arXiv:2305.05043v1 [math.PR] 8 May 2023

含时间无关粗糙噪声的双曲 Anderson 模型：高斯涨落

Raluca M. Balan*† Wangjun Yuan‡§

2023年5月8日

摘要

在本文中，我们研究一维双曲 Anderson 模型，该模型由时间无关的粗糙噪声驱动，即与 Hurst 指数为 $H \in (1/4, 1/2)$ 的分数布朗运动相关联的噪声。我们证明，经过适当的归一化和中心化后，解的空间积分依分布收敛于标准正态分布，并估计这一收敛在全变差距离下的速度。我们还证明了相应的函数型极限结果。我们的方法基于近期在 [27]，中提出的二阶高斯 Poincar´e 不等式的一个版本，并依赖于对解的一阶和二阶 Malliavin 导数增量的精细矩估计。这些估计通过与具有 δ 初始速度的波动方程建立联系而得到；这种方法不同于 [27] 中用于抛物型 Anderson 模型的方法。

数学主题分类（2020）：主要分类 60H15；次要分类 60H07、60G15、60F05

关键词：双曲 Anderson 模型、粗糙噪声、Malliavin 微积分、用于正态近似的 Stein 方法

*通讯作者。加拿大渥太华大学数学与统计系，STEM 大楼，150 Louis-Pasteur Private，渥太华，安大略省，K1N 6N5，加拿大。电子邮件：rbalan@uottawa.ca。

†本研究得到加拿大自然科学与工程研究委员会的资助。

‡卢森堡大学数学系，Maison du Nombre 6, Avenue de la Fonte L-4364 Esch-sur-Alzette。卢森堡。电子邮件：ywangjun@connect.hku.hk。§作者谨此感谢 ERC Consolidator Grant 815703“STAM-FORD：高维扩散的统计方法”提供的资金支持。

目录

1 引言 2 2 预备知识 5

2.1 多重 Wiener 积分.6 2.2 算子 D 和 δ .8 2.3 OU 半群与超收缩性.9 2.4 解的存在性.10

3 波动方程与 δ 初始条件 12

4 Malliavin 导数的估计 15

5 u_θ 和 v_θ 21 的增量

6 主要结果的证明 28
6.1 极限协方差.28 6.2 定量中心极限定理.34 6.3 函数型中心极限定理.40

A 使用超收缩性的矩比较 41 B 时间白噪声驱动的随机 Volterra 方程 44 C 积分不等式 52

1 引言

采用随机场方法研究随机偏微分方程（SPDEs）的工作，源于 Walsh 的讲义 [32], ，其中介绍了这一通用框架，重点关注由一维时空高斯白噪声驱动的方程。在开创性文章 [13], 中，Dalang 将 Walsh 的鞅测度方法推广到由空间齐次高斯噪声（时间白噪声）驱动的方程，并提出了分析这类方程的有力技术。此后，该领域迅速发展。
Malliavin 微积分是被广泛使用的工具之一。当噪声在时间上有色（或与时间无关）时，由于缺乏鞅结构，无法使用 Itô 微积分技术，因此这一工具尤为有用。关于采用各种类型高斯噪声的随机偏微分方程的相关研究，读者可参阅
[7, 10, 8, 9, 14, 16, 19, 20, 17, 18, 24, 31] 中的部分示例。

在 [21], 中，该领域开启了一个新的研究方向，聚焦于当积分区域的大小不断增大时，空间时空高斯白噪声驱动的随机热方程解的空间积分的渐近行为。 [21] 的主要结果表明，经过适当的归一化和中心化后，该积分收敛于标准正态分布，并给出了这一收敛在全变差距离下的速度。这个结果被称为“定量中心极限定理”

（QCLT）通过将 Malliavin 微积分与用于正态近似的 Stein 方法相结合而得到。后续论文 [22, 28, 27, 6] 分别针对空间/时间上具有有色噪声（或具有时间无关噪声）的随机热方程解，以及 [12, 15, 4, 5] 中随机波动方程的解，获得了类似的结果并进行了推广。在这两种情况下，噪声都与解的 Lipschitz 函数 $\sigma(u)$ 相乘后进入方程。最困难的情形是噪声在空间上粗糙，即其空间行为类似于 Hurst 指数为 $H < 1/2$ 的分数布朗运动（fBm）。[27] 研究了这一情形下的抛物型 Anderson 模型（pAm），即带有线性项 $\sigma(u) = u$ 乘以噪声的随机热方程；其技术论证严重依赖热核的性质。

本文旨在首次研究空间中具有粗糙噪声的波动方程这一问题。我们假设噪声与时间无关，并将时变噪声的处理留待未来工作。更确切地说，本文考虑一维双曲 Anderson 模型（hAm）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \sqrt{\theta} u(t,x)\dot{W}(x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) = 1,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

通常，我们关注 $\theta = 1$ 的情形。引入参数 $\theta > 0$ 的原因如下。我们的主要结果，即方程 (1) 的解 u_θ 的空间平均的定量中心极限定理，是通过应用二阶 Gaussian–Poincar´e 不等式的一个版本（ [27] 的命题 2.4）得到的。为此，我们需要估计 Malliavin 导数 Du_θ 增量的四阶矩，以及二阶 Malliavin 导数 D^2u_θ 的矩形增量。方程 (1) 中引入参数 $\theta > 0$ ，使我们能够将解 u_θ、其 Malliavin 导数或它们的增量的 p 阶矩（对于 $p > 2$），与对应于解 $u_{(p-1)\theta}$ 的类似量的二阶矩进行比较；后者随后通过其混沌展开来处理。这种矩之间的比较在本文中起着关键作用，它利用了适用于一般随机偏微分方程的超收缩性性质推导而来；这一性质本身也具有独立的研究价值，并在附录 A 中给出。

噪声 W 在时间上是独立的，在空间上具有 Hurst 指数 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$，由零均值高斯过程 $\{W(\varphi)$ 给出； $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$ 定义在完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上，其协方差为

$$\mathbb{E}[W(\varphi)W(\psi)] = c_H \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(\xi)\overline{\mathcal{F}\psi(\xi)}|\xi|^{1-2H} d\xi =: \langle \varphi, \psi\rangle_{\mathcal{P}_0}.$$

这里， $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上具有紧支撑的 C^∞ 函数空间， $\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\varphi(x)dx$ 是 φ 的傅里叶变换，并且

$$c_H = \frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{2\pi}.$$

通过近似，可以将噪声扩展为一个等距正态高斯过程 $\{W(\varphi);\ \varphi \in \mathcal{P}_0\}$，如 Malliavin 微积分中所定义，其中 $\mathcal{P}_0$ 是通过完备化定义的希尔伯特空间

关于 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 相对于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{P}_0}$。特别地，对于所有 $x\in\mathbb{R}$，$1_{[0,x]}\in\mathcal{P}_0$，且过程 $\{W(x)=W(1_{[0,x]});\ x\in\mathbb{R}\}$ 是指标为 H 的分数布朗运动。

我们称随机过程 $u_\theta=\{u_\theta(t,x);t\geq 0,x\in\mathbb{R}\}$ 为方程 (1) 的（温和 Skorohod）解，如果它满足以下积分方程：

$$u_\theta(t,x)=1+\sqrt{\theta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}G_{t-s}(x-y)u_\theta(s,y)W(\delta y)ds$$

其中，$W(\delta y)$ 对应于下文第 2.2 节中定义的散度算子 δ（或 Skorohod 积分），而 G_t 是 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ 上波动方程的基本解：

$$G_t(x):=\frac{1}{2}1_{\{|x|<t\}},\quad t>0,x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

我们令 $G_t(x)=0$ 当 $t\leq 0$。注意，G_t 的傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}G_t(\xi)=\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}G_t(x)dx=\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|},\quad t\geq 0. \tag{3}$$

我们关注空间平均在 $R\to\infty$ 时的渐近行为：

$$F_{R,\theta}(t)=\int_{-R}^{R}\big(u_\theta(t,x)-1\big)dx.$$

更确切地说，令 $\sigma_{R,\theta}^2(t)=\mathrm{Var}\big(F_{R,\theta}(t)\big)$，我们希望证明：

$$\frac{F_{R,\theta}(t)}{\sigma_{R,\theta}(t)}\xrightarrow{d}Z\sim N(0,1)\quad\text{as } R\to\infty,$$

并估计这种收敛在全变差距离下的速度：

$$d_{\mathrm{TV}}(X,Y)=\sup_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}|\mathbb{P}(X\in B)-\mathbb{P}(Y\in B)|.$$

以下定理是本文的主要结果。

定理 1.1（极限协方差）。对于任意 $\theta>0$、$t>0$ 和 $s>0$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\mathbb{E}[F_{R,\theta}(t)F_{R,\theta}(s)]}{R}=K_\theta(t,s), \tag{4}$$

其中，$K_\theta(t,s)$ 有限，其表达式见下文的（65）。此外，对于任意 $\theta>0$ 和 $t>0$,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\sigma_{R,\theta}^2(t)}{R}=K_\theta(t,t)>0. \tag{5}$$

定理 1.2（定量中心极限定理）。对于任意 $\theta>0$ 和 $t>0$,

$$d_{\mathrm{TV}}\left(\frac{F_{R,\theta}(t)}{\sigma_{R,\theta}(t)},Z\right)\leq C_{t,H,\theta}R^{-1/2},$$

其中 $C_{t,H,\theta}>0$ 是一个依赖于 (t,H,θ) 且属于 $Z\sim N(0,1)$ 的常数。

定理 1.3（FCLT）。对于任意 $\theta > 0$，过程 $\{R^{-1/2}F_{R,\theta}(t); t \geq 0\}$ 存在一个连续修正，并且当 $R \to \infty$ 时，它在 $C([0,\infty))$ 中依分布收敛到零均值高斯过程 $\{\mathcal{G}_\theta(t); t \geq 0\}$，其协方差为

$$\mathbb{E}[\mathcal{G}_\theta(t)\mathcal{G}_\theta(s)] = K_\theta(t,s),$$

其中 $C([0,\infty))$ 配备紧集上一致收敛的拓扑。

为了证明定理 1.1，我们利用 $F_{R,\theta}$ 的 Wiener 混沌分解，并注意到第一混沌空间上的投影对极限没有贡献，而其他混沌空间上的投影则产生一个收敛级数。在空间上具有粗糙噪声、时间上具有着色的 (pAm) 中也观察到了类似现象，见 [26] 。这与空间上具有“规则”噪声的方程的定量中心极限定理形成对比（相关研究见 [28, 27, 5]）：对于后者，只有第一混沌空间上的投影对极限有贡献。在这两种情况下，定量中心极限定理都是非混沌的，含义如 [15], 第 3 页所述，即并非所有混沌空间上的投影都对极限有贡献。

定理 1.2 可通过对时间无关噪声应用二阶高斯 Poincar´e 不等式的一个版本（ [27] 中的命题 2.4 ）得到。这需要研究 Du_θ 的增量以及 D^2u_θ 的矩形增量。分析这些增量需要付出大量努力。为此，我们采用了不同于 [27] 中处理 (pAm) 的方法。除了上文提到的矩比较技术外，我们还建立了与初始速度为 delta 函数的 (hAm) 的解 v_θ 之间的联系。这引出了一个新问题，促使我们考察 u_θ 和 v_θ 的增量。在这一分析中，这些过程的某些平移不变性起着关键作用。此外，我们还利用了这样一个事实：v_θ 的增量与由高斯噪声 $\mathfrak{X}$ 驱动的 (hAm) 的解 V_θ 的增量密切相关；该噪声在时间上是白噪声，在空间上是具有相同指标 $H \in$ 的分数噪声（$_{14}$，$_{12}$）。$\mathfrak{X}$ 的协方差由下文的 (33) 式给出。

对于定理 1.3 的证明，通常我们需要证明两点：(i) 紧性；以及 (ii) 有限维收敛。(i) 由 Kolmogorov-Centsov 定理推出，而 (ii) 则使用与 [5], 中相同的方法，基于一个方差估计得出；该方差估计采用与定量中心极限定理相同的论证加以证明。

本文安排如下。第 2 节介绍 Malliavin 微积分的背景和一些预备结果，并证明解 u_θ的存在性。第 3 节考察 v_θ 和 V_θ的一些性质。第 4 节推导 Du_θ 的增量和 D^2u_θ的矩形增量的一些估计。第 5 节研究过程 u_θ 和 v_θ 的增量。最后，第 6 节给出定理 1.1、1.2 和 1.3 的证明。附录 A 收录了一般随机偏微分方程的矩比较结果。在附录 B 中，我们研究由 $\mathfrak{X}$驱动的两个随机 Volterra 方程，它们与 V_θ的增量所满足的方程形式相同，并使我们能够推导这些增量的一些性质。附录 C 包含后文将用到的一些初等不等式。

2 预备知识

本节介绍一些与 Malliavin 微积分相关的预备结果，并证明方程 (1) 的解存在且唯一。我们将 $\|\cdot\|_p$ 记为 $L^p(\Omega)$-范数。

2.1 多重 Wiener 积分

我们首先介绍 Malliavin 微积分的一些基本要素，遵循 [25]。

我们用 J_n 表示从 $L^2(\Omega)$ 到 $\mathcal{P}_{0,n}$ 的投影，其中 $\mathcal{P}_{0,n}$ 是第 n 阶维纳混沌空间，定义为 $L^2(\Omega)$ 中由 $\{H_n(W(\varphi));\ \varphi \in \mathcal{P}_0\}$ 的闭线性张成空间，其中 $H_n(x)$ 是第 n 阶埃尔米特多项式。令 $I_n : \mathcal{P}_0^{\otimes n} \to \mathcal{P}_{0,n}$ 表示关于 W 的 n 阶多重 Wiener 积分，其中 $\mathcal{P}_0^{\otimes n}$ 是 $\mathcal{P}_0$ 的第 n 次张量积。由于 I_n 是满射，对于任意 $F \in L^2(\Omega)$，存在某个 $f_n \in \mathcal{P}_0^{\otimes n}$，使得 $J_n(F) = I_n(f_n)$。

