经典正命题演算的 Kalmár 式构造性完备性证明

Luiz Henrique Lopes dos Santos

圣保罗大学/巴西国家科学技术发展委员会

初步说明

20世纪70年代，在进行关于弗雷格逻辑哲学的博士研究期间，我也在Newton da Costa的指导下做了一些数理逻辑研究。当时，Andrea Loparic和我私交甚笃，因此在私人生活和专业领域都保持着非常频繁的联系。

我们通常会讨论并批判性地审阅彼此正在进行的逻辑研究，以及旨在阐述研究成果的论文草稿。1979年，Andrea积极参与了我最后一篇数理逻辑论文的撰写过程；该论文探讨了若干正命题演算的结构及其相互联系。

这篇论文于次年发表于《第三届巴西数理逻辑会议论文集》。遗憾的是，文中存在多处排印错误，尤其是逻辑符号方面的错误，导致论文的这一首个印刷版本几乎无法阅读。为了纪念安德烈娅，我认为现在值得发表一份修订后的版本（并略作修改）——事实上，这将是它首个真正可读的印刷版本。

1. 引言

通常被视为经典正命题逻辑（无否定命题逻辑）的形式描述的公理系统，其完备性已知可通过不同的证明程序来保证。例如，在 Rasiowa 1974 中，我们可以看到若干通过代数方法实现这一点的实例。Pollock 1971 和 Schumm 1975 展示了 Henkin 完备性证明程序的若干变体，这些变体尤其适用于正演算。

本文将通过对卡尔马尔完备性证明程序作紧密改编，证明某些经典正命题演算（即满足所谓皮尔士定律的正命题演算）的完备性。该程序最初发表于 Kalmár 1934-1935，并应用于带否定的经典命题演算；例如，Mendelson 1964 也采用了这一程序。

首先，我们将采用这一改造，为实质蕴涵与析取的经典逻辑最为人熟知的公理刻画建立完备性。接着，我们将证明，所谓的经典正命题演算（实质蕴涵、析取与合取的经典演算）的完备性，既可以通过对 Kalmár 过程作基本相同的改造来证明，也可以直接由我们的第一个结果与以下事实推出：每个正公式都可化归为一个在句法和语义上与之等价、且具有特定范式的公式。

最后，通过用实质蕴涵来定义析取，从而在经典蕴涵演算中复现实质蕴涵与析取的经典演算，我们将证明，前者的完备性可以通过相当简单直接的方式推出后者的完备性，以及实质蕴涵与合取的经典演算的完备性。

值得注意的是，所有这些完备性证明都是构造性的；也就是说，我们可以轻易地从每个证明中提取一种有效方法，用以生成相关公理系统所有定理的形式演绎。

2. 语言、演算与定义

在本文中，我们将把语言视为表达式的集合，并将这些表达式称为其公式。设 L 为一种语言，其公式包括可数无穷多个原子公式 $p_1,...,p_n,...$，以及在模式 $(A \to B)$、$(A \vee B)$ 和 $(A \,\&\, B)$ 中用公式替换字母 A 和 B 所得到的表达式。符号 $\to$、$\vee$ 和 & 分别是实质蕴涵（以下简称蕴涵）、析取和合取的联结词。大写字母 A、B、C、D 和 E，无论是否带有数字下标，都将用作 L 的公式的句法变量。

除非明确说明存在限制，否则均不作此类限制。公式的（真）部分和非真部分统称为该公式的子公式。假定 L 中的公式按照一个固定的、可判定的线性序 R 排列（例如，使用哥德尔编号）。

为简洁起见，孤立公式最外层的括号可以省略。由同一联结词连接的公式序列，应按熟知的右结合规则补上括号来理解。例如，形如 $A_1 \vee ... \vee A_n$ 的序列示意表示，包含 $n = 1$ 这种情形；此时，$A_1 \vee ... \vee A_n$ 表示的内容与 A_1. 相同。同样，公式序列 $A_1,...,A_n$ 的示意表达式表示的内容与 A_1，相同，只要 $n = 1$。

等价联结词不是 L 的符号。它仅为简洁起见而使用，其定义遵循通常的方式：

$$A \leftrightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A).$$

L 中不含 $\rightarrow$ 以外任何联结词的公式称为蕴含公式；不含 $\vee$ 的公式称为蕴含-合取公式；不含 & 的公式称为蕴含析取公式。

经典正命题演算的语言为 L，其公理模式和推理规则如下：

(Ax1) $A \rightarrow B \rightarrow A$

(Ax2) $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$

(Ax3) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (Peirce’s law)

