arXiv:2305.05037v2 [math.AG] 5 Jul 2023

带有 $\mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$ 作用的不可约全纯辛流形

PAOLA COMPARIN [1]，ROMAIN DEMELLE [2]，和 PABLO QUEZADA MORA [3]

摘要。Höhn 和 Mason 对作用于 K3$^{[2]}$ 型不可约全纯辛（IHS）流形上的可能辛群进行了分类，发现 $\mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$ 是阶最大的辛群。本文研究具有 $\mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$ 辛作用且同时允许存在非辛自同构的 K3$^{[2]}$ 型 IHS 流形。我们刻画了这类 IHS 流形。特别地，我们证明存在一个 K3$^{[2]}$ 型 IHS 流形，其有限自同构群的阶为 174960，这是 K3$^{[2]}$ 型 IHS 流形自同构群可能达到的最大阶；该流形是费马三次四维簇的直线法诺簇。

引言

不可约全纯辛（IHS）流形是一个复紧凯勒光滑流形，它是单连通的，并且具有唯一的（相差一个标量）处处非退化全纯 2-形式 ω_X。IHS 流形总是具有偶数维。2 维的 IHS 流形是 K3曲面，而在大于 2 的维数中，已知的 IHS 流形变形类型有四种：K3曲面上 n 个点的希尔伯特概形，称为 K3$^{[n]}$ 型；广义库默尔曲面；以及六维和十维的 O'Grady例子。给定一个作用在 IHS 流形 X 上的有限群 G，我们可以研究元素 $g \in G$ 在 2-形式 ω_X 上诱导的作用。由于 $H^{2,0}(X)$ 是一维的，g 通过乘以一个非零复标量 $\alpha(g) \in \mathbb{C}^*$ 作用。若自同构 g 在 ω_X 上作用平凡，则称其为辛自同构；否则称为非辛自同构。因此，给定一个作用在 X 上的有限群 G，我们可以考虑以下正合列

$$1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha} \mu_m \longrightarrow 1$$

其中，群 G_0 是 α的核，即在 X上辛地作用的自同构所构成的群。

给定一个 IHS 流形 X，其最重要的性质之一是，二阶上同调群 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 是一个格。对于 K3 曲面而言，格 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 是一个幺模格。在其开创性论文 [Nik79a] 中，Nikulin 利用这一事实，通过群在 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 上诱导的作用，研究了作用于 K3 曲面上的群。特别地，他分类了忠实且辛地作用于 K3 曲面上的有限阿贝尔群。后来，Mukai 沿袭 Nikulin 的工作，在 [Muk88] 中研究了忠实且辛地作用于 K3 曲面上的有限群 G，证明 $|G| \leq 960$ 和 G 同构于马蒂厄群 M_{23} 的一个子群。此外，如果 $|G| = 960$，则 G 同构于马蒂厄群 M_{20}。Kond¯o 在 [Kon99] 中证明，作用于 K3 曲面上的有限群的阶被 3840 所界定，并且仅当 X 是 Kummer 曲面 Km($E_i \times E_i$) 时才能达到该上界，其中 E_i 是椭圆曲线 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ 的通常记号。Bonnafé 和 Sarti 在 [BS21] 中研究了具有极大辛群 $G_0 = M_{20}$ 且同时允许

2010 数学主题分类。 主要分类：53C26；次要分类：14J50、14C05。关键词和短语。 超凯勒流形、自同构群、辛作用。

一个非辛自同构的 K3 曲面，并发现共有三个这样的 K3 曲面。Brandhorst 和 Hashimoto 独立地在 [BH21] 中分类了所有忠实作用于 K3 曲面且具有极大辛部分的有限群。

在维数大于二的情形下，格 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 不是幺模的，因此需要调整这些思路。Beauville 在 [Bea83a] 中推广了 Nikulin 的若干结果，而 Mongardi 则在其博士论文 [Mon13b] 中补充了新的结果。特别是，这些工作为 $\mathrm{K3}^{[n]}$ 型情形下辛群的分类提供了途径。随后，Höhn 和 Mason 在 [HM19] 中应用了这些结果，对所有作用于 $\mathrm{K3}^{[2]}$ 型不可约全纯辛流形上的辛群进行了分类。他们发现这类极大辛群共有 15 个，其中阶最大的群是 $\mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$。

本文将 Bonnafé 和 Sarti 在 [BS21] 中的结果推广到 $\mathrm{K3}^{[2]}$ 型不可约全纯辛流形的情形。我们研究忠实作用于 $\mathrm{K3}^{[2]}$ 型不可约全纯辛流形上的可能群 G，且其辛部分 G_0 为群 $\mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$。换言之，我们考察带有 $\mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$ 辛作用、且同时允许非辛自同构的 $\mathrm{K3}^{[2]}$ 型不可约全纯辛流形。我们证明以下定理。

定理 1。 设 X 为 *$K3^{[2]}$ 型 IHS 流形*，且允许 $G_0 = \mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$ 的辛作用，并且群 G_0 可以通过一个阶为 m的非辛自同构扩张为群 G。则 $m \in \{2, 3, 6\}$、超越格 T_X 和极化 L 如命题 *3.13* 和命题 *3.15* 所述。

在命题 3.13、3.14、3.15 和 3.16 以及表 2 中，我们展示了这些 IHS 流形的更多细节及其特征描述。

特别地，作为 Kond¯o 在 [Kon99] we 的工作的类似结果，我们能够证明存在一个 $\mathrm{K3}^{[2]}$ 型 IHS 流形，其自同构群最大。

定理 2。 设 X 是一个 *$K3^{[2]}$ 型的 IHS 流形*，其具有一个 G 的作用，使得 t

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6 \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha} \mu_6 \longrightarrow 1\,, \tag{1}$$

这意味着 G 具有可能的最大阶 174960。然后，我们在命题 *3.16* 中通过给出超越格 T_X、极化 L 及其整除性 $\mathrm{div}(L)$ 来刻画 X。此外，费马三次四维簇的直线法诺簇 $F(Y)$

$$Y = \{(x_0 : \cdots : x_5) : x_0^3 + \cdots + x_5^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^5$$

是一个允许该 G作用的 *$K3^{[2]}$* 型不可约全纯辛流形实例。

我们推测，这个 IHS 是自同构群最大的唯一实例，见第 3.2 小节。Wawak [Waw22], 在一篇论文中也独立证明了部分这些结果，他计算了所有忠实作用于具有极大辛部分的 $\mathrm{K3}^{[2]}$ 型 IHS 流形的有限群。

本文结构如下：第 1 节回顾一些预备知识，并确定有关格和 IHS 流形的记号；第 2 节研究自同构群在 IHS 流形上的作用，并介绍三次四维簇上的直线法诺簇实例。第 3 节研究作用于 $\mathrm{K3}^{[2]}$ 型 IHS 流形、且辛部分为 $\mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$ 的群，并证明主要定理 1 和 2。

致谢

我们非常感谢 Alessandra Sarti 提出这个问题，并与我们进行了有益的交流。我们也感谢 Chiara Camere 与我们分享她的见解。本研究始于

P.Q.M. 访问普瓦捷大学期间；作者获得了 ECOS-ANID C19E06 科学合作计划和 Math AmSud-ANID 21 Math 02 的部分资助。P.C. 和 R.D. 获得了 Fondecyt 研究启动项目 N.11190428 的部分资助，P.C. 还获得了 Fondecyt 常规项目 N.1200608 的部分资助。P.Q.M. 获得了 ANID 国家博士奖学金 N.21191367 的资助。

1. 预备知识与记号

本节汇集关于格和 IHS 流形的一些背景知识及已知结果。关于格的标准参考文献是 [Nik79b]，关于 IHS 流形的标准参考文献是 [Bea83b] 和 [Deb18]。

1.1. 格。 格 $\mathcal{L}$ 是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模，配备有一个非退化对称双线性形式

$$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathbb{Z}.$$

若无歧义，我们省略下标；对于 $v\in\mathcal{L}$，记作 $v^2 := (v,v)_{\mathcal{L}}$。格 $\mathcal{L}$ 的秩记为 rank($\mathcal{L}$)，它是实向量空间 $\mathcal{L}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 的维数；$\mathcal{L}$ 的行列式记为 det($\mathcal{L}$)，它是格拉姆矩阵 $\{(e_i,e_j)\}_i$ 的行列式，其中 $_j$ 是 $\mathcal{L}$ 的任意一组基。若 det($\mathcal{L}$) $\neq 0$，则称该格为非退化；若 $|\det(\mathcal{L})| = 1$，则称其为幺模。若对所有 $v\in\mathcal{L}$ 都有 $v^2\in 2\mathbb{Z}$，则该格为偶格，否则为奇格。非退化格的惯性指数是有序对 sign($\mathcal{L}$) := (s_+,s_-)，其中 s_+ 和 s_- 分别是 $\mathcal{L}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 的正特征值和负特征值的个数。若 sign($\mathcal{L}$) $=(r,0)$（分别为 $(0,r)$），且 $r=$rank($\mathcal{L}$)，则称该格为正定（分别为负定）；否则称其为不定格。若子格 $M\subset\mathcal{L}$ 的商群 $M/\mathcal{L}$ 无挠，则称该子格为本原子格。