维纳混沌空间 $\mathcal{P}_{0,n}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中彼此正交。更准确地说，对于任意 $f \in \mathcal{P}_0^{\otimes n}$ 和 $g \in \mathcal{P}_0^{\otimes m}$，

$$E[I_n(f)I_m(g)] = \begin{cases} n!\,\langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} & \text{if } n = m \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases}$$

$\widetilde{\ }$其中 f 是 f 关于所有 n 个变量的对称化：

$$\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} f(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)}),$$

$\widetilde{\ }$和 S_n 是 $\{1, \ldots, n\}$的所有排列的集合。注意，$I_n(f) = I_n(\widetilde{f})$以及

$$\|\widetilde{f}\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} \leq \|f\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}. \tag{6}$$

每个关于 W 可测的随机变量 $F \in L^2(\Omega)$都有如下 Wiener 混沌展开：

$$F = E(F) + \sum_{n \geq 1} J_n(F) = E(F) + \sum_{n \geq 1} I_n(f_n), \tag{7}$$

其中级数在 $L^2(\Omega)$中收敛。此外，

$$E|F|^2 = \sum_{n \geq 0} E|I_n(f_n)|^2 = \sum_{n \geq 0} n!\,\|\widetilde{f}_n\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}},$$

其中，I_0 是 $\mathbb{R}$ 上的恒等映射，且 $f_0 = E(F)$。有时，我们记 $J_0(F) = \mathbb{E}(F)$。

一般而言，$I_{p+q}(f \otimes g) \neq I_p(f)I_q(g)$。$I_{p+q}(f \otimes g)$的确切表达式由乘积公式给出，但本文不会使用该公式。相反，我们使用下面的结果。

引理 2.1。设 p、$q \in \mathbb{N}$。

(a) 对于 $f \in \mathcal{P}_0^{\otimes p}$、$g \in \mathcal{P}_0^{\otimes q}$，我们有

$$\|I_{p+q}(f \otimes g)\|_2^2 \leq \frac{(p+q)!}{p!q!}\,\|I_p(f)\|_2^2\,\|I_q(g)\|_2^2\,.$$

(b) 对于 $f_1 \in \mathcal{P}_0^{\otimes p_1}$、$f_2 \in \mathcal{P}_0^{\otimes p_2}$ 和 $f_3 \in \mathcal{P}_0^{\otimes p_3}$，有

$$\|I_{p_1+p_2+p_3}(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)\|_2^2 \leq \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\|I_{p_1}(f_1)\|_2^2\|I_{p_2}(f_2)\|_2^2\|I_{p_3}(f_3)\|_2^2.$$

~ ~证明。（a）由于 $f\otimes g$ 和 $f\otimes\tilde{g}$ 具有相同的对称化，$I_{p+q}(f\otimes\tilde{g}) = I_{p+q}(f\otimes g)$。因此，

$$\begin{aligned}
&\|I_{p+q}(f\otimes g)\|_2^2 = \left\|I_{p+q}(\tilde{f}\otimes\tilde{g})\right\|_2^2 = (p+q)!\left\|\widetilde{\tilde{f}\otimes\tilde{g}}\right\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes(p+q)}}^2\\
\leq&(p+q)!\left\|\tilde{f}\otimes\tilde{g}\right\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes(p+q)}}^2 = (p+q)!\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\left|\mathcal{F}\left(\tilde{f}\otimes\tilde{g}\right)(\xi_1,\ldots,\xi_{p+q})\right|^2\prod_{j=1}^{p+q}|\xi_j|^{1-2H}d\xi_j\\
=&(p+q)!\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\left|\mathcal{F}\tilde{f}(\xi_1,\ldots,\xi_p)\right|^2|\mathcal{F}\tilde{g}(\xi_{p+1},\ldots,\xi_{p+q})|^2\prod_{j=1}^{p+q}|\xi_j|^{1-2H}d\xi_j\\
=&\frac{(p+q)!}{p!q!}\|\tilde{f}\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes p}}^2\|\tilde{g}\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes q}}^2 = \frac{(p+q)!}{p!q!}\|I_p(f)\|_2^2\|I_q(g)\|_2^2
\end{aligned}$$

(b) 我们将 (a) 使用两次：第一次用于 $p=p_1$, $q=p_2+p_3$, $f=f_1$, $g=f_2\otimes f_3$，第二次用于 $p=p_2$, $q=p_3$, $f=f_2$, $g=f_3$。 □

接下来，我们将引理 2.1 推广到由测度空间中的元素索引的过程。

引理 2.2. 设 $(E,\mathcal{E},\mu)$ 为一个测度空间。对于每个 $\theta>0$ 和 $r\in E$，设 $F_\theta(r)$ $G_\theta(r)$ 为 $L^2(\Omega)$ 中的随机变量，其维纳混沌展开为 $F_\theta(r)=\sum_{p\geq0}\theta^{p/2}I_p(f_p(\cdot,r))$ 和 $G_\theta(r)=\sum_{q\geq0}\theta^{q/2}I_q(g_q(\cdot,r))$。则

$$\sum_{p\geq0}\sum_{q\geq0}\theta^{p+q}\left\|I_{p+q}\left(\int_E f_p(\cdot,r)\otimes g_q(\cdot,r)\mu(dr)\right)\right\|_2^2\leq\left(\int_E\|F_{2\theta}(r)\|_2\|G_{2\theta}(r)\|_2\mu(dr)\right)^2.$$

此外，若对于每个 $\theta>0$ 和 $r\in E$，$H_\theta(r)$ 都是 $L^2(\Omega)$ 中的随机变量，其维纳混沌展开为 $H_\theta(r)=\sum_{k\geq0}\theta^{k/2}I_k(h_k(\cdot,r))$，则

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\geq0}\sum_{q\geq0}\sum_{k\geq0}\theta^{p+q+k}\left\|I_{p+q+k}\left(\int_E f_p(\cdot,r)\otimes g_q(\cdot,r)\otimes h_k(\cdot,r)\mu(dr)\right)\right\|_2^2\\
&\qquad\leq\left(\int_E\|F_{3\theta}(r)\|_2\|G_{3\theta}(r)\|_2\|H_{3\theta}(r)\|_2\mu(dr)\right)^2.
\end{aligned}$$

证明。我们采用与引理 2.1.(a) 的证明相同的思路。更确切地说，

$$\begin{aligned}
&\left\|I_{p+q}\left(\int_E f_p(\cdot,r)\otimes g_q(\cdot,r)\mu(dr)\right)\right\|_2^2 = \left\|I_{p+q}\left(\int_E\tilde{f}_p(\cdot,r)\otimes\tilde{g}_q(\cdot,r)\mu(dr)\right)\right\|_2^2\\
&\leq(p+q)!\left\|\int_E\tilde{f}_p(\cdot,r)\otimes\tilde{g}_q(\cdot,r)\mu(dr)\right\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes(p+q)}}\\
&=(p+q)!\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\left|\int_E\mathcal{F}\big(\tilde{f}_p(\cdot,r)\otimes\tilde{g}_q(\cdot,r)\big)(\xi_1,\ldots,\xi_{p+q})dr\right|^2\prod_{j=1}^{p+q}|\xi_j|^{1-2H}d\xi_j\\
&=(p+q)!\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\int_{E^2}\mathcal{F}\tilde{f}_p(\cdot,r_1)(\xi_1,\ldots,\xi_p)\mathcal{F}\tilde{g}_q(\cdot,r_1)(\xi_{p+1},\ldots,\xi_{p+q})
\end{aligned}$$

$$\times \overline{\mathcal{F}\tilde{f}_p(\cdot,r_2)(\xi_1,\ldots,\xi_p)}\overline{\mathcal{F}\tilde{g}_q(\cdot,r_2)(\xi_{p+1},\ldots,\xi_{p+q})}\mu(dr_1)\mu(dr_2)\prod_{j=1}^{p+q}|\xi_j|^{1-2H}d\xi_j$$

$$= (p+q)!\int_{E^2}\left\langle \tilde{f}_p(\cdot,r_1),\tilde{f}_p(\cdot,r_2)\right\rangle_{\mathcal{P}_0^{\otimes p}}\langle \tilde{g}_q(\cdot,r_1),\tilde{g}_q(\cdot,r_2)\rangle_{\mathcal{P}_0^{\otimes q}}\mu(dr_1)\mu(dr_2)$$

$$= \frac{(p+q)!}{p!q!}\int_{E^2}\mathbb{E}\left[I_p\left(f_p(\cdot,r_1)\right)I_p\left(f_p(\cdot,r_2)\right)\right]\mathbb{E}\left[I_q\left(g_q(\cdot,r_1)\right)I_q\left(g_q(\cdot,r_2)\right)\right]\mu(dr_1)\mu(dr_2).$$

注意到 $\frac{(p+q)!}{p!q!}\leq 2^{p+q}$，我们得到:

$$\sum_{p\geq 1}\sum_{q\geq 1}\theta^{p+q}\left\|I_{p+q}\left(\int_E f_p(\cdot,r)\otimes g_q(\cdot,r)\mu(dr)\right)\right\|_2^2$$

$$\leq \int_{E^2}\sum_{p\geq 1}(2\theta)^p\mathbb{E}\left[I_p\left(f_p(\cdot,r_1)\right)I_p\left(f_p(\cdot,r_2)\right)\right]\sum_{q\geq 1}(2\theta)^q\mathbb{E}\left[I_q\left(g_q(\cdot,r_1)\right)I_q\left(g_q(\cdot,r_2)\right)\right]dr_1dr_2$$

$$= \int_{E^2}\mathbb{E}\left[F_{2\theta}(r_1)F_{2\theta}(r_2)\right]\mathbb{E}\left[G_{2\theta}(r_1)G_{2\theta}(r_2)\right]\mu(dr_1)\mu(dr_2)\leq\left(\int_E\|F_{2\theta}(r)\|_2\|G_{2\theta}(r)\|_2\mu(dr)\right)^2,$$

其中，最后一个不等式用到了柯西-施瓦茨不等式。

第二个估计以类似的方式证明，使用不等式 $\frac{(p+q+k)!}{p!q!k!}\leq 3^{p+q+k}$. ———

□

2.2 算子 D 和 δ

本节中，我们简要回顾 Malliavin 导数 D 和散度算子 δ的定义。更多详情请参阅 [25] 。

令 $\mathcal{S}$ 为“光滑”随机变量类，即形如的变量。

$$F = f(W(\varphi_1),\ldots,W(\varphi_n)), \tag{8}$$

其中， $f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$、 $\varphi_i\in\mathcal{P}_0$、 $n\geq 1$和 $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上有界 C^∞ 函数的类，其各阶偏导数均有界。形式如 (8) 的随机变量 F 的 Malliavin 导数是如下给出的 $\mathcal{P}_0$-值随机变量:

$$DF := \sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(W(\varphi_1),\ldots,W(\varphi_n))\varphi_i.$$

我们赋予 $\mathcal{S}$范数$\|F\|_{\mathbb{D}^{1,\,2}}:=(E|F|^2)^{1/2}+(E\|DF\|_{\mathcal{P}_0}^2)^{1/2}$。算子 D可扩展到空间 $\mathbb{D}^{1,\,2}$，该空间是 $\mathcal{S}$关于$\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{1,\,2}}$的完备化。

对于任意整数 $k\geq 2$，我们将 D^k 记为 k 阶 Malliavin 导数，其定义域记为 $\mathbb{D}^{k,\,2}$。

如果 F是 $L^2(\Omega)$ 中的一个随机变量，其维纳混沌展开为 $F=\sum_{n\geq 0}I_n(f_n)=\sum_{n\geq 0}J_n(F)$，其中 $f_n\in\mathcal{P}_0^{\otimes n}$ 是对称函数，那么

$$D_xF = \sum_{n\geq 1}nI_{n-1}(f_n(\cdot,x)). \tag{9}$$

特别地，对于任意 $n \geq 1$，$D_x J_n(F) = nI_{n-1}(f_n(\cdot, x)) = J_{n-1}(D_x F)$，且 $D_x J_0(F) = 0$。一般而言，

$$D^k J_n(F) = \begin{cases} J_{n-k}(D^k F) & \text{if } n \geq k \\ 0 & \text{if } n < k \end{cases} \tag{10}$$

散度算子 δ 是算子 D的伴随算子。δ 的定义域记为 Dom δ，它是满足以下条件的 $u \in L^2(\Omega; \mathcal{P}_0)$ 的集合。

$$|E\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}| \leq c(E|F|^2)^{1/2}, \quad \forall F \in \mathbb{D}^{1,2},$$

其中，c 是依赖于 u的常数。若 $u \in$Dom δ，则 $\delta(u)$是 $L^2(\Omega)$中的元素，由以下对偶关系刻画：

$$E(F\delta(u)) = E\langle DF, u\rangle_{\mathcal{P}_0}, \quad \forall F \in \mathbb{D}^{1,2}. \tag{11}$$

特别地，$E(\delta(u)) = 0$。如果 $u \in$ Dom δ，我们使用记号

$$\delta(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) W(\delta x),$$

并且我们称 $\delta(u)$ 是 u 关于 W 的 Skorohod 积分。

2.3 OU 半群与超收缩性

本节回顾 Ornstein-Uhlenbeck 半群的定义及其若干性质。

Ornstein-Uhlenbeck（OU）半群是由 $T_t{}_{t\geq 0}$ 构成的压缩算子族，在 $L^2(\Omega)$ 上定义如下：

$$T_t(F) = \sum_{n\geq 0} e^{-nt} J_n(F).$$

利用（10），我们推导得

$$D^k\left(T_t(F)\right) = \sum_{n\geq 0} e^{-nt} D^k(J_n(F)) = \sum_{n\geq k} e^{-nt} J_{n-k}(D^k F) = e^{-kt} T_t(D^k F). \tag{12}$$