(Ax4) $A \rightarrow (A \vee B)$

(Ax5) $A \rightarrow (B \vee A)$

(Ax6) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow C$

(Ax7) $(A \,\&\, B) \rightarrow A$

(Ax8) $(A \,\&\, B) \rightarrow B$

(公理9) $A \to B \to (A \,\&\, B)$

（分离规则）由 $A \to B$ 和 A 推出 B。

经典蕴含命题演算的语言是 L 的蕴含公式集合，其公理模式和推理规则为 (Ax1)-(Ax3) 和分离规则。经典蕴含-析取命题演算的语言是 L 的蕴涵析取公式集合，其公理模式和推理规则为 (Ax1)-(Ax6) 和分离规则。经典蕴含-合取命题演算的语言是 L 的蕴含-合取公式集合，其公理模式和推理规则为 (Ax1)-(Ax3)、(Ax7)-(Ax9) 和分离规则。

经典正命题演算显然是经典蕴含-析取命题演算以及经典蕴含-合取命题演算的扩展。这些演算中的每一种显然都是经典蕴含命题演算的扩展。

记号 $\vdash_i A$ 表示 A 是经典蕴含命题演算中的一个定理。若 K 是一组（可以为空的）蕴含公式，则记号 $K \vdash_i A$ 表示在该演算中 A 可由 K 中的成员形式可导；记号 $B_1,...,B_n \vdash_i A$ 将代替 $\{B_1,...,B_n\} \vdash_i A$ 使用。符号 $\vdash_{id}$、$\vdash_{ic}$ 和 $\vdash$ 将分别用于经典蕴含-析取命题演算、经典蕴含-合取命题演算和经典正命题演算。若且唯若公式 A 和 B 在 L 中满足：在某一演算中 A 可由 {B} 形式可导，且 B 可由 {A} 形式可导，则称它们在该演算中是语法等价式。

L 的一个 真值赋值是一个将 L 映射到真值集合 {T, F} 的函数，并满足经典上与蕴涵、析取和合取这些联结词相关联的条件。除非明确说明限制，否则大写字母 V 将用作遍历 L 的真值赋值的变量。我们按通常方式定义重言式和重言后承的概念。记号 $\models A$ 表示 A 是一个重言式，而 $B_1,...,B_n \models A$ 表示 A 是 $\{B_1,...,B_n\}$ 的重言后承。L 的公式 A 和 B 称为语义等价式，当且仅当 $\models A \leftrightarrow B$。

设 A 是 L 的一个公式，V 是 L 的一个真值赋值。记号Γ [V; A] 表示 A 的原子子公式 B 中满足 V(B) = T 的集合；记号Δ [V; A] 表示 A 的原子子公式 B 中满足 V(B) = F 的集合。

设 K 是 L 的有限公式集；若 K 非空，令 $B_1,...,B_n$ 为 K 中按其在线性序 R 中的相对位置排列的所有不同元素。若 K 为空，我们将 $(K)^A$ 记作公式 A 本身；否则记作公式 $B_1 \vee ... \vee B_n \vee A$。若 K 为空，我们将 $(K)^{\sim A}$ 记作公式 A 本身；否则记作公式 $A \to (B_1 \vee ... \vee B_n)$。

下面的图式命题 2.1-2.27 很容易证明。显然，图式命题 2.5-2.10 对经典蕴含析取演算、经典蕴含合取演算和经典正命题演算也成立，而图式命题 2.11-2.24 对经典正命题演算也成立。

2.1. 若 B 是 A 的子公式，则 Γ (V, B) $\subseteq \Gamma$ (V; A)，且 Δ (V, B) $\subseteq \Delta$ (V; A)。

2.2. 若 V(A) = F，则 A 存在一个原子子公式 B，使得 V(B) = F。

2.3. 上述所有命题演算系统的演绎定理（DT）。

2.4. 上述所有命题演算系统中等值替换的语义规则和句法规则（RSE）。

2.5. $\vdash_i A \to A$. 2.6. $A \to B, B \to C \vdash_i A \to C$. 2.7. $\vdash_i A \to (A \to B) \to B$. 2.8. $\vdash_i A \to (B \to A) \to A$. 2.9. $\vdash_i (A \to (A \to B)) \to A \to B$. 2.10. $(A \to B) \to B, (A \to C) \vdash_i (C \to B) \to B$. 2.11. $\vdash_{id} A \vee (A \to B)$. 2.12. $A \vee B, A \to C, B \to D \vdash_{id} C \vee D$. 2.13. $A \to B \vdash_{id} B \vee (A \to C)$

2.14. $A \vdash_{id} B \vee (C \to A)$.

2.15. $(A_1 \vee ... \vee A_n) \vee B$ 与 $A_1 \vee ... \vee A_n \vee B$ 在经典蕴涵析取命题演算中是语法等价式。

2.16. 如果每个 $A_1, ...,A_n$ 都是 $B_1, ...,B_k$ 中的一个，则 $A_1 \vee ... \vee A_n \vdash_{id} B_1 \vee ... \vee B_k$。

2.17. $A \vee B, C \to A \vdash_{id} (B \to C) \to A$.

2.18. $A \vee B, A \to B \vdash_{id} B$。

2.19. $(A \to B) \to B \vdash_{id} A \vee B$.

