本征误差 $\epsilon(\varrho)$对于 ϱ 的上下界为

$$\gamma \leq r(\varrho) \leq \frac{1+\gamma}{2} \quad and \quad \frac{S_L}{2} \leq \epsilon(\varrho) \leq S_L\,, \tag{8}$$

其中 γ：$=\mathrm{tr}\,\varrho^2$和 S_L：$= 1-\gamma$分别表示 ϱ的纯度和线性熵。

因此，如果 ϱ 表示一个纯量子态，那么 $r(\varrho) =$ $\gamma = 1$。相反，如果 ϱ 是最大混合态，那么$r(\varrho)$ $= \gamma = 1/d$，其中 d 为量子逻辑系统的维数。在这两种情况下，式（8）中 $r(\varrho)$ 的界都变得平凡。然而，在一般情况下，只要执行所需逻辑操作的误差足够小，本征保真度 $r(\varrho)$ 的上界 $(1+\gamma)/2$ 就同样紧。因此，我们可以断言，当 γ 接近 1 时， $r(\varrho) \sim (1+\gamma)/2$ 是一个很好的近似；也就是说，当 ϱ接近纯态时，高阶修正（ $(1-\gamma)^2, (1-\gamma)^3$、.....对于 $r(\varrho)$ 的贡献都趋于消失。显然，这些考量对于本征误差 $\epsilon(\varrho)$也成立，但含义相反。

我们通过提供对本征保真度的另一种解释来结束分析。这种解释与近期一系列关于态纯化 [39]以及外部环境 [40–42]存在所带来影响的研究相关。为此，我们采用*ergotropy* [43], 的定义：任何密度算符$\varrho = \sum_i s_i |s_i\rangle\langle s_i|$ 都可以通过酉变换映射为相应的被动态 $\sigma := \sum_i s_i |e_i\rangle\langle e_i|$，其中 $\{|e_i\rangle\}$ 是哈密顿量为 $H = \sum_i e_i |e_i\rangle\langle e_i|$ 的量子系统的能量基，且 $e_1 < e_2 < \ldots < e_d$。按照定义，被动态在 $\{|e_i\rangle\}$中是对角的，且

其中 $s_1 > s_2 > \ldots > s_d$。根据这些定义可知，s_1 恰好就是本征保真度。因此，我们可以得出结论：不同的密度算符 ϱ 只要具有相同的被动态，就具有相同的本征保真度。

B. 信道本征保真度

现在，我们将本征保真度的概念应用于一组完备的输入纯态和目标纯态，以界定量子信道 $\mathcal{E}_t$ 的性能。因此，对于任意时刻t，我们对按照（归一化）Haar 测度 $\mu(\rho_\alpha)$ 抽样得到的任意初始纯态 $\rho_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ 的本征保真度 $r(\mathcal{E}_t[\rho_\alpha])$ 取平均，即：

$$\bar{r}\left(\mathcal{E}_t\right) := \int \mathrm{d}\mu(\rho_\alpha)\, r(\mathcal{E}_t[\rho_\alpha])\,. \tag{9}$$

我们将 $\bar{r}(\mathcal{E}_t)$称为信道本征保真度，它独立于初始和最终的纯量子态。量 $1-\bar{r}\left(\mathcal{E}_t\right.$对应于量子信道在近似执行所需逻辑量子操作时产生的误差；因此我们称之为信道特征误差。该误差与 $\mathcal{E}_t[\rho_\alpha]$在所有可能的 ρ_α上取平均后的不纯度成正比。就此而言，得益于定理1，信道本征保真度同样可以得到上下界：

推论 1. 对于任意时间 t，量子信道 $\mathcal{E}_t$ 的信道本征保真度 $\bar{r}(\mathcal{E}_t)$ 满足以下界限：

$$\bar{\gamma}_t \leq \bar{r}(\mathcal{E}_t) \leq \frac{1+\bar{\gamma}_t}{2}\,, \tag{10}$$

其中，$\bar{\gamma}_t$ 是对所有输入纯态 ρ_α 的纯度 $\mathrm{tr}\,\mathcal{E}_t[\rho_\alpha]^2$ 取平均值。

此外，

命题 3. 对于量子比特，$\bar{\gamma}_t$ 有闭式表达：

$$\bar{\gamma}_t = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\left(\mathcal{E}_{00}^2 + \mathcal{E}_{00}\,\mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{11}^2 + \mathcal{E}_{01}\,\mathcal{E}_{10}\right), \tag{11}$$

其中，回顾一下，$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_t\left[|i\rangle\langle j|\right]$，其中 i、$j = 0$、1。

推论 1 的推导并非必需，因为它是定理 1 的直接应用；命题 3 的证明见附录 B。

C. Jaynes-Cummings演化的信道特征误差

在 Jaynes–Cummings 模型中，在满足 法诺因子$s := \Delta n^2/\bar{n}$ 保持不变的约束下，可以在渐近极限 $\bar{n} \to \infty$ 中研究通道特征误差 $\bar{\epsilon}_t = 1 - \bar{r}(\mathcal{E}_t)$。具体而言，可以通过解析方法确定

$$\bar{\epsilon}_t \geq \frac{\bar{S}_L}{2} \sim \begin{cases} \dfrac{\tau^2 + \sin(\tau)^2}{6\bar{n}} & \text{(Poisson)} \\ \dfrac{\tau^2}{6}\dfrac{\Delta n^2}{\bar{n}^2} + \dfrac{\sin(\tau)^2}{6\,\Delta n^2} & \text{(Binomial)} \end{cases} \tag{12}$$

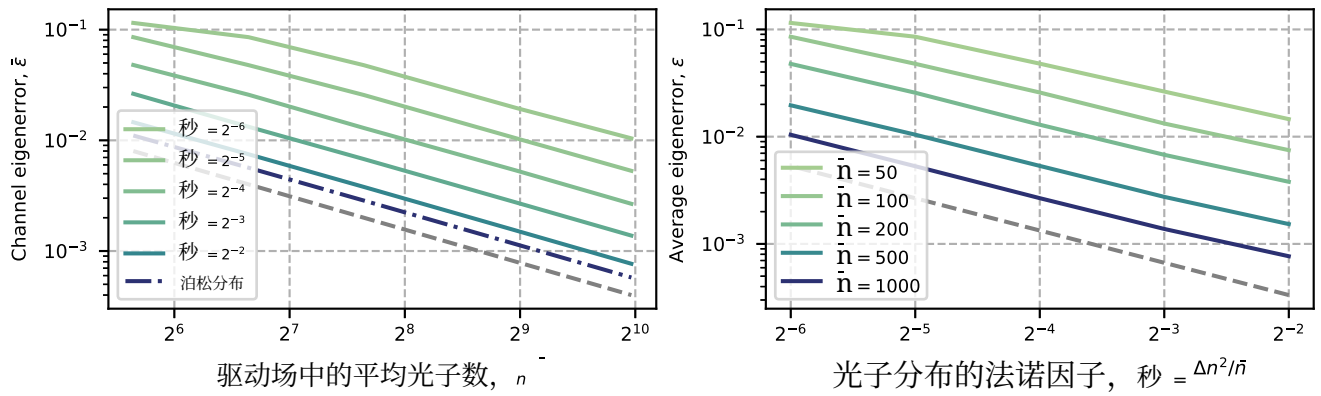
分别令驱动场的初始态服从泊松分布或二项分布。在式（12）中，$\tau := \omega_{\bar{n}} t = g\sqrt{\bar{n}}\,t$ 表示约化相互作用时间，单位为弧度。这些界限源于对式（11）在式（3）近似下应用于 Jaynes–Cummings 模型的显式计算；我们使用符号软件 SageMath [44]完成了这一计算。值得注意的是，由于 s 保持不变，驱动场态的分布集中于其均值附近这一假设在极限 $n \to \infty$下仍然成立，这与式（3）中的泰勒展开一致。我们还注意到，由于存在二次项 $\propto \tau^2$，近似式（$\Delta n^2 = \bar{n}$）仅在短时间内成立。对于泊松分布，$\Delta n^2 = \bar{n}$；因此，在式（12）中代入该关系后，二项分布的界限便化为泊松分布的界限，因而两个表达式彼此一致。