OU 半群具有超收缩性：对于任意 $t > 0$ 和 $F \in L^p(\Omega)$，

$$\|T_t F\|_{q(t)} \leq \|F\|_p, \quad \text{where } q(t) = e^{2t}(p-1) + 1 > p > 1. \tag{13}$$

这一性质的一个重要推论是，对于任意 $1 < p < q < \infty$，范数 $\|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|_q$ 在同一个混沌空间 $\mathcal{P}_{0,\ n}$ 上等价。更确切地说，

$$\|F\|_q \leq \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{n/2} \|F\|_p, \quad \text{for any } F \in \mathcal{P}_{0,n} \text{ and } 1 < p < q. \tag{14}$$

Ornstein-Uhlenbeck 半群的生成元定义如下：

$$LF = \sum_{n\geq 1} n J_n(F). \tag{15}$$

其定义域 Dom L 由满足式 (15) 中的级数在 $L^2(\Omega)$中收敛的随机变量 $F \in L^2(\Omega)$组成。注意， $F \in$ Dom L 当且仅当 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ 且 $DF \in$Dom δ，此时， $LF = -\delta(DF)$。

L 的伪逆是由 L^{-1} 定义的算子

$$L^{-1}F = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} J_n(F).$$

对于任意 $F \in \mathbb{D}^{1,\,2}$ 满足 $\mathbb{E}(F) = 0$ 的情形，过程 $u = -DL^{-1}F$ 属于 Dom δ an d

$$F = \delta(-DL^{-1}F). \tag{16}$$

2.4 解的存在性

本节将证明方程 (1) 存在唯一解。

众所周知，若方程 (1) 的解存在，则它具有如下 Wiener 混沌展开：

$$u_\theta(t,x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \theta^{n/2} I_n(f_n(\cdot, x; t)), \tag{17}$$

其中核 $f_n(\cdot, x;\, t)$ 定义为：

$$f_n(x_1, \ldots, x_n, x; t) = \int_{T_n(t)} f_n(t_1, x_1, \ldots, t_n, x_n, t, x) d\boldsymbol{t}, \tag{18}$$

其中 $T_n(t) = \{0 < t_1 < \ldots < t_n < t\}$ 和

$$f_n(t_1, x_1, \ldots, t_n, x_n, t, x) = G_{t-t_n}(x - x_n) \ldots G_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) 1_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t\}}. \tag{19}$$

是出现在含时变噪声的 (hAm) 解的混沌分解中的核（在 [4] 中研究）。在这种情况下，

$$\mathbb{E}|u_\theta(t,x)|^2 = 1 + \sum_{n\geq 1} n!\theta^n \|\widetilde{f}_n(\cdot, x; t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}. \tag{20}$$

事实上，当且仅当级数 (17) 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，即级数 (20) 收敛时，解才存在。在这种情况下，解是唯一的。

下一个结果给出了该解的存在性，并为其矩提供了一个上界。为证明这一结果，我们将用到以下事实：对于任意 $a > 0$，存在一些常数 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$，它们依赖于 a，使得

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n!)^a} \leq c_1 \exp(c_2 x^{1/a}) \quad \text{for any } x > 0. \tag{21}$$

此外，我们还需要以下积分的值：对于任意 $t >$ 0,

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}G_t(\xi)|^2 |\xi|^\alpha d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(t|\xi|)}{|\xi|^2} |\xi|^\alpha d\xi = c_\alpha t^{1-\alpha}. \tag{22}$$

当且仅当 $\alpha \in (-1, 1)$ 时，积分收敛；例如，参见 [3] 的引理 3.1。

定理 2.3. 对任意 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$，方程 (1) 存在唯一的（Skorohod）解。此外，对于任意 $\theta > 0$、$p \geq 2$、$t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$,

$$\|u_\theta(t,x)\|_p \leq c_1 \exp\left(c_2 \theta^{\frac{1}{2H+1}} p^{\frac{1}{2H+1}} t^{\frac{2H+2}{2H+1}}\right), \tag{23}$$

其中，$c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$ 是仅依赖于 H的常数。因此，$C_{\theta,\ p,\ T,\ u} := \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \|u_\theta(t,x)\|_p < \infty$。

证明。注意，$\mathcal{F}f_n(t_1,\cdot,\ldots,t_n,\cdot,t,x)(\boldsymbol{\xi}) = e^{-i(\xi_1+\ldots+\xi_n)x}\prod_{j=1}^n \mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\xi_1+\ldots+\xi_j)$，其中 $t_{n+1} = t$ 且 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$。由柯西-施瓦茨不等式，得

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}f_n(\cdot,x;t)(\boldsymbol{\xi})|^2 &= \left|\int_{T_n(t)} \prod_{j=1}^n \mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\xi_1+\ldots+\xi_j) d\boldsymbol{t}\right|^2 \\
&\leq \frac{t^n}{n!}\int_{T_n(t)} \prod_{j=1}^n \left|\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\xi_1+\ldots+\xi_j)\right|^2 d\boldsymbol{t},
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{t} = (t_1,\ldots,t_n)$。由富比尼定理,

$$\begin{aligned}
\|f_n(\cdot,x;t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} &= c_H^n \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f_n(\cdot,x;t)(\boldsymbol{\xi})|^2 \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{1-2H} d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq c_H^n \frac{t^n}{n!}\int_{T_n(t)}\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \left|\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\xi_1+\ldots+\xi_j)\right|^2 \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{1-2H} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{t} \\
&= c_H^n \frac{t^n}{n!}\int_{T_n(t)}\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \left|\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\eta_j)\right|^2 |\eta_1|^{1-2H} \prod_{j=2}^n |\eta_j-\eta_{j-1}|^{1-2H} d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{t},
\end{aligned}$$

最后一行中，我们对 $j = 1,\ldots,n$作变量代换 $\eta_j = \xi_1+\ldots+\xi_j$，并记 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_n)$。现在使用不等式 $|a+b|^{1-2H} \leq |a|^{1-2H} + |b|^{1-2H}$，接着利用恒等式:

$$x_1 \prod_{j=2}^n (x_j + x_{j-1}) = \sum_{a\in A_n} x_j^{a_j},$$

其中，A_n是由多重指标 $a = (a_1,\ldots,a_n)$ 组成的集合，其基数为 $A_n = 2^{n-1}$，满足$a_1 \in \{1,2\}$, $a_n \in \{0,1\}$, $a_2,\ldots,a_{n-1} \in \{0,1,2\}$ 以及 $\sum_{j=1}^n a_j = n$。集合 A_n 的精确定义见 [2]中的引理 2.2。由此可得:

$$|\eta_1|^{1-2H} \prod_{j=2}^n |\eta_j-\eta_{j-1}|^{1-2H} \leq \sum_{a\in A_n}\prod_{j=1}^n |\eta_j|^{(1-2H)a_j} = \sum_{\alpha\in D_n}\prod_{j=1}^n |\eta_j|^{\alpha_j}, \tag{24}$$

其中，D_n是多重指标 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$的集合，且对所有$j = 1,\ldots,n$，$\alpha_j = (1-2H)a_j$，并且 $a = (a_1,\ldots,a_n) \in A_n$。因此,

$$\|f_n(\cdot,x;t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} \leq c_H^n \frac{t^n}{n!}\sum_{\alpha\in D_n}\int_{T_n(t)}\prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\eta_j)\right|^2 |\eta_j|^{\alpha_j} d\eta_j\right) d\boldsymbol{t}.$$

上面的内层积分使用式（22）计算。在我们的情形下， $\alpha_j = 2(1-2H) < 1$，因为$H > 1/4$。利用粗略估计（6），我们推得：

$$\|\widetilde{f}_n(\cdot,x;t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} \le \|f_n(\cdot,x;t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} \le C^n \frac{t^n}{n!} \sum_{\alpha\in D_n} \int_{T_n(t)} \prod_{j=1}^{n} (t_{j+1}-t_j)^{1-\alpha_j} d\boldsymbol{t} \le C^n \frac{t^{(2H+2)n}}{(n!)^{2H+2}}, \tag{25}$$

其中， $C>0$ 是一个依赖于 H 的常数，且 H 在每次出现时都不同。利用闵可夫斯基不等式、超收缩性性质 (14) 和 (25)，我们得到：

$$\begin{aligned}\|u_\theta(t,x)\|_p &\le \sum_{n\ge 0} \theta^{n/2}(p-1)^{n/2}\|I_n(f_n(\cdot,x;t))\|_2 = \sum_{n\ge 0} \theta^{n/2}(p-1)^{n/2}(n!)^{1/2}\|\widetilde{f}_n(\cdot,x;t)\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} \\ &\le \sum_{n\ge 0} \theta^{n/2}(p-1)^{n/2} C^{n/2} \frac{t^{(H+1)n}}{(n!)^{H+1/2}}.\end{aligned}$$

利用 (21) 即可得到关系 (23)。 □

3 带 δ 初始条件的波动方程

在本节中，我们研究在 $[r,\infty$上具有零初始条件、初始速度由测度 δ_z给出的 (hAm)。该模型的解与 Malliavin 导数 Du_θ 之间的关系在本文中起着重要作用。

对于任意固定的 $\theta>0$、 $r>0$ 和 $z\in\mathbb{R}$，我们考虑以下方程 ：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,x) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + \sqrt{\theta} v(t,x)\dot{W}(x),\ t>r,\ x\in\mathbb{R} \\ v(r,\cdot)=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(r,\cdot) = \delta_z. \end{cases} \tag{26}$$

若 $v_\theta^{(r,z)}$ 满足以下方程，则称其为 (26) 的（温和 Skorohod）解：

$$v_\theta^{(r,z)}(t,x) = G_{t-r}(x-z) + \sqrt{\theta}\int_r^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) v_\theta^{(r,z)}(s,y) W(\delta y) ds, \quad t\ge r. \tag{27}$$

可以证明，如果解 $v_\theta^{(r,z)}$ 存在，那么它是唯一的，并且具有如下混沌展开：

$$v_\theta^{(r,z)}(t,x) = G_{t-r}(x-z) + \sum_{n\ge 1} \theta^{n/2} I_n\left(g_n(\cdot,z,x;r,t)\right), \tag{28}$$

其中

$$g_n(x_1,\dots,x_n,z,x;r,t) = \int_{r<t_1<\dots<t_n<t} g_n(t_1,x_1,\dots,t_n,x_n,r,z,t,x) dt_1\dots dt_n, \tag{29}$$

and

$$g_n(t_1,x_1,\dots,t_n,x_n,r,z,t,x) = G_{t-t_n}(x-x_n)\dots G_{t_1-r}(x_1-z)$$

我们记 $g_0(z,x;\ r,t) = g_0(r,z,t,x) = G_{t-r}(x-z)$。解 $v_\theta^{(r,z)}$ 存在的充要条件是式（28）中的级数在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，即

$$\sum_{n\geq 1} \theta^n n! \|\widetilde{g}_n(\cdot,z,x;r,t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} < \infty, \tag{30}$$

其中，$\widetilde{g}_n(\cdot,z,x;\ r,t)$ 是 $g_n(\cdot,z,x;\ r,t)$ 的对称化。

由于 G 的特殊形式，$v_\theta^{(r,z)}(t,x)$ 满足以下恒等式：

$$v_\theta^{(r,z)}(t,x) = 2G_{t-r}(x-z)v_\theta^{(r,z)}(t,x). \tag{31}$$

解 v_θ 的存在性及其某些性质可由其与采用另一种高斯噪声（称为 $\mathfrak{X}$）的 (hAm) 模型之间的联系推出；这种噪声在时间上是白噪声，在空间上是分数噪声（与噪声 W具有相同的 Hurst 指数 H）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}(t,x) = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) + \sqrt{\theta} V(t,x)\dot{\mathfrak{X}}(t,x),\ t>r,\ x\in\mathbb{R} \\ V(r,\cdot) = 0,\ \dfrac{\partial V}{\partial t}(r,\cdot) = \delta_z. \end{cases} \tag{32}$$

更准确地说，$\{\mathfrak{X}(\varphi);\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\}$ 是一个均值为零、协方差为

$$\mathbb{E}[\mathfrak{X}(\varphi)\mathfrak{X}(\psi)] = c_H \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(t,\cdot)\overline{\mathcal{F}\psi(t,\cdot)(\xi)}|\xi|^{1-2H} d\xi dt =: \langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{H}_0}, \tag{33}$$

它可以扩展为等距正态高斯过程 $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{X}(\varphi);\varphi\in\mathcal{H}_0\}$，其中 $\mathcal{H}_0$ 是关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_0}$ 的 $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ 的完备化。

若 $V_\theta^{(r,z)}$ 满足以下条件，我们称其为 (32) 的（温和 Skorohod）解：

$$V_\theta^{(r,z)}(t,x) = G_{t-r}(x-z) + \sqrt{\theta}\int_r^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)V_\theta^{(r,z)}(s,y)\mathfrak{X}(ds,dy), \quad t\geq r. \tag{34}$$

采用与 [3], 定理 3.8 的证明类似的方法，我们在附录 B 中证明方程 (32) 存在唯一解 $V_\theta^{(r,z)}$，且其矩一致有界：

$$K_{\theta,T,p} := \sup_{0\leq r<t\leq T}\sup_{x,z\in\mathbb{R}} \|V_\theta^{(r,z)}(t,x)\|_p < \infty. \tag{35}$$

见例 (B.2)。此外，解 $V_\theta^{(r,z)}$ 具有如下混沌展开

$$V_\theta^{(r,z)}(t,x) = G_{t-r}(x-z) + \sum_{n\geq 1}\theta^{n/2} I_n^{\mathfrak{X}}(g_n(\cdot,r,z,t,x)), \tag{36}$$

其中，$I_n^{\mathfrak{X}}$ 是关于 $\mathfrak{X}$ 的第 n 重积分。由于解 $V_\theta^{(r,z)}$ 存在，级数 (36) 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛。即

$$\sum_{n\geq 1} n!\theta^n \|\widetilde{g}_n(\cdot,r,z,t,x)\|^2_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}} < \infty, \tag{37}$$

