arXiv:2305.05022v2 [math.CA] 5 Oct 2024

高维分形不确定性

ALEX COHEN

Abstract. 我们证明，如果一个分形集以某种定量意义避开 $\mathbb{R}^d$ 直线（我们称之为直线孔隙性），那么它就满足分形不确定性原理。其主要成分是一种新的高维贝尔林–马利亚万乘子定理。

1. Introduction

1.1. **主要结果。** 分形不确定性原理（FUP）表明，一个函数不可能同时局部化于物理空间中的一个分形集和傅里叶空间中的一个分形集。它在量子混沌领域有着引人注目的应用——将 FUP 应用于来自混沌动力系统的分形集，我们便能够控制这些系统上的高频波。Bourgain 和 Dyatlov [5] 证明了满足 $\mathbb{R}$ 孔隙性性质的 [12, 13]集合的 FUP，并将其应用于特征函数质量的下界（Dyatlov、Jin 和 Nonnenmacher [12, 13]）、Schr¨odinger 方程的控制、阻尼波方程的指数衰减 [13, 21, 22], ，以及开放量子系统的谱隙（Dyatlov–Zahl 和 Dyatlov–Zworski [14, 15]）。有关更多细节，请参阅综述文章 [9, 10]。

这些结果适用于曲面，因为 Bourgain 和 Dyatlov 的分形不确定性原理适用于 $\mathbb{R}$ 的子集。要证明 $d+1$ 维流形的类似结果，需要一个适用于 $\mathbb{R}^d$ 子集的分形不确定性原理。我们对任意 $d \geq 1$ 证明了这样一个结果；下文给出所用定义（$h < 1/100$ 表示一个小参数）：

定理 1.1。 设 $\nu > 0$，并且

- $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在尺度 h 到 1 上是球上 ν-多孔的，并且
- $\mathbf{Y} \subset [-h^{-1}, h^{-1}]^d$ 在尺度 1 到 h^{-1} 上是直线上 ν-多孔的。

那么存在 β、$C > 0$，它们仅依赖于 ν 和 d，使得对所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathbf{Y} \implies \|f 1_{\mathbf{X}}\|_2 \leq C\, h^{\beta} \|f\|_2. \tag{1.1}$$

可以用与 $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 和 $\mathbf{Y} \subset [-h^{-1}, h^{-1}]^d$ 类似的方式利用近似正交性，从而去掉 [13, 命题 2。9] 这一假设。直线上的多孔性比球上的孔隙性是更强的条件；由于维数 $d \geq 2$ 中的一个反例，需要这一条件，参见（1.3）。我们相信，这是一个在应用中可以

本研究获得 NSF 研究生研究奖学金和 Hertz 基金会奖学金的资助。另获 NSF CAREER 项目资助（编号 DMS-1749858），特此致谢。

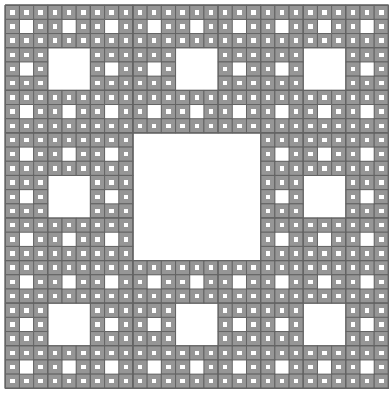

FIGURE 1.谢尔宾斯基地毯在球上具有孔隙性，但在直线上不具有孔隙性

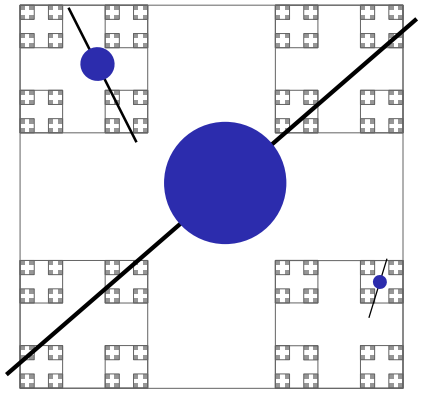

FIGURE 2. 两个中三分康托集的乘积在直线上具有孔隙性

得到确立的自然假设。我们通过结合 Han 和 Schlag [16] 以往的工作与高维 Beurling–Malliavin 乘子定理（见下文定理 1.4）来证明定理 1.1。该乘子定理是主要的新要素，其证明涉及某些多重次调和函数的显式构造¯以及 H¨ormander 关于 ∂ 方程可解性的定理。本文的核心内容是构造多重次调和函数。

1.2. 孔隙性与一维情形。 我们称集合 $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ 从尺度 α_0 到 α_1 在球上具有 ν-孔隙性，如果对每个直径为 $\alpha_0 < R < \alpha_1$ 的球 B，都存在某个$\mathbf{x} \in$B，使得 $\mathrm{B}_{\nu R}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{X} = \emptyset$。这里，$\mathrm{B}_{\nu R}(\mathbf{x})$ 表示以$\mathbf{x}$为中心、半径为 νR的球。类似地，如果对于长度为 $\alpha_0 < R < \alpha_1$ 的所有线段 τ，都存在某个 $\mathbf{x} \in \tau$，使得 $\mathrm{B}_{\nu R}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{X} = \emptyset$，我们就称集合$\mathbf{X}$ 从尺度 α_0 到 α_1 在直线上具有 ν-孔隙性 。[1] 我们始终假设 $\nu \leq 1/3$。对于欧几里得空间的子集，球上孔隙性与直线上孔隙性相同，因此我们只称集合为多孔。

直线上的孔隙性是更强的条件。例如，任意一条直线都具有球上孔隙性，但不具有直线上孔隙性。另一个具有球上孔隙性但不具有直线上孔隙性的集合见图1，具有直线上孔隙性的集合见图 2 。现在我们陈述 Bourgain 和 Dyatlov 的主定理，它是定理 1.1 的一维情形。

定理1.2（Bourgain-Dyatlov）。 设

- $\mathbf{X} \subset [-1, 1]$ 在尺度 h 至 1 上为 ν-多孔，且
- $\mathbf{Y} \subset [-h^{-1}, h^{-1}]$ 是 ν-多孔的，尺度从 1 到 h^{-1}。

存在仅依赖于 ν 的 $\beta, C > 0$，使得对所有 $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathbf{Y} \implies \|f 1_{\mathbf{X}}\|_2 \leq C h^{\beta} \|f\|_2. \tag{1.2}$$

[1]方向孔隙性是一种已有的概念，与直线孔隙性类似，参见 Chousionis 的论文 [6]。

注。 在 Bourgain 和 Dyatlov 的论文中，假设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是 Ahlfors–David 正则集，而非多孔集。这两个概念只需改变参数即可相互转换：任意维数为 < 1 的正则集都是多孔集，而任意多孔集都包含于一个维数为 < 1的正则集中。最早使用多孔集表述分形不确定性原理（FUP）的论述见于 [12]。

并非所有多孔集$\mathbf{X}$，$\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^d$ 都满足分形不确定性原理。严格来说，我们可能会有

$$\mathbf{X} = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbf{Y} = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}. \tag{1.3}$$

如果 $\mu_{\mathbf{X}}$ 和 $\mu_{\mathbf{Y}}$ 是$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{Y}$上的标准测度，那么 $\widehat{\mu_{\mathbf{X}}} = \mu_{\mathbf{Y}}$。更多细节请参见 [10, 示例 6.1] 。我们需要直线上的多孔性来排除此例。

1.3. 高维分形不确定性相关先前研究。 集合$\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ 是*Ahlfors–David* δ-正则 的，其常数为 C_{AD}，尺度范围从 α_0 到 α_1；若存在一个测度 μ支集于$\mathbf{X}$，并满足以下条件。对于每个直径为 $\alpha_0 < R < \alpha_1$的球 B，

$$\mu(\mathsf{B}) \le C_{\mathrm{AD}}\, R^{\delta}, \tag{1.4}$$

此外，如果 B 的中心位于$\mathbf{X}$中，那么

$$\mu(\mathsf{B}) \ge C_{\mathrm{AD}}^{-1}\, R^{\delta}. \tag{1.5}$$

对于$\mathbf{X} \subset [-1, 1]^d$，若其为尺度从 h 到 1 的 δ-正则集；对于$\mathbf{Y} \subset [-h^{-1}, h^{-1}]^d$，若其为尺度从 1 到 h^{-1}的 δ'-正则集，则有一个平凡的界

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathbf{Y} \implies \|f 1_{\mathbf{X}}\|_2 \le C \min(1, h^{(d-(\delta+\delta'))/2}) \|f\|_2 \tag{1.6}$$

其中，C仅取决于 δ、δ'、C_{AD}、d。估计 $\|f 1_{\mathbf{X}}\|_2 \le C h^{(d-(\delta+\delta'))/2} \|f\|_2$可由结合傅里叶变换的 $L^1 \to L^\infty$ 有界性与集合 X 和 Y 的体积界得出。任何优于这一平凡界的改进都称为分形不确定性原理（FUP），而 $\delta + \delta' < d$ 与 $\delta + \delta' > d$ 这两种情形截然不同。最近，Backus、Leng 和 Z. Tao [1] 在前一种情形下给出了决定性结果。他们证明，当$\delta + \delta' < d$ 且 X、Y 在某种意义上不正交时，分形不确定性原理成立。本文研究的是 $\delta + \delta' > d$ 情形（若 $\delta + \delta' < d$，则界 (1.1) 可由 (1.6) 平凡地推出）。

Han 和 Schlag [16] 证明了当 $\mathbf{X}$ 是任意多孔集，且 $\mathbf{Y}$ 是若干一维多孔集的笛卡尔积时，分形不确定性原理成立。Cladek 和 T. Tao [7]证明了分形集的加法能量估计，并据此证明当环境维数 d为奇数且 $\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$ 是 δ-正则的，且 $d/2 - \varepsilon(d, C_{\mathrm{AD}}) < \delta < d/2 + \varepsilon(d, C_{\mathrm{AD}})$ 时，分形不确定性原理成立。作者 [8] 证明了当 $\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$是 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$中不含一对正交直线的康托集时，分形不确定性原理成立（本文的思路与那项工作无关）。

我们还要提到，Dyatlov [11]撰写了一篇综述性札记，从不同角度探讨了本文中的一些证明。

1.4. **Beurling–Malliavin 乘子问题。** Bourgain 和 Dyatlov 证明定理 1.2 的一个关键要素是 Beurling–Malliavin（BM）乘子定理，这是调和分析中的一项经典结果。许多作者曾多次重新研究这一结果，尤其值得一提的是 Beurling 和 Malliavin 的原始论文 [2] 以及 Mashregi、Nazarov 和 Havin 最近的综述 [25]。

定理 1.3 (Beurling–Malliavin)。 设 $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ 是满足以下条件的权函数

$$|\omega(x_1) - \omega(x_2)| \leq C_{\mathrm{Lip}}|x_1 - x_2| \quad \textit{for all } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty. \tag{1.8}$$

对于每个 $\sigma > 0$，都存在一个非零函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$，使得 $\operatorname{supp} \hat{} f \subset [-\sigma, \sigma]$，并且

$$|f(x)| \leq e^{\omega(x)} \qquad \textit{for all } x \in \mathbb{R}.$$

条件（1.7）断言了利普希茨正则性，而（1.8）则控制 ω 的增长。

注记。

1. 以下例子有助于理解增长条件（1.8）。
   (i) 如果 $\omega(x) = -|x|$，那么增长条件不成立。(ii) 如果 $\omega(x) = -\frac{|x|}{\log(2+|x|)}$，那么增长条件不成立。(iii) 如果 $\omega(x) = -\frac{|x|}{(\log(2+|x|))^2}$，那么增长条件成立。
2. 如果我们寻找傅里叶支撑在 $[0, \infty)$ 而不是 $[-\sigma, \sigma]$ 的函数，就有一个非常精确的结果。给定一个可测函数 $\omega : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$，以下条件等价：

   (i) 存在 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\operatorname{supp} \hat{} f \subset [0, \infty)$，且 $|f| = e^{\omega}$；(ii) 我们有 $e^{\omega} \in L^2(\mathbb{R})$，并且增长条件（1.8）成立。

   从 (i)⇒(ii) 这一方向称为第二个 F. & M. Riesz 定理，而从(ii)⇒(i)这一方向是外函数的构造。参见 [25, §1.1]。方向 (i)⇒(ii) 表明定理1.3 中的增长条件是必要的。

我们证明一个高维 Beurling–Malliavin 定理，它是定理 1.1 的关键要素。我们希望这一结果本身也能引起关注。设$\omega :\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ 是一个权函数，并定义

$$G(\mathbf{x}) = \int_{1/2}^{2} |\omega(s\mathbf{x})|\, ds, \tag{1.9}$$

$$G^*(r) = \sup_{|\mathbf{x}|=r} G(\mathbf{x}). \tag{1.10}$$

另令 $\langle \mathbf{x} \rangle = (1 + |\mathbf{x}|^2)^{1/2}$。

定理 1.4. 设 $\omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\le 0}$ 是一个满足条件的权函数

$$\omega(\mathbf{x}) = 0 \qquad for\ |\mathbf{x}| \le 2, \tag{1.11}$$

$$|D^a \omega(\mathbf{x})| \le C_{\mathrm{reg}} \langle \mathbf{x} \rangle^{1-a} \qquad for\ 0 \le a \le 3, \tag{1.12}$$

$$\int_0^\infty \frac{G^*(r)}{1+r^2}\, dr \le C_{\mathrm{gr}}. \tag{1.13}$$

对于任意 $\sigma > 0$，都存在一个函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathsf{B}_\sigma, \tag{1.14}$$

$$|f(\mathbf{x})| \ge \frac{1}{2} \qquad for\ all\ \mathbf{x} \in \mathsf{B}_{r_{\min}}, \tag{1.15}$$

$$|f(\mathbf{x})| \le C e^{c\sigma\, \omega(\mathbf{x})} \qquad for\ all\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.16}$$

我们可以取

$$c = \frac{c_d}{\max(C_{\mathrm{reg}}, C_{\mathrm{gr}})} \tag{1.17}$$

$$r_{\min} = c_d\, \min(\sigma, \sigma^{-1}) \tag{1.18}$$

$$C = C_d\, \max(\sigma^{-C_d}, e^{3\sigma}) \tag{1.19}$$

其中 c_d、$C_d > 0$ 是仅依赖于维数的常数。

˄当 $\sigma \to 0$ 时，这些常数会趋于无穷大，因为条件 $\operatorname{supp} f \subset \mathsf{B}_\sigma$ 会变得很难满足；当 $\sigma \to \infty$ 时，它们也会趋于无穷大，因为条件 $|f(\mathbf{x})| \le C e^{c\sigma\omega(\mathbf{x})}$ 会变得很难满足。只有常数 c 依赖于 C_{reg} 和 C_{gr}，而 $r_{\min}$ 和 C 则由环境维数 d 和谱半径 σ 给出。

正则性条件（1.12）是一个至多涉及三阶导数的 Kohn-Nirenberg 符号条件。令 $a = 0$，得到温和的增长条件 $|\omega(\mathbf{x})| \le C_{\mathrm{reg}} \langle \mathbf{x} \rangle$；令 $a = 3$，得到三阶导数条件 $|D^3 \omega(\mathbf{x})| \le C_{\mathrm{reg}} \langle \mathbf{x} \rangle^{-2}$。定理 1.4比一维的 Beurling–Malliavin 定理弱得多，因为我们要求高得多的正则性。尽管如此，我们为分形集构造的权函数将满足（1.12）。

我们先来讨论一下增长条件（1.13）。一方面，取$\omega \to G$ 会使 ω 变得平滑，并使其增长得较慢。另一方面， $G \to G^*$ 是一个最大值，会使其增长得较快。从直观上说， G^* 在二进尺度上是常数$[2^j, 2^{j+1}]$。注意，在一维时，

$$\int_0^\infty \frac{G^*(r)}{1+r^2}\, dr \sim \int_{-\infty}^\infty \frac{|\omega(t)|}{1+t^2}\, dt$$

两侧相差至多一个常数，因此（1.13）与经典 Beurling–Malliavin 定理中的 $\mathbb{R}$ 具有相同的增长条件。定理1.4的证明涉及对不同二进制分块进行估计，然后将它们求和。我们可以仅利用的正则性，得到每个二进制分块的一个不错的估计

，而（1.13）则是对这些贡献求和所必需的。增长条件控制了 ω 在经过原点的直线上的质量。这一点很合理，因为正如我们所观察到的，分形集只有避开直线，才能具有分形不确定性原理。

备注。条件（1.11）要求 $\omega(\mathbf{x}) = 0$对 $|\mathbf{x}| \leq 2$并非定理1.4的必要条件。可以修改权函数，使其满足（1.11），代价只是常数发生变化。

1.5. **分形不确定性证明概要**。我们利用 Han 和 Schlag 的一个结果 [16]，由定理 1.1 推出定理1.4。下面的陈述与 Han 和 Schlag 论文中的表述并不完全一致，比较见 §A.1 。因子 $\sqrt{d}$ 在本节中用于转换 ℓ_1 与 ℓ_2 范数之间的关系，定义在 $\mathbb{R}^d$上。

定义 1.5。集合 $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^d$ 具有参数为 c_1、c_2、c_3、$\alpha \in (0, 1)$ 的阻尼函数，当且仅当存在一个函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$，满足

$$\operatorname{supp} \hat{\psi} \subset B_{c_1}, \tag{1.20}$$

$$\|\psi\|_{L^2(B_1)} \geq c_2, \tag{1.21}$$

$$|\psi(\mathbf{x})| \leq \langle \mathbf{x} \rangle^{-d} \qquad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.22}$$

$$|\psi(\mathbf{x})| \leq \exp\left(-c_3 \frac{|\mathbf{x}|}{(\log(2 + |\mathbf{x}|))^{\alpha}} \right) \qquad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathbf{Y}. \tag{1.23}$$