2.20. $\vdash_{ic} A \leftrightarrow B$ 且 $\vdash_{ic} B \leftrightarrow A$，当且仅当 A 和 B 在经典蕴涵合取演算中是语法等价式。

2.21. $\vdash_{ic} (A \to (B \& C)) \leftrightarrow (A \to B) \& (A \to C)$. 2.22. $\vdash_{ic} ((A \& B) \to C) \leftrightarrow (A \to B \to C)$. 2.23. $\vdash_{ic} ((A_1 \& ... \& A_n) \& B) \leftrightarrow (A_1 \& ... \& A_n \& B)$. 2.24. $\vdash_{ic} B_1 \&... \& B_n$ 当且仅当 $\vdash_{ic} B_j$，对所有满足 $1 \leq j \leq n$ 的 j 均成立。2.25. $\vdash (C \vee (A \& B)) \leftrightarrow ((C \vee A) \& (C \vee B))$. 2.26. $\vdash ((A \& B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee C) \& (B \vee C))$. 2.27. 上述所有命题演算的可靠性定理（ST

).

3. 经典蕴涵析取命题演算

我们将展示一些预备性结果，以服务于预期的经典蕴涵析取演算完备性证明。

3.1. $(\Delta [V; B])_B \vdash_{id} (\Delta [V; A \to B])_{A \to B}$。

证明。

(a) 设 Δ [V; B] 和 Δ [V; A $\rightarrow$ B] 均为空。在这种情况下，3.1 即为 B $\vdash_{id}$ A $\rightarrow$ B，可由 Ax1 和演绎定理推出。

(b) 设 Δ [V; B] 为空，且 Δ [V; A $\rightarrow$ B] 非空。在这种情况下，3.1 的形式为 B $\vdash_{id}$ $C_1 \vee \ldots \vee C_n \vee (A \rightarrow B)$，并可由 B $\vdash_{id}$ $(C_1 \vee \ldots \vee C_n) \vee (A \rightarrow B)$（这是 2.14 的一个实例）、2.15 和 RSE 得出。

(c) 设 Δ [V; B] 和 Δ [V; A $\rightarrow$ B] 均非空。在这种情况下，3.1 的形式为 $B_1 \vee \ldots \vee B_n \vee B \vdash_{id} C_1 \vee \ldots \vee C_k \vee (A \rightarrow B)$，其中每个 $B_1,\ldots$、B_n 都是 $C_1,\ldots$、C_k 中的一个，由 2.1 得出。由 2.16 和演绎定理可得，$\vdash_{id} (B_1 \vee \ldots \vee B_n) \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$. 但 B $\rightarrow$ A $\rightarrow$ B 是 Ax1 的一个实例，因此由 2.12 可得，$(B_1 \vee \ldots \vee B_n) \vee B \vdash_{id} (C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee (A \rightarrow B)$。于是由 2.15 和 RSE 可得 3.1。

3.2. $(\Delta [V; A])^{\sim A} \vdash_{id} (\Delta [V; A \rightarrow B])^{(A \rightarrow B)}$，若 V(A) = F。

证明。设 V(A) = F。根据 2.2，Δ [V; A] 非空，因此根据 2.1，3.2 具有以下形式：$A \rightarrow (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \vdash_{id} C_1 \vee \ldots \vee C_k \vee (A \rightarrow B)$，其中每个 $A_1,\ldots$、A_n 都是 $C_1,\ldots$、C_k 中的一个。根据 2.16 和演绎定理，$\vdash_{id} (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$。因此，根据 2.6，$A \rightarrow (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \vdash_{id} A \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$。但 $A \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vdash_{id} (C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee (A \rightarrow B)$ 是 2.13 的一个实例；因此 $A \rightarrow (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \vdash_{id} (C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee (A \rightarrow B)$，于是根据 2.15 和 RSE 得到 3.2。

3.3. $(\Delta [V; A])^{A}, (\Delta [V; B])^{\sim B} \vdash_{id} (\Delta [V; A \rightarrow B])^{\sim (A \rightarrow B)}$，若 V(B) = F。

证明。设 V(B) = F。在这种情况下，$(\Delta [V; A \rightarrow B])^{\sim (A \rightarrow B)}$ 的形式为 $(A \rightarrow B) \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$，由 2.2 可得。根据 2.1，$(\Delta [V; A])^{A}$ 要么就是 A，要么具有 $A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee A$ 的形式，其中每个 $A_1,\ldots$、A_n 都是 $C_1,\ldots$、C_k 中的一个；因此，由 2.16，$(\Delta [V; A])^{A} \vdash_{id} C_1 \vee \ldots \vee C_k \vee A$。因此，

(i) $(\Delta [V; A])^{A} \vdash_{id} (C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee A$，由 2.15 和 RSE 得出。