Let $\mathcal{L}$ 是一个格，令 $\mathcal{L}^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{L},\mathbb{Z})$ 为 $\mathcal{L}$ 的对偶空间。它也可以描述为 s

$$\mathcal{L}^\vee := \{v\in\mathcal{L}\otimes\mathbb{Q} : (v,w)\in\mathbb{Z}\ \forall w\in\mathcal{L}\}.$$

由于 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}^\vee$ 的相同秩子格，判别群 $A_{\mathcal{L}} := \mathcal{L}^\vee/\mathcal{L}$ 是一个阶为 $|\det(\mathcal{L})|$ 的有限阿贝尔群。我们用 π : $\mathcal{L}^\vee\to A_{\mathcal{L}}$ 表示商映射。若 $\mathcal{L}$ 为偶格，则 $\mathcal{L}$ 上的双线性型诱导出一个二次型 $q_{\mathcal{L}}$: $A_{\mathcal{L}}\to\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$。若子群 H 属于 $A_{\mathcal{L}}$，则称其为各向同性的，如果 $q_{\mathcal{L}}|_H = 0$。给定向量 $v\in\mathcal{L}$，v 的整除性 定义为 div($v,\mathcal{L}$) := gcd{(v,w) : $w\in\mathcal{L}$}。

我们用 U 表示唯一的秩为二、惯性指数为 (1, 1) 的偶幺模格，用 E_8 表示与同名 Dynkin 图对应的偶正定格。给定一个格 $\mathcal{L}$、两个整数 $r,s\in\mathbb{Z}$ 以及 q 上由双线性型对应的二次型，则$\langle r\rangle$ 表示生成元 $l\in\mathcal{L}$ 上取值为 $q(l)=r$ 的秩一格。此外，$\mathcal{L}(s)$ 表示具有形式 $(\cdot,\cdot)^{\mathcal{L}(s)} = {}^s(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}$ 的格。

由于稍后会用到，我们回顾一下，Leech 格 $\mathcal{L}_{24}$ 是唯一一个（在等距变换意义下）秩为 24 的格，它是正定、偶、幺模的，并且不含根，其中根是平方为 2 的向量。

保持双线性型的格同构称为等距变换。我们分别用$\mathcal{O}(\mathcal{L})$和 $\mathcal{O}(A_{\mathcal{L}})$表示格 $\mathcal{L}$ 的等距变换群及其判别式群 $A_{\mathcal{L}}$。存在一个自然同态 $\mathcal{O}(\mathcal{L})\to\mathcal{O}(A_{\mathcal{L}})$。

设 T 是一个固定的偶格。若存在嵌入$T\hookrightarrow M$，使得 M/T 是一个有限阿贝尔群，则偶格 M 是 T 的超格。

引理 1.1 ([Nik79b, 命题 1.4。1])。设 T 为偶格。有限指数偶超格 $T\subset M$ 与各向同性子群 $H\subset A_T$之间存在自然的一一对应关系。

证明。 首先，存在一条自然的嵌入链：

$$T \hookrightarrow M \hookrightarrow M^\vee \hookrightarrow T^\vee$$

使得我们可以将 M 与由 A_T 给出的各向同性子群关联起来。

$$H := M/T \subset M^\vee/T \subset T^\vee/T = A_T.$$

反过来，我们可以将一个各向同性群 $H \subset A_T$ 与超格 $\pi^{-1}(H)$ 联系起来，其中 π 是从 $T^\vee$ 到 A_T 的商映射。□

以下结果是 [Nik79b 第 4] 小节的一个应用。

引理 1.2. 设 M 是 T的一个超格。那么，元素 $\varphi \in \mathcal{O}(T)$ 可扩展到 M，当且仅当 $\bar{\varphi}(H) = H$，其中 H 是 A_T 中与 M 对应的各向同性子群，而 $\bar{\varphi} \in \mathcal{O}(A_T)$是 $\varphi \in \mathcal{O}(T)$ 在投影 π下的像。

在 $T \subset M$ 是本原子格的情况下，我们可以考虑其正交格 $S = T^{\perp_M}$。那么， M 是 $S \oplus T$ 的超格。我们记.....为

$$H_M := M/(S \oplus T) \subset A_{S\oplus T} \simeq A_S \oplus A_T$$

M对应的 $A_S \oplus A_T$的各向同性子群。我们将 p_T：$A_{T\oplus S} \to A_T$和p_S：$A_{T\oplus S} \to A_S$记为投影，并定义 $M_T = p_T(H_M)$和 $M_S = p_S(H_M)$。由于 T在 M中是本原的，投影在 H_M 上的限制都是同构。我们定义映射γ：$p_S \circ (p_T^{-1})|_{M_T}$：$M_T \to M_S$。映射 γ 称为粘合态射，它是一个反等距变换，即对于每个 $x \in M_T$，都有 $q_T(x) = -q_S(\gamma(x))$。

引理 1.3 ([Nik79b，推论 1.5。2])**.** 设 M 是一个偶格，含有本原子格 $T \subset M$和正交格 S。对于每个等距变换 $\varphi \in \mathcal{O}(T)$，存在一个等距变换 $\phi \in \mathcal{O}(M)$，使得当且仅当存在一个等距变换 (S)，使得 $\psi \circ \gamma = \gamma \circ \bar{\varphi}$。

定义1.4. 设 $\mathcal{L}$ 是一个格，且 $G \subset \mathcal{O}(\mathcal{L})$。我们定义

$$S^G(\mathcal{L}) := \{x \in \mathcal{L} : g(x) = x \ \forall g \in G\},$$

$$S_G(\mathcal{L}) := S^G(\mathcal{L})^{\perp_{\mathcal{L}}},$$

不变格和余不变格。

注1.5. 不变格 $S^G(\mathcal{L})$ 和余不变格 $S_G(\mathcal{L})$ 都是 $\mathcal{L}$的本原子格。

以下这个有用的结果广为人知：

引理1.6. 设 $\mathcal{L}$ 是一个格，且 $G \subset \mathcal{O}(\mathcal{L})$。则有以下结论：
(1) $S^G(\mathcal{L})$ 对所有 $v \in \mathcal{L}$都包含 $\sum_{g\in G} g(v)$。(2) 对所有 和，$(\mathcal{L})$ 都包含 $v - g(v)$。(3) $(S^G(\mathcal{L}) \oplus S_G(\mathcal{L}))$ 是 $|G|$- 挠的。

证明。 (1) 的证明显然。对于 (2)，令 $l \in S^G(\mathcal{L})$，则对于 $v \in \mathcal{L}$ 和 $g \in G$，我们有：

$$(l, v) = (g(l), g(v)) = (l, g(v)) \implies (l, v - g(v)) = 0.$$

因此， $v - g(v) \in S^G(\mathcal{L})^\perp = S_G(\mathcal{L})$。

对于 (3)，令 $l \in \mathcal{L}$。则

$$|G|l = \sum_{g\in G} g(l) + \sum_{g\in G} (l - g(l))$$

且第一项属于 $S^G(\mathcal{L})$，第二项属于 $S_G(\mathcal{L})$。 □

1.2. **不可约全纯辛（IHS）流形**。复紧凯勒光滑流形 X 称为不可约全纯辛（IHS）流形，如果 X 是单连通的，且 $H^0(X, \Omega_X^2) = \mathbb{C}\omega_X$，其中 ω_X是定义在 X上的处处非退化全纯二形式。二维的 IHS 流形是 K3曲面，而维数大于二时，目前已知有 4 个变形族（见 [Deb18]）：这些 IHS 流形分别与 K3曲面上 n 个点的希尔伯特概形（K3$^{[n]}$ 型）、广义库默尔曲面，或维数为 6 或 10 的 O'Grady例子变形等价。

本文研究 K3$^{[2]}$-型 IHS 流形，即与 K3 曲面上 2 个点的希尔伯特概形变形等价的流形。对于任意 n，其构造如下：设 S 是一个 K3 曲面；希尔伯特-道迪空间 $S^{[n]}$ 参数化曲面 S 中长度为 n 的零维子概形 $(Z, \mathcal{O}_Z)$（即 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_Z) = n$）。根据 [Bea83b]，它是一个维数为 $2n$的超凯勒流形。

设 $S^{(n)} := S^n/\mathcal{S}_n$，其中 $\mathcal{S}_n$ 是由 n 个字母组成的对称群。自然定义的希尔伯特–乔态射为

$$\begin{aligned} s : S^{[n]} &\longrightarrow S^{(n)} \\ Z &\longmapsto \sum_{p \in S} l(\mathcal{O}_{Z,p})p, \end{aligned}$$

是 $S^{(n)}$的解奇化，其中 $l(\mathcal{O}_{Z,p})$是$\mathcal{O}_{Z,p}$的长度。Fujiki 在 [Fuj83] 中研究了 $n = 2$ 的情形，其几何描述尤其便于处理。在此情形下，$S^{[2]} \to S^{(2)}$ 是沿对角线对称平方 $S^{(2)} = (S \times S)/\mathcal{S}_2$ 的爆破。

若 X 是 IHS 流形，则其二阶上同调群 $H^2(X, \mathbb{Z})$ 配备 Beauville-Bogomolov-Fujiki（BBF）形式后具有格结构，该格是偶、非退化的，惯性指数为 $(3, b_2 - 3)$。对于 K3$^{[n]}$-型的 X（其中 $n \geq 2$），$H^2(X, \mathbb{Z})$ 的秩为 23，且与以下格等距变换

$$\Lambda_n := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \langle -2(n-1) \rangle \tag{2}$$