其中，$\widetilde{g}_n(\cdot,r,z,t,x)$ 是 $g_n(\cdot,r,z,t,x)$ 的对称化。

现在我们证明解 $v_\theta^{(r,z)}$ 的存在性，并证明其矩也一致有界。

定理 3.1. 对任意 $r>0$、 $z\in\mathbb{R}$，方程 (26) 存在唯一解 $v_\theta^{(r,z)}$。此外，对于任意 $\theta>0$、$p\geq 2$ 和 $T>0$，有：

$$C_{\theta,p,T,v}:=\sup_{0\leq r\leq t\leq T}\sup_{z,x\in\mathbb{R}}\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)\|_p<\infty. \tag{38}$$

证明。我们记 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1\dots d\xi_n)$。根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\|g_n(\cdot,z,x;r,t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}\\
&=c_H^n\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{r<t_1<\ldots<t_n<t}\mathcal{F}g_n(t_1,\cdot,\ldots,t_n,\cdot,r,z,t,x)(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{t}\right|^2\prod_{j=1}^n|\xi_j|^{1-2H}d\boldsymbol{\xi}\\
&\leq c_H^n\frac{(t-r)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{r<t_1<\ldots<t_n<t}\left|\mathcal{F}g_n(t_1,\cdot,\ldots,t_n,\cdot,r,z,t,x)(\boldsymbol{\xi})\right|^2d\boldsymbol{t}\prod_{j=1}^n|\xi_j|^{1-2H}d\boldsymbol{\xi}\\
&=\frac{(t-r)^n}{n!}\|g_n(\cdot,r,z,t,x)\|^2_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}}.
\end{aligned}$$

由于 $g_n(t_1,x_1,\ldots,t_n,x_n,r,z,t,x)$ 包含集合 $t_1<\ldots<t_n$ 的示性函数，

$$\|g_n(\cdot,r,z,t,x)\|^2_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}}=n!\|\widetilde{g}_n(\cdot,r,z,t,x)\|^2_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}}.$$

我们得到：

$$\|\widetilde{g}_n(\cdot,z,x;r,t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}\leq\|g_n(\cdot,z,x;r,t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}\leq(t-r)^n\|\widetilde{g}_n(\cdot,r,z,t,x)\|^2_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}},$$

由 (37) 可知级数 (30) 收敛。这证明了解 $v_\theta^{(r,z)}$ 的存在性。此外，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|v_\theta^{(r,z)}(t,x)|^2&=\sum_{n\geq 0}\theta^n n!\|\widetilde{g}_n(\cdot,z,x;r,t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}\\
&\leq\sum_{n\geq 0}\theta^n n!(t-r)^n\|\widetilde{g}_n(\cdot,r,z,t,x)\|^2_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}}=\mathbb{E}|V^{(r,z)}_{\theta(t-r)}(t,x)|^2.
\end{aligned}\tag{39}$$

为处理高阶矩，我们使用 L^e 的超收缩原理。请注意，该原理最初是在 [23] 中针对热方程提出的，但实际上对更广泛的一类随机偏微分方程也成立（参见 [1] 的定理 B.1）。由该原理结合 (39)，我们推得

$$\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)\|_p\leq\|v^{(r,z)}_{(p-1)\theta}(t,x)\|_2\leq\|V^{(r,z)}_{(p-1)\theta(t-r)}(t,x)\|_2\leq\|V^{(r,z)}_{(p-1)\theta T}(t,x)\|_2.$$

关系式 (38) 可由 (35) 得出。 □

我们以给出 v_θ 的某些积分的一个一致界结束本节，该界将在定理 1.2 的证明中用到。

引理 3.2. 对任意 $\theta>0$、 $p\geq 2$、 $q>0$ 和 $t>0$，

$$\sup_{r\in[0,t]}\sup_{z\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)\|_p^q dx\leq 2tC^q_{\theta,p,t,v}\quad and\quad\sup_{r\in[0,t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)\|_p^q dz\leq 2tC^q_{\theta,p,t,v},$$

其中$C_{\theta,\ p,\ t,\ v}$ 是由关系式 (38) 给出的常数。

证明。利用恒等式 (31) 和关系式 (38)，我们得到：

$$\int_{\mathbb{R}} \|v_\theta^{(r,z)}(t,x)\|_p^q dx = 2^q \int_{\mathbb{R}} G_{t-r}^q(x-z)\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)\|_p dx$$
$$\leq C_{\theta,t,p,v}^q 2^q \int_{\mathbb{R}} G_{t-r}^q(x-z)dx = 2C_{\theta,t,p,v}^q(t-r).$$

另一个结论的证明类似。 □

4 Malliavin 导数的估计

本节中，我们给出 $Du_\theta(t,x)$ 和 $D^2u_\theta(t,x)$ 及其增量的一些估计，这些估计是利用与 v_θ 的联系得到的。若将时间 $\mathfrak{X}$ 上具有白噪声的 (hAm) 的解记为 U_θ，则可以证明 $D_{r,z}U_\theta(t,x) = U_\theta(r,z)V_{(r,z)\theta}(t,x)$。这一关系对于时间无关噪声并不成立。所幸，在引理 2.2 和 2.1 的帮助下，我们仍然可以建立 $Du_\theta(t,x)$ 与 v_θ 之间的联系。

我们首先注意到，对于任意固定的 $z \in \mathbb{R}$，$D_z u_\theta(t,x)$ 都有如下混沌展开：

$$D_z u_\theta(t,x) = \sum_{n\geq 1} \theta^{n/2} n I_{n-1}(\tilde{f}_n(\cdot,z,x;t)). \tag{40}$$

参见 (9)。对于任意固定的 $z \in \mathbb{R}^d$，我们有如下分解：

$$\widetilde{f}_n(\cdot,z,x;t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n h_j^{(n)}(\cdot,z,x;t), \tag{41}$$

其中，$h_j^{(n)}(\cdot,z,x;\,t)$ 是函数 $f_j^{(n)}(\cdot,z,x;\,t)$ 的对称化，该函数定义如下：

$$f_j^{(n)}(x_1,\ldots,x_{n-1},z,x;t) = f_n(x_1,\ldots,x_{j-1},z,x_j,\ldots,x_{n-1},x;t)$$
$$= \int_{\{0<t_1<\ldots<t_{j-1}<r<t_j<\ldots<t_{n-1}<t\}} G_{t-t_{n-1}}(x-x_{n-1})\ldots G_{t_j-r}(x_j-z)G_{r-t_{j-1}}(z-x_{j-1})\ldots$$
$$G_{t_2-t_1}(x_2-x_1)dt_1\ldots dt_{n-1}dr.$$

如果级数 (40) 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，那么 $u_\theta(t,x) \in \mathbb{D}^{1,2}$ 且 $D_\cdot u_\theta(t,x)$ 是 z 中的一个函数。在这种情况下，

$$D_z u_\theta(t,x) = \sum_{n\geq 1}\theta^{n/2}\sum_{j=1}^n I_{n-1}(f_j^{(n)}(\cdot,z,x;t)). \tag{42}$$

为了证明下文第 6.2 节中的定量中心极限定理，我们需要对 u_θ 的 Malliavin 导数增量进行一些估计。我们将在接下来的两个定理中给出这些估计。这些定理的 a) 部分给出了一些本文并不需要的估计。我们列出这些估计，是为了与文献中已有的类似结果进行比较，例如，[4] 关于时间有色噪声的定理 1.3，以及 [5] 关于时间无关噪声的定理 3.1–3.2。

定理 4.1. a) 对任意 $\theta > 0$、 $p \geq 2$、 $0 \leq t \leq T$ 和 x、 $z \in \mathbb{R}$,

$$\|D_z u_\theta(t,x)\|_p \leq C \int_0^t G_{t-r}(x-z)dr, \tag{43}$$

其中 $C = 2\sqrt{\theta} C_{4(p-1)\theta,2,T,u} C_{4(p-1)\theta,2,T,v}$、$C_{\theta,p,T,u}$、$C_{\theta,p,T,v}$ 是定理 2.3 和 3.1 给出的常数。

b) 对任意 $\theta > 0$、 $p \geq 2$、 $0 \leq t \leq T$ 和 x、 z、 $z' \in \mathbb{R}$,

$$\|D_z u_\theta(t,x) - D_{z+z'} u_\theta(t,x)\|_p \leq \sqrt{2\theta} \int_0^t I_1(z,z',x;r,t)dr,$$

其中

$$I_1(z,z',x;r,t) = \|u_\eta(r,z) - u_\eta(r,z+z')\|_2 \left\|v_\eta^{(r,z)}(t,x)\right\|_2 + \|u_\eta(r,z+z')\|_2 \left\|v_\eta^{(r,z)}(t,x) - v_\eta^{(r,z+z')}(t,x)\right\|_2$$

且 $\eta = 4(p-1)\theta$。

证明。a) 使用记号 (18) 和 (29)，我们可以写成

$$f_j^{(n)}(\cdot,z,x;t) = \int_0^t f_{j-1}(\cdot,z;r) \otimes g_{n-j}(\cdot,z,x;r,t)dr. \tag{44}$$

根据随机 Fubini 定理，我们可以交换 dr 积分与多重 Wiener 积分 I_{n-1} 的次序。于是得到:

$$I_{n-1}(f_j^{(n)}(\cdot,z,x;t)) = \int_0^t I_{n-1}(f_{j-1}(\cdot,z;r) \otimes g_{n-j}(\cdot,z,x;r,t))dr. \tag{45}$$

根据定义 (29) 和特殊形式 $2G_t(x) = \mathbf{1}_{|x|\leq t} = 4G_t^2(x)$，我们有恒等式 $g_{n-j}(\cdot,z,x;\, r,t) = 2G_{t-r}(x-z) g_{n-j}(\cdot,z,x;\, r,t)$。因此，由 (45)、柯西-施瓦茨不等式以及引理 2.1，我们得到

$$\begin{aligned}
\left\|I_{n-1}(f_j^{(n)}(\cdot,z,x;t))\right\|_2^2 &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t 2G_{t-r}(x-z) I_{n-1}(f_{j-1}(\cdot,z;r) \otimes g_{n-j}(\cdot,z,x;r,t))dr\right)^2\right] \\
&\leq \int_0^t 2G_{t-r}(x-z)dr \int_0^t \|I_{n-1}(f_{j-1}(\cdot,z;r) \otimes g_{n-j}(\cdot,z,x;r,t))\|_2^2 \, dr \\
&\leq \binom{n-1}{j-1} \int_0^t 2G_{t-r}(x-z)dr \int_0^t \|I_{j-1}(f_{j-1}(\cdot,z;r))\|_2^2 \, \|I_{n-j}(g_{n-j}(\cdot,z,x;r,t))\|_2^2 \, dr.
\end{aligned}$$

因此，由 (42)、正交性和柯西-施瓦茨不等式，以及不等式 $(\sum_{j=1}^n a_j)^2 \leq n \sum_{j=1}^n a_j^2$、$n \leq 2^{n-1}$ 和 $\binom{n-1}{j-1} \leq 2^{n-1}$，可得

$$\|D_z u_\theta(t,x)\|_2^2 = \sum_{n\geq 1} \theta^n \left\|\sum_{j=1}^n I_{n-1}(f_j^{(n)}(\cdot,z,x;t))\right\|_2^2 \leq \sum_{n\geq 1} \theta^n n \sum_{j=1}^n \left\|I_{n-1}(f_j^{(n)}(\cdot,z,x;t))\right\|_2^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^t 2G_{t-r}(x-z)dr \sum_{n\geq 1} 4^{n-1}\theta^n \sum_{j=1}^n \int_0^t \left\|I_{j-1}(f_{j-1}(\cdot,z;r))\right\|_2^2 \left\|I_{n-j}(g_{n-j}(\cdot,z,x;r,t))\right\|_2^2 dr \\
&= \theta \int_0^t 2G_{t-r}(x-z)dr \\
&\int_0^t \sum_{j\geq 1}(4\theta)^{j-1} \left\|I_{j-1}(f_{j-1}(\cdot,z;r))\right\|_2^2 \left(\sum_{n\geq j}(4\theta)^{n-j} \left\|I_{n-j}(g_{n-j}(\cdot,z,x;r,t))\right\|_2^2\right) dr \\
&= \theta \int_0^t 2G_{t-r}(x-z)dr \int_0^t \|u_{4\theta}(r,z)\|_2^2 \|v_{4\theta}^{(r,z)}(t,x)\|_2^2 dr.
\end{aligned}
$$

利用恒等式 (31) 以及定理 2.3 和 3.1，可得

$$
\begin{aligned}
\|D_z u_\theta(t,x)\|_2^2 \leq & 4\theta \int_0^t G_{t-r}(x-z)dr \int_0^t \|u_{4\theta}(r,z)\|_2^2 \|v_{4\theta}^{(r,z)}(t,x)\|_2^2 G_{t-r}(x-z)dr \\
\leq & 4\theta C_{4\theta,2,T,u}^2 C_{4\theta,2,T,v}^2 \left(\int_0^t G_{t-r}(x-z)dr\right)^2.
\end{aligned}
$$