我们在图 1 中展示了式 (12) 给出的信道特征误差 $\bar{\epsilon}_t$ 随 $\bar{n}$ 和 $s = \Delta n^2/\bar{n}$ 变化的标度关系，其中约化相互作用时间为 $\tau = \pi/2$。左图显示，对于泊松分布和二项分布给出的初始态，保持法诺因子 s 不变时，信道特征误差会随着 $1/\bar{n}$ 减小。右图则显示，保持 $\bar{n}$ 不变时，$\bar{\epsilon}_t$ 会随着 $1/s$ 减小。请注意，后一种行为只能从二项分布中推断出来，因为对于泊松分布，$s = 1$。有趣的是，式 (12) 表明，对于给定的 τ，$s = \sin(\tau)/\tau$ 会使误差最小，这与先前使用压缩态的观察结果一致 [16],；不过，严格来说，二项分布不允许 s 大于 $1/2$。

式（12）中的界刻画了 $\Delta n \to 0$ 在 Jaynes–Cummings 模型中的有趣最坏情形。举例来说，考虑初始双体态 $|N,\ 0\rangle$，并要求在 $\tau = \pi/4$ 时，逻辑态为（$|0\rangle + |1\rangle$）$/\sqrt{2}$，就如同施加了一个 $\pi/2$脉冲。在这种情况下，无论 N 有多大，只要满足 $\Delta n = 0$，逻辑系统的密度算符就是最大混合态。因此，计算误差达到了可能的最坏情况。同样，当 Δn 趋于零时，式（12）中的误差界（正确地）发散。

式（12）中的界重现了先前关于 X 和 $\sqrt{X}$ 门所产生误差的结果；[21], 其中，由 JC 哈密顿量驱动的单量子比特操作在实现时产生的误差按 $\epsilon \gtrsim (\Delta n/\bar{n})^2$缩放。如 [21], 所述，这对量子计算的能量学有影响：要降低本征误差，就需要增大 $\bar{n}$，这意味着使用平均注入能量更高的驱动系统。此外，式（12）中的缩放关系也已在双量子比特门 [12], 以及在 JC 哈密顿量（2）作用下由双体系统生成纠缠的不精确度中得到验证 [20]。

总而言之，信道特征误差 $\bar{\epsilon}_t$的界具有文献中先前确定的其他标度律的相同特征。这些界主要取决于



<escape>图1：采用哈密顿量（2）的 JC 模型作用于量子逻辑系统时，在约化相互作用时间 $\tau = \pi/2$ 下的信道特征误差。左图：对于不同的 $s \in [0.02, 0.25]$ 值，信道特征误差随驱动场初始态的平均光子数变化的关系（彩色实线）。点划线表示驱动场处于泊松分布态时的情况，其 $s = 1$. 右图：对于不同的 $\bar{n} \in [50, 1000]$ 值，信道特征误差随驱动场初始态的法诺因子 $\Delta n^2/\bar{n}$ 变化的关系。图中，灰色虚线分别表示 $1/\bar{n}$ （左图）和 $1/s$ （右图）的参考标度。
</escape>

根据 JC 模型，驱动场与量子逻辑系统之间相互作用项的强度和形式。我们确定的误差量刻画了由平均输出态并非纯态而导致的“内禀”误差；只要约化相互作用时间 τ 较短，所得误差界就会更加准确。不过，值得强调的是，信道特征误差较低，并不保证量子操作具有较高的保真度。反之，信道特征误差较高，则意味着所实现的量子操作保真度较低。

在下一节中，我们将清楚地展示信道特征误差与量子速度极限之间的联系。这将帮助我们理解，量子逻辑计算的能量代价从根本上取决于两个因素之间的权衡：对驱动场状态进行偏迹后仍然存在的固有误差，以及用户对完成计算所需最短时间的要求。

IV. 量子计算的量子速度极限与能量学

在上一节中，我们评估了量子信道在尝试将某一给定量子计算的解作为纯态输出时所固有引入的误差。在计算时间很短的极限下，我们的分析并未考虑所实现的量子操作是否会返回目标输出态。对于由 Jaynes-Cummings 动力学执行的逻辑操作，我们已经证明，在态塌缩之前的短时间尺度内，本征误差会随经过的时间 t 增大。

然而，在实际中，人们旨在理解量子力学对……施加了哪些约束。

在尝试于固定时间间隔内（该时间间隔可由用户选择）实现某个幺正门时，计算误差的标度关系。我们还希望确定满足此类约束所需的能量代价。接下来，我们将借助量子速度极限引入这些额外的概念。

Mandelstamm-Tamm (MT) 和 Margolus-Levitin (ML) 量子速度极限 [32] 对量子系统执行幺正演化所需的最短时间施加了限制。具体而言，量子系统在希尔伯特空间中的 ϑ 旋转所需的时间 t 分别满足如下界限：

$$t \geq t_{\mathrm{MT}} := \frac{\hbar\vartheta}{\Delta H_{\mathrm{int}}} \quad \text{and} \quad t \geq t_{\mathrm{ML}} := \frac{\hbar\vartheta}{\langle H_{\mathrm{int}}\rangle}, \qquad (13)$$

其中 H_{int} 是量子系统的哈密顿量，$\langle X\rangle$表示 X 的期望值，且 $\Delta X^2 := \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$。所有平均值 $\langle\cdot\rangle$ 均是针对双部量子系统的初始态计算的。请注意，由于式（13）中的量子速度极限（QSL）是针对幺正演化定义的，因此我们只能将其应用于整个双部系统。因此，量 ϑ表示希尔伯特空间中的角度，该空间包含逻辑系统和驱动系统；QSL 取决于双部相互作用哈密顿量 H_{int}。

然而，我们关注的是逻辑（子）系统的演化，因此要将 QSL 与这种约化动力学联系起来。为此，假设我们希望将一个纯逻辑态 $|a\rangle$ 变为另一个纯逻辑态 $|b\rangle$，使得 $|\langle b|a\rangle| =: \cos\theta$，其中 $\theta \in [0, \pi/2]$，以避免余弦函数符号带来的问题。因此，由逻辑量子比特和驱动场构成的双部系统应从初始纯态 $|\psi\rangle = |\psi_a\rangle\,|a\rangle$ 演化到最终纯态 $|\psi'\rangle = |\psi_b\rangle\,|b\rangle$。初态与末态之间的夹角 ϑ

双部系统满足以下不等式

$$\cos\vartheta = |\langle\psi'|\psi\rangle| = |\langle\psi_b|\psi_a\rangle|\cos\theta \le \cos\theta\,. \tag{14}$$

这意味着 $\vartheta \ge \theta$，因为 $\theta, \vartheta \in [0, \pi/2]$。因此，角度 θ 与 $t_{\mathrm{MT}}, t_{\mathrm{ML}}$ 的量子速度极限可通过以下不等式直接联系起来

$$t \ge \max\left\{\frac{\hbar\theta}{\Delta H_{\mathrm{int}}}, \frac{\hbar\theta}{\langle H_{\mathrm{int}}\rangle}\right\}, \tag{15}$$

该不等式为逻辑系统的驱动施加了几何约束，从而确定了可用的全部能量资源。

A. Jaynes-Cummings哈密顿量

为便于说明，我们仍使用 JC 模型给出更多解析论证。在此，我们假设驱动场初始处于相干泊松态$|\psi_a\rangle$，其光子数平均值为 $\bar{n}$。在这种情况下，我们有 $\langle H_{\mathrm{int}}\rangle \approx \Delta H_{\mathrm{int}} \sim \hbar\omega_{\bar{n}}$，其中 $\omega_{\bar{n}} = g\sqrt{\bar{n}}$。此外，在 $\bar{n}$ 极限下，当 $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$时，泊松分布与二项分布趋于一致。因此，MT 和 ML 量子速度极限（15）均对门操作时间（包括驱动场）给出以下下界：

$$t \ge \frac{\theta}{\omega_{\bar{n}}} = \frac{\theta}{g\sqrt{\bar{n}}}\,. \tag{16}$$