X 的 Néron-Severi群定义为

$$NS(X) := H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} \cap H^2(X, \mathbb{Z}).$$

将 BBF 形式限制在 $H^2(X, \mathbb{Z})$ 上，即可将其视为一个格。该格是偶、非退化的；若 X 是射影的，则其惯性指数为 $(1, \rho(X) - 1)$，其中 $\rho(X) :=$ 秩 $NS(X)$ 称为 X 的皮卡德数 。其正交格 $T_X := NS(X)^{\perp_{H^2(X,\mathbb{Z})}}$ 称为 X的超越格 。

X 上的标记 是格的一个等距变换 $\eta : H^2(X, \mathbb{Z}) \to \Lambda$ 。带标记不可约全纯辛流形 是一个对 (X, η)，其中 X 是一个 IHS 流形，并配有其上的等距变换 $\eta : H^2(X, \mathbb{Z}) \to \Lambda$。若存在同构 $f : X_1 \to X_2$ 使得 $\eta_2 = \eta_1 \circ f^*$，则两个带标记不可约全纯辛流形 (X_1, η_1) 和 (X_2, η_2) 同构。存在一个粗模空间 $\mathcal{M}_\Lambda$，用于参数化带标记不可约全纯辛流形的同构类。我们将周期域 称为集合

$$\Omega_\Lambda := \{[x] \in \mathbb{P}(\Lambda \otimes \mathbb{C}) : x^2 = 0,\ (x, \bar{x}) > 0\}$$

标记对（X, η）的周期 是点 $\eta(H^{2,0}(X)) \in \mathbb{P}(\Lambda \otimes \mathbb{C})$，并且我们可以验证它位于周期域上。

下文将用到关于 IHS 流形的以下两个重要结果。

定理 1.7（局部 Torelli 定理）。 周期映射

$$\mathcal{P} : \mathcal{M}_\Lambda \longrightarrow \Omega_\Lambda, \quad (X, \eta) \longmapsto \eta(H^{2,0}(X))$$

是一个局部同构。

Let $\mathcal{M}_\Lambda^0$ 是 $\mathcal{M}_\Lambda$ 的一个固定连通分支。我们考虑 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{M}_\Lambda^0$ 上的限制 :

$$P_0 := P|_{\mathcal{M}_\Lambda^0} \to \Omega_\Lambda$$

定理 1.8 (全局托雷利定理)。 映射 P_0 是满射。此外，对于每个 $x \in \Omega_\Lambda$，纤维 $P_0^{-1}(x)$ 由两两双有理的流形组成。

本文其余部分的一个重要例子是三次四维簇的直线法诺簇，其定义如下：设 $Y \subset \mathbb{P}^5$ 是一个光滑三次四维簇。 Y 上的直线法诺簇定义为

$$F(Y) := \{[\ell] \in \mathbb{G}\mathrm{r}(1,5) \ : \ \ell \subset Y\}.$$

三次四维簇上的直线法诺簇最早由 Beauville 和 Donagi 在 [BD85], 中研究，作者证明它们是 K $3^{[2]}$-型的 IHS 流形。此外， $F(Y)$ 自带极化 h，它是 $F(Y)$ 上普吕克极化在 $\mathbb{G}\mathrm{r}(1, 5)$ 上的限制。进一步地，我们有 $h^2 = 6$ ，且 $\mathrm{div}(h) = 2$。

2. 作用于不可约全纯辛流形上的群

设 $g \in \mathrm{Aut}(X)$ 是一个有限阶自同构。如果 $g^*(\omega_X) = \omega_X$，则称 g为辛。否则，称 g 为非辛 , 并且 g^* 在 ω_X 上的作用是乘以标量 $\alpha(g) \in \mathbb{C}^*$。对于有限群 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$，我们有以下正合列:

$$1 \longrightarrow G_0 := \ker \alpha \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha} \mu_m \longrightarrow 1 \ . \tag{3}$$

群 G_0 是 G 的辛部分，即那些在 ω_X 上作用平凡的自同构，我们称 μ_m 为非辛部分。由于 G 的自同构具有有限阶，因此群 μ_m 是循环群。

引理 2.1 ([Bea83a]). 设 X 是一个不可约全纯辛流形，且 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 是一个有限群。那么 :
(1) $g \in G$ 在 T_X 上平凡作用，当且仅当 $g \in G_0$。*(2)* μ_m 在 $T_X \otimes \mathbb{Q}$ 上的表示分解为具有极大秩的循环群 μ_m 的不可约表示的直和。

该引理意味着，对于 K$3^{[n]}$ 型的 IHS 流形 X ，我们有关于 m 的一个上界:

$$\mathcal{T}(m) \leq 23 - \rho(X), \tag{4}$$

其中 $\mathcal{T}$ 是欧拉函数。

设 X 是一个 K$3^{[2]}$ 型的 IHS 流形，且设 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 是作用于 X 上的有限群。设 (η, Λ) 是 X 的一个标记。根据 [Deb18] ，存在一个单射

$$\eta : \mathrm{Aut}(X) \to \mathcal{O}(\Lambda).$$

可以将 G 与其在 $\mathcal{O}(\Lambda)$ 上的像等同，并将由 G 的作用得到的不变格和余不变格分别记为 $S^G(X) := S^G(\Lambda)$ 和 $S_G(X) := S_G(\Lambda)$。

根据 Mongardi [Mon13a], , 当作用由 G 的辛部分 G_0 给出时，余不变格具有如下刻画。

引理 2.2. [Mon13a，引理 2。10] 设 X 是一个 $K3^{[n]}$ 型的 *IHS* 流形，且设 G_0 是作用于 X 上的有限群 G 的辛部分。那么

- S_{G_0}（X）是非退化且负定的。
- $S_{G_0}(X)$不包含平方为 *-2* 的元素。

- $T(X) \subset S^{G_0}(X)$ 和 $S_{G_0}(X) \subset NS(X)$。
- G_0 在 $A_{S_{G_0}(X)}$ 上作用平凡。

随后，利用定理 1.8 中周期映射的满射性，Mongardi 在 [Mon13a] 中证明了以下定理；这里我们陈述 K3$^{[2]}$-型的情形。设 $\mathcal{L}$ 是一个与 (2) 中的 $\Lambda_2 = U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle$ 同构的格。

定理 2.3 （[Mon13a，定理 7.2。2]）。设 $G \subset \mathcal{O}(\mathcal{L})$ 是一个有限群。那么，对于某个 $K3^{[2]}$-型的带标记不可约全纯辛流形（X，η），G 由一群辛自同构诱导，当且仅当满足以下条件：

- $S_G(\mathcal{L})$ 是负定的
- $S_G(\mathcal{L})$ 不包含范数为 $v^2 = -2$ 或范数为 $v^2 = -10$ 的元素，也不包含 $v/2 \in \mathcal{L}^\vee$。

3. 具有 $\mathbb{Z}_3^4:\mathcal{A}_6$ 辛作用的 K3$^{[2]}$ 型流形

在最近的一项工作中，[HM19], Höhn 和 Mason 对所有可作用于 K3$^{[2]}$-型 IHS 流形的辛群进行了分类。

定理 3.1 ([HM19])。设 X 是 $K3^{[2]}$-型的不可约全纯辛流形，且令 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 为一个有限辛群。那么 G 同构于以下其中之一：

(a) M_{23} 的一个子群，在其对 *24* 个元素的自然作用下至少有四个轨道。*(b) Conway* 群 Co_0 的两个子群之一的一个子群，即 $(\mathbb{Z}_3^{1+4}:\mathbb{Z}_2)\times\mathbb{Z}_2^2$ 和 $\mathbb{Z}_3^4:\mathcal{A}_6$，该 *Conway* 群与 $\mathcal{L}_{24}$ 中的一个 $\mathcal{S}$-格相关联。

其中，$\mathcal{S}$-格是 *Leech* 格 $M \subset \mathcal{L}_{24}$ 的一个子格，其中所有元素模 $2\mathcal{L}_{24}$ 都与范数为 *0*、*-4* 或 *-6* 的 M 中的某个元素同余。

对于每种情形，[HM19] 中的作者都计算了可能的不变格和余不变格。特别地，类型为 (a) 的子群有 13 个同构类，类型为 (b) 的子群有 2 个同构类；它们都是极大的，并且在每个极大情形下，$\mathrm{rk}\, S_G(X) = 20$。

设 G 是一个群，其辛部分 G_0 是极大的，且 G/G_0 非平凡，即在正合列 (3) 中有 $m > 1$。下面的引理确定了 (3) 中 m允许取哪些值。

引理 3.2. 在前述设定下，$m \in \{2,3,4,6\}$。

证明。由引理 2.2 可知，$S_{G_0}(X) \subset NS(X)$；又由于 $m \neq 1$，因此 $NS(X)$ 含有一个丰沛类。此外，$S_{G_0}(X)$ 是负定的，因此

$$\mathrm{rk}\, NS(X) \geq \mathrm{rk}\, S_{G_0}(X) + 1.$$

由于极大辛群满足 $\mathrm{rk}\, S_{G_0}(X) = 20$ by [HM19],，因此 $\rho(X) \geq 21$；又由 (4) 可得 $\mathcal{T}(m) \leq 2$。因此，在正合列 (3) 中，可能的 m 为 $m = 2,3,4,6$。□