由引理 A.1 可知，娱乐主管

$$
\|D_z u_\theta(t,x)\|_p \leq \frac{1}{\sqrt{p-1}} \|D_z u_{(p-1)\theta}(t,x)\|_2 \leq 2\sqrt{\theta} C_{4(p-1)\theta,2,t,u} C_{4(p-1)\theta,2,t,v} \int_0^t G_{t-r}(x-z)dr.
$$

b) 根据引理 A.1、(42)、正交性、柯西-施瓦茨不等式、不等式$n \leq 2^{n-1}$和引理 2.2，我们有：

$$
\begin{aligned}
\|D_z u_\theta(t,x) - D_{z+z'} u_\theta(t,x)\|_p^2 &\leq \frac{1}{p-1} \left\|D_z u_{(p-1)\theta}(t,x) - D_{z+z'} u_{(p-1)\theta}(t,x)\right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{p-1} \sum_{n\geq 1} \left((p-1)\theta\right)^n \left\|\sum_{j=1}^n I_{n-1}\left(f_j^{(n)}(\cdot,z,x;t) - f_j^{(n)}(\cdot,z+z',x;t)\right)\right\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{p-1} \sum_{n\geq 1} \left((p-1)\theta\right)^n n \sum_{j=1}^n \left\|I_{n-1}\left(f_j^{(n)}(\cdot,z,x;t) - f_j^{(n)}(\cdot,z+z',x;t)\right)\right\|_2^2 \\
&\leq \theta \sum_{n\geq 1} \left(2(p-1)\theta\right)^{n-1} \sum_{j=1}^n \left\|I_{n-1}\left(f_j^{(n)}(\cdot,z,x;t) - f_j^{(n)}(\cdot,z+z',x;t)\right)\right\|_2^2.
\end{aligned}
$$

令 $\tau = 2(p-1)\theta$。利用（44）来表示 $f_{(n)j}(\cdot,z,x;\ t)$ 和 $f_j^{(n)}(\cdot,z+z',x;\ t)$，我们得到 ：

$$
\|D_z u_\theta(t,x) - D_{z+z'} u_\theta(t,x)\|_p^2 \leq 2\theta(T_1+T_2),
$$

其中

$$
T_1 = \sum_{n\geq 1} \tau^{n-1} \sum_{j=1}^n \left\|I_{n-1}\left(\int_0^t \left(f_{j-1}(\cdot,z;r) - f_{j-1}(\cdot,z+z';r)\right) \otimes g_{n-j}(\cdot,z,x;r,t)dr\right)\right\|_2^2
$$

$$T_2=\sum_{n\geq 1}\tau^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left\|I_{n-1}\left(\int_0^t f_{j-1}(\cdot,z+z';r)\otimes\big(g_{n-j}(\cdot,z,x;r,t)-g_{n-j}(\cdot,z+z',x;r,t)\big)dr\right)\right\|_2^2.$$

现在我们利用以下事实：对于任意的 $\theta>0$，以及任意满足下述积分有定义的函数 $(h_n)_{n\geq 0}$ 和 $(h_n')_{n\geq 0}$，根据引理 2.2，有：

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1}\theta^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left\|I_{n-1}\left(\int_0^t h_{j-1}(\cdot,r)\otimes h'_{n-j}(\cdot,r)dr\right)\right\|_2^2\\
&\quad=\sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0}\theta^{p+q}\left\|I_{p+q}\left(\int_0^t h_p(\cdot,r)\otimes h'_q(\cdot,r)dr\right)\right\|_2^2\\
&\quad\leq\left(\int_0^t\left\|\sum_{p\geq 0}(2\theta)^{p/2}I_p\big(h_p(\cdot,r)\big)\right\|_2\left\|\sum_{q\geq 0}(2\theta)^{q/2}I_q\big(h'_q(\cdot,r)\big)\right\|_2 dr\right)^2.
\end{aligned}$$

结论可通过对 $u_\theta(t,x)$ 和 $v_\theta^{(r,z)}(t,x)$ 的混沌分解得到。 □

现在考察二阶 Malliavin 导数。对于任意固定的 $w,z\in\mathbb{R}$，我们有如下混沌展开

$$D^2_{w,z}u_\theta(t,x)=\sum_{n\geq 2}n(n-1)\theta^{n/2}I_{n-2}\big(\widetilde{f}_n(\cdot,w,z,x;t)\big). \tag{46}$$

注意到

$$\widetilde{f}_n(\cdot,w,z,x;t)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}h_{ij}^{(n)}(\cdot,w,z,x;t), \tag{47}$$

其中，$h_{ij}^{(n)}(\cdot,w,z,x;\,t)$ 是函数 $f_{ij}^{(n)}(\cdot,w,z,x;\,t)$ 的对称化，该函数定义如下。如果 $i<j$,

$$\begin{aligned}
&f_{ij}^{(n)}(x_1,\ldots,x_{n-2},w,z,x;t)\\
&\quad=f_n(x_1,\ldots,x_{i-1},w,x_i,\ldots,x_{j-2},z,x_{j-1},\ldots,x_{n-2},x;t)\\
&\quad=\int_{\{0<t_1<\ldots<t_{i-1}<s<t_i<\ldots<t_{j-2}<r<t_{j-1}<\ldots<t_{n-2}<t\}}G_{t-t_{n-2}}(x-x_{n-2})\ldots G_{t_{j-1}-r}(x_{j-1}-z)\\
&\quad G_{r-t_{j-2}}(z-x_{j-2})\ldots G_{t_i-s}(x_i-w)G_{s-t_{i-1}}(w-x_{i-1})\ldots G_{t_2-t_1}(x_2-x_1)dt_1\ldots dt_{n-2}drds\\
&\quad=\int_{0<s<r<t}drdsf_{i-1}(x_1,\ldots,x_{i-1},w;s)g_{j-i-1}(x_i,\ldots,x_{j-2},w,z;s,r)g_{n-j}(x_{j-1},\ldots,x_{n-2},z,x;r,t).
\end{aligned}$$

如果 $j<i$,

$$\begin{aligned}
&f_{ij}^{(n)}(x_1,\ldots,x_{n-2},w,z,x;t)\\
&\quad=\int_{0<s<r<t}drdsf_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1},z;s)g_{i-j-1}(x_j,\ldots,x_{i-2},z,w;s,r)g_{n-i}(x_{i-1},\ldots,x_{n-2},w,x;r,t)
\end{aligned}$$

在这两种情况下，w 位于位置 i，而 z 位于位置 j。因此，

$$D^2_{w,z}u_\theta(t,x)=\sum_{n\geq 2}\theta^{n/2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}I_{n-2}\big(f_{ij}^{(n)}(\cdot,w,z,x;t)\big). \tag{48}$$

定理 4.2. a) 对任意 $\theta>0$、 $p\geq 2$、 $0\leq t\leq T$ 和 x、 z、 $w\in\mathbb{R}$,

$$\|D^2_{w,z}u_\theta(t,x)\|_p\leq C\widetilde{f}_2(w,z,t,x) \tag{49}$$

其中 $C=4\theta C_{6\theta(p-1),2,T,u}C^2_{6\theta(p-1),2,T,v}$。

b) 对任意 $\theta>0$, $p\geq 2$, $0\leq t\leq T$和 $x,z,z',w,w'\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\left\|D^2_{z,y}u_\theta(t,x)-D^2_{z,y+y'}u_\theta(t,x)-D^2_{z+z',y}u_\theta(t,x)+D^2_{z+z',y+y'}u_\theta(t,x)\right\|_p\\&\quad\leq 4\theta\int_{0<s<r<t}\big(I_2(z,z',y,y',x;s,r,t)+I_2(y,y',z,z',x;s,r,t)\big)dsdr,\end{aligned} \tag{50}$$

其中 $I_2(z,z',y,y',x;\ s,r,t)=\sum_{k=1}^4 I_{2,k}(z,z',y,y',x;\ s,r,t)$ 和

$$\begin{aligned}I_{2,1}(z,z',y,y',x;s,r,t)&=\|u_\eta(s,z)-u_\eta(s,z+z')\|_2\left\|v^{(s,z)}_\eta(r,y)\right\|_2\left\|v^{(r,y)}_\eta(t,x)-v^{(r,y+y')}_\eta(t,x_3)\right\|_2\\
I_{2,2}(z,z',y,y',x;s,r,t)&=\|u_\eta(s,z+z')\|_2\left\|v^{(s,z)}_\eta(r,y)-v^{(s,z+z')}_\eta(r,y)\right\|_2\left\|v^{(r,y)}_\eta(t,x)-v^{(r,y+y')}_\eta(t,x)\right\|_2\\
I_{2,3}(z,z',y,y',x;s,r,t)&=\|u_\eta(s,z)-u_\eta(s,z+z')\|_2\left\|v^{(s,z)}_\eta(r,y)-v^{(s,z)}_\eta(r,y+y')\right\|_2\left\|v^{(r,y+y')}_\eta(t,x)\right\|_2\\
I_{2,4}(z,z',y,y',x;s,r,t)&=\|u_\eta(s,z+z')\|_2\\&\quad\left\|v^{(s,z)}_\eta(r,y)-v^{(s,z)}_\eta(r,y+y')-v^{(s,z+z')}_\eta(r,y)+v^{(s,z+z')}_\eta(r,y+y')\right\|_2\left\|v^{(r,y+y')}_\eta(t,x)\right\|_2.\end{aligned}$$

以及 $\eta=6(p-1)\theta$。

证明。a) 证明与定理 4.1.a) 的证明类似。细节从略。b) 由引理 A.1、(48)、正交性和不等式 $(\sum_{k=1}^N a_k)^2\leq N\sum_{k=1}^N a_k^2$,

$$\begin{aligned}&\left\|D^2_{z,y}u_\theta(t,x)-D^2_{z,y+y'}u_\theta(t,x)-D^2_{z+z',y}u_\theta(t,x)+D^2_{z+z',y+y'}u_\theta(t,x)\right\|^2_p\\
&\quad\leq\frac{1}{(p-1)^2}\left\|D^2_{z,y}u_{(p-1)\theta}(t,x)-D^2_{z,y+y'}u_{(p-1)\theta}(t,x)-D^2_{z+z',y}u_{(p-1)\theta}(t,x)+D^2_{z+z',y+y'}u_{(p-1)\theta}(t,x)\right\|^2_2\\
&\quad=\frac{1}{(p-1)^2}\sum_{n\geq 2}\big((p-1)\theta\big)^n\Big\|\sum_{i,j=1,i\neq j}^n I_{n-2}\Big(f^{(n)}_{ij}(\cdot,z,y,x;t)-f^{(n)}_{ij}(\cdot,z,y+y',x;t)\\
&\qquad-f^{(n)}_{ij}(\cdot,z+z',y,x;t)+f^{(n)}_{ij}(\cdot,z+z',y+y',x;t)\Big)\Big\|^2_2\\
&\quad\leq\frac{1}{(p-1)^2}\sum_{n\geq 2}\big((p-1)\theta\big)^n n(n-1)\sum_{i,j=1,i\neq j}^n\Big\|I_{n-2}\Big(f^{(n)}_{ij}(\cdot,z,y,x;t)-f^{(n)}_{ij}(\cdot,z,y+y',x;t)\\
&\qquad-f^{(n)}_{ij}(\cdot,z+z',y,x;t)+f^{(n)}_{ij}(\cdot,z+z',y+y',x;t)\Big)\Big\|^2_2=:\frac{1}{(p-1)^2}(S_1+S_2).\end{aligned} \tag{51}$$

其中, S_1 和 S_2 分别表示对应于 $i<j$ 和 $j<i$ 的和。

我们先处理求和 S_1。当 $i<j$ 时, 可以写成

$$f^{(n)}_{ij}(\cdot,z,y,x;t)=\int_{0<s<r<t}f_{i-1}(\cdot,z;s)\otimes g_{j-i-1}(\cdot,z,y;s,r)\otimes g_{n-j}(\cdot,y,x;r,t)dsdr.$$

此外，我们有如下分解（第一步将前两项和最后两项配对，第二步再将第一项和第三项配对）：

$$\begin{aligned}
&a_z\otimes b_{z,y}\otimes c_y - a_z\otimes b_{z,y+y'}\otimes c_{y+y'} - a_{z+z'}\otimes b_{z+z',y}\otimes c_y + a_{z+z'}\otimes b_{z+z',y+y'}\otimes c_{y+y'}\\
=&a_z\otimes b_{z,y}\otimes (c_y - c_{y+y'}) + a_z\otimes (b_{z,y} - b_{z,y+y'})\otimes c_{y+y'}\\
&- a_{z+z'}\otimes b_{z+z',y}\otimes (c_y - c_{y+y'}) - a_{z+z'}\otimes (b_{z+z',y} - b_{z+z',y+y'})\otimes c_{y+y'}\\
=&(a_z - a_{z+z'})\otimes b_{z,y}\otimes (c_y - c_{y+y'}) + a_{z+z'}\otimes (b_{z,y} - b_{z+z',y})\otimes (c_y - c_{y+y'})\\
&+ (a_z - a_{z+z'})\otimes (b_{z,y} - b_{z,y+y'})\otimes c_{y+y'} + a_{z+z'}\otimes (b_{z,y} - b_{z,y+y'} - b_{z+z',y} + b_{z+z',y+y'})\otimes c_{y+y'}.
\end{aligned}$$

因此，对于任意 $1\le i<j\le n$,

$$\begin{aligned}
&f_{ij}^{(n)}(\cdot,z,y,x;t) - f_{ij}^{(n)}(\cdot,z,y+y',x;t) - f_{ij}^{(n)}(\cdot,z+z',y,x;t) + f_{ij}^{(n)}(\cdot,z+z',y+y',x;t)\\
&\qquad = \sum_{k=1}^{4}\int_{0<s<r<t} A_{ij,k}^{(n)}(s,r)dsdr,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_{ij,1}^{(n)}(s,r) &:= \big(f_{i-1}(\cdot,z;s) - f_{i-1}(\cdot,z+z';s)\big)\otimes g_{j-i-1}(\cdot,z,y;s,r)\\
&\quad\otimes\big(g_{n-j}(\cdot,y,x;r,t) - g_{n-j}(\cdot,y+y',x;r,t)\big)\\
A_{ij,2}^{(n)}(s,r) &:= f_{i-1}(\cdot,z+z';s)\otimes\big(g_{j-i-1}(\cdot,z,y;s,r) - g_{j-i-1}(\cdot,z+z',y;s,r)\big)\\
&\quad\otimes\big(g_{n-j}(\cdot,y,x;r,t) - g_{n-j}(\cdot,y+y',x;r,t)\big)\\
A_{ij,3}^{(n)}(s,r) &:= \big(f_{i-1}(\cdot,z;s) - f_{i-1}(\cdot,z+z';s)\big)\otimes\big(g_{j-i-1}(\cdot,z,y;s,r) - g_{j-i-1}(\cdot,z,y+y';s,r)\big)\\
&\quad\otimes g_{n-j}(\cdot,y+y',x;r,t)\\
A_{ij,4}^{(n)}(s,r) &:= f_{i-1}(\cdot,z+z';s)\otimes\big(g_{j-i-1}(\cdot,z,y;s,r) - g_{j-i-1}(\cdot,z,y+y';s,r) - g_{j-i-1}(\cdot,z+z',y;s,r)\\
&\quad + g_{j-i-1}(\cdot,z+z',y+y';s,r)\big)\otimes g_{n-j}(\cdot,y+y',x;r,t)
\end{aligned}$$