根据 2.2，$(\Delta [V; B])^{\sim B}$ 具有以下形式：$B \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_j)$，其中每个 $B_1,\ldots$、B_j 都是 $C_1,\ldots$、C_k 中的一个；因此，根据 2.16 和演绎定理，$\vdash_{id} (B_1 \vee \ldots \vee B_j) \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$，所以

(ii) $(\Delta [V; B])^{\sim B} \vdash_{id} B \rightarrow (C_1 \vee \ldots\ldots \vee C_k)$，根据 2.6。但

(iii) $(C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee A, B \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vdash_{id} (A \rightarrow B) \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$ 是 2.17 的一个实例。

因此由 (i)–(iii) 得出 3.3。

3.4. $(\Delta [V; A])^{A} \vdash_{id} (\Delta [V; A \vee B])^{A \vee B}$ 且

$(\Delta [V; A])^{A} \vdash_{id} (\Delta [V; B \vee A])^{B \vee A}$.

证明。由 2.1 和 2.16 可直接得出。

3.5. $(\Delta [V; A])^{\sim A}, (\Delta [V; B])^{\sim B} \vdash_{id} (\Delta [V; A \vee B])^{\sim (A \vee B)}$，如果 $V(A) = V(B) = F$。

证明。设 $V(A) = V(B) = F$。在此情况下，根据 2.2 和 2.1，$(\Delta [V; A \vee B])^{\sim (A \vee B)}$ 的形式为 $(A \vee B) \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$，$(\Delta [V; A])^{\sim A}$ 的形式为 $A \rightarrow (A_1 \vee \ldots \vee A_n)$，而 $(\Delta [V; B])^{\sim B}$ 的形式为 $B \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_j)$，其中每个 $A_1,\ldots、A_n、B_1,\ldots、B_j$ 都是 $C_1,\ldots、C_k$ 中的一个。根据 2.16，$\vdash_{id} (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$ 且 $\vdash_{id} (B_1 \vee \ldots \vee B_j) \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$。因此，根据 2.6 和 演绎定理，$(\Delta [V; A])^{\sim A} \vdash_{id} A \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$，且 $(\Delta [V; B])^{\sim B} \vdash_{id} B \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$；于是根据 Ax6 和 分离规则得到 3.5。

3.6. 设 K 是由有限个蕴含析取公式组成的集合；若对于所有满足 $H \cup J = K$ 的互斥集合 H 和 J，都有 $H \vdash_{id} (J)^{A}$，则 $\vdash_{id} A$。

证明。对 K 的有限基数 *n* 使用归纳法。设 K 是由有限个蕴含析取公式组成的集合，并且

(i) 对所有满足 $H \cup J = K$ 的互斥集合 H 和 J，都有 $H \vdash_{id} (J)^{A}$。

(a) 若 $n = 0$，则对 K 的所有子集 H 和 J，$H = J = \varnothing$，因此 $(J)^{A}$ 就是 A；于是由 (i) 得 $\varnothing \vdash_{id} A$，也就是说 $\vdash_{id} A$。

(b) 若 $n > 0$，令 $B_1,\ldots,B_n$ 为 K 中按其在线性序 R 中的相对位置排列的不同元素；令 K* 为由 K 中满足 $C \neq B_1$ 的元素 C 组成的集合；令 H* 和 J* 为任意满足 $H^* \cup J^* = K^*$ 的互斥集合。容易验证

(ii) $(H^* \cup \{B_1\}) \cup J^* = K$；(iii) $H^* \cup \{B_1\}$ 和 J^* 互斥；(iv) $H^* \cup (J^* \cup \{B_1\}) = K$;

(v) H^* 和 $J^* \cup \{B_l\}$ 互斥。

因此，我们可以得出结论：

(vi) $(H^* \cup \{B_l\}) \vdash_{id} (J^*)_A$，由 (i)-(iii) 得出；

(vii) $H^* \vdash_{id} (J^* \cup \{B_l\})_A$，由 (i)、(iv) 和 (v) 得出。

此外，

(viii) $H^* \vdash_{id} B_l \to (J^*)_A$，由 (vi) 和演绎定理得出，

(ix) $(J^* \cup \{B_l\})_A \vdash_{id} B_l \vee (J^*)_A$，由 2.16 得出，因此

(x) $H^* \vdash_{id} B_l \vee (J^*)_A$，由 (vii) 和 (ix) 得出。

因此，由 (viii)、(x) 和 2.18，$H^* \vdash_{id} (J^*)_A$。

但我们假设 H^* 和 J^* 是任意的互斥集合，满足 $H^* \cup J^* = K^*$，且 K^* 的基数为 ($n-1$)；因此，根据归纳假设，$\vdash_{id} A$。

3.7. 设 A 是一个蕴含析取公式。若 $V(A) = T$，则$\Gamma [V; A] \vdash_{id} (\Delta [V; A])_A$；若 $V(A) = F$，则 $\Gamma [V; A] \vdash_{id} (\Delta [V; A])_{\sim A}$。