在 [HM19] 列表中，阶最大的 G_0 群是 $= \mathbb{Z}_3^4:\mathcal{A}_6$，其具有 $|G_0| = 29160$。因此，设 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 为一个群，其辛部分 G_0 为极大的。由于根据引理 3.2，我们知道正合列 (3) 中较大的 m 是 6，因此 G 的阶有界于

$$|G| \leq 29160 \times 6 = 174960. \tag{5}$$

事实上，我们将证明存在这样的群 G，使得（5）取等号。

注 3.3. 我们可以观察到，如果群 G_0 不是极大的，那么 m 可以大于 *6*，但根据 [HM19], 中的列表，G 的阶不能超过(5)中的界。

从现在起，令 $G_0 = \mathbb{Z}_3^4 :\ \mathcal{A}_6$，其中 $|G_0| = 29160$。根据 [HM19], ，不变格 $S^{G_0}(X)$ 与之等距。

$$S^{G_0}(X) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

我们希望研究 G G_0 的可能扩张，即作用在一个 IHS 上的群，并且其辛部分为群 $G_0 = \mathbb{Z}_3^4 :\ \mathcal{A}_6$。

如果 $X = F(Y)$ 是三次四维簇 Y 的直线法诺簇，则 Y 上的一个自同构自然诱导出 $X = F(Y)$ 上的一个自同构。此外，有如下结论（参见 [Fu16，引理 1.2，推论 1.3]）。

引理 3.4。 ψ 上的一个自同构 $F(Y)$ </style}当且仅当 $(h) = h$ 时，由 Y 的一个自同构诱导，其中 h 是 $F(Y)$ 的极化。自然态射

$$\mathrm{Aut}(Y) \to \mathrm{Aut}(F(Y))$$

是单射的，其像记为 $\mathrm{Aut}_h(F(Y))$，由 $F(Y)$ 的自同构组成，并且这些自同构固定极化 h。

特别地，令 Y 为费马三次四维簇：

$$Y = \{(x_0 : \cdots : x_5) \in \mathbb{P}^5 : x_0^3 + \cdots + x_5^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^5.$$

在 [LZ22, 定理 1.8] 中证明了，Y 是唯一一个具有最大可能自同构群 $\mathrm{Aut}(X) = \mathbb{Z}_3^5 :\ \mathcal{S}_6$ 的三次四维簇。利用引理 3.4，我们可以考虑直线法诺簇 $F(Y)$，并证明 $F(Y)$ 具有 $\mathbb{Z}_3^5 :\ \mathcal{S}_6$ 的作用。我们注意到，$\mathbb{Z}_3^5 : \mathcal{S}_6$ 的阶为 174960，因此该群适合如下正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6 \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha} \mu_6 \longrightarrow 1\ . \tag{6}$$

Mongardi 在 [Mon13b, 例 7.4.2] 中证明了

$$T_{F(Y)} \simeq \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ and } S^{G_0}(F(Y)) \simeq \langle 6 \rangle \oplus \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

注 3.5. 令 Y 为一个三次四维簇，并令 $G = \mathbb{Z}_3^5 :\ \mathcal{S}_6$ 作用于 Y 的直线法诺簇 $F(Y)$，且保持极化 h。由于态射

$$\mathrm{Aut}(Y) \to \mathrm{Aut}_h(F(Y))$$

是一个同构，我们可以考虑 $G \subset$ 自同构$_h(F(Y))$ 的原像，它作用于 Y。由于费马三次四维簇是唯一具有 G 作用的三次四维簇，因此 Y 必定是费马三次四维簇，进而 $F(Y)$ 就是费马三次四维簇的直线法诺簇。

3.1. 的扩张：$\mathcal{A}_6$ 由一个非辛自同构给出。 设 X 是一个 K3[2]型 IHS 流形，并设 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$，使得 $G_0 = \mathbb{Z}_3^4 :\ \mathcal{A}_6$，且 X 具有一个阶为 m 的非辛自同构。我们有如下正合列

$$1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G \longrightarrow \mu_m \longrightarrow 1\ . \tag{7}$$

其中 $G/G_0 = \mu_m$ 与 $m \in \{2, 3, 4, 6\}$。正如我们所观察到的，$\rho(X) = 21$，$\mathrm{rk}\, T_X = 2$ 以及 $T_X \subset S^{G_0}(X)$。令 $\{e, f, h\}$ 为满足下列条件的基

$$S^{G_0}(X) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

根据 [HM19], , 我们知道 $S^{G_0}(X)$ 的等距群的阶为 24，并且有以下结论：**引理 3.6.** 等距群 $\mathcal{O}(S^{G_0}(X))$ 的 $S^{G_0}(X)$ 不含任何四阶元素。证明。 记 ρ_1、 ρ_2 和 ρ_3 为 $S^{G_0}(X)$ 的等距变换，它们由下列矩阵定义：

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

通过 Sage 的直接计算表明，等距群 $\mathcal{O}(S^{G_0}(X))$ 由 $-Id$、 ρ_1、ρ_2 和 ρ_3 张成，并且不包含任何阶为 4 的元素。□

这表明，在前述设定中， X 不具有阶为 4 的非辛自同构，因此式 (3) 中 m 的取值不能为 4。

命题 3.7。 设 X 是 $K3^{[2]}$ 型 *IHS* 流形，且 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 满足 $G_0 = \mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$，并且 X 存在一个阶为 m 的非辛自同构。那么 $m \in \{2, 3, 6\}$。

证明。 根据引理 3.2 $m \in \{2, 3, 4, 6\}$。为了排除 $m = 4$ 这一情形，我们注意到群$G/G_0 \simeq \mu_m$ 忠实地作用于 $S^{G_0}(X)$，但根据引理 3.6， $\mathcal{O}(S^{G_0}(X))$ 不包含任何阶为 4 的元素。□

注记 3.8. 我们将研究 $m = 2$ 和 $m = 3$ 这两种情形，并证明同一个 *IHS* 流形 X同时允许这两种非辛自同构作用。由于 *2* 和 *3* 互素，这意味着 X 也允许一个 *6* 阶非辛自同构。

注 3.9. 设 $\{e, f, h\}$ 是 $S^{G_0}(X)$ 的标准基，且令 $L \in S^{G_0}(X)$。那么，若 $L = \lambda e + \mu f + \delta h$，其中 $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Z}$，则 L^2 具有如下形式：

$$L^2 = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} = 6\left(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + \delta^2\right).$$

因此 $L^2 \in 6\mathbb{Z}$。由于 $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 \geq 0$，从而 $L^2 > 0$，我们可以假设 $L^2 = 6n$，其中 n 是一个正整数。同理，(L, M) 对于 $L, M \in S^{G_0}(X)$，有 $\in 3\mathbb{Z}$。

从现在起，我们假设 $G = \langle i \rangle G_0$，其中 i 是一个正规化G_0 且满足 $i^m \in G_0$的非辛自同构，其中 $m \in \{2, 3\}$。群 $G/G_0 = \langle i \rangle$ 作用于 $S^{G_0}(X)$，固定一个满足 $L^2 = 6n$ 的极化 L，并在 T_X 上作为一个阶为 m 的等距变换发挥作用。我们注意到，极化 L 是本原的，并且 $T_X = L^\perp \cap S^{G_0}(X)$。此外， $L \oplus T_X$ 是$S^{G_0}(X)$的一个相同秩（且有限指数）的子格。

命题 3.10。 设 L 是 $S^G(X)$ 中的一个元素，且令 $L^2 = 6n$。那么， $L \oplus T_X = \langle 6n \rangle \oplus T_X$ 是 $S^{G_0}(X)$ 的一个指标为 m 的子格，但以下情形除外： $n = 1$, $L = \pm h$ 在标准基中，且

$$T_X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

使得 $S^{G_0}(X) = L \oplus T_X = \langle 6 \rangle \oplus \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$。

证明。设 L 是 $S^G(X)$ 中满足 $L^2 = 6n$ 的一个元素。我们要找出 n 取哪些值时，$L \oplus T_X$ 等于 $S^{G_0}(X)$，以及 n 取哪些值时，它是 $S^{G_0}(X)$ 的一个子格。根据注 3.9，$L = \langle 6n \rangle$ 对于某个 $n \geq 0$，并且

$$T_X = \begin{pmatrix} 6a & 3b \\ 3b & 6c \end{pmatrix},$$

当 $a = c$ 时，$-a < b \leq a \leq c$ 且 $b \geq 0$。特别地，$27b^2 \leq \mathrm{disc}(T_X) = 36ac - 9b^2$。因此，如果$S^{G_0}(X) = L \oplus T_X$，那么

$$162 = \mathrm{disc}(S^{G_0}(X)) = \mathrm{disc}(L)\mathrm{disc}(T_X) = 6n(36ac - 9b^2) = 54n(4ac - b^2).$$

这意味着 $3 = n(4ac - b^2)$，因此 n 的唯一可能取值为 1 或 3。$n = 3$ 的情形不满足条件，因为这将意味着 $4ac - b^2 = 1$，但不存在满足 $b^2 \equiv 3 \bmod 4$ 的 $b \in \mathbb{Z}$。如果 $n = 1$，那么 $\det(T_X) = 27$，唯一的可能性是 $a = b = c = 1$ 且 $L = \pm h$。我们得出结论：对于所有其他 n 和 T_X，格 $\langle 6n \rangle \oplus T_X$ 是 $S^{G_0}(X)$ 的子格。