重要的是，$\alpha < 1$。若改为 $\alpha > 1$，那么（1.23）可能在整个 $\mathbb{R}^d$ 上成立，这样定义就没有意义了。由于 $\alpha < 1$ 阻尼函数在$\mathbf{Y}$ 上的衰减必须远快于它在 $\mathbb{R}^d$其余部分上的衰减。在阻尼函数存在的前提下，Han 和 Schlag 证明了以下分形不确定性原理。

定理 1.6（[16,定理 5。1]）。假设

- $\mathbf{X} \subset [-1, 1]^d$ 在尺度 h 至 1 的球上是 ν-多孔的，并且
- $\mathbf{Y} \subset [-h^{-1}, h^{-1}]^d$满足以下条件。存在 $c_2, c_3, \alpha \in (0,1)$，使得对于所有 $h < s < 1$ 和 $\eta \in [-h^{-1}s - 5, h^{-1}s + 5]^d$，集合

$$s\mathbf{Y} + [-4, 4]^d + \eta \tag{1.24}$$

存在一个带有参数 $c_1 = \frac{\nu}{20\sqrt{d}}$、$c_2, c_3, \alpha$ 的阻尼函数。

那么存在 $\beta = \beta(\nu, c_2, c_3, d, \alpha) > 0$ 和 $C = C(\nu, c_2, c_3, d, \alpha) > 0$，使得对于所有$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathbf{Y} \implies \|f 1_{\mathbf{X}}\|_2 \leq \widetilde{C} h^{\beta} \|f\|_2. \tag{1.25}$$

证明分为三个步骤。

1. 证明以下针对傅里叶支撑位于 $\mathbf{Y}$ 中的函数的定量唯一延拓原理。设 $w > 0$ 为一个小参数，并令 $\{Q_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d}$

为一组宽度为-w 的立方体，在每个整数立方体中恰有一个。令

$$U = \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \mathsf{Q}_{\mathbf{n}}, \quad \mathsf{Q}_{\mathbf{n}} \subset \mathbf{n} + [0,1]^d.$$

存在某个 $c > 0$ ，使得对于任意如上所述的 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$和 U ，

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathbf{Y} \implies \|f 1_U\|_2 \geq c\|f\|_2.$$

证明首先将 f 与$\mathbf{Y}$ 的阻尼函数进行卷积，从而得到傅里叶衰减类似于$\hat{} f(\xi) \lesssim \exp\left(-\frac{|\xi|}{(\log(2+|\xi|))^\alpha}\right)$ 的函数，其中某个 $\alpha < 1$成立。接下来需要证明，傅里叶变换快速衰减的函数具有唯一延拓性。

2. 运用上一步的定量唯一延拓原理，得到一个单尺度估计。对于 $h < r < 1$，粗略地说，

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathbf{Y} \implies \|f 1_{\mathbf{X}+\mathsf{B}_{r/L}}\|_2 \leq (1-c)\|f 1_{\mathbf{X}+\mathsf{B}_r}\|$$

其中 $L > 0$ 是一个较大的常数。在 Han 和 Schlag 的论文中，使用的是光滑截断函数，而非示性函数。这个估计意味着，在每个尺度$h < r < 1$上， f 的部分质量固定地位于多孔集$\mathbf{X}$的孔洞中。

3. 迭代单尺度估计 $\sim \log h^{-1}$ 多次，以获得幂次节省界（1.25）。

这与 Bourgain 和 Dyatlov 为定理 1.2所发展的策略相同。Jaye 和 Mitkovski [20] 抽象出了这一论证中的唯一延拓部分。的主要贡献 [16]在于证明了适用于$\mathbb{R}^d$ 上具有快速衰减傅里叶变换的函数的正确唯一延拓原理。

我们利用定理 1.4 构造直线孔集的阻尼函数，将其与定理1.6 结合即可得到定理 1.1，§6 中有详细说明。

命题 1.7。 设 $\mathbf{Y} \subset [-3h^{-1}, 3h^{-1}]^d$ 从尺度 $\mu > 1$ 到h^{-1}在直线上是 ν-多孔的。那么存在某个 $\alpha = \alpha(\nu) < 1$ ，使得对于任意 $0 < \sigma < 1$，$\mathbf{Y}$ 都存在一个参数为 α 且

$$c_1 = \sigma, \tag{1.26}$$

$$c_2 = c(\mu, d)\, \sigma^{C_d}, \tag{1.27}$$

$$c_3 = c(\nu, d)\, \sigma. \tag{1.28}$$

注记。 1. 实际上，我们将取 $\mu = 10\sqrt{d}/\nu$。
2. 对 σ 的定量依赖与 [23] （在 $d = 1$中，它们具有$c_2 \propto \sigma^6$）。

3. 我们将能够取

$$\alpha(\nu) = 1 - c\frac{\nu}{|\log \nu|}$$

对于某个绝对常数 $c > 0$。

1.6. 分形不确定性的一个应用。 我们概述 Dyatlov 和 Jin 对特征函数下界的证明。我们的目的只是让读者大致了解如何应用分形不确定性原理，因此忽略了许多重要细节。本节讨论的是一维分形不确定性原理，而非高维情形。

设 M 是一个连通紧致双曲曲面。记 ψ_k 为 L^2归一化的k阶拉普拉斯特征函数，其特征值为 $\lambda_k = h^{-2}$。量子混沌中的一个基本问题是高频特征函数的质量如何分布。Dyatlov 和 Jin 在这方面给出了一些结果。

定理 1.8 (Dyatlov 和 Jin [12])。 设 $U \subset M$ 是一个非空开集。对于某个$c_U > 0$,

$$\|\psi_k 1_U\|_2 \geq c_U \quad \textit{for all } k > 0.$$

下面粗略概述如何运用分形不确定性原理来证明该定理。我们可以写作 $M = \Gamma\backslash\mathbb{D}$，其中 $\mathbb{D}$ 是庞加莱圆盘，$\Gamma \subset$ SL(2，$\mathbb{R}$) 是一个~等距变换群。于是 ψ_k 提升为 $\mathbb{D}$上的一个 Γ-不变特征函数 ψ_k，而 U 则提升为一个 Γ-不变开子集 $U \subset \mathbb{D}$。

对于 $b \in \mathbb{S}^1$ 和 $z \in \mathbb{D}$，用 $P_b(z)$ 表示泊松核。对于任意 $(b, r) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$，双曲平面波

$$\psi_b^r(z) := P_b(z)^{\frac{1}{2}+ir}, \quad z \in \mathbb{D} \tag{1.29}$$

满足特征函数方程 $-\Delta\psi_b^r = (r^2 + \frac{1}{4})\psi_b^r$，定义在 $\mathbb{D}$上。如果 $r > 0$，我们称之为出射波；如果 $r < 0$，则称之为入射波。由于 ψ_k 的特征值为 λ_k，我们取$r = \sqrt{\lambda_k - 1/4}$。

~我们可以用两种方式合成 ψ_k，分别使用出射波或入射波：

$$\widetilde{\psi}_k(z) = \int_{\mathbb{S}^1} f(b)\psi_b^r(z)\, db, \quad \widetilde{\psi}_k(z) = \int_{\mathbb{S}^1} g(b)\psi_b^{-r}(z)\, db, \quad r \sim h^{-1},$$

其中 f，g 是定义在 $\mathbb{S}^1$上的广义函数。这些广义函数之间存在一个显式公式（例如参见 [3,§4.4]）

$$g(b) = c_r \int_{\mathbb{S}^1} e^{-(1+2ir)\log|b-a|} f(a)\, da. \tag{1.30}$$

现在取 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得 $B_{1-\varepsilon} \subset \mathbb{D}$ 覆盖 M。设 γ 是 $\mathbb{D}$上的一条测地线，其端点为 γ_+，$\gamma_- \in \mathbb{S}^1$。定义

$$\mathbf{X} = \bigcup \{\gamma_+, \gamma_-\} \quad \text{over all } \gamma \text{ such that } \gamma \cap B_{1-\varepsilon} \neq \emptyset \text{ and } \gamma \cap \widetilde{U} = \emptyset. \tag{1.31}$$

集合 $\mathbf{X} \subset \mathbb{S}^1$ 表示 M 上不与 U相交的测地线。利用 M 上的 horocycle 流的唯一遍历性，可以证明X </style}是多孔的。

从道理上说，如果 $\|\psi_k 1_U\|_2 = o$(1)，那么 f 和 g 都局部集中在 h-邻近集合 $\mathbf{X}$ 上，其中 $h = \lambda_k^{-1/2}$。由于 f 和 g 通过一个振荡积分相关联（1.30），

将分形不确定性原理应用于 h-邻域 $\mathbf{X}$ ，即可排除这种情形。详情请参见综述 [9]。

我们猜想定理1.8在高维情形下同样成立。设 M是一个 d维双曲流形，且 $U \subset M$ 是一个开子集。我们以相同的方式得到分形集$\mathbf{X} \subset \mathbb{S}^{d-1}$ ，如果 $\mathbf{X}$ 是线孔隙的，那么我们的定理 1.1 即可适用。

1.7. **论文概述**。 在 §2 中，我们讨论 Beurling–Malliavin 乘子问题如何自然地分为两个步骤。

步骤 1：多重次调和 Beurling–Malliavin（$\mathcal{PSH}$-BM）是一个位势理论问题，涉及构造多重次调和函数。步骤 2：解析 Beurling–Malliavin（$\mathcal{A}$-BM）是一个多复变问题，涉及根据这些多重次调和函数构造整函数。

在 §2 的末尾，我们陈述针对这两个步骤的解，并在 §§3-5 的结果基础上给出定理 1.4 的证明。在 §3 中，我们定义一个延拓算子，将 $\mathbb{R}^d$ 上的函数映射为 $\mathbb{C}^d$ 上的函数，并利用该算子构造多重次调和函数。在 §4 中，我们说明如何对满足定理 1.4 假设的权函数进行修改，使 §3 中的构造得以适用。§3 和 §4 合起来完成 $\mathcal{PSH}$-BM，并构成本文的核心。在 §5 中，我们利用 H¨ormander 的 L^2 理论完成 $\mathcal{A}$-BM，其中涉及 $\bar\partial$ 方程。本节沿用了 Bourgain 的一份未发表笔记。在 §6 中，我们证明命题 1.7，并完成定理 1.1 的证明。在附录 A 中，我们处理一些遗留问题。

1.8. **记号**。 对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，我们使用傅里叶变换

$$\hat f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\, e^{-2\pi i\, \mathbf{x}\cdot\xi}\, d\mathbf{x}.$$

我们通常将向量 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$ 记作 $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$，其中 $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$。我们用 $\hat{}\mathbf{y}$ 表示单位向量；若 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ，则记作 $\hat{}\mathbf{y} = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$。 ℓ_2 范数在 $\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d$ 上记作$|\mathbf{x}|, |\mathbf{z}|$。令

$$\langle \mathbf{x} \rangle = (1 + |\mathbf{x}|^2)^{1/2}.$$

我们用 $f \mapsto H[f]$ 表示 $L^2(\mathbb{R})$ 上的希尔伯特变换。对于函数 $f \in C_0^1(\mathbb{R})$，它定义为

$$H[f](x) = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t}\, \frac{dt}{\pi}. \tag{1.32}$$

对于 $u \in C^2(\mathbb{C}^d)$， $\partial\bar\partial u$ 是一个厄米形式，可用坐标表示为厄米矩阵。

$$\begin{aligned}\langle (\partial\bar\partial u)\hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\mathbf{e}}_k\rangle &= \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \bar\partial z_k} \\ &= \frac{1}{4}(\partial_{x_j}\partial_{x_k} + \partial_{y_j}\partial_{y_k})u + \frac{1}{4}i(\partial_{x_j}\partial_{y_k} - \partial_{x_k}\partial_{y_j})u\end{aligned}$$

其中 $\hat{\mathbf{e}}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$。

对于函数 $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$，将二次型 $D^2 f(\mathbf{x})$ 作用于向量 $\mathbf{v}$ 所得结果为

$$\langle (D^2 f(\mathbf{x}))\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle. \tag{1.33}$$

记 $D^a f = (\partial^\alpha f)_{|\alpha|=a}$，其中 α 遍历多重指标，并且

$$|D^a f(\mathbf{x})| = \sup_{|\alpha|=a} |\partial_\alpha f(\mathbf{x})|. \tag{1.34}$$

我们用 $A \lesssim B$ 表示 $A \le C_d B$，其中 $C_d > 0$ 仅依赖于环境维数。我们用 c_d, $C_d > 0$ 表示仅依赖于维数的小/大常数，这些常数可能随行而变化。

致谢。 感谢 Tuomas Sahlsten 指出了关于方向孔隙性的先前研究。感谢 Larry Guth 和 Ruixiang Zhang 进行了几次有益的讨论。非常感谢 Semyon Dyatlov 提供详尽且有帮助的评论，并在此过程中进行了几次有益的交流。感谢匿名审稿人提出的宝贵意见，这些意见改进了本文。

2. The Beurling–Malliavin multiplier problem

Beurling–Malliavin（BM）问题旨在构造具有有界傅里叶支撑并具备某些衰减性质的函数。本节讨论一维 Beurling–Malliavin 问题，然后概述我们在高维中的方法。在概述中，我们陈述 §4 和 §5 的主要结果，并利用这些结果证明定理 1.4。

BM 问题的出发点是对具有有界傅里叶支撑的函数的 Paley–Wiener 刻画。

定理 2.1 (Paley–Wiener)。 函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 的傅里叶支撑包含于 $B_{\sigma/2\pi} = \left\{ \xi : |\xi| \le \frac{\sigma}{2\pi} \right\}$ 当且仅当 f 是整函数 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的限制：$\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ 满足以下条件。

$$|\tilde{f}(\mathbf{x} + i\mathbf{y})| \le A\, e^{\sigma|\mathbf{y}|} \quad \textit{for some } A > 0. \tag{2.1}$$

参见 §A.3 以了解证明概要，以及 [18, 定理 7.3。1] 以了解完整证明。

2.1. Beurling–Malliavin 在 $\mathbb{R}$。

我们先从一维情形开始。给定一个权函数 $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\le 0}$，其中 $\omega(0) = 0$。我们希望找到一个非零整函数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得

$$\log |f(x)| \le \omega(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

$$\log |f(0)| \ge -1, \tag{2.3}$$

$$\log |f(x + iy)| \le \sigma |y| + A'. \tag{2.4}$$

方程 (2.2) 量化了 f 的衰减，方程 (2.3) 量化了 f 的非消失性 ˆ，而方程 (2.4) 确保满足 Paley–Wiener 判据，因此 supp $f \subset[-\sigma/2\pi, \sigma/2\pi]$。

若函数 $u: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 满足上半连续性，并且在$\Delta u \geq 0$ 的分布意义下满足次调和条件，则称其为次调和函数。如果 f 是整函数，那么 log $|f|$ 在 $\mathbb{C}$ 上是次调和的。事实上，如果 $Z(f)$ 是 f的零点集，且 $\mu_{Z(f)}$ 是 $Z(f)$上的计数测度，那么

$$\Delta \log |f| = 2\pi \mu_{Z(f)}. \tag{2.5}$$

将 log $|f|$ 视为一般的次调和函数并不会损失太多信息，这也是理解 f大小的最佳方式。

如果我们能够解决 Beurling–Malliavin 问题，就可以找到一个次调和函数 u: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, 使得在 $\mathbb{R}$ 上满足 $u \leq \omega$， $u(0) = 0$，并且 $u(x + iy) \leq \sigma|y|$。其中几种证明的思路都是为这种情形寻找逆命题。这里有两个步骤：次调和 Beurling–Malliavin 问题和解析 Beurling–Malliavin 问题。

$\mathcal{SH}$**-BM.** 求一个次调和函数 $u: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 使得 $u|_{\mathbb{R}} \leq \omega$， $u(0) = 0$，且 $u(x + iy) \leq \sigma|y|$。 $\mathcal{A}$**-BM.** 求一个解析的函数 f，使得 log $|f| \lesssim u$ 且 $f(0) = 1$。

这些步骤中的每一步都是容易着手解决的问题。首先，我们来讨论次调和 Beurling–Malliavin 问题。作为初步尝试，可以尝试求解

精确 $\mathcal{SH}$**-BM**。 求一个次调和函数 $u: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 使得 $u|_{\mathbb{R}} = \omega$ 并且
$$u(x + iy) \leq \sigma|y|.$$

一个自然的候选解是取 $u = E\omega + C|y|$，其中 $E\omega: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 是通过分别将 ω 调和延拓到上半平面和下半平面得到的。我们计算

$$\Delta u = 2\partial_y u(x + i0)\delta_{\mathbb{R}} = 2(H[-\omega'] + C)\delta_{\mathbb{R}}. \tag{2.6}$$

算子 $\omega \to H[-\omega']$ 是 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 的狄利克雷到诺伊曼算子。只要

$$\|H[\omega']\|_\infty < \infty \tag{2.7}$$

我们可以取 $C \geq \|H[\omega']\|_\infty$ 并且 u 将在 $\mathbb{C}$ 上是次调和函数，如所需。若（2.7）成立，则 精确 $\mathcal{SH}$-BM 问题便以典范方式得到解决。

定理 1.3 的主要挑战在于求解 $\mathcal{SH}$-BM，同时仅假设 ω 是利普希茨且泊松可积的——一般来说，解将具有 $u|_{\mathbb{R}} \leq \omega$，而不是 $u|_{\mathbb{R}} = \omega$。多年来，人们提出了许多解决这一问题的方法。在他们最初的论文中，Beurling 和 Malliavin [2] 运用基于狄利克雷问题能量法的变分论证。Koosis [24]提出了一种基于狄利克雷问题次解佩龙方法的方法。Mashreghi、Nazarov 和 Havin [25] 通过显式地将 $\mathcal{SH}$-BM 中的利普希茨权函数 ω 变为修改后的权重 $\widetilde{\omega} \leq \omega$ 来求解 $\|H[\widetilde{\omega}']\| < \infty$。事实证明，我们

关心的分形不确定性权函数满足（2.7），因此这一主要挑战与我们无关。

现在让我们转向解析型 Beurling–Malliavin 问题。我们从一个次调和函数开始$u:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$并希望构造一个整函数 f，使其对数为 $|f|\sim u$。大多数证明通过仔细选择 $\mathcal{A}$-BM 的零点集 f，使其符合（2.5），然后将f 写成魏尔斯特拉斯乘积来求解。Bourgain 写了一篇未发表的笔记 [4]，提出了另一种求解 $\mathcal{A}$-BM 的方法，该方法基于 H¨ormander 的 L^2 方程理论。其结果是，存在一个整函数 $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 使得 $f(0)=1$ 并且

$$\int_{\mathbb{C}}|f(z)|^2e^{-u(z)}<C.$$

这 L^2 b ound 可通过次调和性转换为 L^∞ bound，从而解决 $\mathcal{A}$-BM .