证明。对 A 的长度作归纳。

(a) 设 A 是一个原子公式。若 $V(A) = T$，则 $\Gamma [V; A]$ 就是 A，而 $(\Delta [V; A])_A$也就是 A，因此 $\Gamma [V; A] \vdash_{id} (\Delta [V; A])_A$。若 $V(A) = F$，则 $\Gamma [V; A]$ 为空，而 $(\Delta [V; A])_{\sim A}$就是 $A \to A$；因此，根据 2.5，$\Gamma [V; A] \vdash_{id} (\Delta [V; A])_{\sim A}$。

(b) 设 A 是蕴涵 $B \to C$，且 $V(C) = T$。在这种情况下，$V(A) = T$，$\Gamma [V, C] \vdash_{id} (\Delta [V, C])_C$，由归纳假设可得；并且 $(\Delta [V, C])_C \vdash_{id} (\Delta [V, B \to C])_{B \to C}$，由 3.1 可得。由于 $\Gamma [V, C] \subseteq \Gamma [V, B \to C]$,，因此 $\Gamma [V, B \to C] \vdash_{id} (\Delta [V, B \to C])_{B \to C}$。

(c) 设 A 是蕴涵 $B \to C$，且 $V(B) = F$。在这种情况下，$V(A) = T$，$\Gamma [V, B] \vdash_{id} (\Delta [V, B])_{\sim B}$，由归纳假设可得；并且 $(\Delta [V, B])_{\sim B} \vdash_{id} (\Delta [V, B \to C])_{B \to C}$，由 3.2 可得。由于 $\Gamma [V, B] \subseteq \Gamma [V, B \to C]$,，因此 $\Gamma [V, B \to C] \vdash_{id} (\Delta [V, B \to C])_{B \to C}$。

(d) 设 A 是一个蕴涵 $B \to C$，$V(B) = T$ 且 $V(C) = F$。在这种情况下，$V(A) = F$，$\Gamma [V, B] \vdash_{id} (\Delta [V, B])_B$ 且 $\Gamma [V, C] \vdash_{id} (\Delta [V, C])_{\sim C}$，根据归纳假设，并且

(Δ [V; B])$_B$, (Δ [V; C])$_{\sim C}$ $\vdash_{id}$ (Δ [V; B → C])$_{\sim(B \to C)}$，根据 3.3。由于Γ [V, B] ⊆ Γ [V, B → C] 和 Γ [V, C] ⊆ Γ [V, B → C], , 由 2.1 可知，因此Γ [V, B → C] $\vdash_{id}$ (Δ [V, B → C])$_{\sim(B \to C)}$。

（e）设 A 是析取 B ∨ C，且 V(B) = T 或 V(C) = T。在此情况下，V(A) = T，并且有

（i）要么 Γ [V, B] $\vdash_{id}$ (Δ [V, B])$_B$，根据归纳假设；并且 (Δ [V, B])$_B$ $\vdash_{id}$ (Δ [V, B ∨ C])$_{B \vee C}$，根据 3.4；要么 Γ [V, C] $\vdash_{id}$ (Δ [V, C])$_C$，根据归纳假设；并且 (Δ [V, C])$_C$ $\vdash_{id}$ (Δ [V, B ∨ C])$_{B \vee C}$，根据 3.4。

由于 Γ [V, B] ⊆ Γ [V, B → C] 以及 Γ [V, C] ⊆ Γ [V, B → C], 因此由（i）可得Γ [V, B ∨ C] $\vdash_{id}$ (Δ [V, B ∨ C])$_{B \vee C}$。

(f) 设 A 是析取 B ∨ C，且 V(B) = V(C) = F。在这种情况下，V(A) = F，并且有

(i) 根据归纳假设，Γ [V, B] $\vdash_{id}$ (Δ [V, B])$_{\sim B}$ 以及 Γ [V, C] $\vdash_{id}$ (Δ [V, C])$_{\sim C}$；(ii) (Δ [V, B])$_{\sim B}$，(Δ [V, C])$_{\sim C}$ $\vdash_{id}$ (Δ [V, B ∨ C])$_{\sim(B \vee C)}$，根据 3.5。

因此，根据 (i) 和 (ii)，Γ [V, B], Γ [V, C] $\vdash_{id}$ (Δ [V, B ∨ C])$_{\sim(B \vee C)}$。由于 Γ [V, B] ⊆ Γ [V, B ∨ C] 以及 Γ [V, C] ⊆ Γ [V, B ∨ C], , 可得 Γ [V, B ∨ C] $\vdash_{id}$ (Δ [V, B ∨ C])$_{\sim(B \vee C)}$。

3.8. 蕴涵析取演算的完备性定理：对于任意蕴含析取公式 A 和任意由蕴含析取公式构成的有限集 K，$\vdash_{id}$ A 当且仅当 ⊨ A，且 K $\vdash_{id}$ A 当且仅当 K ⊨ A。