为计算指标，我们遵循 [BS21，引理 2.9]。我们假设 $L \oplus T_X$ 不同于 $S^{G_0}(X)$。由于 L 在 $S^{G_0}(X)$中是本原的，投影

$$S^{G_0}(X)/(L \oplus T_X) \to A_L$$

是一个嵌入。这表明 $S^{G_0}(X)(L \oplus T_X)$ 是循环的，根据引理1.6，它是 m-挠的，其中 m 为素数。因此，$L \oplus T_X$ 在 $S^{G_0}(X)$ 中的指标为 m。□

借助以下结果，我们可以刻画超越格的矩阵形式，具体取决于其是否具有 3 阶等距变换。

引理 3.11 ([Jon50，定理51a])。设 T 为正定秩*2*偶格。当且仅当存在 $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 T 具有如下形式时，T具有三阶等距变换

$$T_X = \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & 2a \end{pmatrix},$$

3.1.1. 通过二阶非辛自同构进行扩张。我们首先对具有 K3[2]型的 IHS 流形的可能超越格进行分类，同时考虑一个极化，使其具有 G_0 的辛作用以及一个非辛对合。换言之，在正合列 (3) 中，群 G 由 G_0 和 μ_2张成。

命题 3.12. 假设 X 具有一个非辛对合，则使得 $\langle 6n \rangle \oplus T_X$ 能够嵌入 $S^{G_0}(X)$ 的n 的唯一取值为 $n = 1,3,4$。

证明。由于 $S^{G_0} = \langle 6 \rangle \oplus \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$，情形 $n = 1$ 总是成立。我们来考虑 $L^2 = 6n$ 和 $L \oplus T_X$ 是 $S^{G_0}(X)$中指数为 2 的子格的情形（根据命题 3.10）。于是，由[BHPVdV04，引理 I.2.1]可得：

$$4 = [S^{G_0}(X) : \langle 6n \rangle \oplus T_X]^2 = \frac{\det(\langle 6n \rangle \oplus T_X)}{\det(S^{G_0}(X))} = \frac{54n(4ac - b^2)}{162}.$$

这意味着 $12 = n(4ac - b^2)$，从而得到 $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$。注意，等式

$$\frac{12}{n} = 4ac - b^2 \tag{8}$$

对于 $n = 2$、6 和 12，不存在整数解。因此，$n \in \{1, 3, 4\}$。 □

由于超越格 T_X 具有以下形式

$$T_X = \begin{pmatrix} 6a & 3b \\ 3b & 6c \end{pmatrix},$$

由方程（8）可得

$$\det(T_X) = 9(4ac - b^2) = 9\frac{12}{n}. \tag{9}$$

命题 3.13。设 X 是 $K3^{[2]}$ 型的 *IHS* 流形。假设 $G_0 = \mathbb{Z}_3^4 : \mathcal{A}_6$ 辛地且忠实地作用于 X，并假设 X 还具有一个阶为 $m = 2$ 的纯非辛自同构 σ 作用于其上，使 G_0 归一化，并且 $\sigma^2 \in G_0$。设 $G = \langle \sigma \rangle G_0$。则在极化的嵌入和等距变换意义下，我们有以下可能性：

(1) $L = h$, $L^2 = 6$, $\mathrm{div}(L) = 2$ *and* $T_X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) $L = e$, $L^2 = 6$, $\mathrm{div}(L) = 1$ *and* $T_X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$.

(3) $L = e - f$, $L^2 = 6$, $\mathrm{div}(L) = 1$ *and* $T_X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$.

(4) $L = e + f$, $L^2 = 18$ *and* $T_X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(5) $L = 2e - f$, $L^2 = 18$ *and* $T_X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

其中 $\{e, f, h\}$ 是不变格 $S^{G_0}(X)$ 的标准基。

证明。利用命题 3.12，我们研究 $n = 1$ 中 L 与 $L^2 = 6n$ 的可能嵌入，其中 3 和 4。对于每种情况，我们寻找满足 $L = \lambda e + \mu f + \delta h$ 的整数 λ、μ、δ。

$$L^2 = 6\left(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + \delta^2\right) = 6n \tag{10}$$

并且我们使用 L 来确定超越格。

L^2	值为 δ	可能的值（λ, μ）	嵌入（在等距变换意义下）
$L^2 = 6$	$\delta = \pm 1$	$\{(0, 0)\}$	$L \mapsto h$
	$\delta = 0$	$\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$	$L \mapsto e$
		$\{(1, -1), (-1, 1)\}$	$L \mapsto e - f$
$L^2 = 18$	$\delta = 0$	$\{(1, 1), (-1, -1)\}$	$L \mapsto e + f$
		$\{(2, -1), (-2, 1),$ $(1, -2), (-1, 2)\}$	$L \mapsto 2e - f$
$L^2 = 24$	$\delta = \pm 2$	$\{(0, 0)\}$	$L \mapsto 2h$
	$\delta = \pm 1$	$\{(1, 1), (-1, -1)\}$	$L \mapsto e + f + h$
		$\{(2, -1), (-2, 1),$ $(1, -2), (-1, 2)\}$	$L \mapsto 2e - f + h$
	$\delta = 0$	$\{\pm 2, \pm 2\}$	$L \mapsto 2e$
		$\{(2, -2), (-2, 2)\}$	$L \mapsto 2(e - f)$

表 1. $m = 2$ 的计算

• **情形** $L^2 = 6$. δ的可能取值为 $\delta \in \{-1, 0, 1\}$。根据引理 3.6 的证明中给出的 $\mathcal{O}(S^{G_0}(X))$ 的描述可知，在等距变换意义下共有 3 个可能的轨道，见表 1。我们分别研究这三种情形。

第一种情况是 $(\lambda, \mu, \delta) = (0, 0, 1)$，即嵌入 $L = h$。这里，由命题 3.10 可得等式 $S^{G_0} = \langle 6 \rangle \oplus T_X$，因此我们可以将 T_X 在基 $\{e, f\}$ 下写为

$$T_X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

对于另外两种情况，由命题 3.10 可知，$L \oplus T_X$ 是一个指数为 2 的子格；根据等式 (9)，我们预期 $\det(T_X) = 108$。令 (λ, μ, δ) 为 $(1, 0, 0)$，这对应于 $L = e$。我们可以将超越格计算为 $T_X = L^\perp \cap S^{G_0}(X)$，得到 T_X 的生成元为 $\{h, e - 2f\}$，交叉矩阵等于

$$T_X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

最后一种情况是 $(\lambda, \mu, \delta) = (1, -1, 0)$，即 $L = e - f$。那么超越格的生成元为 $\{h, e + f\}$，交叉矩阵为

$$T_X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

• **情形** $L^2 = 18$。首先注意到，$\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2$ 永远不等于 2：如果 x 和 y 都是奇数整数，或者一个是奇数而另一个是偶数，那么 $x^2 + xy + y^2$ 将是奇数，因此不等于 2。假设 x 和 y 都是偶数，并注意到它们都不等于 0。如果 x 和 y 具有相同的符号，那么 $xy > 0$，因此 $x^2 + xy + y^2 \geq 3$。剩下需要检验的是 x 和 y 符号相反的情况。由于该方程具有对称性，我们不妨假设

$$x = 2a \text{ and } y = -2b, \text{ with } a, b \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

然后 $x^2 + xy + y^2 = 4\left(a^2 + b^2 - ab\right)$，由于 $a^2 + b^2 - ab = (a - b)^2 + ab > 0$，因此不可能有 $x^2 + xy + y^2$ 等于 2。

因此，使 (10) 成立的 δ 唯一可能的取值是 $\delta = 0$。在 $\mathcal{O}(S^{G_0}(X))$ 中，(λ, μ, δ) 有两个轨道（见表 1）；两种情形下，$L \oplus T_X$ 都是 $S^{G_0}(X)$ 的指数为 2 的子格，且 $\det(T_X) = 36$。

令 L 为 $L = e + f$。于是我们可以计算超越格为 $T_X = L^\perp \cap S^{G_0}(X)$，得到生成元 $\{e - f, h\}$ 和交叉矩阵

$$T_X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

现在设 L 为 $L = 2e - f$。那么超越格的生成元为 $\{f, h\}$，交叉矩阵为

$$T_X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

• **情形** $L^2 = 24$。在最后一种情形中，如果（λ、μ、δ）满足（10），那么 $\delta \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$，我们可以计算出在等距变换意义下的可能轨道（见表 1）。在所有情形中，我们都预期 $L \oplus T_X$ 是 $S^{G_0}(X)$ 上指数 2 的子格，使得根据方程（9），$\det(T_X) = 27$。唯一的