利用不等式 $n(n-1)\le 2^n$ 以及不等式 $(\sum_{k=1}^4 a_k)^4\le 4\sum_{k=1}^4 a_k^2$，我们得到

$$\begin{aligned}
S_1 &\le \sum_{n\ge 2}\sum_{1\le i<j\le n}\big(2(p-1)\theta\big)^n\bigg\|I_{n-2}\Big(f_{ij}^{(n)}(\cdot,z,y,x;t) - f_{ij}^{(n)}(\cdot,z,y+y',x;t) - f_{ij}^{(n)}(\cdot,z+z',y,x;t)\\
&\qquad + f_{ij}^{(n)}(\cdot,z+z',y+y',x;t)\Big)\bigg\|_2^2\\
&\le 16(p-1)^2\theta^2\sum_{k=1}^{4}\sum_{n\ge 2}\big(2(p-1)\theta\big)^{n-2}\sum_{1\le i<j\le n}\bigg\|I_{n-2}\Big(\int_{0<s<r<t}A_{ij,k}^{(n)}(s,r)drdr\Big)\bigg\|_2^2.
\end{aligned}$$

现在利用这样一个事实：对于任意 $\theta>0$，以及任意使下列积分有定义的函数 h_n、h_n'、h_n''，由引理 2.2 可得：

$$\sum_{n\ge 2}\theta^{n-2}\sum_{i,j=1,i<j}^{n}\bigg\|I_{n-2}\left(\int_{0<s<r<t}h_{j-1}(\cdot,s)\otimes h_{j-i-1}'(\cdot,s,r)\otimes h_{n-j}''(\cdot,r)dsdr\right)\bigg\|_2^2$$

$$= \sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0}\sum_{k\geq 0}\theta^{p+q+k}\left\|I_{p+q+k}\left(\int_{0<s<r<t}h_p(\cdot,s)\otimes h_q'(\cdot,s,r)\otimes h_k''(\cdot,r)dsdr\right)\right\|_2^2$$

$$\leq \left(\int_{0<s<r<t}\left\|\sum_{p\geq 0}(3\theta)^{p/2}I_p(h_p(\cdot,s))\right\|_2\left\|\sum_{q\geq 0}(3\theta)^{q/2}I_q(h_q'(\cdot,s,r))\right\|_2\left\|\sum_{k\geq 0}(3\theta)^{k/2}I_k(h_k''(\cdot,r))\right\|_2 dsdr\right)^2.$$

利用 $u_\theta(t,x)$ 和 $v_\theta^{(r,z)}(t,x)$ 的混沌分解，我们推得：

$$S_1 \leq 16(p-1)^2\theta^2\sum_{k=1}^{4}\left(\int_{0<s<r<t}I_{2,k}(z,z',y,y',x;s,r,t)dsdr\right)^2.$$

利用不等式 $\sum_{i=1}^4 a_i^2 \leq (\sum_{i=1}^4 a_i)^2$，对于 $a_i>0$，可得：

$$S_1 \leq \left(4(p-1)\theta\int_{0<s<r<t}I_2(z,z',y,y',x;s,r,t)dsdr\right)^2. \tag{52}$$

对于和 S_2（对应于情形 $j<i$），也有类似的公式；该公式可通过交换 (y,y',i) 和 (z,z',j) 得到：

$$S_2 \leq \left(4(p-1)\theta\int_{0<s<r<t}I_2(y,y',z,z',x_3;s,r,t)dsdr\right)^2. \tag{53}$$

关系式 (71) 可由 (51)、(52) 和 (53) 得出。 □

5 u_θ 和 v_θ 的增量

本节研究涉及解 u_θ 和 v_θ 增量的一些积分，这些积分将在定量中心极限定理的证明中用到。这些过程的某些平稳性性质起着关键作用。

第一个结果考察 u_θ 的增量。

引理 5.1. 对任意 $\theta>0$、$p\geq 2$ 和 $T>0$,

$$C'_{u,p,H,T,\theta} := \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\|u_\theta(t,x)-u_\theta(t,x+h)\|_p^2|h|^{2H-2}dh<\infty.$$

证明. 根据定理 2.3，由于 $H<1/2$，我们有：

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}}\int_{|h|>1}\|u_\theta(t,x)-u_\theta(t,x+h)\|_p^2|h|^{2H-2}dh \leq 2C_{\theta,p,T,u}\int_{|h|>1}|h|^{2H-2}dh<\infty.$$

接下来只需处理在集合 $|h|\leq 1$ 上的积分。

我们使用混沌展开 $u_\theta(t,x)-u_\theta(t,x+h)=\sum_{n\geq 1}\theta^{n/2}I_n(f_{n,h}(\cdot,x;t))$，其中 $f_{n,h}(\cdot,x;t)=f_n(\cdot,x;t)-f_n(\cdot,x+h;t)$。根据超收缩性 (14),

$$\|u(t,x)-u(t,x+h)\|_p \leq \sum_{n\geq 1}(p-1)^{n/2}\theta^{n/2}\|I_n(f_{n,h}(\cdot,x;t))\|_2 = \sum_{n\geq 1}(p-1)^{n/2}\theta^{n/2}[J_{n,h}(t)]^{1/2} \tag{54}$$

~其中 $J_{n,\ h}(t)\ = n!\ \|f_{n,\ h}(\cdot, x;\ t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}$。注意，

$$f_{n,h}(x_1,\dots,x_n,x;t)=\int_{T_n(t)} f_{n,h}(t_1,x_1,\dots,t_n,x_n,t,x)d\mathbf{t},$$

其中 $f_{n,h}(\cdot,t,x)\ =\ f_n(\cdot,t,x)\ -\ f_n(\cdot,t,x+h)$ 和 $\ f_n(\cdot,t,x)$ 由 (19) 给出。利用粗略估计 (6)，再应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&J_{n,h}(t)\le n!\|f_{n,h}(\cdot,x;t)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}\\
=&c_H^n n!\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{T_n(t)}\mathcal{F}f_{n,h}(t_1,\cdot,\dots,t_n,\cdot,t,x)(\xi_1,\dots,\xi_n)d\boldsymbol{t}\right|^2\prod_{j=1}^n|\xi_j|^{1-2H}d\boldsymbol{\xi}\\
\le&c_H^n t^n\int_{T_n(t)}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}f_{n,h}(t_1,\cdot,\dots,t_n,\cdot,t,x)(\xi_1,\dots,\xi_n)|^2\prod_{j=1}^n|\xi_j|^{1-2H}d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{t}\\
\le&c_H^n t^n\int_{T_n(t)}\int_{\mathbb{R}^n}|1-e^{-i(\xi_1+\ldots+\xi_n)h}|^2\prod_{j=1}^n|\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\xi_1+\ldots+\xi_j)|^2\prod_{j=1}^n|\xi_j|^{1-2H}d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{t}\\
=&c_H^n t^n\int_{T_n(t)}\int_{\mathbb{R}^n}|1-e^{-i\eta_n h}|^2\prod_{j=1}^n|\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\eta_j)|^2\prod_{j=1}^n|\eta_j-\eta_{j-1}|^{1-2H}d\boldsymbol{\eta}d\boldsymbol{t},
\end{aligned}$$

其中我们按照约定 $\ t_{n+1}=t\ $ 和 $\ \eta_0=0$ 对变量 $\ \xi_1+\ldots+\xi_j=\eta_j$ 进行替换。上面的乘积按通常方法利用不等式 (24) 进行估计。然后利用恒等式 (22)，得到：

$$\begin{aligned}
J_{n,h}(t)&\le c_H^n t^n\sum_{\alpha\in D_n}\int_{T_n(t)}\int_{\mathbb{R}^n}|1-e^{-i\eta_n h}|^2\prod_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\eta_j)|\prod_{j=1}^n|\eta_j|^{\alpha_j}d\boldsymbol{\eta}d\boldsymbol{t}\\
&\le c^n t^n\sum_{\alpha\in D_n}\int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}}|1-e^{-i\eta_n h}|^2|\mathcal{F}G_{t-t_n}(\eta_n)|^2|\eta_n|^{\alpha_n}\eta_n\right)\\
&\qquad\left(\int_{T_{n-1}(t_n)}\prod_{j=1}^{n-1}(t_{j+1}-t_j)^{1-\alpha_j}dt_1\dots dt_{n-1}\right)dt_n\\
&\le c_{t,H}\frac{c^n t^n}{(n!)^{2H+1}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|1-e^{-i\eta_n h}|^2(1+|\eta_n|^{1-2H})\frac{\sin^2((t-t_n)|\eta_n|)}{|\eta_n|^2}t_n^{(2H+1)n-2}d\eta_n dt_n,
\end{aligned}$$

其中 $c_{t,H}=t^{1-2H}+1$，且 $\ c>0\ $ 是一个依赖于 $\ H\ $ 的常数（它可能在不同的行中取值不同）。利用界 $\sin^2((t-t_n)|\eta_n|)\ \le 1$，我们得到：

$$\begin{aligned}
J_{n,h}(t)&\le c_{t,H}\frac{c^n t^n}{(n!)^{2H+1}}t^{(2H+1)n-1}\int_{\mathbb{R}}|1-e^{-i\eta h}|^2(1+|\eta|^{1-2H})\frac{1}{|\eta|^2}d\eta\\
&\le c_{t,H}\frac{c^n}{(n!)^{2H+1}}t^{(2H+2)n-1}(|h|+|h|^{2H}).
\end{aligned}$$

现在将上述估计代入 (54)，得到：

$$\|u(t,x)-u(t,x+h)\|_p \le c_{t,H}^{1/2}\sum_{n\ge1}(p-1)^{n/2}\theta^{n/2}\frac{c^{n/2}}{(n!)^{H+1/2}}t^{(H+1)n-1/2}(|h|^{1/2}+|h|^H)$$
$$=: C_{t,p,\theta,H}(|h|^{1/2}+|h|^H),$$

其中 $C_{t,p,\theta,H} > 0$ 是一个常数，依赖于 t, p, θ, H，并且随 t 增大。因此，

$$\int_{|h|\le1}\|u(t,x)-u(t,x+h)\|_p^2|h|^{2H-2}dh \le C_{t,p,\theta,H}^2\int_{|h|\le1}(|h|+|h|^{2H})|h|^{2H-2}dh.$$

最后一个积分因条件 $H > 1/4$ 而有限。 □

下面的引理给出了 u_θ 和 v_θ的一些平移不变性性质。

引理 5.2. 对任意 $\theta > 0, 0 \le r \le t, x, z, h \in \mathbb{R}$，有：

$$u_\theta(t,x)-u_\theta(t,x+h) \overset{d}{=} u_\theta(t,0)-u_\theta(t,h)$$
$$v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x) \overset{d}{=} v_\theta^{(r,0)}(t,x-z)-v_\theta^{(r,h)}(t,x-z)$$
$$v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z)}(t,x+h) \overset{d}{=} v_\theta^{(r,0)}(t,x-z)-v_\theta^{(r,0)}(t,x+h-z)$$

此外，对于矩形差分，有：

$$v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)-v_\theta^{(r,z)}(t,x+k)+v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k) \overset{d}{=}$$
$$v_\theta^{(r,0)}(t,x-z)-v_\theta^{(r,h)}(t,x-z)-v_\theta^{(r,0)}(t,x+k-z)+v_\theta^{(r,h)}(t,x+k-z). \tag{55}$$

证明。该引理可由这些差值的混沌展开以及噪声 W 是空间齐次的这一事实推出，即对于任意 $x \in \mathbb{R}$，有 $W \overset{d}{=} W^{(x)}$，其中 $W^{(x)}(\varphi) = W(\varphi(\cdot - x))$。

□

注 5.3. 对任意 $r \in [0,t]$、$h \in \mathbb{R}$，以下积分不依赖于 x、$z \in \mathbb{R}$：

$$\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x')-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x')\right\|_p^q dx' = \int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z')}(t,x)-v_\theta^{(r,z'+h)}(t,x)\right\|_p^q dz' = I_{r,t,h}^{(\theta,p,q)}, \tag{56}$$

$$\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x')-v_\theta^{(r,z)}(t,x'+h)\right\|_p^q dx' = \int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z')}(t,x)-v_\theta^{(r,z')}(t,x+h)\right\|_p^q dz' = J_{r,t,h}^{(\theta,p,q)},$$

其中

$$I_{r,t,h}^{(\theta,p,q)} = \int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,0)}(t,x)-v_\theta^{(r,h)}(t,x)\right\|_p^q dx, \quad J_{r,t,h}^{(\theta,p,q)} = \int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,0)}(t,x)-v_\theta^{(r,0)}(t,x+h)\right\|_p^q dx.$$

为说明这一点，我们先应用引理 5.2，然后分别对左侧的积分和右侧的积分作变量替换 $x'' = x' - z$ 和 $z'' = x - z'$。此外，同样的论证表明，下面的两个积分也不依赖于 x、$z \in \mathbb{R}$：

$$\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x')-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x')-v_\theta^{(r,z)}(t,x'+k)+v_\theta^{(r,z+h)}(t,x'+k)\right\|_p^q dx'$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z')}(t,x)-v_\theta^{(r,z'+h)}(t,x)-v_\theta^{(r,z')}(t,x+k)+v_\theta^{(r,z'+h)}(t,x+k)\right\|_p^q dz'.$$

下一个结果考察 v_θ 的增量。其证明利用了 v_θ 与 V_θ 之间的联系，以及类似的不等式同样适用于 V_θ 这一事实。

引理 5.4. 对任意 $\theta > 0$、$p \geq 2$ 和 $t > 0$,

$$a) \quad \sup_{r\in[0,t]} \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \left\| v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z+h)}(t,x) \right\|_p^2 |h|^{2H-2} dxdh \leq C_{v,p,H,t,\theta},$$

$$b) \quad \sup_{r\in[0,t]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \left\| v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z+h)}(t,x) \right\|_p^2 |h|^{2H-2} dzdh \leq C_{v,p,H,t,\theta},$$

$$c) \quad \sup_{r\in[0,t]} \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \left\| v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z)}(t,x+h) \right\|_p^2 |h|^{2H-2} dxdh \leq C_{v,p,H,t,\theta},$$

$$d) \quad \sup_{r\in[0,t]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \left\| v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z)}(t,x+h) \right\|_p^2 |h|^{2H-2} dzdh \leq C_{v,p,H,t,\theta},$$

$$e) \quad \sup_{r\in[0,t]} \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left\| v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z+h)}(t,x) - v_\theta^{(r,z)}(t,x+k) + v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k) \right\|_p^2 |h|^{2H-2}|k|^{2H-2} dxdhdk \leq C_{v,p,H,t,\theta},$$

$$f) \quad \sup_{r\in[0,t]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left\| v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z+h)}(t,x) - v_\theta^{(r,z)}(t,x+k) + v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k) \right\|_p^2 |h|^{2H-2}|k|^{2H-2} dzdhdk \leq C_{v,p,H,t,\theta},$$

其中 $C_{v,\ p,\ H,\ t,\ \theta} > 0$ 是一个常数，依赖于（p、H、t、θ），且关于 t.