2.2. **中的 Beurling–Malliavin**。在上一节中，我们看到，理解整函数在 $\mathbb{C}$ 上的幅值的对数的最佳方式，是将其视为一个一般的次调和函数。我们应该如何理解整函数在 $\mathbb{C}^d$ 上的幅值?

设 $f:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}$ 为整函数。那么 $\log|f|$ 是一个多重次调和函数。函数$u:\mathbb{C}^d\to\mathbb{R}$ 若为上半连续，且其在每条复直线上的限制都是次调和的，则称其为多重次调和函数。明确地说，这意味着它满足次平均值性质

$$u(\mathbf{z})\le\fint_0^{2\pi}u(\mathbf{z}+e^{i\theta}\mathbf{v})\,d\theta\quad\text{for any }\mathbf{z},\mathbf{v}\in\mathbb{C}^d.\tag{2.8}$$

这里 $\fint_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}$ 是一个平均值。关于次平均值性质及其与非负拉普拉斯算子定义的等价性，详见 §3.2 开头的更多讨论。若 C^2 函数 u 所对应的厄米矩阵 $\left(\frac{\partial u}{\partial z_j\bar\partial z_k}\right)$ 是半正定的，则该函数是多重次调和函数。多复变领域的一项重要认识是，理解整函数的模的对数，最好的方式是将其视为一般的多重次调和函数。我们再次将 Beurling–Malliavin 问题分为两个步骤：多重次调和 BM 问题和解析型 BM 问题。

$\mathcal{PSH}$-BM. 求一个多重次调和函数 $u:\mathbb{C}^d\to\mathbb{R}$ 使得 $u|_{\mathbb{R}^d}\le\omega$, $u(0)=0$，且 $u(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\le\sigma|\mathbf{y}|$.$\mathcal{A}$-BM. 求一个整函数 f，使得 $\log|f|\lesssim u$ 且 $f(0)=1$。

这是同样的两个步骤，只不过以多重次调和代替次调和，并以向量 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 代替标量 x,y。

当我们尝试将 Beurling–Malliavin 定理推广到高维时，主要难点在于解决多重次调和 BM 问题。作为第一步，在§3 我们解决了

精确 $\mathcal{PSH}$-BM. 求一个多重次调和函数 $u:\mathbb{C}^d\to\mathbb{R}$ 使得 $u|_{\mathbb{R}^d}=\omega$ 并且 $u(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\le\sigma|\mathbf{y}|$。

在方程 (3.2) 中，我们定义一个延拓算子 $\omega \to E\omega$，它将定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的函数映射为定义在 $\mathbb{C}^d$上的函数。在一维情形下，E 是泊松延拓算子，而在高维情形下，它是一个恰当的推广。命题 3.1指出，若 ω满足两个条件（标记为 (i) 和 (ii)），则 $E\omega + C|\mathbf{y}|$ 在$\mathbb{C}^d$上是多重次调和的。条件(i) 指出，对于 2.7，对 ω 在任一直线上的限制，式 ((ii) 是高维情形中特有的新条件，它涉及 ω 沿直线积分的二阶导数。

事实证明，在高维中，精确问题确实过于严格，而我们关注的分形集权函数不满足条件 （ii）。在 §4 中，我们将展示如何将权函数 ω 修改为权函数 $\widetilde{\omega} \le \omega$，它具有类似的正则性，但对于沿直线的积分表现得更好。命题 3.1 可以应用于 $\widetilde{\omega}$，从而解决了 $\mathcal{PSH}$-BM。以下是精确表述，证明见 §4：

命题 2.2 ($\mathcal{PSH}$-BM)。假设 $\omega: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\le 0}$ 满足定理 ***1.4***、*1.12*、*1.13* 中的条件（*1.4*，其常数为 C_{reg} 和 C_{gr}。则存在一个连续的多重次调和函数 $u : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}$ 满足

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &\le \omega(\mathbf{x}) && \text{for } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, && (2.9)\\
u(\mathbf{x}) &= 0 && \text{for } |\mathbf{x}| \le 2,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, && (2.10)\\
|u(\mathbf{x}_1) - u(\mathbf{x}_2)| &\le C_{\mathrm{Lip}}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| && \text{对于 } \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^d, && (2.11)\\
u(\mathbf{x}) &\le u(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \le u(\mathbf{x}) + \rho|\mathbf{y}| && \text{for } \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^d. && (2.12)
\end{aligned}
$$

我们可以取 $C_{\mathrm{Lip}} \le C_d C_{\mathrm{reg}}$ 和 $\rho \le C_d \max(C_{\mathrm{reg}}, C_{\mathrm{gr}})$。

现在我们转向解析型 BM 问题。H¨ormander 的 L^2 $\bar\partial$ 方程理论在这里同样适用，与一维情形一样；我们将在下一个命题中予以证明。

命题 2.3 ($\mathcal{A}$-BM). 设 $u : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}$ 是一个多重次调和函数，满足$u|_{\mathbb{R}^d} \le 0$ 且 u 满足 (2.10)、(2.11)、(2.12)，其中常数为 C_{Lip} 和 ρ。那么存在一个整函数 $f: \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ 使得

$$
\begin{aligned}
|f(\mathbf{x} + i\mathbf{y})| &\le A\, e^{2\rho|\mathbf{y}|} && \text{对于某个 } A > 0,\\
|f(\mathbf{x})| &\ge \frac{1}{2} && \text{对于所有 } \mathbf{x} \in B_{r_{\min}},\\
|f(\mathbf{x})| &\le C\, e^{u(\mathbf{x})} && \text{对于 } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\\
\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} &< \infty.
\end{aligned}
$$

我们可以取

$$
\begin{aligned}
r_{\min} &= c_d \min(\rho, \rho^{-1}),\\
C &= C_d\, e^{C_{\mathrm{Lip}}} \max(\rho^{-C_d}, e^{2\rho}).
\end{aligned}
$$

我们按照 Bourgain 的一维论证，在2.3 中§5 证明命题。

现在，我们可以结合对 $\mathcal{PSH}$-BM和 $\mathcal{A}$-BM 的解，完成高维 Beurling–Malliavin 乘子定理的证明。

定理 *1.4* 的证明。 设 $\omega:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\le 0}$ 满足定理 1.4 中常数 C_{reg} 和 C_{gr}所要求的条件，并设 $\sigma > 0$ 为一个参数。

根据命题 2.2，存在一个多重次调和函数 $u:\ \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}$ 满足命题 2.3 中常数 C_{Lip} 和 ρ 所要求的条件，其中

$$C_* = \max(C_{\mathrm{Lip}}, \rho) \le C_d \max(C_{\mathrm{reg}}, C_{\mathrm{gr}}).$$

设 $u_\sigma = \frac{\sigma}{C_*} u$。对于 2.3 命题的条件，取 u_σ 时满足

$$C'_{\mathrm{Lip}} = \rho' = \sigma,$$

因此，将该命题与 Paley–Wiener 判据（定理 2.1）结合应用，可知存在 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 满足 $\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathsf{B}_{\sigma/\pi} \subset \mathsf{B}_\sigma$，且满足关于 $c = 1/C_*$ 的必要估计。 □

3. Exact plurisubharmonic extensions

对 精确 $\mathcal{SH}$-BM 问题的一维方法是分别对每个半平面进行调和延拓。ω 给定 $\omega:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$泊松核给出一个显式解:

$$\begin{aligned} E\omega(x+iy) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x+t) P_y(t)\, dt \qquad & P_y(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{|y|}{y^2+t^2}, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x+ty)}{1+t^2} \frac{dt}{\pi} \qquad & &\text{by change of variables.} \end{aligned} \tag{3.1}$$

在高维中，我们定义一个延拓算子，将 $\mathbb{R}^d$ 上的函数映射为 $\mathbb{C}^d$ 上的函数，具体为

$$E\omega(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\mathbf{x}+t\mathbf{y})}{1+t^2} \frac{dt}{\pi}. \tag{3.2}$$

如果 ω 是利普希茨函数并满足增长条件（1.13），则积分有限，参见引理3.2。该算子 $\omega \to E\omega$ 分别将 ω 调和延拓到每条实线性复直线

$$\ell_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} + z\mathbf{y} \,:\, z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^d, \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}).$$

等价地， $E\omega$ 是偏微分方程的唯一有界解

$$\begin{cases} \langle (\partial\bar\partial E\omega)(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = 0 & \text{for } \mathbf{x}+i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d, \\ E\omega(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.3}$$

乍看之下，并不明显这些彼此分离的调和延拓会结合成一个良好的全局延拓，但方程（3.2）表明它们确实如此。

给定一个权函数 ω,

$$u = E\omega + C|\mathbf{y}| \tag{3.4}$$

将是我们的候选多重次调和函数。与一维情形不同， $E\omega$在 $\mathbb{R}^d$之外并非多重次调和函数，因此添加项 $C|\mathbf{y}|$ 必须使 u 在以 $\mathbb{R}^d$ 中的点以及 $\mathbb{R}^d$之外的点为中心的复圆盘上满足次平均值性质 (2.8)。对该方程的分析导出了以下命题，从而解决了精确 $\mathcal{PSH}$-Beurling–Malliavin 问题。对于 $\ell = \{\mathbf{x} + t\hat{}\mathbf{y}: \ t \in \mathbb{R}\}$ 中的一条直线，令$\omega|_\ell(t) = \omega(\mathbf{x} + t\hat{}\mathbf{y})$ 表示将 ω 限制在 ℓ 上（该函数经过平移和反射后实际上只取决于直线本身）。

命题 3.1 (精确 $\mathcal{PSH}$-Beurling–Malliavin 问题)。令 $\omega: \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\le 0}$ 为一个 C^2 且具有紧支集的函数，满足

(i) 对于每一条直线 $\ell \subset \mathbb{R}^d$,

$$\|H[\omega|'_\ell]\|_\infty \le C_1. \tag{3.5}$$

(ii) 对于每个 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$、$\hat{}\mathbf{y}$ 这一单位向量，以及满足 $\hat{}\mathbf{y} \perp \hat{}\mathbf{v}$ 的$\hat{}\mathbf{v}$ 这一单位向量,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle (D^2\omega(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \, \frac{dt}{\pi} \ge -C_2. \tag{3.6}$$

如果 $C \ge \max(C_1, C_2)$，那么

$$u(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = E\omega(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) + C|\mathbf{y}|$$

在 $\mathbb{C}^d$ 上是多重次调和且连续的。我们有

$$u(\mathbf{x}) \le u(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \le u(\mathbf{x}) + 2C|\mathbf{y}|. \tag{3.7}$$

条件 (i) 意味着 $E\omega + C|\mathbf{y}|$ 满足以 $\mathbb{R}^d$ 中各点为中心的复圆盘上的次平均值性质。条件 (ii) 是高维中的新条件，它意味着 $E\omega + C|\mathbf{y}|$ 在 $\mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$ 上是多重次调和的。

注记。 1. 事实证明，在 $d \ge 2$ 条件 (i) 本质上可由条件(ii)推出。这一观察归功于 Semyon Dyatlov，参见 §A.4。
2. 命题 3.1 足以证明径向权函数这一特殊情形下的命题 2.2 $\omega(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)$.

3.1. **延拓算子的基本性质**。设

$$E_R\omega(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \int_{|t| \le R} \frac{\omega(\mathbf{x} + t\mathbf{y})}{1 + t^2} \, \frac{dt}{\pi} \tag{3.8}$$

是 $E\omega$ 的部分积分。

引理 3.2。设 $\omega:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是利普希茨函数，其常数为 C_{Lip}，并满足增长条件 (1.13)，其常数为 C_{gr}。则定义 $E\omega$ 的积分绝对收敛，且 $E_R\omega \to E\omega$ 在紧子集上一致。

证明。首先，

$$\int \frac{|\omega(\mathbf{x}+t\mathbf{y})|}{1+t^2}\,\frac{dt}{\pi} \le C_{\mathrm{Lip}}|\mathbf{x}| + \int \frac{|\omega(t\mathbf{y})|}{1+t^2}\,\frac{dt}{\pi} < \infty$$

同时利用利普希茨性质和增长条件。

令 $R \ge 1$，并设

$$\mathrm{Err}_R(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) = \int_{|t|\ge R} \frac{|\omega(\mathbf{x}+t\mathbf{y})|}{1+t^2}\,\frac{dt}{\pi}.$$

利用 ω 是利普希茨的这一事实，我们有

$$\mathrm{Err}_R(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) \le \frac{2C_{\mathrm{Lip}}|\mathbf{x}|}{R} + \int_{|t|\ge R} \frac{|\omega(t\mathbf{y})|}{1+t^2}\,\frac{dt}{\pi}.$$

我们有

$$\int_{|t|\ge R} \frac{|\omega(t\mathbf{y})|}{1+t^2}\,\frac{dt}{\pi} = \int_{|t|\ge R} \frac{|\omega(t\mathbf{y})|}{1+t^2} 1_{|t\mathbf{y}|\le 1}\,dt + \int_{|t|\ge R} \frac{|\omega(t\mathbf{y})|}{1+t^2} 1_{|t\mathbf{y}|\ge 1}\,dt.$$

~第一项是 $\lesssim (|\omega(0)| + C_{\mathrm{Lip}})/R$。对于第二项，我们将 R 替换为 $R = \max(R, 1/|\mathbf{y}|)$ 并估计

$$\begin{aligned}
\int_{|t|\ge \widetilde{R}} \frac{|\omega(t\mathbf{y})|}{1+t^2}\,dt &\le \int_{|t|\ge \widetilde{R}} \frac{|\omega(t\mathbf{y})|}{t^2}\,dt \lesssim \int_{|t|\ge \widetilde{R}} \int_{1/2}^{2} \frac{|\omega(t\mathbf{y})|}{(t/r)^2}\,dr dt \\
&\lesssim \int_{|t|\ge \widetilde{R}} \int_{1/2}^{2} \frac{|\omega(rt\mathbf{y})|}{t^2}\,dr dt \lesssim \int_{\widetilde{R}}^{\infty} \frac{G^*(|t\mathbf{y}|)}{t^2}\,dt \\
&\lesssim \int_{\widetilde{R}|\mathbf{y}|}^{\infty} |\mathbf{y}| \frac{G^*(t)}{t^2}\,dt \lesssim |\mathbf{y}| \int_{\widetilde{R}|\mathbf{y}|}^{\infty} \frac{G^*(t)}{1+t^2}\,dt \\
&\lesssim R^{-1/2} \int_0^{\infty} \frac{G^*(t)}{1+t^2}\,dt + |\mathbf{y}| \int_{R^{1/2}}^{\infty} \frac{G^*(t)}{1+t^2}\,dt
\end{aligned}$$

其中在最后一行，我们分成两种情形：$|\mathbf{y}| \le R^{-1/2}$ 和 $|\mathbf{y}| \ge R^{-1/2}$。假设 $|\mathbf{y}|,\ |\mathbf{x}| \le M$。那么结合我们的估计，

$$\mathrm{Err}_R(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) \lesssim \frac{C_{\mathrm{Lip}}M}{R} + \frac{|\omega(0)| + C_{\mathrm{Lip}}}{R} + R^{-1/2}C_{\mathrm{gr}} + M\int_{R^{1/2}}^{\infty} \frac{G^*(t)}{1+t^2}\,dt.$$

当 $R \to \infty$ 时，右侧趋于零，因此 $\mathrm{Err}_R(\mathbf{x}+i\mathbf{y})$ 在紧子集上一致趋于零。由此可知，$E_R\omega \to E\omega$ 在紧子集上一致成立。□

接下来，我们证明先前关于 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 的断言：其狄利克雷到诺伊曼算子是 $\omega \to H[-\omega']$。

引理 3.3. 设 $\omega \in C_0^1(\mathbb{R})$，并设 $u = E\omega$ 是 ω 在上半平面 $\mathbb{H}$ 上的有界调和延拓。那么

$$\partial_y u(x + i0) = H[-\omega']. \tag{3.9}$$

证明。由于 u 在上半平面 $\mathbb{H}$ 上是调和函数，且 $u(x+iy) \to 0$ 如 $y \to \infty$，我们可以写成 $u = \mathrm{Re}\ f$，其中 $f = u + iv$ 在 $\mathbb{H}$ 上是解析的，且 $f(x+iy) \to 0$ 如 $y \to \infty$。根据柯西-黎曼方程，

$$\partial_y u = -\partial_x v. \tag{3.10}$$

对于固定的 $y > 0$，设 $u_y(x) = u(x+iy)$ 和 $v_y(x) = v(x+iy)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数。根据希尔伯特变换的复解析刻画，

$$v_y = H[u_y] \quad \text{for all } y > 0. \tag{3.11}$$

Thus

$$\partial_y u(x + i\varepsilon) = -\partial_x v_\varepsilon = H[-u_\varepsilon'](x) \quad \text{for all } \varepsilon > 0. \tag{3.12}$$