本原情形为 $L=e+f+h$ 和 $L=2e-f+h$，且在这两种情形中都可以计算得出

$$T_X=\begin{pmatrix}6&0\\0&72\end{pmatrix}$$

其行列式不为 27。因此，不存在 $L^2=24$ 的可能情形。
每种情形下极化 L 的整除性均在引理 3.19 中计算。 □

由注 3.5 可知，在具有$G_0=\mathbb{Z}_3^4:\mathcal{A}_6$ 辛作用的三次四维簇的直线法诺簇中，唯一的一个是直线法诺簇 $F(Y)$，它由费马三次四维簇的直线构成

$$Y=\{(x_0:\cdots:x_5):x_0^3+\cdots+x_5^3=0\}\subset\mathbb{P}^5.$$

因此，这也是唯一具有 G_0 辛作用且存在具有 $L=h$ 的非辛对合的立方四维簇的 Fano 簇。因此有如下结论。

命题 3.14。设 $X=F(Y)$ 是一个三次四维簇的直线法诺簇，满足$G_0=\mathbb{Z}_3^4:\mathcal{A}_6$ 在 X 上忠实地且辛地作用，并且 X 存在一个非辛对合。那么 Y 就是费马三次四维簇。

3.1.2. 通过三阶非辛自同构进行扩张。现在我们对满足以下条件的 K3[2] 型不可约全纯辛流形 X 的可能超越格和极化进行分类：X 允许 G_0 的作用，同时还具有一个 3 阶非辛自同构。

命题 3.15。设 X 为 $K\mathcal{3}^{[2]}$ 型 *IHS* 流形，其上存在G_0的辛忠实作用。若 X 存在一个阶为3 的非辛自同构，则唯一的可能性是 $L=h$，其中$\mathrm{div}(L)=2$ 且

$$T_X=\begin{pmatrix}6&3\\3&6\end{pmatrix}.$$

此外，如果 $X=F(Y)$ 是三次四维簇的直线法诺簇，那么 Y是费马三次四维簇，$G_0=\mathbb{Z}_3^4:\mathcal{A}_6$ 忠实地且辛地作用于 X，并且 X 具有一个 *3* 阶非辛自同构。

证明。由 由注 3.9 和引理 3.11 可知，如果 T_X 具有一个 3 阶自同构，那么

$$T_X=\begin{pmatrix}6a&3a\\3a&6a\end{pmatrix},\quad a\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

令 $L=\lambda e+\mu f+\delta h$、$\lambda$、$\mu$、$\nu\in\mathbb{Z}$ 满足 $L^2=6n$。对于 $n=1$，$L^2=6$ 唯一的可能性是 $T_X=a\cdot\begin{pmatrix}6&3\\3&6\end{pmatrix}$ 为 $S^{G_0}(X)=\langle 6\rangle\oplus\begin{pmatrix}6&3\\3&6\end{pmatrix}$ 且 $L=\pm h$。

如果我们假设 $n>1$，那么根据命题 3.10，$L\oplus T_X$ 是 $S^{G_0}(X)$ 中指数为 3 的子格，并且我们有：

$$9=[S^{G_0}(X):\langle 6n\rangle\oplus T_X]^2=\frac{\det(\langle 6n\rangle\oplus T_X)}{\det(S^{G_0}(X))}=\frac{6n(27a^2)}{162}.$$

这意味着 $9=na^2$，因此 $n=9$ 和 $T_X=\begin{pmatrix}6&3\\3&6\end{pmatrix}$。

在此情形下令 $L^2=54$，即根据（10）

$$\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2+\delta^2=9.$$

我们根据 $\delta\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$ 的取值分别研究每种情形。

- 如果 $\delta = \pm 3$，那么 $\lambda = \mu = 0$，这意味着 $L = 3h$，而这不是本原情形。
- 若 $\delta = \pm 2$，则 $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 5$，它们没有整数解。
- 若 $\delta = \pm 1$，则 $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 8$，它们没有整数解。
- 若 $\delta = 0$，则 $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 9$，且 L 是以下情形之一：

$$\pm 3e,\ \pm 3f,\ \pm 3(e-f)$$

但在每种情形下，极化都不是本原的。

根据注 3.5，具有 $G_0 = \mathbb{Z}_3^4$ 辛作用的唯一三次四维簇的 Fano 簇：$\mathcal{A}_6$是费马三次四维簇的直线法诺簇 $Y \subset \mathbb{P}^5$。因此，这也是唯一一个具有 G_0 辛作用、且允许存在一个满足 $L = h$ 的 3 阶非辛自同构的三次四维簇的 Fano 簇。极化 L 的整除性在引理 3.19 中计算。□

正如我们在注记 3.8 中所观察到的，研究非辛对合与一个 3 阶非辛自同构的存在性，就足以确保一个 6 阶非辛自同构的存在。因此，作为命题 3.13、3.14 和 3.15 的推论，即关于 $m = 2$ 和 $m = 3$ 两种情形的结果，以下结论显而易见。

命题 3.16。设 X 是一个 $K\mathcal{Z}^{[2]}$型 *IHS* 流形，具有G_0的辛忠实作用。如果 X 存在一个阶为6 的非辛自同构，这意味着 X 具有最大可能有限群 G（其中 $|G| = 29160 \times 6 = 174960$）的作用，那么唯一的可能性是 $L = h$、$\mathrm{div}(L) = 2$ 且

$$T_X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

此外，费马三次四维簇的直线法诺簇 $F(Y)$

$$Y = \{(x_0 : \cdots : x_5) : x_0^3 + \cdots + x_5^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^5.$$

是一个例子，具有最大可能有限群的作用 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$.

3.2. **趋向唯一性**。我们猜想，费马三次四维簇的直线 Fano 簇是唯一一个允许群 G 以最大可能阶作用的 K3$^{[2]}$-型 IHS 流形，即 $|G| = 174960$。

设 X 是一个 K3$^{[2]}$-型 IHS 流形。根据 [Mon13b]，，存在一个 G_0 在 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 上的唯一作用；如果再要求它允许一个 6 阶非辛自同构，那么 $T_X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ 和 $NS(X) = \langle -2 \rangle \oplus \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \oplus U \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$。

IHS 流形 X 由丰沛类 L 极化，使得 $L^2 = 6$ 且 div(L) $= 2$。令$^2\mathcal{M}_{2n}^{(2)}$ 为参数化 K3$^{[2]}$型 IHS 流形的模空间，这些流形带有平方为$2n$ 且整除性为 2 的极化。 $^2\mathcal{M}_6^{(2)}$ 的一般元素是三次四维簇的直线法诺簇（见[Deb18，第 3.6]节）。因此，自然会提出这样的问题："模空间 $^2\mathcal{M}_6^{(2)}$ 中是否存在其他 *IHS* 流形，它不是三次四维簇的直线法诺簇，且允许最大可能群的作用？"。如果答案是肯定的，那么该 IHS 流形将是 $^2\mathcal{M}_6^{(2)}$ 中的一个特殊元素。

K3$^{[2]}$型的 M-极化 IHS 流形是一个三元组 (X, ν, j)，其中 X 是 K3$^{[2]}$型射影 IHS 流形，带有一个标记 ν：$H^2(X,\mathbb{Z}) \to \Lambda_2$，且 j：$NS(X) \hookrightarrow M$ 是格的本原嵌入，使得 $j^{-1}(M) \subset NS(X)$ 且 $\nu|_{NS(X)} = j$。

令 $N := M \cap \Lambda_2$ 并设

$$\Omega_M := \{x \in \mathbb{P}(N \otimes \mathbb{C}) : x^2 = 0, (x, \bar{x}) > 0\},$$

周期域 Ω_M，它由两个维数为 $21-\rho(X)$ 的不交分支组成。如 [BCS16，第 5.2]，节所示，可以构造一个 M-极化的 K3[2] 型不可约全纯辛流形的模空间 $\mathcal{K}_M$，其相应的周期域为 Ω_M，周期映射 $\mathcal{P}$ 为：$\mathcal{K}_M \to \Omega_M$。

令 X 为费马三次四维簇的直线法诺簇，并令 M 为 Λ_2的一个子格，且与 $NS(X)$ 等距。由于 $\mathcal{O}(M) \to \mathcal{O}(q_M)$ 是满射，我们可以考虑一个标记 ν：$H^2(X,\mathbb{Z}) \to \Lambda_2$，使得 $\nu^{-1}(M) \subset NS(X)$ 是本原嵌入。由于 $\rho(X) = 21$，Ω_M由两个周期组成，它们对应一个 IHS 流形，其 Néron-Severi群 $NS(X)$ 与 M等距。这两个点来自对 Λ_2 的正锥取向的选择（见 [Mar11，推论 9.10]）。

将 $NS(X)$ 嵌入 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 的每种可能方式都会给出一个不同的族，但存在唯一一个 $NS(X)$ 的嵌入，其正交格为所需的 T_X。根据定理 1.8，在这些点中的每一点上，$\mathcal{P}$ 的纤维都由不可分点组成，这些点对应于与 $F(Y)$ 双有理的 IHS 流形，见 [Mar11，定理 2.2]。因此，问题变为：“是否存在一个 X $K3^{[2]}$型 *IHS* 流形，与 $F(Y)$ 双有理，其中 Y是费马三次四维簇，并具有前述的 $NS(X)$ 和 T_X、极化 L，且允许最大可能群的作用？”我们目前正在研究这个开放问题。

3.3. **存在性**。本小节将给出构造，以证明第 3.1 节中发现的每种情形都存在。

定理3.17。命题 *3.13* 和命题 *3.15* 中的每种情形，都会以一对 (X,G)出现，其中 X 是 $K3^{[2]}$ 型 *IHS* 流形，且 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$。

证明。令 $\Lambda = \Lambda_2$ 为 $n = 2$对应的格 (2)，即

$$\Lambda = U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \langle -2\rangle$$