另一方面，即使对于泊松分布驱动场，式（12）也预示着最小平均本征误差会随时间增长，具体为

$$\bar{\epsilon}_t \ge \frac{g^2t^2}{6} + \frac{\sin^2(\sqrt{\bar{n}}gt)}{6\bar{n}}\,. \tag{17}$$

我们注意到，QSL时间与一次拉比振荡的时间尺度相当（因此早于JC动力学中约化逻辑态发生坍缩），在此范围内这种标度关系成立。

结合这两个不等式，我们可以确定，利用JC相互作用对逻辑量子比特实施旋转 θ 时，QSL所导致的信道特征误差下界按以下方式标度：

$$\bar{\epsilon}_\theta \gtrsim \frac{\theta^2 + \sin^2(\theta)}{6\bar{n}} \tag{18}$$

对于小角度（$\sin\theta \sim \theta$），该式变为

$$\bar{\epsilon}_\theta \sim \frac{\theta^2}{3\bar{n}}\,. \tag{19}$$

请注意，驱动光子的平均数 $\bar{n}$ 与驱动系统注入系统的初始能量成正比，因为后者的哈密顿量为 $H_{\mathrm{drive}} = \hbar\omega b^\dagger b$。因此，我们的推导涵盖了先前研究 [12, 23] 的发现，其结论如下：如果目标是使单量子比特计算中的平均误差小于 ϵ，则必须采用能量为 $E = \bar{n}\hbar\omega$ 、按 $1/\epsilon$ 缩放的驱动脉冲。此分析表明，驱动量子逻辑系统所需的能量，至少在 Jaynes–Cummings 模型中，源自两种相互竞争现象之间的平衡：(i) 式（17）中的纠缠诱导误差随时间增加，因此建议使用更短的门操作时间；(ii) 式（16）中的量子速度极限（QSL）表明，缩短门操作时间需要以增加光子数 $\bar{n}$ 为代价。这意味着，在我们所考虑的情形（即 JC 模型）中，驱动场必须具有足够多的光子（即能量），满足式（18）–（19），才能使因未能有效利用激光与量子比特之间的纠缠而产生的误差可以忽略不计。

V. 量子门串接

本节将前文引入的误差界推广至以下情形： C 连续应用量子信道 $\mathcal{E}_t$。为简便起见，我们将其称为“次”或“脉冲次”。与式（1）一样，每一脉冲次 $\mathcal{E}_t$ 由以下步骤构成：i）将驱动系统制备为某个具有平均光子数的初始纯态$\bar{n}$；ii）让双部系统按照Jaynes-Cummings演化演化一段时间 t；iii）对驱动系统的 DOF进行偏迹。本节将量化多次脉冲演化的信道特征误差，即

$$\mathcal{E}_t^C = \underbrace{\mathcal{E}_t \circ \mathcal{E}_t \circ \cdots \circ \mathcal{E}_t}_{C \text{ times}}\,. \tag{20}$$

从物理上讲，这意味着要重新启动驱动态 C 次，每次向系统中引入 $\bar{n}$ 个新光子，并丢弃旧光子。

令 $\bar{\epsilon}_{\tau,\,C}$ 为 $\mathcal{E}_t^C$ 的平均本征误差。为简化记号，我们使用约化时间 $\tau = g\sqrt{\bar{n}}t$。在 $\bar{n}$ 极限下， τ 近似等于逻辑态的旋转角；因此，经过 $\mathcal{E}_t$ 次操作后，我们预计逻辑态总共旋转角度为 $C\tau$。我们的目标是从第一性原理出发，理解究竟是多次执行持续时间较短的量子操作更好，还是少次执行持续时间较长的量子操作更好。

在本节中，为方便起见，我们假设驱动系统初始化于具有二项分布的状态，也称为“二项式态”。在附录 D中，我们证明信道特征误差近似为

$$\bar{\epsilon}_{\tau,C} \approx \frac{1-\lambda^C}{2}\,, \tag{21}$$

其中， λ 表示采用泡利转移矩阵（PTM）形式表示的 $\mathcal{E}$ 的 3×3 子矩阵的谱半径。更多详情请参见。

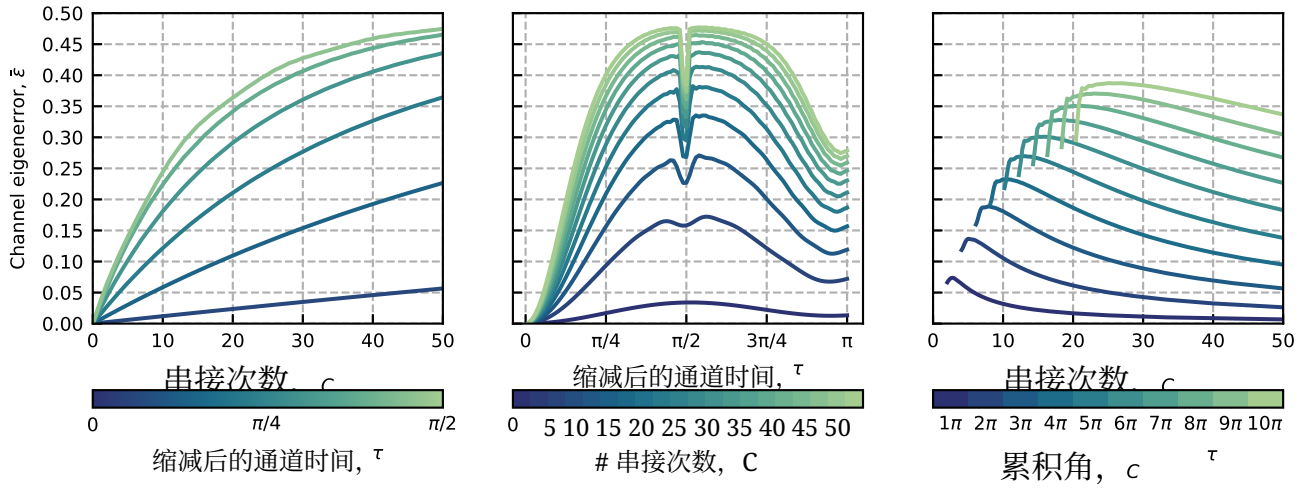


图 2：串接量子操作时的信道特征误差。在数值模拟中，串接的量子门由 JC 哈密顿量驱动，且驱动场初始为二项式态，其 $\bar{n}=25$ 和法诺因子为 $s=\Delta n^2/\bar{n}=0.2$。 左图：信道特征误差随串接次数单调增长，且 τ值越大，增长越快。中图：信道特征误差随信道约化时间 τ 的变化。每条曲线对应固定的 C 次串接。关于 $\tau=\pi/2$ 附近信道特征误差行为的解释，见正文。 右图：信道特征误差随串接次数的变化。每条曲线对应一个恒定的累积演化时间 $C\tau$。在累积演化时间相同时，串接更多量子门（更大的 C）但采用更短的约化相互作用时间 τ，可获得更低的信道特征误差。然而，这会带来更高的能量代价，详见图3 。

附录 D 其中给出了解析表达式。通过数值模拟对该公式进行了检验，设定 $\bar{n}=25$ 以及法诺因子 $s=\Delta n^2/\bar{n}=0.2$。值得注意的是，我们考虑二项分布，是为了展示信道特征误差随约化相互作用时间 τ变化时呈现的一种特殊行为（凹陷）。

从图 2左侧面板的数值结果可以看出，无论约化相互作用时间 C为何，信道特征误差都会随串接次数单调增加 τ。因此，通过与驱动系统进行短时间相互作用来运行同一个量子门，并反复应用该门，似乎能够降低信道特征误差。

另一方面，图 2 右侧面板显示，在总演化时间相同的情况下 $C\tau$，串接次数越多，信道特征误差越小。换言之，若要实现给定的量子操作，将目标量子操作分解为多个持续时间较短的动力学循环 τ是有益的。然而，这种分解会带来更高的能量代价，因为每次应用量子门时，都需要从头准备驱动场的初始态（即准备好新的光子以供使用），因此总共会消耗$C\bar{n}\hbar\omega$ 的能量。