我们有 $u_\varepsilon \to u$ 在 C^1 中当 $\varepsilon \to 0$ 时成立，因此取极限即可得到结论。 □

现在我们来确立 $\omega \to E\omega$ 的一些基本性质。

引理 3.4。设 $\omega \in C_0^2$（$\mathbb{R}^d$）。那么

(a) $E\omega$ 在 $\mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$ 上为 C^2。***(b)*** 对于 $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$，令 $\ell_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{y}} : t \in \mathbb{R}\}$。我们有

$$|E\omega(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - E\omega(\mathbf{x})| \le |\mathbf{y}|\, \|H[\omega|'_{\ell_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}]\|_\infty. \tag{3.13}$$

(c) 设 $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$。厄米形式 $\partial\bar{\partial}E\omega(\mathbf{x} + i\mathbf{y})$ 具有实系数。设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ 由下式给出

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + r\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v}_1 \perp \hat{\mathbf{y}}. \tag{3.14}$$

Then

$$\begin{aligned} \langle(\partial\bar{\partial}E\omega(\mathbf{x} + i\mathbf{y}))\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle &= \langle(\partial\bar{\partial}E\omega(\mathbf{x} + i\mathbf{y}))\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle \\ &= \frac{|\mathbf{v}_1|^2}{4|\mathbf{y}|} \int_{-\infty}^{\infty} \langle(D^2\omega(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1\rangle \frac{dt}{\pi}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

证明 *(a)*。对3.2式求导时，将微分运算移入积分号下。 □

证明 *(b)*。首先我们证明3.13式在 $d = 1$中成立。令$\omega \in C_0^2$（$\mathbb{R}$），并令 $u = E\omega$ 是到 $\mathbb{H}$的调和延拓。我们有

$$u(x + iy) \le u(x) + y \sup_{z \in \mathbb{H}} \partial_y u(z).$$

函数 $\partial_y u$ 在 $\mathbb{H}$上是调和函数，因此根据最大值原理

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \partial_y u(z) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \partial_y u(x+i0).$$

由引理 3.3 可得 $\sup_{x\in\mathbb{R}} \partial_y u(x+i0) \le \|H[\omega']\|_{\infty}$。因此 $u(x+iy) \le u(x) + y\|H[\omega']\|_{\infty}$。同样的论证表明 $u(x+iy) \ge u(x) - y\|H[\omega']\|_{\infty}$。

现在令 $\mathbf{x} + i\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$，$\hat{\mathbf{y}}$ 为单位向量。令

$$u(z) = E\omega(\mathbf{x} + z\hat{\mathbf{y}}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

于是 $u(z)$ 调和延拓 $\omega|_\ell(t) = \omega(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{y}})$，因此

$$|E\omega(\mathbf{x} + ir\hat{\mathbf{y}}) - E\omega(\mathbf{x})| = |u(ir) - u(0)| \le r\,\|H[\omega|_\ell']\|_{\infty}.$$

□

证明 *(c)*。首先，$\partial\partial E\omega$ 具有实系数，因为

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \partial_{z_j}\bar\partial_{z_k} E\omega &= \frac{1}{4}(\partial_{x_j}\partial_{y_k} - \partial_{x_k}\partial_{y_j})E\omega \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{t(\partial_j\partial_k\omega)(\mathbf{x}+t\mathbf{y}) - t(\partial_k\partial_j\omega)(\mathbf{x}+t\mathbf{y})}{1+t^2}\,\frac{dt}{\pi} = 0.\end{aligned}$$

由此可得 $\partial\bar\partial E\omega = \frac{1}{4}(D_x^2 + D_y^2)E\omega$。对于任意 $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$，我们有

$$\begin{aligned}\partial\bar\partial E\omega(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) &= \frac{1}{4}(D_x^2 + D_y^2)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\mathbf{x}+t\mathbf{y})}{1+t^2}\,\frac{dt}{\pi} \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} D^2\omega(\mathbf{x}+t\mathbf{y})\,\frac{dt}{\pi}.\end{aligned}$$

在这个计算中很巧妙的一点是，对$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 求导后会合并为 $1+t^2$ 因子，从而抵消泊松测度中的 $\frac{1}{1+t^2}$ 因子。注意，由变量替换可得 $\partial\bar\partial E\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{y}|^{-1}\partial\bar\partial E\omega(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}})$。另外注意，如果$\mathbf{v}_1 \perp \hat{\mathbf{y}}$，那么

$$\langle(\partial\bar\partial E\omega(\mathbf{x}+i\mathbf{y}))\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle = \frac{|\mathbf{v}_1|^2}{4|\mathbf{y}|}\int_{-\infty}^{\infty}\langle(D^2\omega(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1\rangle\,\frac{dt}{\pi}$$

且（3.15）在这个特殊情形下成立。为证明（3.15）在一般情形下成立，我们将证明，若$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + r\mathbf{y}$ 如（3.14）中所述，则

$$\langle(\partial\bar\partial E\omega(\mathbf{x}+i\mathbf{y}))\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \langle(\partial\bar\partial E\omega(\mathbf{x}+i\mathbf{y}))\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle. \tag{3.16}$$

定义 X 射线变换如下：

$$X(f)(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}})\,dt, \quad (\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}.$$

我们有

$$\partial\bar\partial E\omega(\mathbf{x}+i\hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{4}X(D^2\omega)(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{4}D_x^2(X\omega)(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}).$$

X 射线变换沿直线为常数，这意味着 $X\omega(\mathbf{x}+a\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{y}}) = X\omega(\mathbf{x},\hat{\mathbf{y}})$。由此性质可得

$$D_x^2(X\omega)(\mathbf{x},\hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{y}} = 0$$

其中 $D_x^2(X\omega)$ 被视为一个线性映射。方程 (3.16) 即得。 □

以下引理并未用于命题3.1的证明中，3.1的应用中会用到它，以证明命题 2.2。请注意，在分形不确定性中的应用并不需要这个引理，因为我们为证明定理 1.1 而构造的权函数具有紧支集。

引理 3.5。 设 $\omega_j \in C(\mathbb{R}^d)$， $j \geq 1$ 是一个在紧子集上一致收敛到 $\omega \in C(\mathbb{R}^d)$ 的序列。假设 $\{\omega_j\}$ 是一致利普希茨的，

$$|\omega_j(\mathbf{x}_1) - \omega_j(\mathbf{x}_2)| \leq C_{\text{Lip}}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \quad \textit{for all } j \geq 1, \textit{ all } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^d, \tag{3.17}$$

并满足一致增长条件

$$\begin{aligned} G^*(r) &= \sup_{j\geq 1}\sup_{|\mathbf{y}|=r}\int_{1/2}^{2} |\omega_j(s\mathbf{y})|\, ds, \\ \int_0^\infty &\frac{G^*(r)}{1+r^2}\, dr < \infty. \end{aligned} \tag{3.18}$$

然后在紧子集上一致地收敛于 $E\omega_j \to E\omega$ 。

证明。令

$$G_1^*(r) = \sup_{|\mathbf{y}|=r}\int_{1/2}^{2} |\omega(s\mathbf{y})|\, ds$$

为 ω 的增长函数。由于该积分是在紧区域上进行的， $G_1^*(r) \leq G^*(r)$。令

$$E_R\omega_j(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) = \int_{|t|\leq R} \frac{\omega_j(\mathbf{x}+t\mathbf{y})|}{1+t^2}\,\frac{dt}{\pi}$$

并且类似地，对于 ω。令 $\varepsilon > 0$ 和 $M > 0$ 已给定。根据引理3.2，若 $R \geq R_0(\varepsilon, M)$，则对所有 $|\mathbf{x}|$， $|\mathbf{y}| \leq M$ ，都有

$$\begin{aligned} |E_R\omega_j(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - E\omega_j(\mathbf{x}+i\mathbf{y})| &\leq \varepsilon, \\ |E_R\omega(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - E\omega(\mathbf{x}+i\mathbf{y})| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

若 $j \geq j_0(\varepsilon)$，则对所有 $|\mathbf{x}|$， $|\mathbf{y}| \leq M$ ，都有。

$$|E_R\omega_j(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - E_R\omega(\mathbf{x}+i\mathbf{y})| \leq \varepsilon.$$

结合以上结果可得 $|E\omega_j(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - E\omega(\mathbf{x}+i\mathbf{y})| \leq \varepsilon$ 在同一区域内。 □

3.2. **命题 3.1 的证明。** 设 $U \subset \mathbb{C}^d$ 是一个开集。在 §2中，我们将函数 $u\colon U \to \mathbb{R}$ 称为多重次调和函数，当且仅当它是上半连续的，且在每条复直线上的限制都是次调和的，也就是说，拉普拉斯算子在分布意义下非负。一个等价条件是，u 是上半连续的，并满足次平均值性质

$$u(\mathbf{z}) \leq \fint_0^{2\pi} u(\mathbf{z} + e^{i\theta}\mathbf{v})\, d\theta \quad \text{for all } |\mathbf{v}| < r_0(\mathbf{z}) \tag{3.19}$$

其中 $r_0(\mathbf{z}) > 0$ 可能任意依赖于 $\mathbf{z}$。证明参见 [18, 定理 4.1。11]。

其要点是，命题 3.1 的证明可以分为两部分。令$C > \max(C_1, C_2)$我们证明 $u = E\omega + C|\mathbf{y}|$ 是多重次调和的，并且由连续性可知，我们也可以取 $C = \max(C_1, C_2)$。首先，利用我们对 $\partial\bar\partial E\omega$ 的计算，我们证明 u 在 $\mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$ 上是多重次调和的。然后，利用我们在 $\mathbb{R}^d$ (3.13) 附近对 $E\omega$ 的估计，我们证明 (3.19) 对所有 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ 都成立。正是在这一步中，我们使用 $C > \max(C_1, C_2)$，而不是 $C \geq \max(C_1, C_2)$。

在证明多重次调和性之前，我们先证明（3.7）。由（3.13）可得

$$\omega(\mathbf{x}) - C_1|\mathbf{y}| \leq E\omega(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \leq \omega(\mathbf{x}) + C_1|\mathbf{y}|$$

并且由于 $C \geq C_1$，我们有

$$\omega(\mathbf{x}) \leq E\omega(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) + C|\mathbf{y}| \leq \omega(\mathbf{x}) + 2C|\mathbf{y}|$$

如所需。

3.2.1. 在 $\mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$ 上的多重次调和性。我们先给出一个引理。

引理 3.6。 设 $U \subset \mathbb{C}^d$ 是一个开集。若 $v \in C^2(U)$，则 v 在 U 上是多重次调和的，当且仅当 $\partial\bar\partial v(\mathbf{z})$ 对每个 $\mathbf{z} \in U$都是半正定的。

参见 [19, 推论 4.1。5]其中给出了证明。

由引理 3.4(a)，$u \in C^2(\mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d)$，因此只需证明 $\partial\bar\partial u(\mathbf{x} + i\mathbf{y})$ 对所有 $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$，即可在 3.19 上建立 $\mathbb{C}^d \setminus \mathbb{R}^d$。对于 $\mathbf{y} \neq 0$，我们有

$$\partial\bar\partial|\mathbf{y}| = \frac{1}{4|\mathbf{y}|}(I - \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}^t) = \frac{1}{4|\mathbf{y}|}\pi_{\mathbf{y}}^{\perp} \tag{3.20}$$

¯作为厄米形式。也就是说，$\partial\partial|\mathbf{y}|$ 正交投影掉$\mathbf{y}$，然后按 $\frac{1}{4|\mathbf{y}|}$进行尺度变换。如果$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + r\mathbf{y}$ 且$\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{y}$，那么

$$\langle(\partial\bar\partial|\mathbf{y}|)\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \frac{|\mathbf{v}_1|^2}{4|\mathbf{y}|}. \tag{3.21}$$

因为 $\partial\bar\partial E\omega$ 是实线性的，目标是证明对于任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle\partial\bar\partial(E\omega + C|\mathbf{y}|)\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \geq 0. \tag{3.22}$$

写出 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + r\mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{y}$。结合 (3.15) 和 (3.21)，我们有

$$\begin{aligned}\langle(\partial\bar{\partial}E\omega + C|\mathbf{y}|)\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle &= \frac{|\mathbf{v}_1|^2}{4|\mathbf{y}|}\int_{-\infty}^{\infty}\langle(D^2\omega(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1\rangle\,\frac{dt}{\pi} + C\frac{|\mathbf{v}_1|^2}{4|\mathbf{y}|}\\ &= \frac{|\mathbf{v}_1|^2}{4|\mathbf{y}|}\left(C + \int_{-\infty}^{\infty}\langle(D^2\omega(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1\rangle\,\frac{dt}{\pi}\right)\end{aligned}$$

所以，若 $C \geq C_2$ 则（3.22）成立。

3.2.2. 在 $\mathbb{R}^d$ 上的多重次调和性。这一部分与一维论证类似。令$C \geq C_1 + \varepsilon$。令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$，$\mathbf{v} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$。由（3.13），

$$u(\mathbf{x} + e^{i\theta}\mathbf{v}) \geq \omega(\mathbf{x} + \operatorname{Re}(e^{i\theta}\mathbf{v})) + \varepsilon|\operatorname{Im}(e^{i\theta}\mathbf{v})|. \tag{3.23}$$

由于 $\omega \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$，存在一个常数 $\lambda > 0$，使得

$$|\omega(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \omega(\mathbf{x}) - \nabla\omega(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}| \leq \lambda|\mathbf{h}|^2$$

对所有$\mathbf{x}$，$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$均成立。积分后，我们得到

$$⨍_0^{2\pi} \omega(\mathbf{x} + \operatorname{Re}(e^{i\theta}\mathbf{v}))\,d\theta \geq \omega(\mathbf{x}) - \lambda|\mathbf{v}|^2$$

对所有$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$、$\mathbf{v} \in \mathbb{C}^d$均成立。另一方面，

$$\begin{aligned}⨍_0^{2\pi} |\operatorname{Im}(e^{i\theta}\mathbf{v})|\,d\theta &\geq |\mathbf{v}| ⨍_0^{2\pi} |\operatorname{Im}(e^{i\theta}\hat{\mathbf{v}})|^2\,d\theta\\ &= \frac{|\mathbf{v}|}{2}⨍_0^{2\pi}(|\operatorname{Im}(e^{i\theta}\hat{\mathbf{v}})|^2 + |\operatorname{Re}(e^{i\theta}\hat{\mathbf{v}})|^2)\,d\theta = \frac{|\mathbf{v}|}{2},\end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned}⨍_0^{2\pi} u(\mathbf{x} + e^{i\theta}\mathbf{v})\,d\theta &\geq ⨍_0^{2\pi}\omega(\mathbf{x} + \operatorname{Re}(e^{i\theta}\mathbf{v}))\,d\theta + \varepsilon ⨍_0^{2\pi}|\operatorname{Im}(e^{i\theta}\mathbf{v})|\,d\theta\\ &\geq \omega(\mathbf{x}) - \lambda|\mathbf{v}|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{v}|.\end{aligned}$$

如果 $|\mathbf{v}| \leq \frac{\varepsilon}{2\lambda}$，则满足次平均值性质。

4. Modifying weight functions

本节我们证明命题 2.2。假设 $\omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d_{\leq 0}$ 满足定理 1.4 的假设。如果 ω 也满足命题 3.1 的假设，那就很好了，因为这样我们就能完成 $\mathcal{PSH}$-BM 问题。一般来说，条件 (i) 会满足，但关于直线上二阶导数积分的条件(ii) （3.6）则不会满足。利用 $D^2\omega$ 的正则性（1.12），我们可以通过在积分内取绝对值，得到每个二进尺度上（3.6）的一个不错的估计，但这些贡献无法求和。为解决这个问题，我们将权函数 ω 修改为新的权函数 $\widetilde{\omega} \leq \omega$，使其在（3.6）中具有很强的抵消作用。在我们的估计中，不会在积分内取绝对值。

一个重要的观察是，当我们把视野放大到足够远时，所有直线看起来都像是经过原点。更准确地说，利用正则性假设（1.12），只需估计经过原点的直线的（3.6）。对于一个函数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，令

$$\pi_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\hat{\mathbf{v}}) = \int_0^\infty f(t\hat{\mathbf{v}})\, t^{-2} dt$$

是 f 的加权球面投影。因子 t^{-2} 使我们能够比较平移导数与旋转导数。

引理 4.1. 设 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是一个 C^2 函数，具有紧支集且支集远离原点。令 $\hat{\mathbf{y}} \perp \hat{\mathbf{v}}$。则

$$\int_0^\infty \langle (D^2 f(t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}\rangle \, dt = \pi_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\hat{\mathbf{y}}) + \frac{d^2}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0} \pi_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\hat{\mathbf{y}}\cos\theta + \hat{\mathbf{v}}\sin\theta). \tag{4.1}$$

证明。我们有

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0} f(t\hat{\mathbf{y}}\cos\theta + t\hat{\mathbf{v}}\sin\theta) = t^2\langle (D^2 f(t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}\rangle - t(\partial_{\hat{\mathbf{y}}} f)(t\hat{\mathbf{y}}).$$