由 [HM19] 可知，存在一个从 $S^{G_0}(\Lambda)$ 到 Λ 的嵌入，使得 $S^{G_0}(\Lambda)^{\perp_\Lambda}$ 与 $S_{G_0}(\Lambda)$等距。我们可以在 $S^{G_0}(\Lambda)$ 中考虑格 $T(\Lambda)$ 和 $L(\Lambda)$，它们分别与 T_X 和 L 等距，如命题 3.13 或 3.15 所述。若 $T(\Lambda) \oplus L(\Lambda)$ 与 $S^{G_0}(\Lambda)$不等距，则它与一个指数 2 子格等距；但在两种情形下均有 $T^{\perp_\Lambda} \cong S_{G_0}(\Lambda)$，因此根据定理 2.3，存在一个带标记不可约全纯辛流形 (X,η)，其中 $G_0 \subset \mathrm{Aut}(X)$ 通过 η在 X 上辛地作用。我们可以选取标记，使得 $T_X \cong T(\Lambda)$ 且 $S_{G_0}(\Lambda) \cong S_{G_0}(X)$。此外，我们有 $S^{G_0}(X) \cong S^{G_0}(\Lambda)$，并且可以考虑 $L := \eta^{-1}(L(\Lambda)) \subset S^{G_0}(X)$。

现在，我们要为每个 X 构造相应的非辛自同构。命题 3.15 的情形与此类似，因此我们将重点讨论命题 3.13。若 $T := T_X \oplus L$ 与 $S^{G_0}(X)$ 不等距，则存在一个与 $S^{G_0}(X)$ 相关联的二阶各向同性子群 $H_{S^{G_0}(X)} \leq A_T$。由引理 2.1，对 T_X 的作用必须由单位根给出，并保持 ω_X 不变。因此，我们考虑 T 上的如下作用：

$$\varphi := -id_{2\times 2} \oplus id_{1\times 1} \curvearrowright T_X \oplus L$$

也就是说，在 L 上为恒等作用，在 T_X 上为 $-id$。计算出 $H_{S^{G_0}(X)}$ 在 A_T 中的像后，我们需要验证 $\bar{\varphi}(H_{S^{G_0}(X)}) = H_{S^{G_0}(X)}$，这样就可以利用引理 1.2 将此自同构延拓到 $S^{G_0}(X)$。我们仍将 φ 到 $S^{G_0}(X)$ 的延拓记为 φ。

注 3.18. 若 $S^{G_0}(X) = T_X \oplus L$，则直接定义 φ 即可。这对应命题 *3.13* 中的 *(1)*。

于是我们可以验证，L 在 $S^{G_0}(X)$上受 $\langle G_0,\varphi\rangle$ 作用时保持不变。

现在，我们希望借助 [Nik79b, 命题 1.5.1]，将自同构 φ 从 $S^{G_0}(X)$扩展到 $H^2(X,\mathbb{Z})$。要将 φ 从 $S^{G_0}(X)$扩展到 $H^2(X,\mathbb{Z})$，我们需要考虑一个粘合态射$\gamma\colon H_L(X)\to A_{S^{G_0}}(X)$，其中 H_L 是 $A_{S_{G_0}}(X) = \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_9$的一个 81 阶子群。特别地，我们有 $H_L = A_{S_{G_0}}(X)$。由于态射 $\mathcal{O}(S_{G_0}(X)) \to \mathcal{O}(A_{S_{G_0}}(X))$是满射（见[HM19, 第 7] 节和 [HM19, 表 9]），γ 的不同选择会产生从$S^{G_0}(X)$嵌入到 $H^2(X,\mathbb{Z})$中的同构嵌入，其正交格为 $S_{G_0}(X)$。

Ha构造粘合态射 γ 时，我们使用引理 1.3。为此，我们需要检查 γ 是否满足 ：

$$\gamma\circ\bar{\psi} = \bar{\varphi}\circ\gamma$$

如果 φ 可延拓，那么我们可以考虑 $G = \langle G_0、\ \varphi\rangle \subset \mathcal{O}\left(H^2\left(X,\ \mathbb{Z}\right)\right)$。由于态射

$$\nu : \mathrm{Aut}(X)\to\mathcal{O}(H^2(X,\mathbb{Z}))$$

是单射，我们可以考虑 G 以 G_0 辛地作用于 X，并根据构造和引理 2.1 通过 $G/G_0\simeq\langle\varphi\rangle$ 作用。

我们将此方法应用于命题 3.13 和命题 3.15 的每种情形，检查相应的自同构是否存在，从而证明每种情形都成立。

证明中的计算使用 MAGMA 完成，并采用了 [HM19, Waw22] 中的部分代码。现在我们给出 $L^2 = 6$ 与 $L = e - f$ 情形的具体计算细节。其他情形类似，我们在表 2 中给出计算它们所需的信息。

当 $L = e - f$、T_X具有生成元 $\{e+f, h\}$时。令 $T = T_X\oplus L$。我们有

$$S^{G_0}(X)/T = \langle f+T\rangle = \langle e+T\rangle$$

是一个二阶群，使得 $e+f\in T$。此外

$$A_T = \left\langle \frac{e+f}{18}+T,\ \frac{f}{3}+T,\ \frac{h}{6}+T\right\rangle.$$

于是，根据引理 1.1，在 A_T 中存在一个子群 $H_{S^{G_0}(X)}$，很容易看出其为

$$H_{S^{G_0}(X)} = \left\langle \frac{e+f}{2}+T\right\rangle.$$

考虑 T上的如下作用:

$$\varphi := -id_{2\times 2}\oplus id_{1\times 1}\curvearrowright T_X\oplus L$$

并注意到

$$\bar{\varphi}\left(\frac{e+f}{2}\right) = -\frac{e+f}{2}.$$

由于 $e+f\in T$，我们有 $\bar{\varphi}(H_{S^{G_0}(X)}) = H_{S^{G_0}(X)}$，因此根据引理 1.2，我们可以将 φ扩展为 $S^{G_0}(X)$。于是，φ 是 $S^{G_0}(X)$的等距变换，固定 $L = e - f$，其矩阵表示为

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

令 $\{\bar{g_1}、\ \bar{g_2}、\ \bar{g_3}\}$ 为 $A_{S_{G_0}(X)}$ 的生成元集合。对于 $S^{G_0}(X)$ 的对偶空间，我们取基

$$S^{G_0}(X)^\vee = \left\langle f_1, f_2, f_3\right\rangle$$

其中 $f_1 = \frac{1}{3}(2e - f - h)$ $f_2 = \frac{-2e}{3} + f$，$f_3 = \frac{1}{9}(2e - f) - \frac{h}{6}$，且它们在商投影下对应的像（记为 $\{f_1, f_2, f_3\}$）生成 $A_{S^{G_0}(X)}$。

为了将 φ 从 $S^{G_0}(X)$ 扩展到 $H^2(X,\mathbb{Z})$，我们将考虑粘合态射 $\gamma\colon A_{S_{G_0}(X)} \to A_{S^{G_0}(X)}$，它表示为 $A_{S_{G_0}(X)}$ 的生成元下的矩阵：

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

我们需要找到一个等距变换 $\psi \in \mathcal{O}(S_{G_0}(X))$，使得

$$\gamma \circ \bar{\psi} = \bar{\varphi} \circ \gamma$$

其中 $\bar{\psi}$ 是 $\mathcal{O}(A_{S_{G_0}(X)})$ 中对应的态射。换言之，我们可以将 $\bar{\psi}$ 计算为

$$\bar{\psi} = \gamma^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \gamma.$$

为此，我们可以直接计算 φ 通过 γ 对生成元像的作用，方法是利用它们在 $S^{G_0}(X)^\vee$ 上对应的原像。我们有

$$\begin{aligned} \varphi(f_1) &= \varphi\left(\frac{1}{3}(2e - f - h)\right) = \frac{1}{3}(e - 2f + h) \\ \varphi(f_2) &= \varphi\left(\frac{-2}{3}e + f\right) = -e + \frac{2}{3}f \\ \varphi(2f_3) &= \varphi\left(\frac{1}{9}(4e - 2f) - \frac{4}{3}h\right) = \frac{2}{9}(e - 2f) + \frac{4}{3}h. \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\bar{f}_1) &= 2\bar{f}_1 \\ \bar{\varphi}(\bar{f}_2) &= \bar{f}_2 + 12\bar{f}_3 \\ \bar{\varphi}(2\bar{f}_3) &= \bar{f}_2 + 4\bar{f}_3. \end{aligned}$$

那么，对于 $A_{S_{G_0}(X)}$ 的每个生成元，都有

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\bar{g}_1) &= (\gamma^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \gamma)(\bar{g}_1) = (\gamma^{-1} \circ \bar{\varphi})(\bar{f}_2) = \gamma^{-1}(\bar{f}_2 + 12\bar{f}_3) = \bar{g}_1 + 6\bar{g}_3. \\ \bar{\psi}(\bar{g}_2) &= (\gamma^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \gamma)(\bar{g}_2) = (\gamma^{-1} \circ \bar{\varphi})(\bar{f}_1) = \gamma^{-1}(2\bar{f}_1) = 2\bar{g}_2. \\ \bar{\psi}(\bar{g}_3) &= (\gamma^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \gamma)(\bar{g}_3) = (\gamma^{-1} \circ \bar{\varphi})(2\bar{f}_3) = \gamma^{-1}(\bar{f}_2 + 4\bar{f}_3) = \bar{g}_1 + 2\bar{g}_3. \end{aligned}$$

可概括为以下作用于 $A_{S_{G_0}(X)}$ 的矩阵：

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

然后，我们验证它属于 $\mathcal{O}(A_{S_{G_0}(X)})$。由于之前提到的态射 $\mathcal{O}(S_{G_0}(X)) \to \mathcal{O}(A_{S_{G_0}(X)})$ 是满射，因此存在 $\psi \in \mathcal{O}(S_{G_0}(X))$。于是，根据引理 1.3，我们可以将$\varphi$ 延拓为 $H^2(X,\mathbb{Z})$，使其在 $S_{G_0}(X)$ 上的作用为 ψ。相应的 IHS 流形的存在性已在前文中说明。

对于以下内容 其他情形下，我们在表 2 中给出相应的 $S^{G_0}(X)$ 等距变换和粘合态射 .