证明。设 A 是一个蕴含析取公式。

(a) 若 $\vdash_{id}$ A，则由 ST 可得 ⊨ A。

(b) 设 ⊨ A，令 K 为 A 的原子子公式集合，并令 H 和 J 为任意两个互斥集合，使得 H J K。令 V 为 L 的一个真值赋值，满足以下条件：对于 A 的所有原子子公式 B，V(B) T 当且仅当 B 属于 H，因此 V(B) F 当且仅当 B 属于 J。由于 V(A) T，3.7 保证 V； A $\vdash_{id}$ (Δ [V； A])$_A$。但是 Γ [V； A] 是 H，且 (Δ [V； A] 是 J；因此 H ⊢$_{id}$ (J)$_A$，由此根据 3.6 可得 ⊢$_{id}$ A。

由此以及演绎定理可知，对于任意蕴含公式 A 和任意蕴含公式的有限集 K，$K \vdash_{id} A$ 当且仅当 $K \models A$。

4. 经典正命题演算

经典正命题演算的完备性可以用 Kalmár式证明程序来证明；我们在上文第3部分已将该程序用于蕴涵析取演算。事实上，可以证明，类似于3.1–3.9的命题对于经典正命题演算也成立。为此，只需记住该演算是蕴涵析取演算的扩展，并证明下文的4.1和4.2成立。

4.1. $(\Delta [V; A])_A, (\Delta [V; B])_B \vdash (\Delta [V; A \& B])_{A \& B}$.

证明。

(a) 若 $\Delta [V; A \& B]$ 为空，则 $(\Delta [V; A])_A$ 和 $(\Delta [V; B])_B$ 也为空。在这种情况下，4.1 即为 $A, B \vdash A \& B$，它可由公理9、演绎定理和分离规则推出。

(b) 如果 $\Delta [V; A \& B]$ 非空，那么 $(\Delta [V; A \& B])_{A \& B}$ 具有 $C_1 \vee \ldots \vee C_k \vee (A \& B)$ 的形式；因此，根据 2.16，$(\Delta [V; A])_A \vdash C_1 \vee \ldots \vee C_k \vee A$ 且 $(\Delta [V; B])_B \vdash C_1 \vee \ldots \vee C_k \vee B$。由此，根据 2.15 和 RSE，可得 $(\Delta [V; A])_A \vdash (C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee A$ 且 $(\Delta [V; B])_B \vdash (C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee B$。因此，根据公理9和分离规则，$(\Delta[V; A])_A, (\Delta [V; B])_B \vdash ((C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee A) \& ((C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee B)$，进而根据 2.25，$(\Delta[V; A])_A, (\Delta [V; B])_B \vdash ((C_1 \vee \ldots \vee C_k) \vee (A \& B)$，因此，根据 2.15 和 RSE，得到 4.1。

4.2. 若 $V(A) = F$，则 $(\Delta [V; A])_{\sim A} \vdash (\Delta [V; A \& B])_{\sim (A \& B)}$，且 $(\Delta [V; A])_{\sim A} \vdash (\Delta [V; B \& A])_{\sim (B \& A)}$。

证明。设 $V(A) = F$。在此情况下，根据 2.1 和 2.2，$(\Delta [V; A])_{\sim A}$ 的形式为 $A \to (A_1 \vee \ldots \vee A_n)$，$(\Delta [V; A \& B])_{\sim (A \& B)}$ 的形式为 $(A \& B) \to (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$，而 $(\Delta [V; B \& A])_{\sim (B \& A)}$ 则为 $(B \& A) \to (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$，其中每个 $A_1,\ldots、A_n$ 都是 $C_1,\ldots、C_k$ 中的一个。但是，根据 2.16 和演绎定理，$\vdash (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \to (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$，因此

$(\Delta\ [V;\ A])_{\sim A} \vdash A \to (C_1 \vee \ldots \vee C_k)$，根据 2.16、演绎定理和 2.6。但是 $(A \& B) \to A$ 和 $(B \& A) \to A$ 分别是 Ax7 和 Ax8 的实例。因此由 2.6 得出 4.2。

经典正命题演算的完备性，也可以借助下文的 4.3 和 4.4，从经典蕴涵析取命题演算的完备性推得。

若 A 是 L 的一个公式，γ (A) 表示满足以下条件的公式：

(a) 在 γ (A) 中，联结词 & 不出现在任何析取或合取内部 ；

(b) γ (A) 可由 A 经以下规则连续应用 n 次得到（$n \geq 0$）：

(i) 将形如 $C \to (D \& E)$ 的子公式替换为 $(C \to D) \& (C \to E)$；

(ii) 将形如 $(C \& D) \to E$ 的子公式替换为 $C \to D \to E$；

(iii) 将形如 $C \vee (D \& E)$ 的子公式替换为 $(C \vee D) \& (C \vee E)$；

(iv) 将形如 $(C \& D) \vee E$ 的子公式替换为 $(C \vee E) \& (D \vee E)$。对于 L 中的每个公式 A，γ(A) 的存在性和唯一性都可轻易证明。