图的中央面板2 显示在 $\tau=\pi/2$ 处信道特征误差出现一个凹谷。如果驱动系统以泊松分布初始化，则不会出现这种行为，因此应将其视为驱动场初始态的量子特性。事实上，通过取极限 $s\to 0$（对于二项式态的情形），并令其取值 $\bar{n}$ 足够大，在 $\tau=\pi/2$ 处的信道特征误差为 0.25，并且变得与串接次数 C 无关。在 $\tau=\pi/2$ 处的这一信道特征误差低谷可观察到，直到 s 的取值达到 $s=0.2$。相反，对于 τ 的所有其他取值，在进行量子门串接时，逻辑系统的状态会迅速趋近于混合态，并且信道特征误差通常会增大。

如上所述，对于相同的目标本征误差，将给定的脉冲单次操作 $\mathcal{E}$ 细分为多个持续时间较短的单次操作并将其串联起来，是否具有能量优势？ 为回答这个问题，假设我们希望将逻辑态旋转角度 θ，并且可用光子总数为 $\bar{n}$ 。为此，我们可以选择以角度 θ进行单次演化——通过驱动场使用所有可用的 $\bar{n}$ 个光子——也可以实施 C 次操作，每次使用 $\bar{n}/C$ 个光子，并将逻辑态旋转角度 θ/C。请注意，在后一种情况下，每个脉冲必须施加时间 $t=\theta/g\sqrt{C\bar{n}}$。

在图 3 中，我们展示了对 X 门所做分析的数值结果，该门可通过一次 JC 演化实现，其中 $\tau=\pi/2$。我们可以看到，从能量角度来看，当驱动系统的状态取为泊松分布，即相干态时，将量子操作细分会增大信道特征误差。在附录D中，我们对其进行了解析推导

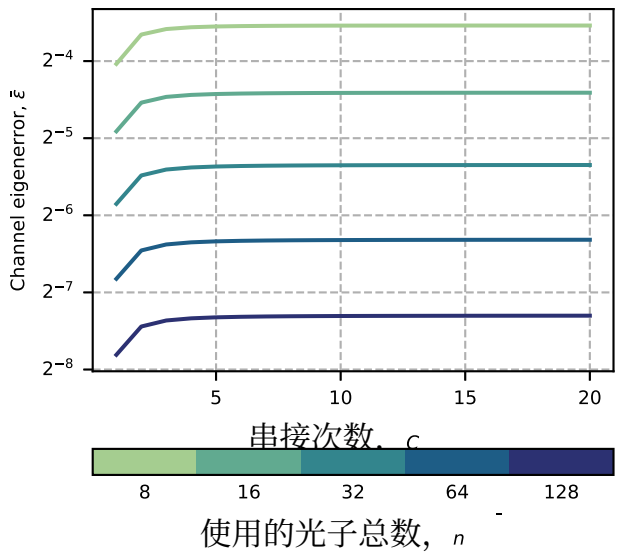


图 3：在每条等高线上，我们展示了通过串联 C 个脉冲轮次来实现 X 门（每轮实现 $\sqrt[C]{X}$）时的本征误差，所有轮次使用相同的总能量（以所使用的驱动光子总数 $\bar{n}$衡量）。每轮均通过 Jaynes-Cummings相互作用实现，驱动系统初始化为平均含有 $\bar{n}/C$个光子的相干态。因此，每条曲线都对应一个驱动能量 $\bar{n}\hbar\omega$。对于相同的总能量，使用更多的脉冲轮次会使信道特征误差的平均值增大。

这种误差近似按.....缩放

$$\bar{\epsilon}_{\theta,C} \approx \frac{1}{6\bar{n}}\left(\theta^2 + C^2\sin^2\left(\frac{\theta}{C}\right)\right). \tag{22}$$

总之，在驱动系统中总能量固定的情况下，将目标操作分解为多个周期的策略，对于本征误差-能量平衡而言并非最优。因此，从光子数量的角度来看，似乎更好的做法是采用“单次操作”演化，从一开始就利用全部可用能量为其提供动力。

VI. 结论

本文为通过驱动场处理量子逻辑系统中存储的信息来执行量子计算时不可避免产生的误差，给出了解析界限；例如，驱动场可由激光操控。

首先，我们从第一原理出发，引入用于评估量子操作性能的实用量度，即本征保真度 和信道本征保真度。它们根据谱半径和计算输出态的纯度，为该操作的保真度提供上界。从这个角度来看，这些上界有助于理解：在已知驱动场自身特性的情况下，由外场驱动的量子门是否接近其最大保真度值。特别是，信道本征保真度的上界 $(1+\bar{\gamma}_t)/2$ 可视为使用 $\mathcal{E}_t$ 逼近目标逻辑酉操作时的最佳情况门保真度。

其次，我们表明，特征保真度与所关注的量子逻辑操作的能量学密切相关。根据文献 [12, 20, 21]，我们能够推导出在给定目标保真度下实现逻辑操作所需的最低能量需求。这种最低能耗源于两项相互制约的约束之间的权衡：（i）驱动场与量子逻辑系统之间的纠缠，其存在可能降低逻辑态的保真度；（ii）计算所需的最短时间，该时间受量子速度极限约束。在我们的案例研究（Jaynes-Cummings模型）中，我们通过解析和数值推导，展示了如何平衡这些约束以达到最低保真度。具体而言，我们计算了信道特征保真度（代表实现计算的量子门的质量）在执行给定希尔伯特空间旋转（空间）时的标度关系，并将其表示为驱动场所携带的光子数（能量）、驱动脉冲的持续时间（时间）以及可用于实现计算的分段数（串接）的函数。如上所示，这些要求并非都能以最高效率得到满足，因此，对于任何旨在通过驱动系统实现的量子门，都必须确定相应的权衡条件。

作为展望，一个值得研究的问题是：相较于 Jaynes-Cummings 模型，在相互作用项更为复杂的模型中，信道本征保真度与 QSL 之间是否仍存在精确的标度关系；此外，这种关系是否能够通过实验加以验证。尽管如此，正如 [16] 中所提出的，通过引入由辅助量子比特和额外驱动场构成的进一步校正系统，或许可以改进这些能量界。我们预计，研究结果可应用于量子技术，尤其是量子计算。在量子计算中，将计算保真度与实现计算所需的资源（驱动场注入的时间和能量）联系起来，对于技术的适当设计至关重要 [45]。随着我们开始使用数量前所未有、性能更优的量子比特，本文讨论的界或将成为外部驱动场操控的大规模量子器件发展所面临的核心挑战。

致谢

作者感谢 Yasser Omar 和 Sebas- tian Deffner 富有启发性的讨论，这些讨论促成了本研究。S.S.P. 感谢以下方面的支持：

“la Caixa”基金会通过奖学金编号 LCF/BQ/DR20/11790030 提供的支持。S.G. 感谢 PNRR MUR 项目 PE0000023-NQSTI 以及英国皇家学会 IEC\R2\222003 提供的支持。

L.B. 获得了欧盟下一代计划的资助，该资助属于国家复苏与韧性计划中的 M4C2 投资 1.2 项目。项目 SOE0000098-ThermoQT。该资源由欧盟下一代计划资助[DD 247 19.08.2022]。文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧盟委员会的立场。欧盟和欧盟委员会均不对这些观点和意见承担责任。