□

证明了存在性之后，我们只需计算极化的整除性，即可刻画每种情形。我们注意到，$L^2 = 6$ 是唯一一种 div(L) 可能不等于 1 的情形（参见 [Deb18]）。事实上，有如下结论：

引理 3.19. 设 $L^2 = 6$。若 $L = h$，则 $\mathrm{div}(L) = 2$；而若 $L = e - f$ 且 $L = e$，则$\mathrm{div}(L) = 1$。

证明。首先，我们注意到，L 的整除性取决于$L \oplus T_X$到 $H^2(X, \mathbb{Z})$的可能本原嵌入，因此也取决于 $S^{G_0}(X)$到 $H^2(X, \mathbb{Z})$的嵌入。

整除性可根据 [GOV20 中引理 2.1] 给出的刻画计算，并将其调整为适用于我们的情形：

$$\mathrm{div}(v, L) = \max\{d \in \mathbb{N} : \frac{v}{d} \in \gamma(A_{S_{G_0}(X)})^\perp\}.$$

因此，一旦知道粘合态射，我们就可以直接计算每种情形下的整除性。表 2 汇总了每种情形对应嵌入所需的信息。特别地，我们来计算当 $L = h$ 时的整除性。由于 $\frac{h}{2} \in S^{G_0}(X)$，我们只需检验 $\frac{h}{2} \in \gamma(A_{S_{G_0}(X)})^\perp$。我们有

$$\gamma(A_{S_{G_0}(X)}) = \langle f_1, f_2, f_1 + 2f_3 \rangle \simeq \langle f_1, f_2, 2f_3 \rangle$$

因此 $\frac{h}{2} \in \gamma(A_{S_{G_0}(X)})^\perp$。这意味着 $\mathrm{div}(L) = 2$。其他情况类似。 □

极化 L	生成元 T_X	等距变换 $\varphi \in \mathcal{O}(S^{G_0}(X))$	阶 等距变换	粘合态射 γ	等距变换 $\psi \in \mathcal{O}(A_{S_{G_0}(X)})$
$L = h$	$\{e, f\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,6\,2 \end{pmatrix}$
$L = e - f$	$\{h, e + f\}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 0\,2\,0\,6\,0\,2 \end{pmatrix}$
$L = e$	$\{h, e - 2f\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 2\,0\,0\,0\,0\,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 0\,2\,0\,0\,0\,8 \end{pmatrix}$
$L = e + f$	$\{e - f, h\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0\,2\,1 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\,0\,2 \\ 0\,2\,1\,3\,6\,4 \end{pmatrix}$
$L = 2e - f$	$\{f, h\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,6\,0\,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1\,0\,2 \\ 0\,2\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$
$L = h$	$\{e, f\}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 1\,1\,0 \\ 2\,1\,0\,0\,0\,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1\,0\,2 \\ 0\,1\,1\,6\,3\,7 \end{pmatrix}$
$L = h$	$\{e, f\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ - & 1\,0\,0\,0 & \\ 0\,1 & & \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,6\,6\,5 \end{pmatrix}$

表 2。所有情形的数据

参考文献

[BHPVdV04] W. P. Barth、K. Hulek、C. A. M. Peters 和 A. Van de Ven，《紧致复曲面》，第二版，数学及其边界领域成果。第3辑。现代数学综述系列 /数学成果及相关领域。第3辑。现代数学综述系列/ **4**, 施普林格出版社，柏林，2004年。MR 2030225。https://doi.org/10.1007/978-3-642-57739-0。[Bea83a] A. Beauville，《关于具有 $c_1 = 0$ 的凯勒流形的一些评注》，载于《代数流形与解析流形分类》（片田，1982），Progr. Math. 39，Birkhäuser Boston，波士顿，MA，1983年，第1–26页。MR 728605。[Bea83b] A. Beauville，《第一陈类为零的凯勒流形》，J. Differential Geom. 18第4期（1983年），755–782（1984年）。MR 730926。见 http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214438181。[BD85] A. Beauville 和 R. Donagi，《四维三次超曲面的直线簇》，巴黎科学院报告 Sér. I Math. 301第14期（1985年），703–706。MR 818549。[BCS16] S. Boissière、C. Camere 和 A. Sarti，《通过 p-初等格对超凯勒四维簇变形族上的自同构进行分类》，Kyoto J. Math. 56第3期（2016年），465–499。MR 3542771。https://doi.org/10.1215/21562261-3600139。[BS21] C. Bonnafé 和 A. Sarti，《包含 M_{20} 的具有极大有限自同构群的K3曲面》，Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔）71第2期（2021年），711–730。MR 4353918。见 http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2021__71_2_711_0。[BH21] S. Brandhorst 和 K. Hashimoto，《K3曲面上极大辛作用的扩张》，Ann. H. Lebesgue 4（2021年），785–809。MR 4315769。https://doi.org/10.5802/ahl.88。[Deb18] O. Debarre，《超凯勒流形》，2018年。https://doi.org/10.48550/ARXIV.1810.02087。[Fu16] L. Fu，《三次四维簇的法诺簇上极化辛自同构的分类》，Glasg. Math. J. 58第1期（2016年），17–37。MR 3426426。https://doi.org/10.1017/S001708951500004X。[Fuj83] A. Fujiki，《关于四维本原辛紧致凯勒 V-流形》，载于《代数流形与解析流形分类》（片田，1982），Progr. Math. 39，Birkhäuser Boston，波士顿，MA，1983年，第71–250页。MR 728609。[GOV20] A. Grossi、C. Onorati 和 D. C. Veniani，《O'Grady六维簇上的有限阶辛双有理变换》，2020年。https://doi.org/10.48550/ARXIV.2009.02120。[HM19] G. Höhn 和 G. Mason，《 $K3^{[2]}$型超凯勒流形的有限辛自同构群》，Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) 14第2期（2019年），189–264。MR 3973459。https://doi.org/10.21915/bimas.2019204。[Jon50] B. W. Jones，《二次型算术理论》，Carcus专著丛书，第10卷，美国数学协会，布法罗，N.Y.，1950年。MR 0037321。[Kon99] S. Kond¯o，《$K3$ 曲面自同构有限群的最大阶》，美国数学杂志121第6期（1999年），1245–1252。MR 1719814。见 http://muse.jhu.edu/journals/american_journal_of_mathematics/v121/121.6kond=o.pdf。[LZ22] R. Laza 和 Z. Zheng，《三次四维簇的自同构与周期》，数学杂志300第2期（2022年），1455–1507。MR 4363785。https://doi.org/10.1007/s00209-021-02810-x。[Mar11] E. Markman，《全纯辛簇的托雷利与单值化结果综述》，载于《复几何与微分几何》，Springer Proc. Math. 8，Springer，海德堡，2011年，第257–322页。MR 2964480。https://doi.org/10.1007/978-3-642-20300-8_15。[Mon13a] G. Mongardi，《关于k3[2] 型超凯勒四维簇的辛自同构》，Michigan Mathematical Journal 62第3期（2013年）。https://doi.org/10.1307/mmj/1378757887。[Mon13b] G. Mongardi，《超凯勒流形的自同构》，博士论文，2012–2013年。[Muk88] S. Mukai，《K3曲面的有限自同构群与马蒂厄群》，Invent. Math. 94第1期（1988年），183–221。MR 958597。https://doi.org/10.1007/BF01394352。[Nik79a] V. V. Nikulin，《凯勒K3曲面的有限自同构群》，Trudy Moskov. Mat. Obshch. 38（1979年），75–137。MR 544937。[Nik79b] V. V. Nikulin，《整数对称双线性型及其若干几何应用》，Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43第1期（1979年），111–177，238。MR 525944。[Waw22] T. Wawak，《高度对称的超凯勒四维簇》，2022年。见 arXiv:2212.02900。

[1] 智利特木科弗龙特拉大学数学与统计系，弗朗西斯科·萨拉萨尔大道1145号电子邮箱：paola.comparin@ufrontera.cl[2] 法国普瓦捷大学，数学与应用实验室，法国国家科学研究中心（CNRS）UMR 7348，玛丽与皮埃尔·居里大道11号，86073 普瓦捷 Cedex 9电子邮箱：romain.demelle@univ-poitiers.fr[3] 智利特木科弗龙特拉大学数学与统计系，弗朗西斯科·萨拉萨尔大道1145号电子邮箱：pabloquezada04@gmail.com