积分后，

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0} \pi_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\hat{\mathbf{y}}\cos\theta + \hat{\mathbf{v}}\sin\theta) &= \int_0^\infty \frac{d^2}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0} f(t\hat{\mathbf{y}}\cos\theta + t\hat{\mathbf{v}}\sin\theta)\, t^{-2} dt \\
&= \int_0^\infty \langle (D^2 f(t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}\rangle \, dt - \int_0^\infty t^{-1} \frac{d}{dt} f(t\hat{\mathbf{y}})\, dt \\
&= \int_0^\infty \langle (D^2 f(t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}\rangle \, dt - \int_0^\infty f(t\hat{\mathbf{y}})\, t^{-2} dt
\end{aligned}$$

最后一步使用了分部积分。 □

我们将修改后的权函数写成二进片段之和，$\widetilde{\omega} = \sum_k \widetilde{\omega}_k$。其思路是设计每个片段 $\widetilde{\omega}_k$ 使得 $\pi_{\mathbb{S}^{d-1}}\widetilde{\omega}_k \equiv q_k =$ 为常数。引理4.1 于是给出

$$\int_0^\infty \langle (D^2 \widetilde{\omega}_k(t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}\rangle \, dt = q_k, \tag{4.2}$$

并且只要 $\sum_k |q_k| < \infty$，我们就能得到一个有利的估计。

我们用下面两个引理来实施这一计划。第一个引理修改权函数 $\omega \to \widetilde{\omega}$。

引理 4.2。 设 $\omega\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\le 0}$ 满足（*1.11*、*1.12*、*1.13*），并满足定理 *1.4*的条件，其中常数为 C_{reg} 和 C_{gr}。则存在一个权函数 $\widetilde{\omega} = \sum_{k\ge 0} \widetilde{\omega}_k$使得

(i) $\widetilde{\omega}(\mathbf{x}) \le \omega(\mathbf{x})$ 对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, ***(ii)*** $\widetilde{\omega}(\mathbf{x}) = 0$ 对于 $|\mathbf{x}| \le 2$, ***(iii)*** $\operatorname{supp} \widetilde{\omega}_0 \subset \{\mathbf{x}\colon |\mathbf{x}| \le 5\}$ 以及 $\operatorname{supp} \widetilde{\omega}_k \subset \{\mathbf{x}\colon 2^{k-1} \le |\mathbf{x}| \le 2^{k+2}\}$ 对于 $k \ge 1$,

(iv) 我们有

$$\|D^a\widetilde{\omega}_k\|_\infty \le C'_{\mathrm{reg}}2^{(1-a)k} \quad \textit{for } 0 \le a \le 3, \tag{4.3}$$

(v) 对于 $k \ge 5$, $\pi_{\mathbb{S}^{d-1}}\widetilde{\omega}_k = q_k$ 在单位球面上为常数，并且

$$\sum_k |q_k| \le C'_{\mathrm{gr}}. \tag{4.4}$$

我们可以取 $C'_{\mathrm{reg}} \le C_d C_{\mathrm{reg}}$ 和 $C'_{\mathrm{gr}} \le C_d C_{\mathrm{gr}}$。

条件（4.3）只是正则性条件（1.12）的另一种写法，而（4.4）是增长条件（1.13）的另一种写法。

第二个引理分析了修改后的权函数 $\widetilde{\omega}$，并证明它满足命题 3.1的可容许条件。

引理 4.3。 假设 $\widetilde{\omega} = \sum_{k\ge 0}\widetilde{\omega}_k$ 满足引理 *4.2(ii)-(v)*中的条件。令 $C = C_d \max(C'_{\mathrm{reg}}, C'_{\mathrm{gr}})$。那么 $u = E\widetilde{\omega} + C|\mathbf{y}|$ 在 $\mathbb{C}^d$ 上连续且为多重次调和函数，并且满足

$$u(\mathbf{x}) \le u(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) \le u(\mathbf{x}) + 2C|\mathbf{y}|. \tag{4.5}$$

结合这两个引理即可证明命题 2.2，并完成 $\mathcal{PSH}$-BM问题。注意，命题2.2结论中的利普希茨条件（2.11）由（4.3）以及 $u = \widetilde{\omega}$ 在 $\mathbb{R}^d$上的事实可得。

4.1. **引理 4.2的证明：修改权函数**。 设 ω 满足定理 1.4 的条件，且常数为 C_{reg}, C_{gr}。设

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_k \tag{4.6}$$

为 $\mathbb{R}_{\ge 0}$ 的一个单位分解，其中 $\operatorname{supp}\psi_k \subset A_k$,

$$A_0 = [0,5], \tag{4.7}$$

$$A_k = [2^{k-1}, 2^{k+2}] \qquad \text{for } k \ge 1. \tag{4.8}$$

我们可以选择 $\psi_k(\mathbf{x}) = \psi_1(2^{1-k}\mathbf{x})$，从而得到导数估计 $|D^a\psi_k(\mathbf{x})| \le C_a 2^{-ak}$对所有 $a \ge 0$均成立。记 $\psi_k(\mathbf{x}) = \psi_k(|\mathbf{x}|)$，其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$。设

$$\pi_{\mathbb{S}^{d-1}}\psi_k(\hat{\mathbf{v}}) = p_k, \quad p_k \sim 2^{-k} \text{ up to universal constants.} \tag{4.9}$$

记

$$\omega = \sum_{k\ge 0}\omega_k, \quad \omega_k(\mathbf{x}) = \psi_k(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}). \tag{4.10}$$

对于 $k \ge 1$, 令

$$q_k = \inf_{\hat{\mathbf{v}}\in\mathbb{S}^{d-1}} \pi_{\mathbb{S}^{d-1}}\omega_k(\hat{\mathbf{v}}). \tag{4.11}$$

回顾一下， $\omega \le 0$，因此 $|q_k| = \sup_{\hat{\mathbf{v}}\in\mathbb{S}^{d-1}} \pi_{\mathbb{S}^{d-1}}|\omega_k(\hat{\mathbf{v}})|$。现在令

$$g_k(\mathbf{x}) = p_k^{-1}\psi_k(\mathbf{x})\,(q_k - (\pi_{\mathbb{S}^{d-1}}\omega_k)(\hat{\mathbf{x}})), \quad k \ge 1. \tag{4.12}$$

注意，根据 q_k 的定义，我们有 $g_k \le 0$。我们定义

$$\widetilde{\omega}_k = \begin{cases} \omega_k & 0 \le k < 5, \\ \omega_k + g_k & k \ge 5, \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\widetilde{\omega} = \sum_{k\ge 0} \widetilde{\omega}_k. \tag{4.14}$$

显然， $\widetilde{\omega} \le \omega$ ，因为对所有 k 都有 $g_k \le 0$ 。此外，由于我们只对 $k \ge 5$ 添加修正项 g_k ，因此对 $|$，有 $\widetilde{\omega}(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) = 0\ \mathbf{x}| \le 2$。根据构造，

$$\pi_{\mathbb{S}^{d-1}}\widetilde{\omega}_k = q_k \quad \text{for } k \ge 5. \tag{4.15}$$

我们有

$$\begin{aligned} |q_k| &= \sup_{\hat{\mathbf{v}}\in\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty |\omega_k(t\hat{\mathbf{v}})|\, t^{-2} dt \lesssim 2^{-2k} \sup_{\hat{\mathbf{v}}\in\mathbb{S}^{d-1}} \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} |\omega(t\hat{\mathbf{v}})|\, dt \\ &\lesssim 2^{-k}(G^*(2^k) + G^*(2^{k+1})). \end{aligned}$$

选取 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ，使得 $|\mathbf{x}| = r$ ，从而 $G^*(r) = G(\mathbf{x})$。我们有

$$G^*(r) = \int_{1/2}^2 |\omega(s\mathbf{x})|\, ds \lesssim \int_{1/2}^2 \int_{1/2}^2 |\omega(st\,\mathbf{x})|\, ds dt \lesssim \int_{1/2}^2 G^*(tr)\, dt$$

从而得到逐点界

$$G^*(2^j) \lesssim 2^{-j} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} G^*(r)\, dr$$

这给出的是

$$\sum_k |q_k| \lesssim \sum_k 2^{-k} G(2^k) \lesssim \int_0^\infty \frac{G^*(r)}{1+r^2}\, dr$$

视需要而定。

最后，我们必须证明 $\widetilde{\omega}$ 满足正则性条件（4.3）。令 $0 \le a \le 3$。根据莱布尼茨法则，

$$\begin{aligned} \|D^a\omega_k\|_\infty &\lesssim \sum_{0\le b\le a} \|D^{a-b}\psi_k\|_\infty \sup_{|\mathbf{x}|\in A_k} |D^b\omega(\mathbf{x})| \\ &\lesssim C_{\text{reg}} \sum_{0\le b\le a} 2^{-(a-b)k} 2^{(1-b)k} \lesssim C_{\text{reg}} 2^{(1-a)k}. \end{aligned}$$

令 $h_k(\mathbf{x}) = \pi_{\mathbb{S}^{d-1}}\omega_k(\hat{\mathbf{x}})$。我们有

$$\begin{aligned} h_k(\mathbf{x}) &= \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} \omega_k(t\hat{\mathbf{x}})\, t^{-2} dt \\ &= |\mathbf{x}|^{-1} \int_0^{\infty} \omega_k(s\mathbf{x})\, s^{-2} ds, \\ g_k(\mathbf{x}) &= p_k^{-1}\psi_k(\mathbf{x})(q_k - h_k(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} \|D^a g_k\|_\infty &\lesssim 2^k \sum_{0\le b\le a} \|D^{a-b}\psi_k\|_\infty \sup_{|\mathbf{x}|\in A_k} |D^b(q_k - h_k)(\mathbf{x})| \\ &\lesssim \sum_{0\le b\le a} 2^{-(a-b)k+k} \sup_{|\mathbf{x}|\in A_k} |D^b h_k(\mathbf{x})|. \end{aligned}$$

令 $|\mathbf{x}| \in A_k$, $0 \le b \le 3$。我们有

$$\begin{aligned} |D^b h_k(\mathbf{x})| &\lesssim \sum_{0\le c\le b} |D^{b-c}|\mathbf{x}|^{-1}| \int_{1/10}^{10} |D^c\omega_k(s\mathbf{x})|\, s^{c-2}\, ds \\ &\lesssim C_{\mathrm{reg}} \sum_{0\le c\le b} 2^{-(1+(b-c))k} 2^{(1-c)k} \lesssim C_{\mathrm{reg}} 2^{-bk}. \end{aligned}$$

结合这些估计，我们得到对于 $0 \le a \le 3$,

$$\begin{aligned} \|D^a g_k\|_\infty &\lesssim C_{\mathrm{reg}} 2^{(1-a)k} \\ \|D^a \widetilde{\omega}_k\|_\infty &\lesssim C_{\mathrm{reg}} 2^{(1-a)k} \end{aligned}$$

正如所需。

4.2. **引理 4.3的证明：分析修改后的权函数。** 我们希望将命题 3.1 应用于 $\widetilde{\omega}$。令 $\widetilde{\omega} = \sum_{k\ge 0}\widetilde{\omega}_k$ 满足引理 4.2(ii)-(v)中的条件。首先，我们证明 $\widetilde{\omega}$ 限制在直线上的导数的希尔伯特变换的一个估计。

引理 4.4。 令 $\ell = \{\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{y}} : \ t \in \mathbb{R}\}$ 为一条直线。令 $\widetilde{\omega}_k|_\ell(t) = \widetilde{\omega}_k(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{y}})$ 为 $\widetilde{\omega}_k$ 在该直线上的限制。对于所有此类直线，我们有

$$\sum_{k\ge 0} |H[\widetilde{\omega}_k|'_\ell](0)| \lesssim C'_{\mathrm{reg}} + C'_{\mathrm{gr}}. \tag{4.16}$$

证明。 令 $r = 0$ 若 $|\mathbf{x}| \le 4$，否则令 $r \ge 1$ 使得 $|\mathbf{x}| \in [2^{r-1}, 2^r)$。

对于任意 k, r 我们都有以下估计，尽管我们只在 $r-5 \leq k \leq r+5$ 时使用它：

$$\begin{aligned} |H[\widetilde{\omega}_k|'_\ell](0)| &= \left| \int_0^\infty \frac{\partial_{\hat{\mathbf{y}}} \widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}}) - \partial_{\hat{\mathbf{y}}} \widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}-t\hat{\mathbf{y}})}{t} \frac{dt}{\pi} \right| \\ &\lesssim 2^k \|D^2 \widetilde{\omega}_k\|_\infty \leq C'_{\text{reg}}. \end{aligned}$$

对于 $k < r-5$, $\widetilde{\omega}_k$ 的支集远离 $\mathbf{x}$，并且我们有

$$\begin{aligned} |H[\widetilde{\omega}_k|'_\ell](0)| &= \left| \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}}) \frac{dt}{\pi} \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^\infty \frac{\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}})}{t^2} \frac{dt}{\pi} \right| \qquad \text{by integration by parts,} \\ &\lesssim 2^{-2r} 2^k \|\widetilde{\omega}_k\|_\infty \leq C'_{\text{reg}} 2^{2(k-r)}. \end{aligned}$$

最后，对于 $k > r+5$, $\widetilde{\omega}_k$ 的支集再次远离 $\mathbf{x}$，分部积分后我们有

$$\begin{aligned} |H[\widetilde{\omega}_k|'_\ell](0)| &= \left| \int_{-\infty}^\infty \frac{\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}})}{t^2} \frac{dt}{\pi} \right| \\ &\lesssim 2^{-2k} \int_{-\infty}^\infty |\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}})| \, dt \\ &\lesssim C'_{\text{reg}} 2^{-k} |\mathbf{x}| + 2^{-2k} \int_{-\infty}^\infty |\widetilde{\omega}_k(t\hat{\mathbf{y}})| \, dt \qquad \text{by Lipschitz regularity} \\ &\lesssim C'_{\text{reg}} 2^{-k} |\mathbf{x}| + |q_k|. \end{aligned}$$

将这些贡献相加，

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} |H[\widetilde{\omega}_k|'_\ell](0)| &\lesssim C'_{\text{reg}} + C'_{\text{reg}} \sum_{k<r-5} 2^{2(k-r)} + C'_{\text{reg}} \sum_{k>r+5} 2^{r-k} + \sum_{k \geq 5} |q_k| \\ &\lesssim C'_{\text{reg}} + C'_{\text{gr}}. \end{aligned}$$

□

现在我们来估计 $\widetilde{\omega}$ 沿直线的二阶导数的积分。

引理 4.5. 设 $\ell = \{\mathbf{x}_0 + t\hat{\mathbf{y}}\}$ 是一条直线，其中 $\mathbf{x}_0$ 是距原点最近的点。我们有

$$\sum_{k \geq 0} \left| \int_{-\infty}^\infty \langle (D^2 \widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}_0 + t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \, dt \right| \lesssim C'_{\text{reg}} + C'_{\text{gr}} \quad \textit{for all } \hat{\mathbf{v}} \perp \hat{\mathbf{y}}. \tag{4.17}$$

证明。令 $\hat{\mathbf{v}} \perp \hat{\mathbf{y}}$。令 $r = 0$ 若 $|\mathbf{x}_0| \leq 4$，否则令 $r \geq 1$ 使得 $|\mathbf{x}_0| \in [2^{r-1}, 2^r)$。对于 $k < r-5$，$\widetilde{\omega}_k$ 的支集与 ℓ 不相交，并且

$$\int_{-\infty}^\infty \langle (D^2 \widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}_0 + t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \, dt = 0.$$

对于 $r-5<k<r+5$，我们将绝对值移入积分中，并使用二阶导数正则性条件，

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\langle(D^2\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}_0+t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{v}}\rangle\,dt\right| &\lesssim \int_{-\infty}^{\infty}|D^2\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}_0+t\hat{\mathbf{y}})|\,dt\\ &\lesssim 2^k\|D^2\widetilde{\omega}_k\|_\infty\le C'_{\mathrm{reg}}.\end{aligned}$$

接下来，设 $k>r+5$。利用三阶导数正则性条件，我们将积分转化为一条经过原点的直线。

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\langle(D^2\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}_0+t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{v}}\rangle\,dt\right|\le\left|\int_{-\infty}^{\infty}\langle(D^2\widetilde{\omega}_k(t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{v}}\rangle\,dt\right|+C'_{\mathrm{reg}}|\mathbf{x}_0|2^{-k}.$$

根据假设 $\pi_{S^{d-1}}\omega_k=q_k$ 以及关于球面投影二阶导数的引理4.1 ，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\langle(D^2\widetilde{\omega}_k(t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{v}}\rangle\,dt=2q_k.$$

Thus

$$\begin{aligned}\sum_k\left|\int_{-\infty}^{\infty}\langle(D^2\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}_0+t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{v}}\rangle\,dt\right| &\lesssim C'_{\mathrm{reg}}+\sum_{2^k\ge|\mathbf{x}_0|}\left(C'_{\mathrm{reg}}|\mathbf{x}_0|2^{-k}+|q_k|\right)\\ &\lesssim C'_{\mathrm{reg}}+C'_{\mathrm{gr}}.\end{aligned}$$

□

最后，我们完成引理 4.3的证明。

引理的证明*4.3*。 设

$$\widetilde{\omega}_{\le k}=\sum_{0\le j\le k}\widetilde{\omega}_j. \tag{4.18}$$

由（4.16）和（4.17）可知，紧支撑权重 $\widetilde{\omega}_{\le k}$ 一致地满足命题 3.1 中的假设，其中 k，并且存在某个 $C\lesssim C'_{\mathrm{reg}}+C'_{\mathrm{gr}}$ 使得对所有$k\ge1$，

$$u_{\le k}=E\widetilde{\omega}_{\le k}+C|\mathbf{y}|$$

是多重次调和的，并且满足

$$u_{\le k}(\mathbf{x})\le u_{\le k}(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\le u_{\le k}(\mathbf{x})+2C|\mathbf{y}|.$$