4.3. 对于 L 中的每个公式 A，$\vdash A \leftrightarrow \gamma(A)$，且 $\models A \leftrightarrow \gamma(A)$。

证明。对 A 的长度使用归纳法，并应用 2.21、2.22、2.25、2.26、RSE 和 ST。

4.4. 对于 L 中的每个公式 A，都存在蕴含析取公式 $B_1,\ldots,B_n$，使得 $\vdash A \leftrightarrow (B_1 \& \ldots \& B_n)$ 且 $\models A \leftrightarrow (B_1 \& \ldots \& B_n)$。

证明。设 A 是 L 的任意公式。根据 4.3 和 RSE，只需证明

(i) 存在蕴涵析取公式 $B_1,\ldots,B_n$，使得 $\vdash \gamma(A) \leftrightarrow (B_1 \& \ldots \& B_n)$，且 $\models \gamma(A) \leftrightarrow (B_1 \& \ldots \& B_n)$。

这可以通过对 γ(A) 的长度进行归纳法来完成。

(a) 如果 $\gamma(A)$ 是一个原子公式、蕴涵或析取，那么根据 γ 的定义， $\gamma(A)$ 是一个蕴含析取公式；而 (i) 显然成立，因为 L 中的任意公式在语法上和语义上都等价于其自身。

(b) 若 $\gamma(A)$ 的形式为 C & D，那么根据 γ 的定义，C 是 $\gamma(C)$，D 是 $\gamma(D)$。根据归纳假设，存在蕴含析取公式 $C_1,...,C_j$、$D_1,...,D_k$ ，使得 $\vdash C \leftrightarrow (C_1 \& ... \& C_j)$、$\models C \leftrightarrow (C_1 \& ... \& C_j)$、$\vdash D \leftrightarrow (D_1 \& ... \& D_k)$ 且 $\models D \leftrightarrow (D_1 \& ... \& D_k)$；因此，根据 RSE， $\vdash \gamma(A) \leftrightarrow (C_1 \& ... \& C_j) \& (D_1 \& ... \& D_k)$ 且 $\models \gamma(A) \leftrightarrow (C_1 \& ... \& C_j) \& (D_1 \& ... \& D_k)$。由此，根据 2.23 和 RSE，应用 (j – 1) 次可得 $\vdash \gamma(A) \leftrightarrow (C_1 \& ... \& C_j \& D_1 \& ... \& D_k)$，进而根据 ST 可得 $\models \gamma(A) \leftrightarrow (C_1 \& ... \& C_j \& D_1 \& ... \& D_k)$。

现在，ST 确保经典正命题演算的所有定理都是重言式。设 A 是 L 的任意重言式；根据 4.4，存在蕴含析取公式 $B_1,.....B_n$ ，使得 $\vdash A \leftrightarrow B_1 \& ... \& B_n$ 且 $\models A \leftrightarrow B_1 \& ... \& B_n$。因此 $\models B_1 \& ... \& B_n$ ，显然，对于所有满足 $1 \leq j \leq n$ 的 j，都有 $\models B_j$ ；根据蕴涵析取演算的完备性定理，对于所有满足 $1 \leq j \leq n$ 的 j，都有 $\vdash_{id} B_j$，所以 $\vdash B_j$。因此，根据 2.24，有 $\vdash B_1 \& ... \& B_n$，进而根据 4.4 和 RSE，有 $\vdash A$。

5. 经典蕴含命题演算与经典蕴含合取命题演算。

经典蕴涵析取命题演算可以通过一种方式映射到经典蕴含命题演算中，从而能够顺利地由前者的完备性推出后者的完备性。

设 A 为一个蕴含析取公式。我们将 A 的蕴含翻译定义为 $\tau(A)$，即通过对以下规则进行n次连续应用（$n \geq 0$）从 A 得到的蕴含公式：将形如 $B \vee C$ 的子公式替换为 $(B \rightarrow C) \rightarrow C$。对于 L 中的每个公式 A，都可以很容易地证明 $\tau(A)$ 的存在性和唯一性。

5.1. $(B \to D), (C \to D), (B \to C) \to C \vdash_i D$

证明。

(i) $B \to D$，根据假设；(ii) $C \to D$，根据假设；(iii) $(B \to C) \to C$，根据假设；(iv) $(D \to C) \to C$，根据 (i)、(iii) 和 2.10；(v) $(D \to C) \to D$，根据 (ii)、(iv)、2.6 和分离规则；(vi) $((D \to C) \to D) \to D$ 是 Axb 的一个实例；(vii) D，根据 (v)、(vi) 和分离规则。**5.2.** τ对于任意蕴含析取公式 A，(A) $\vdash_{id}$ A 且 A $\vdash_{id} \tau(A)$。证明。通过对 A 的长度进行归纳法，利用 2.18、演绎定理、2.19 和 RSE 得证。