证明. 由注 5.3 和 (55)，我们只需证明 a)、c) 和 e)。a) 我们使用以下事实：

对任意 x、$z \in \mathbb{R}$,

$$\left\| v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z+h)}(t,x) \right\|_p^2 \leq \left\| V_{(p-1)\theta t}^{(r,z)}(t,x) - V_{(p-1)\theta t}^{(r,z+h)}(t,x) \right\|_2^2. \tag{57}$$

这可以按照定理 3.1 的证明来说明：我们先对 $p = 2$ 证明该结论（将 $g_n(\cdot, z, x;\ r, t)$ 替换为 $g_n(\cdot, z, x;\ r, t) - g_n(\cdot, z+h, x;\ r, t)$），然后利用以下事实：$\|v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\|_p \leq \|v^{(r,z)}{}_{(p-1)\theta}(t,x) - v^{(r,z+h)}{}_{(p-1)\theta}(t,x)\|_2$，这是由 L^e 的超收缩性原理（[1] 的定理 B.1）得出的；注意，$v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)$ 满足附录 B.1 的 [1] 中给出的形式的一个方程。

于是，a) 部分中的不等式可由关系式 (98)（例 B.5）推出，其中常数 $C_{v,\ p,\ H,\ t,\ \theta} = C_{V,\ 2,\ H,\ t,\ (p-1)\theta t}$，其中 $C_{V,\ p,\ H,\ t,\ \theta}$ 由 (100) 给出。

c) 对任意 $x, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left\| v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z)}(t,x+h) \right\|_p^2 &\leq \left\| v_{(p-1)\theta}^{(r,z)}(t,x) - v_{(p-1)\theta}^{(r,z)}(t,x+h) \right\|_2^2 \\ &\leq \left\| V_{(p-1)\theta t}^{(r,z)}(t,x) - V_{(p-1)\theta t}^{(r,z)}(t,x+h) \right\|_2^2, \end{aligned}$$

其中，第一个不等式由引理 A.1 得出，第二个不等式的证明与式 (57) 类似。因此，只需证明该积分即可。

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left\| V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x) - V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x+h) \right\|_2^2 |h|^{2H-2} dxdh$$

对所有 $r \in [0,t]$ 和 $z \in \mathbb{R}$，它都是一致有界的。为了处理这个积分，我们不能使用例 B.5 中的方法，因为 $V_{(r,z)\theta}(t,x) - V_{(r,z)\theta}(t,x+h)$ 不满足与定理 B.4 中所给方程类似的积分方程。因此，我们需要采用不同的方法。其思路是将增量从 x 变量转移到 z 变量，然后利用 (98) 给出的界来估计所得的积分。根据混沌展开，我们有：

$$\left\|V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x) - V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x+h)\right\|_2^2 = \left|G_{t-r}(x-z) - G_{t-r}(x+h-z)\right|^2 + \sum_{n\geq 1}(\theta t)^n n! \left\|\widetilde{g}_n(\cdot,r,z,t,x) - \widetilde{g}_n(\cdot,r,z,t,x+h)\right\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2.$$

通过直接计算可得

$$\|\widetilde{g}_n(\cdot,r,z,t,x) - \widetilde{g}_n(\cdot,r,z,t,x+h)\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2 = \|\widetilde{g}_n(\cdot,0,x,t-r,z) - \widetilde{g}_n(\cdot,0,x+h,t-r,z)\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}^2,$$

因此

$$\left\|V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x) - V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x+h)\right\|_2^2 = \left\|V_{\theta t}^{(0,x)}(t-r,z) - V_{\theta t}^{(0,x+h)}(t-r,z)\right\|_2^2.$$

我们得出，对于任意的 z、$x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left\|V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x') - V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x'+h)\right\|_2^2 |h|^{2H-2} dx' dh \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^2} \left\|V_{\theta t}^{(0,x')}(t-r,z) - V_{\theta t}^{(0,x'+h)}(t-r,z)\right\|_2^2 |h|^{2H-2} dx' dh \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^2} \left\|V_{\theta t}^{(0,x)}(t-r,z') - V_{\theta t}^{(0,x+h)}(t-r,z')\right\|_2^2 |h|^{2H-2} dz' dh,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式的证明与式 (56) 完全相同，利用了 V_θ 的一些平移不变性性质（类似于引理 5.2 中针对 v_θ 给出的性质）。最后，由于关系式 (98)，上面的最后一个积分可由常数 $C_{V,2,H,t,\theta t}$ 控制。

e) 对于固定的 $r > 0$、$z \in \mathbb{R}$ 和 $h \in \mathbb{R}$，过程 $U_\theta^{(r,z,h)}(t,x) := v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)$ 满足以下方程：对于任意的 $t \geq r$ 和 $x \in \mathbb{R}$,

$$U_\theta^{(r,z,h)}(t,x) = G_{t-r}(x-z) - G_{t-r}(x-z-h) + \int_r^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) U_\theta^{(r,z,h)}(s,y) W(\delta y) ds.$$

因此，应用引理 A.1 可得

$$\|U_\theta^{(r,z,h)}(t,x) - U_\theta^{(r,z,h)}(t,x+k)\|_p \leq \|U_{(p-1)\theta}^{(r,z,h)}(t,x) - U_{(p-1)\theta}^{(r,z,h)}(t,x+k)\|_2,$$

从而可化简为 $p = 2$的情形。接下来，我们利用以下事实：对于任意 x、$z \in \mathbb{R}$,

$$\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x) - v_\theta^{(r,z+h)}(t,x) - v_\theta^{(r,z)}(t,x+k) + v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k)\right\|_2^2 \leq \left\|V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x) - V_{\theta t}^{(r,z+h)}(t,x) - V_{\theta t}^{(r,z)}(t,x+k) + V_{\theta t}^{(r,z+h)}(t,x+k)\right\|_2^2,$$

其证明与（57）类似。结论由关系式（99）得出。 □

下一个结果由引理 5.4 推导得出。

引理 5.5。对于任意 $\theta>0$、 $p\geq 2$ 和 $t>0$,

$$a)\quad \sup_{r\in[0,t]}\int_{\mathbb{R}}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p dx\right)^2|h|^{2H-2}dh\leq C'_{v,p,H,t,\theta},$$

$$b)\quad \sup_{r\in[0,t]}\int_{\mathbb{R}}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p dz\right)^2|h|^{2H-2}dh\leq C'_{v,p,H,t,\theta},$$

$$c)\quad \sup_{r\in[0,t]}\int_{\mathbb{R}}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z)}(t,x+h)\right\|_p dx\right)^2|h|^{2H-2}dh\leq C'_{v,p,H,t,\theta},$$

$$d)\quad \sup_{r\in[0,t]}\int_{\mathbb{R}}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z)}(t,x+h)\right\|_p dz\right)^2|h|^{2H-2}dh\leq C'_{v,p,H,t,\theta},$$

$$e)\quad \sup_{r\in[0,t]}\int_{\mathbb{R}^2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)-v_\theta^{(r,z)}(t,x+k)+v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k)\right\|_p dx\right)^2$$
$$\times|h|^{2H-2}|k|^{2H-2}dhdk\leq C'_{v,p,H,t,\theta}$$

$$f)\quad \sup_{r\in[0,t]}\int_{\mathbb{R}^2}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)-v_\theta^{(r,z)}(t,x+k)+v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k)\right\|_p dz\right)^2$$
$$\times|h|^{2H-2}|k|^{2H-2}dhdk\leq C'_{v,p,H,t,\theta},$$

其中，$C'_{v,\ p,\ H,\ t,\ \theta}>0$ 是一个取决于（p、 H、 t、 θ）且随 t 增大的常数。

证明。由注 5.3 可知，只需证明 a)、c) 和 e)。

a) 我们将 I 记为该不等式中出现的积分。于是 $I=I_1+I_2$，其中 I_1 和 I_2 分别是关于 $|h|>1$ 和 $|h|\leq 1$ 的积分。根据三角不等式和引理 3.2，我们有

$$\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p dx\leq\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)\right\|_p dx+\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p dx\leq 4tC_{\theta,p,t,v},$$

因此 $I_1\leq(4t^2C_{\theta,p,t,v})^2\int_{|h|>1}|h|^{2H-2}dh<\infty$.

剩下的部分是处理 I_2。为此，我们利用恒等式 (31) 人为地插入 G函数。然后，根据三角不等式,

$$\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p\leq 2G_{t-r}(x-z)\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p$$
$$+2\left|G_{t-r}(x-z)-G_{t-r}(x-z-h)\right|\left\|v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p.$$

因此 $I_2\leq 8\big(I_{2,\ 1}+I_{2,\ 2}\big)$，其中

$$I_{2,1}=\int_{|h|\leq 1}\left(\int_{\mathbb{R}}G_{t-r}(x-z)\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p dx\right)^2|h|^{2H-2}dh$$

$$I_{2,2}=\int_{|h|\leq 1}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|G_{t-r}(x-z)-G_{t-r}(x-z-h)\right|\left\|v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p dx\right)^2|h|^{2H-2}dh.$$

我们处理 $I_{2,\ 1}$。 G 的存在使我们能够对积分应用柯西-施瓦茨不等式，将平方移入积分号内。利用以下事实： $\int_{\mathbb{R}} G_{t-r}^2(x-z)dx = (t-r)/2$，我们得到：

$$\left(\int_{\mathbb{R}} G_{t-r}(x-z)\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p dx\right)^2 \le t\int_{\mathbb{R}}\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p^2 dx.$$

$I_{2,\ 1}$ 现在可由引理 5.4.a) 得到所需的界。

对于 $I_{2,\ 2}$，我们使用定理 3.1，并且 $\int_{\mathbb{R}}\left|G_{t-r}(x-z)-G_{t-r}(x-z-h)\right|dx \le |h|$。因此，

$$\begin{aligned} I_{2,2} &\le C_{\theta,p,t,v}^2\int_{|h|\le 1}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|G_{t-r}(x-z)-G_{t-r}(x-z-h)\right|dx\right)^2|h|^{2H-2}dh \\ &\le C_{\theta,p,t,v}^2\int_{|h|\le 1}|h|^{2H}dh<\infty. \end{aligned}$$

c) 我们采用与 a) 部分相同的论证，使用引理 5.4.c)。

e) 我们用 I' 表示该不等式中的积分。人为地插入项 $G_{t-r}(x-z)$（使用恒等式 (31)），可得：

$$\begin{aligned} &v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)-v_\theta^{(r,z)}(t,x+k)+v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k)= \\ &\quad 2G_{t-r}(x-z)v_\theta^{(r,z)}(t,x)-2G_{t-r}(x-z-h)v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)- \\ &\quad 2G_{t-r}(x+k-z)v_\theta^{(r,z)}(t,x+k)+2G_{t-r}(x+k-z-h)v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k). \end{aligned}$$

现在我们使用以下恒等式：

$$\begin{aligned} &a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3+a_4b_4 \\ &\quad = a_1(b_1-b_2)+(a_1-a_2)b_2-a_3(b_3-b_4)-(a_3-a_4)b_4 \\ &\quad = a_1(b_1-b_2-b_3+b_4)+(a_1-a_3)(b_3-b_4)+(a_1-a_2-a_3+a_4)b_2+(a_3-a_4)(b_2-b_4). \end{aligned}$$

利用该恒等式和三角不等式，我们有

$$\begin{aligned} &\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)-v_\theta^{(r,z)}(t,x+k)+v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k)\right\|_p \\ &\quad \le 2G_{t-r}(x-z)\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)-v_\theta^{(r,z)}(t,x+k)+v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k)\right\|_p \\ &\quad + |2G_{t-r}(x-z)-2G_{t-r}(x+k-z)|\left\|v_\theta^{(r,z)}(t,x+k)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k)\right\|_p \\ &\quad + |2G_{t-r}(x-z)-2G_{t-r}(x-z-h)-2G_{t-r}(x+k-z)+2G_{t-r}(x+k-z-h)|\left\|v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\right\|_p \\ &\quad + |2G_{t-r}(x+k-z)-2G_{t-r}(x+k-z-h)|\left\|v_\theta^{(r,z+h)}(t,x)-v_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k)\right\|_p \\ &:= \sum_{j=1}^4 F_j(x,h,k). \end{aligned}$$