注意到序列 $\{\widetilde{\omega}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 由（4.3）可知是一致利普希茨的，并且由于（4.4），它满足一致增长条件（4.4）。根据引理 3.5， $E\widetilde{\omega}_{\le k}\to E\widetilde{\omega}$ 在紧集上一致收敛。因此

$$u=E\widetilde{\omega}+C|\mathbf{y}|$$

是多重次调和的，并满足

$$u(\mathbf{x})\le u(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\le u(\mathbf{x})+2C|\mathbf{y}|.$$

□

5. Bounded Fourier support from plurisubharmonic functions

在本节中，我们证明命题2.3。给定一个多重次调和函数$u\colon\ \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}$ 满足

$$u(\mathbf{x}) \le 0 \qquad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{5.1}$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{for } |\mathbf{x}| \le 2, \tag{5.2}$$

$$|u(\mathbf{x}_1) - u(\mathbf{x}_2)| \le C_{\text{Lip}}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \qquad \text{for all } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^d, \tag{5.3}$$

$$u(\mathbf{x}) \le u(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \le u(\mathbf{x}) + \rho|\mathbf{y}| \qquad \text{for all } \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^d. \tag{5.4}$$

我们希望构造一个整函数 $f\colon\ \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ 满足

$$|f(\mathbf{x} + i\mathbf{y})| \le A\, e^{2\rho|\mathbf{y}|} \qquad \text{for some } A > 0, \tag{5.5}$$

$$|f(\mathbf{x})| \ge \frac{1}{2} \qquad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathsf{B}_{r_{\min}}, \tag{5.6}$$

$$|f(\mathbf{x})| \le C\, e^{u(\mathbf{x})} \qquad \text{for } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{5.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} < \infty, \tag{5.8}$$

其中

$$r_{\min} = c_d\, \min(\rho, \rho^{-1}), \tag{5.9}$$

$$C = C_d\, e^{C_{\text{Lip}}}\, \max(\rho^{-C_d}, e^{2\rho}). \tag{5.10}$$

遵循 Bourgain 的做法，我们运用 H¨ormander 的 L^2 理论来求解 $\bar\partial$ 方程，从而构造 f。

定理 5.1 (H¨ormander [17, 定理 2.2.1'])。 设 $\varphi\colon\ \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}$ 是严格多重次调和的，且满足 $\partial\bar\partial\varphi(\mathbf{z}) \ge \kappa(\mathbf{z}) > 0$。设 η 是一个 $(0,1)$ 形式，定义在 $\mathbb{C}^d$ 上，且满足 $\bar\partial\eta = 0$。假设

$$\int_{\mathbb{C}^d} |\eta(\mathbf{z})|^2 \frac{e^{-\varphi(\mathbf{z})}}{\kappa(\mathbf{z})} < \infty$$

其中，我们对 $\mathbb{C}^d$ 上的勒贝格测度进行积分。于是，方程 $\bar\partial g = \eta$ 有一个解 g，满足

$$\int_{\mathbb{C}^d} |g(\mathbf{z})|^2 e^{-\varphi(\mathbf{z})} \le \int_{\mathbb{C}^d} |\eta(\mathbf{z})|^2 \frac{e^{-\varphi(\mathbf{z})}}{\kappa(\mathbf{z})}. \tag{5.11}$$

¯我们指的是在分布意义下的 $\partial\bar\partial\varphi(\mathbf{z}) \ge \kappa(\mathbf{z})$（$\varphi$ 可以是任意的多重次调和函数）。

第一个重要之处在于， L^2 界（5.11）可通过次调和性转化为逐点界。

引理 5.2。 设 $U \subset \mathbb{C}^d$ 是一个开集，且 $f\colon\ U \to \mathbb{C}$ 解析的。如果 $\mathsf{B}_r(\mathbf{z}) \subset U$ 那么

$$|f(\mathbf{z})| \le C_d r^{-d} \|f\|_{L^2(\mathsf{B}_r(\mathbf{z}))}. \tag{5.12}$$

证明。 由于 f 在 U 上解析，因此 $|f|^2$ 在 U 上是多重次调和的，因而也是次调和的。由此可得

$$|f(\mathbf{z})|^2 \le \fint_{\mathsf{B}_r(\mathbf{z})} |f(\mathbf{w})|^2 \le C_d r^{-2d} \|f\|^2_{L^2(\mathsf{B}_r(\mathbf{z}))}.$$

□

如果暂时忽略 (5.6)，只要求 f 满足 (5.5) 和 (5.7)，那么我们可以尝试应用 H¨ormander 定理来构造满足 $\eta = 0$ 的 f。但这样行不通，因为所得的解可能是 $f = 0$——请记住，(5.6) 刻画的是 f 的非消失性。为了解决这个问题，我们写成 $f = h - g$，其中 h 是原点 ¯ ¯ 邻域内的一个隆起函数，而 g 满足非齐次方程 $\partial g = \partial h$。现在我们可以利用定理 5.1 构造 g。通过在多重次调和权 u 中添加一项，我们可以使 g 在原点附近很小，进而得到 f 在原点附近的下界。

5.1. 多重次调和权函数的构造 φ。设 $\eta_{\ge 10}$ 是一个支集包含于 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| \ge 5\}$，且在 $|\mathbf{x}| \ge 10$ 上取值为 1 的隆起函数。令

$$\omega_0 = -\eta_{\ge 10} \frac{|\mathbf{x}|}{(\log(2 + |\mathbf{x}|))^2} \tag{5.13}$$

那么 ω_0 满足命题2.2 的假设，因此存在某个 $c_d > 0$，$c_d\omega_0$ 具有多重次调和延拓 $u_0 : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}$ 且满足

$$|u_0(\mathbf{x}_1) - u_0(\mathbf{x}_2)| \le |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \quad \text{for all } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^d, \tag{5.14}$$

$$u_0(\mathbf{x}) \le u_0(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \le u_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}|\mathbf{y}|. \tag{5.15}$$

Let

$$\varphi = 2u + 20d \log |\mathbf{z}|_\infty + \rho\, u_0 + \frac{\rho}{2}(\langle \mathbf{y} \rangle - 1). \tag{5.16}$$

我们加上项 $20d \log |\mathbf{z}|_\infty$，以获得 f 在原点附近的下界；我们加上 $\rho\, u_0$，以抵消 $\in \mathbb{R}^d$ 远离原点时的前一项；并加上 $\frac{\rho}{2}(\langle \mathbf{y} \rangle - 1)$，使 φ 严格多重次调和。注意，

$$\log |\mathbf{z}|_\infty = \max_j \log |z_j|$$

是多重次调和的，因为它是多个多重次调和函数的最大值。我们计算得

$$\partial\bar\partial \langle \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4} \langle \mathbf{y} \rangle^{-3} (1 + |\mathbf{y}|^2 - \mathbf{y}\mathbf{y}^t) \tag{5.17}$$

作为一个厄米矩阵。最小特征向量是 $\hat{\mathbf{y}}$，并且

$$\langle((\partial\bar{\partial}\langle\mathbf{y}\rangle)\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{y}}\rangle = \frac{1}{4}\langle\mathbf{y}\rangle^{-3} \tag{5.18}$$

因此 $(\partial\bar{\partial}\langle\mathbf{y}\rangle)(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) \geq \frac{1}{4}\langle\mathbf{y}\rangle^{-3}$。因为 φ 中的其他项也都是多重次调和的，所以我们有

$$\partial\bar{\partial}\varphi(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) \geq \kappa(\mathbf{z}) = \frac{\rho}{8}\langle\mathbf{y}\rangle^{-3}. \tag{5.19}$$

5.2. **命题 2.3的证明**。设 h 是定义在 $\mathbb{C}^d$ 上的一个光滑隆起函数，满足 $h=1$ 在 $\mathsf{B}_{1/2}$ 上，并且 $\operatorname{supp} h \subset \mathsf{B}_1$。令 $\eta = \partial h$，因此 η 的支集位于 $\mathsf{B}_1 \setminus \mathsf{B}_{1/2}$。注意，由于

$$2u(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) + \rho u_0(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) + \frac{\rho}{2}(\langle\mathbf{y}\rangle - 1) \geq 2u(\mathbf{x}) + \rho u_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{for } |\mathbf{x}| \leq 2,$$

我们有

$$\varphi(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) \geq -20d\,\log 2\sqrt{2d} \quad \text{for } 1/2 \leq |\mathbf{x}+i\mathbf{y}| \leq 2. \tag{5.20}$$

由此可得

$$\int_{\mathbb{C}^d} |\eta(\mathbf{z})|^2 \frac{e^{-\varphi(\mathbf{z})}}{\kappa(\mathbf{z})} \leq C_d\,\rho^{-1}, \tag{5.21}$$

且根据定理 5.1，存在一个光滑的 g 使得 $\partial g = \eta$ 并且

$$\int_{\mathbb{C}^d} |g(\mathbf{z})|^2 e^{-\varphi(\mathbf{z})} \leq C_d\,\rho^{-1}. \tag{5.22}$$

另一种写法是 $\|g\,e^{-\varphi/2}\|_{L^2(\mathbb{C}^d)} \leq C_d\,\rho^{-1/2}$。定义

$$f = h - g. \tag{5.23}$$

根据构造，$\partial f = 0$ 因此 f 是整函数。

首先，我们证明 g 在原点附近的一些上界。由于 $\eta = 0$ 在 $\mathsf{B}_{1/2}$ 上，g 在 $\mathsf{B}_{1/2}$ 上是解析的。令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|\mathbf{x}| \leq 1/4$。将引理 5.2 应用于 g，取 $r = |\mathbf{x}|$，得到

$$|g(\mathbf{x})| \leq C_d|\mathbf{x}|^{-d}\,\|g\,e^{-\varphi/2}\|_{L^2(\mathsf{B}_{2|\mathbf{x}|})}\,\|e^{\varphi/2}\|_{L^\infty(\mathsf{B}_{2|\mathbf{x}|})}.$$

我们有

$$\varphi(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) \leq 3\rho|\mathbf{y}| + 20d\log|\mathbf{x}+i\mathbf{y}|_\infty \quad \text{for all } \mathbf{x}+i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^d,$$

因此，将此结果与 L^2 估计（5.22）结合，可得

$$|g(\mathbf{x})| \leq C_d\rho^{-1/2}\,|\mathbf{x}|^{9d}\,e^{3\rho|\mathbf{x}|} \quad \text{for } |\mathbf{x}| \leq 1/4. \tag{5.24}$$

因此 $|g(\mathbf{x})| \leq 1/2$ 当 $|\mathbf{x}| \leq r_{\min}$时，只要 c_d 式（5.9）中的常数足够小。因此 $|f(\mathbf{x})| \geq 1/2$ 当 $|\mathbf{x}| \leq r_{\min}$时。

现在我们证明，$f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上以 $e^{u(\mathbf{x})}$ 的速率衰减。为处理 g 在 $\mathbf{B}_1 \setminus \mathbf{B}^{1/2}$ 上不是解析的这一事实，我们证明 f 在开集 $U = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$ 上满足一个 L^2 界：$|\mathbf{z}| > 1/8\}$。我们有

$$\|f\, e^{-\varphi/2}\|_{L^2(U)} \le \|h\, e^{-\varphi/2}\|_{L^2(U)} + \|g\, e^{-\varphi/2}\|_{L^2(U)} \le C_d \max(1, \rho^{-1/2}). \tag{5.25}$$

令 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$ 满足 $|\mathbf{z}| \ge 1/4$。将引理 5.2 应用于 f，其中 $r = 1/8$。于是

$$|f(\mathbf{z})| \le C_d \|f\, e^{-\varphi/2}\|_{L^2(U)}\, \|e^{\varphi/2}\|_{L^\infty(\mathbf{B}_1(\mathbf{z}))}. \tag{5.26}$$

对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$，其中 $|\mathbf{x}| \ge 1/4$，我们有

$$\sup_{|\mathbf{w}-\mathbf{x}|\le 1} 2u(\mathbf{w}) \le 2u(\mathbf{x}) + 2C_{\mathrm{Lip}} + 2\rho,$$

$$\sup_{|\mathbf{w}-\mathbf{x}|\le 1} \rho u_0(\mathbf{w}) \le \rho u_0(\mathbf{x}) + \rho + \frac{1}{2}\rho,$$

$$\sup_{|\mathbf{x}'+i\mathbf{y}'-\mathbf{x}|\le 1} \frac{1}{2}\rho(\langle \mathbf{y}'\rangle - 1) \le \frac{1}{2}\rho,$$

$$\sup_{|\mathbf{w}-\mathbf{x}|\le 1} 20d\, \log|\mathbf{w}|_\infty \le 20d\, \log(1+|\mathbf{x}|) \le -\frac{1}{2}\rho u_0(\mathbf{x}) + B.$$

这里 $B > 0$ 是一个常数，我们可以估计

$$\begin{aligned} B &= \sup_{r\ge 0}\left(20d\log(1+r) - \frac{1}{2}c_d\rho 1_{r\ge 10}\frac{r}{(\log(2+r))^2}\right) \\ &\le C_d \max(1, \log\rho^{-1}). \end{aligned}$$

综合以上结果，我们得到

$$|f(\mathbf{x})| \le C_d\, e^{C_{\mathrm{Lip}}}\, \max(\rho^{-C_d}, e^{2\rho})\, e^{u(\mathbf{x})} e^{\frac{1}{2}c_d\rho\omega_0} \quad \text{for } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ |\mathbf{x}|\ge 1/4.$$

使用关于 5.24 的估计可得，对于 $|\mathbf{x}| \le 1/4$，估计 5.7 对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 都成立。此外，由于上界中的项 $e^{\frac{1}{2}c_d\rho\omega_0}$，$\bar{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$。

最后，我们证明 f 在 $|\mathbf{y}| \to \infty$ 时具有适当的增长。我们有

$$\begin{aligned} 20d\log|\mathbf{x}+i\mathbf{y}|_\infty + \rho u_0(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) &\le 20d\max(1, \log|\mathbf{x}|, \log|\mathbf{y}|) - \\ &\quad c_d\rho\, 1_{|\mathbf{x}|\ge 10}\frac{|\mathbf{x}|}{(\log(2+|\mathbf{x}|))^2} + \frac{\rho}{2}|\mathbf{y}| \\ &\le \frac{3}{2}\rho|\mathbf{y}| + A' \end{aligned}$$

存在某个常数 $A' = A'(\rho, d) > 0$。因此，对 5.26) 应用于 $|\mathbf{x}+i\mathbf{y}| \ge 1/4$ 时，

$$|f(\mathbf{x}+i\mathbf{y})| \le C_d \max(1, \rho^{-1/2})\|e^{\varphi/2}\|_{L^\infty(\mathbf{B}_1(\mathbf{x}+i\mathbf{y}))} \le C_d \max(1, \rho^{-1/2}) e^{A'/2+2\rho} e^{2\rho|\mathbf{y}|}.$$

显然，f 在 $|\mathbf{z}| \le 1/4$ 上有界，因此（5.5）对所有 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$ 都成立。

注。命题中的定量界2.3 还可以通过多种方式改进，我们不打算对此进行优化。

6. Finishing the proof of the main theorem

6.1. **命题 1.7 的证明。** 现在，我们构造适用于直线孔集的权函数，并利用定理 1.4 证明命题 1.7。设$\mathbf{Y}$ 是从尺度 ν到 μ 的直线上 h^{-1}多孔集。令 $0 < \alpha < 1$ 为稍后选定的阻尼函数参数。

考虑二进环带序列 $A_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ 2^k \le |\mathbf{x}| \le 2^{k+1}\}$，其中 $k \ge 1$。令

$$W_k = \frac{2^k}{k^s} \tag{6.1}$$

其中 $s \in (0,1)$ 是稍后选定的参数（最终我们将选择 $s = 0.2$）。令 $\mathcal{Q}_k = \{\mathsf{Q}\}$ 为宽度为 W_k 的有限重叠立方体族，使得 $A_k \subset \bigcup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}_k} \frac{1}{2}\mathsf{Q}$；这里 $\frac{1}{2}\mathsf{Q}$ 与 Q 的中心相同，宽度为其一半。我们要求

$$\bigcup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}_k} \mathsf{Q} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : 2^{k-1} \le |\mathbf{x}| \le 2^{k+2}\}.$$

对于每个 $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}_k$，令 η_{Q} 为一个支集包含于 Q 且在 $\frac{1}{2}\mathsf{Q}$ 上取值为 1 的隆起函数。我们通过对一个宽度为 1 的固定隆起函数进行伸缩来构造 η_{Q}，从而得到导数估计

$$\|D^a \eta_{\mathsf{Q}}\|_\infty \lesssim_{d,a} W_k^{-a} \qquad \text{for all } a \ge 0. \tag{6.2}$$

对于所有 $\mathbf{x} \in A_k$，我们有

$$\sum_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}_k} \eta_{\mathsf{Q}}(\mathbf{x}) \in [1, C]$$

对于某个通用常数 C。设

$$\mathcal{S}_{\mathbf{Y},k} = \{\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}_k : \mathsf{Q} \cap (\mathbf{Y} \cap A_k) \ne \emptyset\},$$
$$\mathbf{Y}_k = \bigcup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{S}_{\mathbf{Y},k}} \mathsf{Q}.$$

Set

$$\omega_k = -\frac{2^k}{k^\alpha} \sum_{\mathsf{Q}\in\mathcal{S}_{\mathbf{Y},k}} \eta_{\mathsf{Q}}. \tag{6.3}$$

注意，$\operatorname{supp}\omega_k \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ 2^{k-1} \le |\mathbf{x}| \le 2^{k+2}\}$，并且

$$\omega_k(\mathbf{x}) \le -\frac{2^k}{k^\alpha} \quad \text{for } \mathbf{x} \in \mathbf{Y} \cap A_k. \tag{6.4}$$