5.3. $\vdash_{id}$ A 当且仅当 $\vdash_i \tau(A)$ 成立，其中 A 是任意蕴含析取公式。证明。

(a) 如果 $\vdash_i \tau(A)$，那么显然 $\vdash_{id} \tau(A)$，因此根据 5.2，$\vdash_{id}$ A。

(b) 现在令 A 为经典蕴涵析取命题演算中的任意一个定理。我们将对 A 在该演算中的推导长度使用归纳法，证明 $\vdash_i \tau(A)$。若 A 是 Ax1、Ax2 或 Ax3 的一个实例，那么 τ(A) 也是 Ax1、Ax2 或 Ax3 的一个实例。若 A 是 Ax4 或 Ax5 的一个实例，那么 τ(A) 的形式为 $\tau(B) \to (\tau(B) \to \tau(C)) \to \tau(C)$，或为 $\tau(B) \to (\tau(C) \to \tau(B)) \to \tau(B)$；因此根据 2.7 或 2.8，$\vdash_i \tau(A)$。若 A 是 Ax6 的一个实例，那么 τ(A) 的形式为 $(\tau(B) \to \tau(D)) \to (\tau(C) \to \tau(D)) \to ((\tau(B) \to \tau(C)) \to \tau(C)) \to \tau(D)$，于是根据 5.1 和演绎定理，$\vdash_i \tau(A)$。若 A 是由 $B \to A$ 和 B 推导而来，则根据归纳假设，$\vdash_i \tau(B \to A)$ 且 $\vdash_i \tau(B)$；但 $\tau(B \to A)$ 是 $\tau(B) \to \tau(A)$；因此根据分离规则，$\vdash_i \tau(A)$。

5.4. 蕴含演算的完备性定理：对于 L 的任意蕴含公式 A，$\models_i$ A 当且仅当 $\vdash$ A，并且，对于任意蕴含公式有限集 K，K $\models_I$ A 当且仅当 K $\vdash$ A。

证明。设 A 是 L 的任意蕴含公式。如果 $\vdash_{i} A$，那么根据 ST，$\models A$。现在，如果 $\models A$，那么根据蕴涵析取演算的完备性定理，$\vdash_{id} A$，从而根据 5.3，$\vdash_{i} \tau(A)$；但 $\tau(A)$ 就是 A 本身，因此 $\vdash_{i} A$。由此以及演绎定理可知，对于任意蕴含公式 B 和任意蕴含公式的有限集 K，$K \vdash_{i} B$ 当且仅当 $K \models B$。

命题5.3和RSE确保，蕴含命题演算的完备性也可以通过Kalmár式程序直接证明。只需在3.1–3.9的证明中，将所有对蕴含析取命题演算的引用替换为对蕴含命题演算的引用，并将所有对蕴涵析取公式的引用替换为对相应蕴含翻译的引用，即可完成证明。

最后，经典蕴含-合取命题演算的完备性，可以根据经典蕴含命题演算的完备性和下文的5.5推得；这与上文第4部分中根据经典蕴涵析取命题演算的完备性和4.4推得经典正命题演算的完备性完全相同。

5.5. 对于L中的任意蕴含-合取公式A，都存在蕴含公式$B_1,...,B_n$，使得 $\vdash_{ic} A \leftrightarrow (B_1 \,\&\, ... \,\&\, B_n)$且 $\models A \leftrightarrow (B_1 \,\&\, ... \,\&\, B_n)$。

证明。与 4.4 的证明类似。

5.6. 经典蕴含-合取命题演算的完备性定理：对于 L 的任意蕴含-合取公式，$\vdash_{ic} A$ 当且仅当 $\models A$；并且，对于任意蕴含-合取公式的有限集 K，$K \vdash_{ic} A$ 当且仅当 $K \models A$。

证明。我们可以恰好按照在上述第4部分中从 4.4 推导经典正命题演算的完备性的方式，从 5.5 推导出 5.6。

值得注意的是，4.4、5.2 和 RSE 使我们能够证明 4.4 的一个更强变体。

5.7. 对于 L 中的每个公式 A，都存在蕴含公式 $B_1,...、B_n$，使得 $\vdash A \leftrightarrow (B_1 \,\&\, ... \,\&\, B_n)$ 且 $\models A \leftrightarrow (B_1 \,\&\, ... \,\&\, B_n)$。

参考文献

Kalmár, L. 1934—1935年，“关于命题演算的公理化”，《数学科学学报》，第七卷，222-241。Mendelson, E. 1964年，《数理逻辑导论》，纽约。Pollock, J. L. 1971年，“缺少否定的理论中的 Henkin式完备性证明”，《圣母大学形式逻辑杂志》，第十二卷，第4期，509-511。Rasiowa, H. 1974年，《非经典逻辑的代数方法》，阿姆斯特丹。Schumm, G. 1975年，“纯蕴涵演算的 Henkin式完备性证明”，《圣母大学形式逻辑杂志》，第十六卷，第3期，402-404。