附录

附录 A：Jaynes-Cummings相互作用下逻辑态的演化

令 $\mathcal{E}_t$ 为量子信道，它近似地将初始逻辑态 $\rho(0) = \sum_{i,\ j} r_{ij}\,|i\rangle\langle j|$ 映射为时间 t 时的另一个逻辑态；该映射遵循 Jaynes-Cummings 演化，并对驱动场的 DOF 求迹。由于 $\mathcal{E}_t$ 是线性完全正迹保持映射，因此有 $\rho(t) = \mathcal{E}_t[\rho] = \sum_{ij} r_{ij}\,\mathcal{E}_t[|i\rangle\langle j|]$。因此，只需了解算符 $\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_t[|i\rangle\langle j|]$ 随时间的变化，就能描述一般初始逻辑态的演化。这些算符的显式表达式由驱动系数集合上的平均值 $\mathcal{E}_{ij} = \mathbb{E}_{\rm dr}[F_{ij}] = \sum_n |b_n|^2 F_{ij}(n)$ 给出，其中算符 $F_{ij}(n)$ 在计算基下表示为

$$
\begin{aligned}
F_{00}(n) &= \begin{pmatrix} c_n^2 & \frac{b_{n+1}}{b_n}\,c_n s_{n+1} \\ \overline{\frac{b_{n+1}}{b_n}}\,c_n s_{n+1} & s_n^2 \end{pmatrix} \\
F_{11}(n) &= \begin{pmatrix} s_{n+1}^2 & -\frac{b_{n+1}}{b_n}\,s_{n+1}c_{n+2} \\ \overline{\frac{b_{n+1}}{b_n}}\,s_{n+1}c_{n+2} & c_{n+1}^2 \end{pmatrix} \\
F_{01}(n) &= \begin{pmatrix} -\overline{\frac{b_{n+1}}{b_n}}\,c_{n+1}s_{n+1} & c_{n+1}c_{n+2} \\ \frac{b_{n+2}}{b_n}\,s_{n+1}s_{n+2} & \overline{\frac{b_{n+1}}{b_n}}\,c_{n+1}s_{n+1} \end{pmatrix} \\
F_{10}(n) &= F_{01}(n)^\dagger,
\end{aligned}
$$

其中，$\omega_n = g\sqrt{n}$、$c_n := \cos(\omega_n t)$，$s_n := \sin(-\omega_n t)$，且 z是 z的复共轭。平均值是逐元素计算的。

附录 B：量子态和通道本征保真度的证明

命题 1. 与一般密度算符 ϱ 最接近的纯态是对应于 ϱ最大本征值 $r(\varrho)$ 的本征态（在非简并情况下为本征态），也称为其谱半径。形式上，

$$F(\varrho,\rho_\varphi) \le r(\varrho) \tag{B1}$$

对于任意纯态 $\rho_\varphi := |\varphi\rangle\langle\varphi|$，当且仅当 $\varrho\,|\varphi\rangle = r(\varrho)\,|\varphi\rangle$ 时，$F(\varrho,\ \rho_\varphi) = r(\varrho)$。

证明。 设 $\varrho = \sum_i f_i\,|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ 为 ϱ的谱分解，其中 $\sum_i f_i = 1$ 和 $f_1 \ge \cdots \ge f_n$。因此，ϱ 对由一般态 $|\varphi\rangle$ 的外积给出的密度算符$|\varphi\rangle\langle\varphi|$ 的近似保真度为

$$\langle\varphi|\varrho|\varphi\rangle = \sum_i f_i |\langle\psi_i|\varphi\rangle|^2 \le f_1 \sum_i |\langle\psi_i|\varphi\rangle|^2 = f_1 = r(\varrho).$$

此外，如果 $\varrho\,|\psi\rangle = f_1\,|\psi\rangle$，那么 $\langle\psi|\varrho|\psi\rangle = f_1$ 和 $|\psi\rangle\langle\psi|$ 是最接近 ϱ 的密度算子之一，它由一个纯态的外积给出。□

命题 2. 对于任意 $p \ge 1$，密度算符 ϱ 的谱半径有如下上下界：

$$\|\varrho\|_p^q \le r(\varrho) \le \|\varrho\|_p\,, \tag{B2}$$

其中 q 满足 $1/q + 1/p = 1$.

证明。 $\|\varrho\|_p$:=$(f_1^p + \cdots + f_n^p)^{1/p}$是 $r(\varrho)$的上界，这是谱半径的一个已知性质。事实上，谱半径 $r(\varrho)$是 ϱ的任意矩阵范数（用p表示）的下界。这是盖尔范德公式的推论，该公式指出：

$$r(A) = \inf_{p>0} \|A^p\|^{1/p} = \lim_{p\to\infty} \|A^p\|^{1/p}$$

对于巴拿赫空间中的任意有界算子 A （例如，参见参考文献 [46]中的例 7.1.4，或[47]中的定理 10.13）。

这个下界实际上改进了更常见的界 $\|\varrho\|_p/n^{1/p}$.。事实上，我们可以证明 $p > 1$满足以下一系列界：

$$\frac{\|\varrho\|_p}{n^{1/p}} \le \|\varrho\|_p^q \le r(\varrho),$$

其中 q，也称为 p 的$H\ddot{}$厄米共轭，满足 $1/p + 1/q = 1$，即 $q = p/(p-1)$。假设 $f_1 \ge \cdots \ge f_n$ 是 ϱ 的本征值；那么，我们有

$$
\begin{aligned}
\|\varrho\|_p^q &= (f_1^p + \cdots + f_n^p)^{\frac{1}{p-1}} \\
&\le \left(f_1^{p-1}(f_1 + \cdots + f_n)\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= f_1 = r(\varrho).
\end{aligned}
$$

因此，我们需要证明不等式 $\|\varrho\|_p/n^{1/p} \le\|\varrho\|_p^q$。为此，我们首先指出，最大混合态 $\tilde{\varrho}$:=diag$(1/n,\ldots,1/n)$ 在所有密度算子中使 p- 范数最小，即

$$\|\varrho\|_p \ge \|\tilde{\varrho}\|_p = \frac{n^{1/p}}{n} \text{ 对于所有 } \varrho.$$

利用 H¨older 不等式作用于本征值向量 $f=(f_1,\ldots,f_n)$ 和 $e=(1/n,\ldots,1/n)$，即可证明这一结果，从而得到

$$\left\|\underline{f}\cdot\underline{e}\right\|_1 \le \left\|\underline{f}\right\|_p \|\underline{e}\|_q$$

其中，此处的 $\cdot$ 表示逐元素乘积。一方面，$\left\|f\cdot e\right\|_1 = 1/n$，由于 $\left\|f\right\|_1 = 1$；另一方面，可以证明 $\|e\|_p\|e\|_q = 1/n$ 也成立。因此，

$$\|\underline{e}\|_p\|\underline{e}\|_q = \frac{1}{n} = \left\|\underline{f}\cdot\underline{e}\right\|_1 \le \left\|\underline{f}\right\|_p\|\underline{e}\|_q .$$

两边同时除以 $\|e\|_q$，得到

$$\|\underline{e}\|_p \le \left\|\underline{f}\right\|_p \Longleftrightarrow \|\tilde{\varrho}\|_p \le \|\varrho\|_p,$$

其中 $\left\|\underline{f}\right\|_p$ 和 $\|\underline{e}\|_p$ 分别恒等于 $\|\varrho\|_p$ 和 $\|\tilde{\varrho}\|_p$。这证明了上述关于最大混合态 $\tilde{\varrho}$ 的结论。最后，我们进行计算。

$$\|\varrho\|_p^q = \|\varrho\|_p\|\varrho\|_p^{-\frac{1}{(1-p)}} \ge \|\varrho\|_p\|\underline{e}\|_p^{-\frac{1}{(1-p)}} = \frac{\|\varrho\|_p}{n^{1/p}}$$

至此，证明完毕。 □

定理 1. ϱ 的本征保真度 $r(\varrho)$ 和本征误差 $\epsilon(\varrho)$ 分别具有如下上下界。

$$\gamma \le r(\varrho) \le \frac{1+\gamma}{2} \quad \text{and} \quad \frac{S_L}{2} \le \epsilon(\varrho) \le S_L ,$$

其中，$\gamma := \operatorname{tr}\varrho^2$ 和 $S_L := 1-\gamma$ 分别表示 ϱ 的纯度和线性熵。

证明。设 $f_1 \ge \cdots \ge f_n$ 是 ϱ 的特征值，其中 $f_1 = r(\varrho)$。一方面，由于 $f_i^2 \le f_1 f_i$，我们得到

$$\operatorname{tr}\varrho^2 = f_1^2 + \cdots + f_n^2 \le f_1(f_1+\cdots+f_n) = f_1 = r(\varrho),$$