与 Bourgain 和 Dyatlov 的构造不同之处在于，他们取 $\alpha = s$，而我们允许 α 更接近 1。令 $k_0 \ge 2$ 为满足 $W_{k_0} > \mu$ 的最小整数（在讨论增长条件时，这一选择的原因将会明了）。设

$$\omega = \sum_{k\ge k_0} \omega_k, \tag{6.5}$$

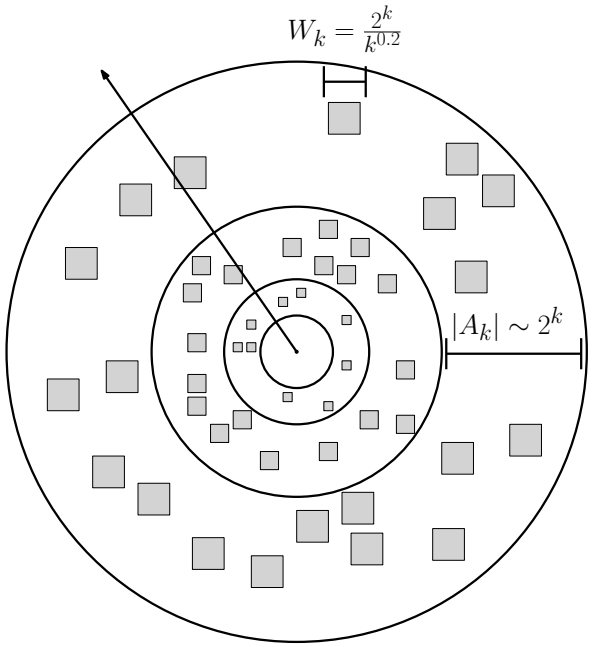

FIGURE 3. 在每个二进环带内，权函数是盒子上的隆起函数之和。

注意到 $\omega(\mathbf{x}) = 0$ 对于 $|\mathbf{x}| \le 2$。权函数的示意图见图 3 。根据（6.4），

$$\omega(\mathbf{x}) \le -\frac{1}{20}\frac{|\mathbf{x}|}{(\log(2+|\mathbf{x}|))^{\alpha}} \quad \text{for } |\mathbf{x}| > 2^{k_0} \text{ and } \mathbf{x} \in \mathbf{Y}, \tag{6.6}$$

so

$$\omega(\mathbf{x}) \le -\frac{1}{20}\frac{|\mathbf{x}|}{(\log(2+|\mathbf{x}|))^{\alpha}} + C(\mu) \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathbf{Y}. \tag{6.7}$$

现在我们来建立一些正则性。对于任意 $a \ge 0, k \ge 1$，有

$$|D^a \omega_k| \lesssim_{a,d} W_k^{-a} 2^k k^{-\alpha} \sum_{\mathsf{Q} \in \mathcal{S}_{\mathbf{Y},k}} 1_{\mathsf{Q}} \lesssim 2^{(1-a)k} k^{as-\alpha} 1_{\mathbf{Y}_k} \tag{6.8}$$

其中第一个不等式用到 (6.2)，第二个不等式用到 $\mathcal{Q}$ 中立方体的有限重叠。只要 $3s < \alpha$， ω 就满足正则性条件 (1.12)，其常数为 C_{reg}，且仅依赖于维数。

接下来我们讨论增长条件。有

$$\mathbf{Y}_k \subset (\mathbf{Y} \cap A_k) + \mathsf{B}_{2W_k\sqrt{d}}. \tag{6.9}$$

由于 $\mathbf{Y} \subset [-3h^{-1}, 3h^{-1}]^d$，$\mathbf{Y}_k$ 在 $2^k > 3h^{-1}\sqrt{d}$ 时为空（这是唯一一处我们使用这个 $\mathbf{Y} \subset [-3h^{-1}, 3h^{-1}]^d$）。如有必要，将 k_0 增加一个仅取决于 d的值，我们可以假设 $2W_k\sqrt{d} < h^{-1}$。若 $k \ge k_0$，则 $\mu < 2W_k\sqrt{d} < h^{-1}$ 根据引理A.5(a)，$\mathbf{Y}_k$ 是 $\nu/2$从尺度 $4W_k\sqrt{d}/\nu$ 到 h^{-1} 直线上孔隙（若 $4W_k\sqrt{d}/\nu > h^{-1}$，此陈述为空泛）。

设 ℓ 为任意直线。如果 $4W_k\bar{\sqrt{}}d/\nu > 2^k/\bar{\sqrt{}}d$ 则 $k^s < 4d/\nu$ 且

$$|\mathbf{Y}_k \cap \ell| \lesssim 2^k \lesssim_{\nu,d} 2^k k^{-s}.$$

这里 $|\bullet|$ 是 ℓ上的一维勒贝格测度。否则，我们可以将其分割为$Y_k \cap \ell = \bigcup_j Y_k \cap \tau_j$，其中每个 τ_j都是 ℓ上的一条长度为 $2^k/\sqrt{d}$的线段，并且该并集中有$\lesssim \bar{\sqrt{}}d$条线段。对每条线段应用推论 A.8 并求和，

$$|\mathbf{Y}_k \cap \ell| \lesssim_{\nu,d} 2^k\, k^{-s\gamma} \quad \text{for all lines } \ell \tag{6.10}$$

对某个 $\gamma = \gamma(\nu) > 0$成立。因此，如果 $\ell = \{t\hat{\mathbf{y}} : \ t \in \mathbb{R}\}$ 是经过原点的一条直线，我们得到

$$2^{-k} \int_0^\infty |\omega_k(t\hat{\mathbf{y}})|\, dt \lesssim k^{-\alpha} |\mathbf{Y}_k \cap \ell| \lesssim 2^k\, k^{-(\alpha+s\gamma)}. \tag{6.11}$$

设 $G^*(r)$ 是在（1.10）中定义的增长函数。设 $r \in [2^k, 2^{k+1})$ 。我们有逐点界

$$\begin{aligned} G^*(r) &\lesssim \sup_{\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{S}^{d-1}} 2^{-k} \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} |\omega(t\hat{\mathbf{y}})|\, dt \\ &\lesssim \sup_{\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{S}^{d-1}} 2^{-k} \sum_{k-3 \le j \le k+3} \int_0^\infty |\omega_j(t\hat{\mathbf{y}})|\, dt \\ &\lesssim \frac{r}{(\log(2+r))^{\alpha+s\gamma}}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

只要 $\alpha + s\gamma > 1$，增长条件（1.13）就成立，其中常数取决于 $\alpha + s\gamma$、 ν和 d。我们可以统一选取 $s = 0.2$，并令 $\alpha > 1 - 0.1\gamma(\nu)$ 。于是 $-\alpha + 3s < -0.3$ 且 $\alpha + s\gamma > 1 + 0.1\gamma$。

权函数 ω 满足 (1.12) 和 (1.13)，其中常数 C_{reg} 和 C_{gr} 仅依赖于 ν 和 d。我们应用定理1.4 ，取谱半径 $\sigma/2 < 1$ ，从而得到一个函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathsf{B}_{\sigma/2}, \\ &|f(\mathbf{x})| \ge \frac{1}{2} && \text{for } |\mathbf{x}| \le c_d\sigma, \\ &|f(\mathbf{x})| \le C(d,\mu)\sigma^{-C_d} \exp\left(-c\,\sigma \frac{|\mathbf{x}|}{(\log(2+|\mathbf{x}|))^\alpha}\right) && \text{for } \mathbf{x} \in \mathbf{Y}, \\ &|f(\mathbf{x}) \le C(d,\mu)\sigma^{-C_d} && \text{for } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

这里 $c = c(\nu,\ d)$。现在令 $\varphi : \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为一个固定的施瓦茨函数，满足 $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset \mathsf{B}_1$且 $\int \varphi = 1$。令 $\varphi_{c_d\sigma/10}(\mathbf{x}) = \varphi((c_d\sigma/10)\mathbf{x})$，于是 $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset B_{c_d\sigma/10}$ 且 $\int \hat{\varphi} = 1$。令

$\hat{}\,\hat{}f_1 = f\varphi_\circ$ 则 $f_1 = f * \hat{}\varphi$ 且

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{supp} \hat{f}_1 \subset \mathsf{B}_\sigma, \\
&|f_1(\mathbf{x})| \geq \frac{1}{2} && \text{对于 } |\mathbf{x}| \leq c_d\sigma/2, \\
&|f_1(\mathbf{x})| \leq C(d,\mu)\sigma^{-C_d} \exp\left(-c\,\sigma \frac{|\mathbf{x}|}{(\log(2+|\mathbf{x}|))^\alpha}\right) && \text{对于 } \mathbf{x} \in \mathbf{Y}, \\
&|f_1(\mathbf{x})| \leq C(d,\mu)\sigma^{-C_d}\langle \mathbf{x}\rangle^{-d} && \text{当 } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$

最后一个方程由 $|\varphi(\mathbf{x})| \leq C_d\langle \mathbf{x}\rangle^{-d}$ 得出。两边同时除以 $C(d,\mu)\sigma^{-C_d}$，我们得到一个阻尼函数，其参数为 $c_1 = \sigma$, $c_2 = c(d,\mu)\sigma^{C_d}$, $c_3 = c(\nu,d)\sigma_\circ$

注记。 我们可以取

$$\alpha = 1 - 0.1\gamma(\nu) = 1 - c\frac{\nu}{|\log \nu|} \tag{6.13}$$

对于某个绝对常数 $c > 0_\circ$

6.2. **定理证明1.1.** 设

- $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在尺度 h 到 1 上为球的 ν-多孔，
- $\mathbf{Y} \subset [-h^{-1}, h^{-1}]^d$ 在从尺度 1 到 h^{-1} 的范围内，直线上呈现 ν-多孔性。

根据引理 A.5，对于任意 $h < s < 1$ 和 $\eta \in [-h^{-1}s - 5, h^{-1}s + 5]^d$，集合

$$s\mathbf{Y} + [-4,4]^d + \eta$$

从尺度 $10\sqrt{d}/\nu$ 到 $h^{-1}s$，它是直线上 $\nu/2$-多孔的，因此通过应用命题 1.7（其中 $\mu = 10\sqrt{d}/\nu$），可知它存在一个阻尼函数，其参数为 $c_1 = \nu/20\sqrt{d}$ 和 c_2, c_3、$\alpha \in \in$ (0,1)，且仅依赖于 ν 和 $d_\circ$ 然后，根据定理 1.6，存在 $\sim$ $\sim\beta = \beta(\nu,d) > 0$ 和 $C = C(\nu,d) > 0$，使得对于任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset \mathbf{Y} \implies \|f 1_{\mathbf{X}}\|_2 \leq \widetilde{C} h^\beta \|f\|_2. \tag{6.14}$$

Appendix A. Some miscellaneous pieces

在本附录中，我们汇总了全文中使用的各种技术性陈述。这里的所有内容要么是标准结果，要么已见于现有文献。

A.1. **定理 1.6 的证明，基于 [16] 中的版本。**我们先用 Han 和 Schlag 原文中的术语陈述他们的定理，并证明我们的版本，即定理 1.6，可由他们的版本推出。两者的差异很小。首先，他们对阻尼函数的定义略有不同，该定义基于 ℓ_1 而非 ℓ_2 范数。我们将 ℓ_1 范数记为 $|\mathbf{x}|_1$，将通常的 ℓ_2 范数记为 $|\mathbf{x}|_{2\circ}$

定义 A.1 ([16, 定义 4.1])。 集合 $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^d$ 存在一个 ℓ_1 阻尼函数，其参数为 c_1、 c_2、 c_3、 $\alpha \in (0,\ 1)$，当存在一个函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$满足以下条件时

$$\operatorname{supp} \hat{\psi} \subset [-c_1, c_1]^d, \tag{A.1}$$

$$\|\psi\|_{L^2([-1,1]^d)} \geq c_2, \tag{A.2}$$

$$|\psi(\mathbf{x})| \leq \langle \mathbf{x} \rangle^{-d} \qquad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{A.3}$$

$$|\psi(\mathbf{x})| \leq \exp\left(-c_3 \frac{|\mathbf{x}|_1}{(\log(2+|\mathbf{x}|_1))^\alpha}\right) \qquad \text{对所有 } \mathbf{x} \in \mathbf{Y}. \tag{A.4}$$

我们注意到，在他们的论文中，他们采用 $\operatorname{supp} \psi \subset [-c_1, c_1]^d$，并考察傅里叶侧的衰减，但通过进行傅里叶变换可知，这与此等价。因为$|\mathbf{x}|_1 \leq \sqrt{d}\,|\mathbf{x}|_2$,

$$\frac{|\mathbf{x}|_1}{(\log(2+|\mathbf{x}|_1))^\alpha} \leq \frac{\sqrt{d}|\mathbf{x}|_2}{(\log(2+\sqrt{d}|\mathbf{x}|_2))^\alpha} \leq \sqrt{d}\frac{|\mathbf{x}|_2}{(\log(2+|\mathbf{x}|_2))^\alpha},$$

因此，带有参数 c_1， c_2， c_3， α 的 ℓ_2 阻尼函数，也是带有参数 c_1， c_2， $c_3/\sqrt{d}$， α 的 ℓ_1 阻尼函数。

Han 和 Schlag 还使用了一种略有不同的孔隙性定义，我们称之为盒孔隙性。

定义 A.2 ([16, 定义 5.1])。 称 $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在尺度 $L \geq 3$ 上是盒孔隙的$L \geq 3$，深度为 n，其中 L 是一个整数，如果满足以下条件。将 $[-1,1]^d$ 划分为边长为 L^{-n} 的全等立方体，并将得到的立方体记作 $\mathcal{C}_n$。对所有满足 $\mathrm{Q} \in \mathcal{C}_n$ 且 $\mathrm{Q} \cap \mathbf{X} \neq \emptyset$的 Q，均存在 $\mathrm{Q}' \in \mathcal{C}_{n+1}$，使得 $\mathrm{Q}' \subset \mathrm{Q}$ 且 $\mathrm{Q}' \cap \mathbf{X} = \emptyset$，这就是对 $\mathbf{X}$ 的条件。

现在我们证明，一个 ν-多孔集也是盒孔隙的。

引理 A.3. 设 $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在尺度 h 到 1上是 ν-球上孔隙的。那么，对所有满足 $L^{-n} \geq h$ 的 $n \geq 0$，$\mathbf{X}$ 在尺度 $L = \lceil \nu^{-1}\sqrt{d} \rceil$、深度 n 下是盒孔隙的。

证明。 设 L、 n 如上，并设 $\mathcal{C}_n$、 $\mathcal{C}_{n+1}$ 如盒孔隙性的定义中所述。设 $\mathrm{Q} \in \mathcal{C}_n$。设 $\mathrm{B} \subset \mathrm{Q}$ 是一个直径为 L^{-n} 的球。根据孔隙性的定义，存在某个 $\mathbf{x} \in \mathrm{B}$，使得 $\mathrm{B}_{\nu L^{-n}}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{X} = \emptyset$。设 $\mathrm{Q}' \in \mathcal{C}_{n+1}$ 是一个包含 $\mathbf{x}$ 且满足 $\mathrm{Q}' \subset \mathrm{Q}$ 的立方体。于是，因为 $\nu L^{-n} \geq L^{-n-1}\sqrt{d}$，我们有 $\mathrm{Q}' \subset \mathrm{B}_{\nu L^{-n}}(\mathbf{x})$ 且 $\mathrm{Q}' \cap \mathbf{X} = \emptyset$，如所需。□

现在我们可以按照 [16] 中的原文准确陈述 Han 和 Schlag 的定理。

定理 A.4 ([16,定理 5.1])。假设

- $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在尺度 $L \geq 3$、深度 n下是盒孔隙的，对所有满足$L^{n+1} \leq N$的 $n \geq 0$ 均成立。

• $\mathbf{Y} \subset [-N,N]^d$ 满足：对于所有满足 $L^{n+1} \le N$ 的 $n \ge 0$，均有对于所有 $\eta \in [-NL^{-n}-3, NL^{-n}+3]^d$，集合

$$L^{-n}\mathbf{Y} + [-4,4]^d + \eta$$

允许使用带参数 $c_1 =$ 的 ℓ_1 阻尼函数$^{-1} \in (0, \frac{1}{2}]$ 和 $c_2, c_3 \in (0,1)$。-

$^{\sim}$假设 $0 < c_3 < c_3^*(d)$。那么存在 $\beta = \beta(L, c_2, c_3, d, \alpha) > 0$ 以及 $C = \widetilde{C}(L, c_2, c_3, d, \alpha) > 0$，使得任何满足 $\operatorname{supp}\hat{} f \subset \mathbf{Y}$ 的 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 均有如下性质。

$$\|f 1_{\mathbf{X}}\|_2 \le \widetilde{C} N^{-\beta} \|f\|_2$$

对于所有 $N \ge N_0(L, c_2, c_3, d, \alpha)$。

我们证明定理 A.4 蕴含定理1.6。

由定理 *1.6* 和定理 *A.4* 得到的证明。 假设定理 1.6在参数 ν, h 和 $c_1 = \nu/(20\sqrt{d})$, c_2, c_3, $\alpha \in (0,1)$ 下的假设均成立。令 $L = \lceil \nu^{-1}\sqrt{d} \rceil$ 并令 $N = \lceil h^{-1} \rceil$。注意到 $c_1 < \frac{1}{2L}$ 如所需。