即，$\gamma \le r(\varrho)$。另一方面，利用算术平均数与几何平均数不等式（AM-GM 不等式），可得

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+\operatorname{tr}\varrho^2}{2} \ge \sqrt{1\cdot\operatorname{tr}\varrho^2} = \sqrt{\operatorname{tr}\varrho^2} \ge r(\varrho),$$

作为 $0 \le \gamma \le 1$。由此，我们得到了 $r(\varrho)$ 的下界和上界。然后，将 $\epsilon(\varrho)$ 替换为 $=1-r(\varrho)$，即可直接得到本征误差 $\epsilon(\varrho)$ 的界。 □

命题 3. 对于量子比特，$\bar{\gamma}_t$ 有一个闭式表达式：

$$\bar{\gamma}_t = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\left(\mathcal{E}_{00}^2 + \mathcal{E}_{00}\mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{11}^2 + \mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{10}\right),$$

其中，为了简便起见，我们定义 $\mathcal{E}_{ij} := \mathcal{E}_t\left[|i\rangle\langle j|\right]$ with $i,j=0,1$。

证明。我们需要计算所有可能的纯初始态 ρ 的纯度 $\gamma_t := \operatorname{tr}\mathcal{E}_t[\rho]^2$ 的平均值。对于一个量子比特，通用初始纯态 $|\alpha\rangle = e^{i\varphi}\cos\alpha\,|0\rangle + e^{-i\varphi}\sin\alpha\,|1\rangle$ 的密度算符在 $|0\rangle, |1\rangle$ 基底下表示为

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos(2\alpha) & e^{i2\varphi}\sin(2\alpha) \\ e^{-i2\varphi}\sin(2\alpha) & 1-\cos(2\alpha)\end{pmatrix}.$$

此外，$\rho(t) = \mathcal{E}_t[\rho]$ 可以表示为演化后各元素的线性组合：$\mathcal{E}_{ij} := \mathcal{E}_t\left[|i\rangle\langle j|\right]$其中 $i, j = 0, 1$。因此，γ_t 是 α 和 φ 的函数。由此，对 $0 \le \alpha \le \pi/2$ 和 $0 \le \varphi \le \pi$ 取平均值，即可得到所需结果，该结果已使用 SageMath 进行了验证 [44]。 □

附录 C：量子门保真度的界

正文第 III 节的结果可加以特化，从而给出我们希望实现的量子门保真度的下界和上界。为此，我们取将 U 变换为 $|\alpha\rangle$ 的量子门 $|\delta\rangle$，即 $|\delta\rangle = U|\alpha\rangle$，于是正文中的式（5）变为

$$\begin{aligned} F(\mathcal{E}_t[\rho_\alpha], U\rho_\alpha U^\dagger) &= \langle\alpha|U^\dagger\mathcal{E}_t\left(|\alpha\rangle\langle\alpha|\right)U|\alpha\rangle \\ &= \operatorname{tr}\left[\left(|\alpha\rangle\langle\alpha|^T \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|\right) S_{U,t}\right], \end{aligned} \tag{C1}$$

其中 $S_{U,\,t}$ 表示与变换 $\rho_\alpha \to U^\dagger\mathcal{E}_t[\rho_\alpha]U$ 相关联的 Choi 矩阵 [48]。利用式（C1）以及迹的线性性质，可以计算与量子门 U 相关联的平均保真度，即

$$\bar{F}(\mathcal{E}_t, U) := \int \mathrm{d}\mu(\rho_\alpha) F(\mathcal{E}_t[\rho_\alpha], U\rho_\alpha U^\dagger) = \operatorname{tr}(A S_{U,t}) \tag{C2}$$

其中，A 是一个通过对所有纯态 $\rho_\alpha \otimes \rho_\alpha$ ρ_α 取平均而得到的 $d^2\times d^2$ 矩阵。例如，对于编码在量子比特中的逻辑态，

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 1&0&0&2\end{pmatrix}.$$

¯数值 F（$\mathcal{E}_t$，U）是量子信道 $\mathcal{E}_t$ 对量子门 U 的“近似”程度所对应的平均保真度。式（C2）等于量子门平均保真度，即 [49] 中的式（18）。

结合命题 1 和推论 1 还可以得到¯关于 $F(\mathcal{E}_t, U)$ 的上界。信道本征保真度 $\bar{r}(\mathcal{E}_t)$ 给出了这样的界，而它又受到上界 $(1+\bar{\gamma})/2$ 的限制。因此，对于任意时间 t，

$$\bar{F}(\mathcal{E}_t, U) \le \bar{r}(\mathcal{E}_t) \le \frac{1+\bar{\gamma}_t}{2}.$$

附录 D：量子门串接的界

对于一个量子比特，任何量子信道 $\mathcal{E}$ 都可以表示为泡利转移矩阵（PTM）$P \in \mathbb{C}^{4\times4}$，其形式为

[50]给出

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{v} & A \end{pmatrix},$$

其元素为 $P_{ij} \equiv \mathrm{tr}(\sigma_i \mathcal{E}[\sigma_j])$，其中 σ_i 表示——如通常所说——包含单位矩阵在内的 2×2 泡利矩阵。此外，A 是一个 3×3 矩阵，v 是一个维度为 3 的列向量，而 0 是一个由零组成的行向量 $\in \mathbb{R}$。

在 PTM形式中，量子态 ρ 由布洛赫向量表示

$$\underline{b} \equiv [\mathrm{tr}(\rho\sigma_1), \mathrm{tr}(\rho\sigma_2), \mathrm{tr}(\rho\sigma_3)]\ ,$$

本征误差由下式给出

$$\epsilon(\rho) = \frac{1 - \|\underline{b}\|}{2}\,.$$

那么，量子态 $\mathcal{E}[\rho]$ 可表示为向量

$$\underline{b}_1 = A\underline{b}_0 + \underline{v}\,.$$

反复作用量子信道 $\mathcal{E}$ 会使系统收敛到一个不动点。在 PTM形式中，我们可以将其计算为 $b^* = Ab^* + v$，或者

$$\underline{b}^* = (\mathbb{I} - A)^{-1}\underline{v}\,.$$

注意，这里隐含地要求 $(\mathbb{I} - A)$ 可逆，这对大多数物理情形都成立。否则，要解上面的方程，可以使用摩尔-彭若斯伪逆。就此不动点而言，将量子信道 $\mathcal{E}$ 连续作用 C 次于量子态 ρ，得到的布洛赫向量为

$$\begin{aligned} \underline{b}_C &= A^C\underline{b}_0 + A\left(\mathbb{I} - A^{C-1}\right)\underline{b}^* + \underline{v} \\ &= A^C\underline{b}_0 + (\mathbb{I} - A^C)\underline{b}^*, \end{aligned}$$

它确实会在 $\|A\|_\infty < 1$ 时趋近于 b^*。

我们的目标是计算信道本征误差的平均值

$$\frac{1 - \|\underline{b}_C\|}{2}$$

对所有输入纯态 b_0。为此，我们首先作出近似 $b^* \approx 0$（使得 $b_C \approx A^C b_0$），该近似在相互作用时间较短时 $\tau \le \pi$ 有效。然后，由于计算 $\|A^C b_0\|$ 的平均值（即 $\|A^C b_0\|$）是一项艰巨的任务，我们通过其均方根来近似 $\|A^C b_0\|$:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}\mu(\underline{b}_0)\|A^C\underline{b}_0\| &\approx \sqrt{\int \mathrm{d}\mu(\underline{b}_0)\|A^C\underline{b}_0\|^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2(A^C) + \sigma_2^2(A^C) + \sigma_3^2(A^C)}{3}}\,, \end{aligned} \tag{D1}$$

其中 $\sigma_1(A^C) \le \sigma_2(A^C) \le \sigma_3(A^C)$ 是 A^C 的奇异值。值得注意的是，尽管为了便于计算，这种对公式（D1）第一行的近似处理颇为方便，但显然它并非在一般情况下都成立。因此，在继续之前，我们已确认，对于本案例研究所涉及的 Jaynes-Cummings 模型，在我们感兴趣的参数范围内，近似式（D1）成立，且误差可以忽略不计。

此时，在式（D1）近似成立的情况下，需要确定 A^C 的奇异值，其解析表达式在一般情况下难以确定。因此，我们采用盖尔范德公式：当 C 很大（$C \to \infty$）时，$\sigma_3(A^C)^{1/C} \longrightarrow |\lambda_3(A)|$，其中 $\lambda_3(A)$ 指 A 的最大特征值（按绝对值计）。当逻辑量子比特由 Jaynes-Cummings哈密顿量操控时，A具有一种特殊的块结构（包含一个 1×1 块和一个 2×2 块，其中 2×2 块的两个特征值的模相同，如下所示），这使得盖尔范德对于所有三个奇异值均成立的公式，即 $\sigma_i(A^C) \approx |\lambda_i(A)|^C$。如果我们假设驱动场初始处于二项分布态，那么矩阵 A 的特征值恰好有两个不同的

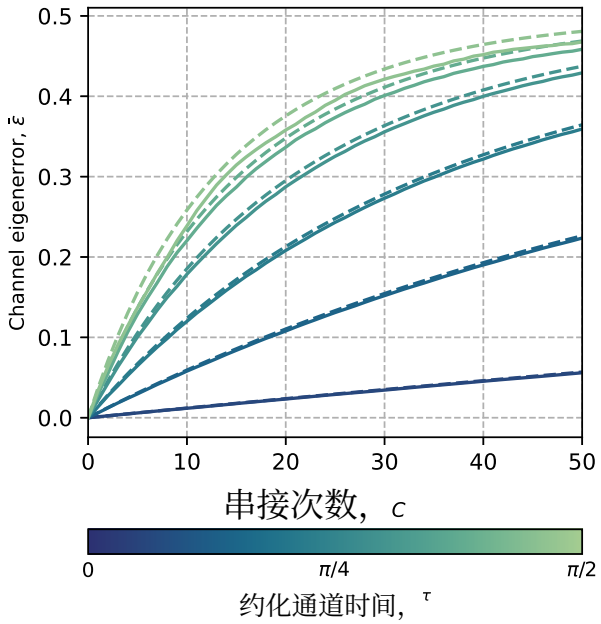


图 4：由串接 C 个相同的逻辑操作所产生的信道特征误差，这些操作由 the Jaynes-Cummings evolution. In this fi图，t h 驱动场的初始态为二项分布，其中$\bar{n} = 25$、$s = \Delta n^2/\bar{n} = 1/2$，约化相互作用时间 τ 在区间 $[0, \pi/2]$内变化。实线：

数值模拟；虚线：根据方程（D4）给出的信道特征误差的解析近似。

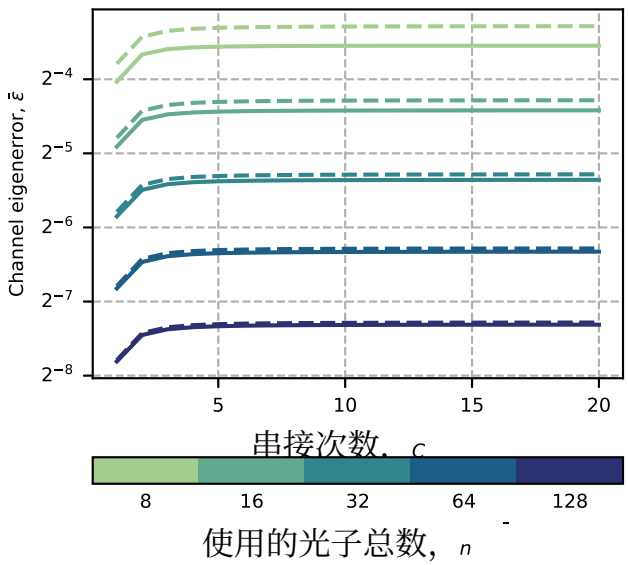


图5：串接 C 逻辑操作时，信道本征误差的解析标度（虚线）与数值标度（实线）的比较，这些操作由Jaynes-Cummings演化实现。数值标度与图3中的完全相同，而标度的解析预测由公式（D5）给出。

模的值：

$$|\lambda_a| = |\lambda_b| \approx \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{n}}\left(s\tau^2 + \frac{\sin^2(\tau)}{2s}\right)}$$
$$|\lambda_c| \approx \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\tau)}{s\bar{n}}}\,.$$

根据 s，任一本征值都可能占主导地位。作为因此，使用这些值和上述近似，平均通道本征误差近似等于

$$\bar{\epsilon}_{\tau,C} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\lambda_1|^{2C} + |\lambda_2|^{2C} + |\lambda_3|^{2C}}{3}} \tag{D2}$$

其中，我们回顾一下，根据定义 $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le |\lambda_3|$。在进一步假设主导本征值 λ_3 的模大于其他本征值的模的情况下，则（D2）可进一步近似为

$$\bar{\epsilon}_{\tau,C} \approx \frac{1 - |\lambda_3|^C}{2} \tag{D3}$$

我们用它结合理论论证来解释图 2 中所示的行为。具体而言，对于 $\bar{n} = 25$和 $s = 1/2$（如图 2所示），（D3）变为

$$\bar{\epsilon}_{\tau,C} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s\tau^2 + \sin^2(\tau)}{2s\bar{n}}\right)^{C/2}. \tag{D4}$$

在图4 中，我们绘制了$\bar{\epsilon}_{\tau,\ C}$ 的近似解析值（由方程（D2）给出）与数值计算得到的信道特征误差的对比，其中驱动态采用二项分布，且 $\bar{n} = 25$和 $s = 1/2$。

同样，我们也可以比较持续时间为 τ 、采用 $\bar{n}$个光子的演化的信道特征误差，与持续时间为 C 、采用 τ/C 和 $\bar{n}/C$ 个光子的演化的信道特征误差。对于正文图3 所研究的情形，模最大的本征值为 λ_c ，因此相应的信道特征误差近似满足以下规律

$$\bar{\epsilon}_{\tau,C} \approx \frac{1}{6\bar{n}}\left(\tau^2 + C^2\sin^2\left(\frac{\tau}{C}\right)\right). \tag{D5}$$

（D5）很好地近似了图3中观察到的行为，如图5所示。

[1]Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang。《量子计算与量子信息：十周年纪念版》。剑桥大学出版社，2010年。[2] 40量子计算的岁月。《自然综述：物理》，4(1):1–1，2022年1月。[3] Sergey Bravyi、Oliver Dial、Jay M. Gambetta、Dar´ıo Gil 和 Zaira Nazario。超导量子比特量子计算的未来。《应用物理学杂志》，132(16):160902，2022年10月。[4] Emanuel Knill。使用现实噪声设备进行量子计算。《自然》，434(7029):39–44，2005年。[5] Andrew W. Cross、Lev S. Bishop、Sarah Sheldon、Paul D. Nation 和 Jay M. Gambetta。使用随机化模型电路验证量子计算机。《物理评论A辑》，100(3):032328，2019年。[6] Thomas Monz、Philipp Schindler、Julio T. Barreiro、Michael Chwalla、Daniel Nigg、William A. Coish、Maxim- ilian Harlander、Wolfgang H¨ansel、Markus Hennrich 和 Rainer Blatt。14量子比特纠缠：创建与相干性。《物理评论快报》，106(13):130506，2011年。[7] Kenneth Wright、Kristin M. Beck、Sea Debnath、J.M. Amini、Y. Nam、N. Grzesiak、J.-S. Chen、N.C. Pisenti、M. Chmielewski、C. Collins 等。11量子比特量子计算机的基准测试。《自然·通讯》，10(1):5464，2019年。[8] Frank Arute、Kunal Arya、Ryan Babbush、Dave Bacon、Joseph C. Bardin、Rami Barends、Rupak Biswas、Ser- gio Boixo、Fernando G.S.L. Brandao、David A. Buell 等。使用可编程超导处理器实现量子优越性。《自然》，574(7779):505–510，2019年。[9] Yulin Wu、Wan-Su Bao、Sirui Cao、Fusheng Chen、Ming- Cheng Chen、Xiawei Chen、Tung-Hsun Chung、Hui Deng、Yajie Du、Daojin Fan 等。强量子计算-