对于所有 $h < s < 1$ 和 $\eta \in [-h^{-1}s - 5, h^{-1}s + 5]^d$，集合

$$s\mathbf{Y} + [-4,4]^d + \eta$$

允许使用一个 ℓ_1 阻尼函数，其参数为 $c_1 = \nu/(20\sqrt{d})$ 和 c_2, $c_3/\sqrt{d}$, α。由于对于 $\mathbf{Y}$ 而言，允许使用具有更大 c_3 参数的阻尼函数是一个严格更强的性质，因此我们可以不失一般性地假设 $c_3 < c_3^*(d)$。

我们有 $\mathbf{Y} \subset [-N,N]^d$。令 $n \ge 0$ 满足 $L^{n+1} \le N$。根据引理 A.3，$\mathbf{X}$ 在尺度 L 下是盒孔隙的，深度为 n。此外，$h < L^{-n} \le 1$。我们有

$$[-NL^{-n}-3, NL^{-n}+3]^d \subset [-h^{-1}L^{-n}-5, h^{-1}L^{-n}+5]^d, \tag{A.5}$$

因此对于 $\eta \in [-NL^{-n}-3, NL^{-n}+3]^d$，集合 $L^{-n}\mathbf{Y} + [-4,4]^d + \eta$ 存在一个 ℓ_1 阻尼函数，其参数为 $c_1 = (2L)^{-1}$，$c_2 \in (0,1)$，且 $0 < c_3 < c_3^*(d)$。由定理A.4 可知存在

$$\beta = \beta(L, c_2, c_3, d, \alpha) = \beta(\nu, c_2, c_3, d, \alpha) > 0,$$
$$\widetilde{C} = \widetilde{C}(L, c_2, c_3, d, \alpha) = \widetilde{C}(\nu, c_2, c_3, d, \alpha) > 0$$

使得任何满足 $\operatorname{supp}\hat{} f \subset \mathbf{Y}$ 的 $f \in L^2$({v2)

$$\|f 1_{\mathbf{X}}\|_2 \le \widetilde{C} h^{\beta} \|f\|_2$$

对所有 $h < 1/100$。我们将以下条件： $N > N_0$ 定理 A.4 中的条件吸收到$^{\sim}$常数 C中。 □

A.2. **直线孔集的基本性质**。

引理 A.5。 设 $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ 在尺度从 α_0 到 α_1上是 ν-直线上孔隙的。

(a) 设 $\alpha_0 < r < \alpha_1$ 且设 $\nu' < \nu$。那么 $\mathbf{X} + \mathsf{B}_r$ 是 ν'-直线上孔隙，其尺度从$r/(\nu - \nu')$ 到 α_1。*(b)* 对任意 $s > 0$，膨胀集 $s \cdot \mathbf{X}$ 在尺度从 $s\,\alpha_0$ 到 $s\,\alpha_1$上是 ν-直线上孔隙。*(c)* 设 $\ell \subset \mathbb{R}^d$ 为一条直线。令 $\mathbf{X}|_\ell = \mathbf{X} \cap \ell$，并将 $\mathbf{X}|_\ell$ 视为 $\mathbb{R}$的子集。那么$\mathbf{X}|_\ell$ 在尺度从 α_0 到 α_1上是 ν-多孔。

证明。

(a) 设 τ 为一条长度为 R 的线段，且满足 $r/(\nu - \nu') < R < \alpha_1$。设 $\mathbf{x} \in \tau$ 满足 $\mathsf{B}_{\nu R}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{X} = \emptyset$。那么 $\mathsf{B}_{\nu' R}(\mathbf{x}) \cap (\mathbf{X} + \mathsf{B}_{(\nu-\nu')R}) = \emptyset$ 也成立。根据 R的选择，$(\nu - \nu')R > r$，正如所需。(b) 设 τ为一条长度为 R的线段，且满足 $s\,\alpha_0 < R < s\,\alpha_1$。存在某个 $\mathbf{x} \in s^{-1} \cdot \tau$使得 $\mathsf{B}_{s^{-1}\nu R}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{X} = \emptyset$。那么 $\mathsf{B}_{\nu R}(s\mathbf{x}) \cap (s \cdot \mathbf{X}) = \emptyset$。(c) 设$\tau \subset \ell$ 为一条长度为 R的线段。存在某个 $\mathbf{x} \in \tau$ 使得 $\mathsf{B}_{\nu R}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{X} = \emptyset$。那么 $(\mathsf{B}_{\nu R}(\mathbf{x}) \cap \ell) \cap \mathbf{X}|_\ell = \emptyset$。

□

引理 A.6. 设$\mathbf{X} \subset [-1, 1]^d$ 在尺度 L 上是盒孔隙的，深度为 n，对所有 $0 \le n < N$ 均成立。则 $|\mathbf{X}|$的勒贝格测度满足，

$$|\mathbf{X}| \le 2^d \, (1 - L^{-d})^N. \tag{A.6}$$

证明。 我们采用归纳法。定义

$$J(n) = \sup_{\mathsf{Q} \in \mathcal{C}_n} |\mathbf{X} \cap \mathsf{Q}|.$$

其中 $\mathcal{C}_n$ 是定义 L^{-n} A.2 中所述的全等 A.2立方体族。如果 $\mathbf{X}$ 在尺度 n上是盒孔隙的，则

$$J(n) \le (L^d - 1) J(n + 1),$$
$$|\mathbf{X}| \le 2^d J(0) \le 2^d (L^d - 1)^N J(N).$$

利用平凡估计 $J(N) \le L^{-Nd}$,

$$|\mathbf{X}| \le 2^d (1 - L^{-d})^N.$$

□

引理 A.7. 设 $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ 在从尺度 α_0 到 α_1的球上是 ν-多孔的。那么存在某些$C, \gamma > 0$，它们仅依赖于 ν 和 d，使得对于任意半径为 $\alpha_0 < R < \alpha_1$的球 B，

$$|\mathbf{X} \cap B| \le C R^d \left(\frac{\alpha_0}{R}\right)^\gamma.$$

证明。我们利用引理 A.3，将问题化简为证明盒孔隙集的情形。设 Q 是包含 B 的一个 $2R$-立方体。设 $\mathrm{X}' = R^{-1}\cdot(\mathrm{Q}\cap\mathrm{X}) - \mathrm{v} \subset [-1,1]^d$ 是 $\mathrm{Q}\cap\mathrm{X}$ 的一个经过平移和缩放的副本。那么，X' 在从尺度 $\frac{\alpha_0}{R}$ 到 1 的球上是 ν-多孔的，因此对于所有满足 $L^{-n} \geq \frac{\alpha_0}{R}$ 的 $n \geq 0$，它在尺度 $L = \lceil \nu^{-1}\sqrt{d}\rceil$ 上也是深度为 n 的盒孔隙。令 $N > 0$ 为使得 $L^{-N} < \frac{\alpha_0}{R}$ 成立的最小整数。由引理 A.6，

$$|\mathbf{X}\cap\mathrm{B}| \leq R^d|\mathbf{X}'| \leq 2^d R^d\,(1-L^{-d})^N.$$

设 $\gamma = \gamma(\nu,d) > 0$ 满足 $L^{-\gamma} = 1 - L^{-d}$。那么

$$|\mathbf{X}\cap\mathrm{B}| \leq 2^d R^d L^{-N\gamma} \leq 2^d\,R^d\,\left(\frac{\alpha_0}{R}\right)^{\gamma}.$$

□

注释。 我们可以取

$$\gamma \geq c\frac{L^{-d}}{\log L} = c_d\frac{\nu^d}{|\log\nu|}. \tag{A.7}$$

通过结合引理A.7 和引理A.5(c)，我们发现直线多孔集与直线的交集很小。

推论 A.8. 设 $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^d$ 在从尺度 α_0 到 α_1的直线上是 ν-多孔的。设 τ 是一条长度为 $\alpha_0 < R < \alpha_1$的线段。那么存在某个 $C,\gamma > 0$，仅依赖于 ν，使得

$$|\tau\cap\mathbf{Y}| \leq CR\left(\frac{\alpha_0}{R}\right)^{\gamma}.$$

这里，$|\bullet|$ 是 τ上的一维勒贝格测度。

证明。 设 τ 位于直线 ℓ上。由引理 A.5(c)，$\mathbf{Y}|_\ell$ 是 ν-多孔的。由 引理 A.7 中的$d=1$ 可得结论。□

注。 我们可以取 $\gamma \geq c_{|\ \nu}$ 对数 $\nu|$。

A.3. **Paley–Wiener 判据**。 我们简要证明定理2.1，即关于有界傅里叶支撑函数的 Paley–Wiener 判据。完整证明请参见 [18, 定理 7.3。1]

假设 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 且 supp $\hat{}\, f \subset \mathrm{B}^{\sigma/2\pi}$。那么我们有

$$f(\mathbf{x}) = \int_{|\xi|\leq\sigma/2\pi}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\mathbf{x}\cdot\xi}\,d\xi.$$

我们可以定义

$$\tilde{f}(\mathbf{z}) = \int_{|\xi|\leq\sigma/2\pi}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\mathbf{z}\cdot\xi}\,d\xi.$$

对于任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$，我们发现

$$\tilde{f}(\mathbf{z}) \leq C_{\sigma,d}\|f\|_2 \sup_{|\xi|\leq\sigma/2\pi} e^{2\pi i\,\mathbf{z}\cdot\xi} = C_{\sigma,d}\|f\|_2\,e^{\sigma|\operatorname{Im}\mathbf{z}|}$$

如所需。

现在假设 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{C}^d$上是解析的， $f = \tilde{f}|_{\mathbb{R}^d}$ 是一个施瓦茨函数，并且

$$\tilde{f}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \leq Ce^{\sigma|\mathbf{y}|}.$$

我们有

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i\, \mathbf{x}\cdot\xi}\, d\mathbf{x}.$$

固定 ξ 并假设 $|\xi| > \sigma/2\pi$。令

$$G_{\mathbf{x}_0,\hat{\xi}}(z) = \tilde{f}(\mathbf{x}_0 + z\hat{\xi}) e^{-2\pi i\,(\mathbf{x}_0 + z\hat{\xi})\cdot\xi}$$

注意，$G_{\mathbf{x}_0,\,\cdot\hat{\xi}}(z)$ 是关于 z 的解析函数，并且由于 $|\tilde{f}(\mathbf{x}_0 + a\hat{\xi} + ib\hat{\xi})| \leq Ce^{\sigma|b|}$，我们有

$$G_{\mathbf{x}_0,\hat{\xi}}(a - ib) \leq Ce^{-(2\pi|\xi| - \sigma)b}$$

因此 $|G(z)|$ 随 $\operatorname{Im} z \to -\infty$ 指数衰减。根据围道积分，

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{\mathbf{x}_0,\hat{\xi}}(t)\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\mathbf{x}_0,\hat{\xi}}(t - ib)\, dt = 0.$$

我们将一般的$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$写作$\mathbf{x}_0 + t\hat{}\xi$，其中$\mathbf{x}_0 \in \xi^{\perp}$，并对 $\xi^{\perp}$积分，得到ˆthat $f(\xi) = 0$。

A.4. **直线上的积分所给出的导数的希尔伯特变换**。 以下引理由 Semyon Dyatlov 提出。我们直接证明它，但 Dyatlov 最初是通过广义函数证明命题 3.1(ii) 足以使 $E\omega + C|\mathbf{y}|$ 成为多重次调和函数。

引理 A.9. 设 $d \geq 2$, $\omega \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$。假设对所有 $\ell = \{\mathbf{x} + t\hat{}\mathbf{y}\} \subset \mathbb{R}^d$ 直线以及ˆ$\mathbf{v} \perp \hat{}$ $\mathbf{y}$， 都有

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle (D^2\omega(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \, \frac{dt}{\pi} \right| \leq C.$$

那么对任意这样的直线 ℓ，都有

$$\|H[\omega|'_{\ell}]\|_{\infty} \leq C.$$

证明。 只需在 $d = 2$ 的情形下证明，因为当 $d > 2$ 时，我们总可以限制在一个包含 ℓ 的平面上。令 $P(x, y) = \frac{1}{\pi}\frac{|y|}{x^2+y^2}$为泊松核。我们有

$$\Delta P(x, y) = 2\partial_y P(x, 0+)\delta_{\ell_1}$$

其中 $\ell_1 = \{(t,0) : \ t \in \mathbb{R}\}$ 是 x轴，导数取沿 ℓ_1向上的法向方向。右侧是分布 $\partial_y P(x, 0+)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的推前，并作用于直线 ℓ_1。由引理 3.3,

$$\partial_y P(x, 0+) = -2\frac{d}{dx} H[\delta_0]$$

视为 $\mathbb{R}$ 上的分布。取伴随算子，

$$\langle P, \Delta\omega\rangle = \langle \Delta P, \omega\rangle = -2H[\omega|'_{\ell_1}](0).$$

我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle (D^2\omega(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}}))\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}\rangle \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\omega(\mathbf{x}+t\hat{\mathbf{y}})\, dt.$$

在径向坐标中，泊松核由 $P(r,\theta) = {}^{|}{}_{\text{正弦}}{}_{\pi|r|}^{\theta|}$ 给出，因此 ——

$$\begin{aligned}\int P(x,y)\,\Delta\omega(x,y)\,dxdy &= \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(r,\theta)\,\Delta\omega(r,\theta)\,|r|drd\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\sin\theta|\,\Delta\omega(r,\theta)\,drd\theta \le 2C.\end{aligned}$$

□

一个细微的区别在于，我们在命题 3.1(i)中要求上下界，而在 (ii)中只要求下界，因此 (i) 严格来说并不能由 (ii) 按原文表述推出。我们同样可以在 (ii)中要求上下界，这样 (i)便可推出。

References

[1] Aidan Backus、James Leng 和 Zhongkai Tao，《通过 Dolgopyat 方法研究高维分形不确定性原理》，arXiv，2023年。[2] Arne Beurling 和 Paul Malliavin，《关于紧支撑测度的傅里叶变换》，《Acta Math.》107（1962年），291–309。MR147848[3] David Borthwick，《无限面积双曲曲面的谱理论》，第二版，数学进展丛书，第318卷，Birkh¨auser/施普林格出版社，[Cham]，2016。MR3497464[4] Jean Bourgain，《来自 H ¨ormander 的 Beurling–Malliavin》，私人通信，2017年。[5] Jean Bourgain 和 Semyon Dyatlov，《无压力条件下的谱隙》，《Ann. of Math.》（2）187（2018年），第3期，825–867。MR3779959[6] Vasilis Chousionis，《保角迭代函数系上的定向孔隙性与奇异积分的弱收敛》，《Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.》34（2009年），第1期，215–232。MR2489023[7] Laura Cladek 和 Terence Tao，《一维及高维正则测度的加性能量与分形不确定性原理》，《Ars Inven. Anal.》（2021年），论文第1号，38页。MR4462469[8] ALEX COHEN，《离散二维康托集的分形不确定性》，arXiv，2022年。[9] Semyon Dyatlov，《双曲曲面上特征函数的控制：分形不确定性原理的一个应用》，《偏微分方程分析》（2017年），1–14。´《分形不确定性原理导论》，《J. Math. Phys.》60（2019年），第8期，081505，31页。MR3993411[10] ，《高维分形不确定性：关于 Cohen 论文的笔记》，2023年。[12] Semyon Dyatlov 和 Long Jin，《双曲曲面上的半经典测度具有全支撑》，《Acta Math.》220（2018年），第2期，297–339。MR3849286[13] Semyon Dyatlov、Long Jin 和 St´ephane Nonnenmacher，《变曲率曲面上的特征函数控制》，《J. Amer. Math. Soc.》35（2022年），第2期，361–465。MR4374954[14] Semyon Dyatlov 和 Joshua Zahl，《谱隙、加性能量与分形不确定性原理》，《Geom. Funct. Anal.》26（2016年），第4期，1011–1094。MR3558305

[15] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski, 《转移算子的分形不确定性》, 《国际数学研究论文集》3（2020年）, 781–812。MR4073195[16] Rui Han 和 Wilhelm Schlag, 《高维 Bourgain-Dyatlov 分形不确定性原理》, 《偏微分方程分析》13（2020年）, 第3期, 813–863。MR4085124[17] Lars H¨ormander, 《L^2 估计与 $\bar{\partial}$ 算子的存在性定理》, 《Acta Math.》113（1965年）, 89–152。MR179443[18] Lars H¨ormander, 《线性偏微分算子的分析》。I, 数学经典丛书, 施普林格出版社, 柏林, 2003年。分布理论与傅里叶分析, 1990年第二版重印, [施普林格出版社, 柏林; MR1065993（91m:35001a）]。MR1996773[19] Lars H¨ormander, 《凸性概念》, 现代 Birkh¨auser 经典, Birkh¨auser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 2007年。1994年版本重印, [MR1301332]。MR2311920[20] Benjamin Jaye 和 Mishko Mitkovski, 《具有快速衰减或稀疏支集的 L^2 函数的定量唯一性性质》, 《国际数学研究论文集》16（2022年）, 12148–12179。MR4465998[21] Long Jin, 《双曲曲面上的 Schr ¨odinger 方程控制》, 《数学研究快报》25（2018年）, 第6期, 1865–1877。MR3934848[22] ,《紧双曲曲面上的阻尼波动方程》, 《数学物理通讯》373（2020年）, 第3期, 771–794。MR4061399[23] Long Jin 和 Ruixiang Zhang, 《具有显式指数的分形不确定性原理》, 《数学年刊》376（2020年）, 第3–4期, 1031–1057。MR4081109[24] Paul Koosis, 《Beurling 与 Malliavin 定理讲义》, 蒙特利尔大学, CRM 出版物, 魁北克省蒙特利尔, 1996年。MR1430571[25] J. Mashregi、F. L. Nazarov 和 V. P. Havin, 《Beurling-Malliavin 乘子定理：第七个证明》, 《圣彼得堡数学杂志》17（2006年）, 第5期, 699–744。MR2241422 电子邮箱：alexcoh@mit

.edu