利用超导量子处理器实现的功能优势。《物理评论快报》，127(18):180501，2021。[10] Ilaria Gianani、Alessio Belenchia、Stefano Gherardini、Vincenzo Berardi、Marco Barbieri 和 Mauro Paternostro。通过端点测量统计诊断量子门的相干性。《量子科学与技术》，8(4)，2023。[11] Marco Fellous-Asiani、Jing Hao Chai、Yvain Thonnart、Hui Khoon Ng、Robert S. Whitney 和 Alexia Auffèves。优化可扩展全栈量子计算机的资源效率。arXiv 预印本 arXiv:2209 05469，2022年。。[12] Julio Gea-Banacloche。量子计算的最低能量需求。《物理评论快报》，89:217901，2002年11月。[13] Sebastian Deffner。哈密顿量量子门的能量代价。《欧洲物理学快报》，134(4):40002，2021。[14] Anthony Kiely、Steve Campbell 和 Gabriel T. Landi。量子控制的经典耗散代价。《物理评论A辑》，106(1):012202，2022年。[15] Maxwell Aifer 和 Sebastian Deffner。从量子速度极限到能效量子门。《新物理学杂志》，24(5):055002，2022年。[16] Joni Ikonen、Juha S almilehto 和 Mikko M¨ott¨onen。节能量子计算。《npj量子信息》，3(1):17，2017年。[17]Valeria Cimini、Stefano Gherardini、Marco Barbieri、Ilaria Gianani、Marco Sbroscia、Lorenzo Buffoni、Mauro Paternostro 和 Filippo Caruso。量子逻辑门能量学的实验表征。《npj量子信息》，6(1):96，2020年。[18] J. Stevens、D. Szombati、M. Maffei、C. Elouard、R. Assouly、N. Cottet、R. Dassonneville、Q. Ficheux、S. Zeppetzauer、A. Bienfait、A. N. Jordan、A. Auffèves 和 B. Huard。单量子比特门的能量学。《物理评论快报》，129:110601，2022年9月。[19] Sigmund Kohler、J¨org Lehmann 和 Peter H¨anggi。纳米尺度上的驱动量子输运。《物理报告》，406(6):379–443，2005年。[20] S. J. van Enk 和 H. J. Kimble。关于量子信息处理中的控制场的经典特性。arXiv 预印本 arXiv:quant-ph/0107088，2001。[21] Julio Gea-Banacloche。激光场的量子特性对量子计算的一些启示。《物理评论A辑》，65:022308，2002年1月。[22] Julio Gea-Banacloche 和 Mayo Miller。超越 $1/n$ 极限的量子化控制场量子逻辑：数学上可行，物理上不太可能。《物理评论A辑》，78:032331，2008年9月。[23] Masanao Ozawa。守恒型量子计算。《物理评论快报》，89(5):057902，2002年7月。出版方：美国物理学会。[24] Hiroyasu Tajima、Naoto Shiraishi 和 Keiji Saito。幺正操作实现中的不确定关系。《物理评论快报》，121(11):110403，2018年。[25] Hiroyasu Tajima、Naoto Shiraishi 和 Keiji Saito。违反守恒定律的相干性代价。《物理评论研究》，2:043374，2020年12月。[26] Hiroyasu Tajima 和 Keiji Saito。量子信息恢复的普适限制：对称性与相干性。arXiv 预印本 arXiv:2103.01876，2021年。[27] Hiroyasu Tajima、Ryuji Takagi 和 Yui Kuramochi。对称性、不可逆性之间的普适权衡结构

，以及量子过程中的量子相干性。arXiv 预印本 arXiv:2206.11086，2022年。[28] Julio Gea-Banacloche 和 Laszlo B. Kish。经典与量子信息处理的能量需求比较。《涨落与噪声快报》，3(03):C3–C7，2003年。[29] Jo˜ao P. Moutinho、Marco Pezzutto、Sagar Silva Pratapsi、Francisco Ferreira da Silva、Silvano De Franceschi、Sougato Bose、Ant´onio T. Costa 和 Yasser Omar。基于电荷的经典全加器中的能量优势量子动力学。PRX Energy，2:033002，2023年7月。[30] Sagar Silva Pratapsi、Patrick H Huber、Patrick Barthel、Sougato Bose、Christof Wunderlich 和 Yasser Omar。使用囚禁离子量子比特的经典半加器：迈向节能计算。arXiv预印本 arXiv:2210.10470，2022年。[31] Sebastian Deffner 和 Eric Lutz。非马尔可夫动力学的量子速度极限。《物理评论快报》，111:010402，2013年7月。[32] Sebastian Deffner 和 Steve Campbell。量子速度极限：从海森堡不确定性原理到最优量子控制。《物理学杂志A：数学与理论》，50(45):453001，2017年。[33] Heinz-Peter Breuer 和 Francesco Petruccione。《开放量子系统理论》。牛津大学出版社，2002年。[34] Filippo Caruso、Vittorio Giovannetti、Cosmo Lupo 和 Stefano Mancini。量子信道与记忆效应。《现代物理评论》，86:1203–1259，2014年12月。[35] R. Jozsa。混合量子态的保真度。《现代光学杂志》，41(12):2315–2323，1994年。[36] J. A. Miszczak、Z. Puchała、P. Horodecki 等。次保真度与超保真度作为量子保真度的界。《量子信息与计算》，9(1)，2019年。[37] Julio Gea-Banacloche。Jaynes-Cummings模型中态矢量的坍缩与复现：量子装置进行态制备的一个示例。《物理评论快报》，65:3385–3388，1990年12月。[38] Julio Gea-Banacloche。大初始场下Jaynes-Cummings模型中的原子与场态演化。《物理评论A辑》，44:5913–5931，1991年11月。[39] Francesco Ticozzi 和 Lorenza Viola。用于纯化与冷却的量子资源：基本极限与机遇。《科学报告》，4(1):1–7，2014年。[40] Yelena Guryanova、Nicolai Friis 和 Marcus Huber。理想投影测量具有无限的资源成本。《Quantum》，4:222，2020年。[41] Lorenzo Buffoni、Stefano Gherardini、Emmanuel Zam-brini Cruzeiro 和 Yasser Omar。热力学第三定律与量子计算机的尺度变化。《物理评论快报》，129:150602，2022年10月。[42] M. Hamed Mohammady 和 Takayuki Miyadera。受热力学第三定律约束的量子测量。《物理评论A辑》，107:022406，2023年2月。[43] Armen E. Allahverdyan、Roger Balian 和 Th. M. Nieuwenhuizen。从有限量子系统中提取最大功。《欧洲物理学快报》，67(4):565，2004年。[44] The Sage Developers。SageMath，Sage数学软件系统。https://www.sagemath.org。[45] Alexia Auffèves。量子技术需要量子能源倡议。PRX Quantum，3:020101，2022年6月。[46] Carl D. Meyer。矩阵分析与应用线性代数。附问题解答。SIAM：工业与应用数学学会

，2001.

[47] W. Rudin。《泛函分析》。纯粹数学与应用数学国际丛书。麦格劳-希尔，1991年。[48] Michael M. Wolf。《量子信道与操作：导览》。2012年。[49] M. A. Nielsen。量子动力学操作的平均门保真度的一个简单公式。《物理快报》。A，303(4)：249–252，2002年。[50] Yudan Guo、Sergey Novikov、Daniel Greenbaum、Andrew Skinner 和 BS Palmer。《三维Transmon量子比特的门集层析》。载于《APS三月会议摘要》，第2015年卷，第T38–005页，2015年。