利用不等式 $(\sum_{j=1}^4 e_j)^2 \le 4\sum_{j=1}^4 e_j^2$，我们有

$$I' \le 4\sum_{j=1}^4\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}}F_j(x,h,k)dx\right)^2|h|^{2H-2}|k|^{2H-2}dhdk =: 4\sum_{j=1}^4 I_j'.$$

由于 F_j 是两个项的乘积（它们分别涉及 G 和 v_θ），我们利用柯西-施瓦茨不等式来估计 $\left(\int_{\mathbb{R}} F_j(x,h,k)dx\right)^2$。对于 I_1'，我们使用引理 5.4.e) 和 $\int_{\mathbb{R}} G_{t-r}^2(x-r)dx = (t-r)/2$。对于 I_2'，我们使用引理 5.4.a)，并且

$$\int_{\mathbb{R}^2} |G_{t-r}(x-z) - G_{t-r}(x+k-z)|^2 |k|^{2H-2} dxdk = c_H (t-r)^{2H}, \tag{58}$$

其中，$c_H > 0$ 是一个依赖于 H的常数。对于 I_3'，我们使用引理 3.2 和

$$\int_{\mathbb{R}^3} |G_{t-r}(x-z) - G_{t-r}(x-z-h) - G_{t-r}(x+k-z) + G_{t-r}(x+k-z-h)|^2 \\ |h|^{2H-2}|k|^{2H-2} dhdkdx = c_H' (t-r)^{4H-1}, \tag{59}$$

其中，$c_H' > 0$ 是一个依赖于 H的常数。对于 I_4'，我们使用引理 5.4.c) 和 (58)。 □

注 5.6。如注 5.3 所述，引理 5.5 的 a) 部分中出现的积分 dx 不依赖于 z，因此，我们无需对 $z \in \mathbb{R}$取上确界，而可以在某个特定点 z_0处计算该积分，例如 $z_0 = 0$。我们选择以这种方式陈述结果，是因为下文第 6.2 节证明定量中心极限定理时会用到这种形式。相同的说明也适用于 b)-f) 部分。

6 主要结果的证明

本节给出定理 1.1、1.2 和 1.3 的证明。

6.1 极限协方差

本节给出定理 1.1 的证明。令

$$\rho_{t,s,\theta}(x-y) := \mathbb{E}\left[\big(u_\theta(t,x)-1\big)\big(u_\theta(s,y)-1\big)\right] = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\theta^n \alpha_n(x-y;t,s), \tag{60}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\alpha_n(x-y;t,s) = (n!)^2 \langle \widetilde{f}_n(\cdot,x;t), \widetilde{f}_n(\cdot,y;s)\rangle_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} = (n!)^2 \langle f_n(\cdot,x;t), \tilde{f}_n(\cdot,y;s)\rangle_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} \\
=& n! \sum_{\sigma\in S_n} c_H^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f_n(\cdot,x;t)(\xi_1,\ldots,\xi_n)\overline{\mathcal{F}f_n(\cdot,y;s)(\xi_{\sigma(1)},\ldots,\xi_{\sigma(n)})} \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{1-2H} d\boldsymbol{\xi} \\
=& n! \sum_{\sigma\in S_n} c_H^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sum_{j=1}^n \xi_j(x-y)} \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{1-2H} d\xi_1 \ldots d\xi_n \int_{T_n(t)} d\boldsymbol{t} \int_{T_n(s)} d\boldsymbol{s} \\
&\times \prod_{j=1}^n \mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\xi_1+\ldots+\xi_j) \prod_{j=1}^n \mathcal{F}G_{s_{j+1}-s_j}(\xi_{\sigma(1)}+\ldots+\xi_{\sigma(j)}).
\end{aligned} \tag{61}$$

这里我们采用约定 $t_{n+1} = t$和 $s_{n+1} = s$。这表明，$\alpha_n(x-y;\, t,s)$ 和 $\rho_{t,\,s}(x-y)$ 对 x 和 y 的依赖仅通过差值 $x-y$体现。特别地，$\{u(t,x); x\in\mathbb{R}\}$ 是一个协方差函数为 $\rho_{t,\,s,\,\theta}$ 的（广义）平稳过程。

由 Fubini定理,

$$\frac{1}{R}\mathbb{E}[F_{R,\theta}(t)F_{R,\theta}(s)] = \frac{1}{R}\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}\rho_{t,s,\theta}(x-y)dxdy = \sum_{n\geq 1}\theta^n\frac{1}{Rn!}\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}\alpha_n(x-y;t,s)dxdy$$
$$=: \sum_{n\geq 1}\theta^n Q_{n,R}(t,s), \tag{62}$$

根据（25），并利用以下事实，可以应用Fubini定理: at:

$$\alpha_n(x-y;t,s) \leq (n!)^2\|f_n(\cdot,x;t)\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}\|\tilde{f}_n(\cdot,y;s)\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} \leq c^n\frac{t^{(2H+2)n}}{(n!)^{2H}}.$$

现在证明级数（62）中的第一项对极限没有贡献。

引理6.1. 对任意 t、$s>0$,

$$Q_{1,R}(t,s) = \frac{1}{R}\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}\alpha_1(x-y;t,s)dxdy \to 0 \quad as\ R\to\infty.$$

证明. 根据Fubini定理,

$$\begin{aligned}\alpha_1(x-y;t,s) &= c_H\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t e^{-i\xi x}\frac{\sin((t-t_1)|\xi|)}{|\xi|}dt_1\right)\left(\int_0^s e^{i\xi y}\frac{\sin((s-s_1)|\xi|)}{|\xi|}ds_1\right)\\ &= c_H\int_0^t\int_0^s\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(x-y)}\frac{\sin((t-t_1)|\xi|)}{|\xi|}\frac{\sin((s-s_1)|\xi|)}{|\xi|}d\xi ds_1 dt_1.\end{aligned}$$

应用该定理的合理性可由以下不等式保证:

$$\frac{|\sin((t-t_1)|\xi|)|}{|\xi|}\frac{|\sin((s-s_1)|\xi|)|}{|\xi|} \leq (t-t_1)(s-s_1)1_{\{|\xi|\leq 1\}} + \frac{1}{|\xi|^2}1_{\{|\xi|>1\}}. \tag{63}$$

再次应用Fubini定理（其合理性同样由（63）保证），可得:

$$\begin{aligned}&\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}\alpha_1(x-y;t,s)dxdy\\ &= c_H\int_0^t\int_0^s\int_{\mathbb{R}}\frac{4\sin^2(R|\xi|)}{|\xi|^2}\frac{\sin((t-t_1)|\xi|)}{|\xi|}\frac{\sin((s-s_1)|\xi|)}{|\xi|}|\xi|^{1-2H}d\xi ds_1 dt_1,\end{aligned}$$

其中我们用到了以下事实:

$$\left(\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}e^{-i\xi(x-y)}dxdy\right) = \left|\int_{-R}^{R}e^{-i\xi x}dx\right|^2 = \frac{4\sin^2(R|\xi|)}{|\xi|^2} := 4\pi R\ell_R(\xi),$$

我们记示在线大香蕉

$$I_1(t_1,s_1) := \int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2(R|\xi|)}{|\xi|^2}\frac{\sin((t-t_1)|\xi|)}{|\xi|}\frac{\sin((s-s_1)|\xi|)}{|\xi|}|\xi|^{1-2H}d\xi = I_1(t_1,s_1)+I_2(t_1,s_1),$$

其中， $I_1(t_1,s_1)$ 和 $I_2(t_1,s_1)$ 分别对应积分区域 $\{|\xi|\le\varepsilon\}\{|\xi|>\varepsilon\}$。为了估计 $I_2(t_1,s_1)$，我们将三个正弦函数都用 1 作为上界，得到

$$|I_2(t_1,s_1)|\le\int_{|\xi|>\varepsilon}|\xi|^{-3-2H}d\xi=:C_{\varepsilon,H}.$$

为了对 $I_1(t_1,s_1)$ 进行界定，我们选择 $\varepsilon>0$ 使得 $(t+s)\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，因此，对于任意的 $t_1\in[0,t]$、$s_1\in[0,s]$ 和满足 $|\xi|\le\varepsilon$ 的 ξ，$\sin((t-t_1)|\xi|)\ge0$ 且 $\sin((s-s_1)|\xi|)\ge0$。对最后两个正弦函数使用不等式 $|\sin(x)|\le|x|$，再对最后一个正弦函数使用不等式 $|\sin x|\le|x|^\theta \text{ with} \theta\in[0,1]$，即可得到:

$$\begin{aligned}I_1(t_1,s_1)&\le(t-t_1)(s-s_1)\int_{|\xi|\le\varepsilon}\frac{\sin^2(R|\xi|)}{|\xi|^2}|\xi|^{1-2H}d\xi\\&\le(t-t_1)(s-s_1)R^{2\theta}\int_{|\xi|\le\varepsilon}|\xi|^{2\theta-2H-1}d\xi=:(t-t_1)(s-s_1)R^{2\theta}C_{\varepsilon,\theta,H},\end{aligned}$$

只要 $\theta>H$ 成立。综上，对于任意的 $t_1\in[0,t]$、$s_1\in[0,s]$ 和 $\theta\in(H,1]$，

$$|I(t_1,s_1)|\le(t-t_1)(s-s_1)R^{2\theta}C_{\varepsilon,\theta,H}+C_{\varepsilon,H}.$$

因此，

$$\left|\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}\alpha_1(x-y;t,s)dxdy\right|\le4c_H\int_0^t\int_0^s|I(t_1,s_1)|ds_1dt_1\le C(t^2s^2R^{2\theta}+ts).$$

那么，当 $R\to\infty$ 时，$|Q_{1,R}(t,s)|\le C(t^2s^2R^{2\theta-1}+tsR^{-1})\to0$；若选择 $\theta\in(H,\frac{1}{2})$，则成立。 □

接下来，我们研究对应于 $n\ge2$ 的项。我们利用函数

$$\ell_R(\xi)=\frac{\sin^2(R|\xi|)}{\pi R|\xi|^2},\quad\xi\in\mathbb{R}$$

是恒等近似这一事实，其中 $R\to\infty$ （见 [28] 的引理 2.1）).

引理 6.2. 对任意 $t>0$ 和 $s>0$,

$$K_\theta(t,s):=\lim_{R\to\infty}\sum_{n\ge2}\theta^nQ_{n,R}(t,s)\quad\textit{exists and is finite.}$$

证明。我们使用 $\alpha_n(x-y;t,s)$ 的表达式 (61)，并对 $[-R,R]^2$ 上的 $dxdy$ 积分。根据富比尼定理，我们得到 $Q_{n,R}(t,s)$ 的如下表达式:

$$\begin{aligned}Q_{n,R}(t,s)&=\frac{1}{R}\frac{1}{n!}\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}\alpha_n(x-y;t,s)dxdy\\&=4\pi c_H^n\sum_{\sigma\in S_n}\int_{T_n(t)}\int_{T_n(s)}\int_{\mathbb{R}^n}\ell_R(\xi_1+\ldots+\xi_n)\prod_{j=1}^{n}|\xi_j|^{1-2H}\\&\times\frac{\sin((t-t_n)|\xi_1+\ldots+\xi_n|)}{|\xi_1+\ldots+\xi_n|}\frac{\sin((s-s_n)|\xi_1+\ldots+\xi_n|)}{|\xi_1+\ldots+\xi_n|}\end{aligned}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sin((t_{j+1}-t_j)|\xi_1+\ldots+\xi_j|)}{|\xi_1+\ldots+\xi_j|} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sin((s_{j+1}-s_j)|\xi_{\sigma(1)}+\ldots+\xi_{\sigma(j)}|)}{|\xi_{\sigma(1)}+\ldots+\xi_{\sigma(j)}|} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{s} d\boldsymbol{t}$$

$$:= 4\pi c_H^n \sum_{\sigma\in S_n} \int_{T_n(t)} \int_{T_n(s)} Q_{n,R}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s},\sigma) d\boldsymbol{s} d\boldsymbol{t} \tag{64}$$

为计算 $Q_{n,\ R}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s},\sigma)$，我们使用变量代换 $\xi_n \to \eta_n = \xi_1+\ldots+\xi_n$。对于任意固定的置换 σ，记 $j_0 = \sigma^{-1}(n)$，使得 $\sigma(j_0) = n$。于是对所有 $j < j_0$，求和项 $\xi_{\sigma(1)}+\ldots+\xi_{\sigma(j)}$ 不涉及变量 ξ_n，且在进行变量代换后保持不变。对于 $j \geq j_0$，求和项 $\xi_{\sigma(1)}+\ldots+\xi_{\sigma(j)}$ 包含 ξ_n，变量代换后将被替换为

$$\sum_{k=1}^{j_0-1} \xi_{\sigma(k)} + \left(\eta_n - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j\right) + \sum_{k=j_0+1}^{j} \xi_{\sigma(k)} = \eta_n - \xi_{\sigma(j+1)} - \ldots - \xi_{\sigma(n)},$$

其中 $\sum_\emptyset = 0$。根据约定 $\prod_\emptyset = 1$，我们得到表达式

$$\begin{aligned}
Q_{n,R}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s},\sigma) &= \int_{\mathbb{R}^n} \ell_R(\eta_n) \frac{\sin((t-t_n)|\eta_n|)}{|\eta_n|} \frac{\sin((s-s_n)|\eta_n|)}{|\eta_n|} \\
&\times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sin((t_{j+1}-t_j)|\xi_1+\ldots+\xi_j|)}{|\xi_1+\ldots+\xi_j|} \prod_{j<\sigma^{-1}(n)} \frac{\sin((s_{j+1}-s_j)|\xi_{\sigma(1)}+\ldots+\xi_{\sigma(j)}|)}{|\xi_{\sigma(1)}+\ldots+\xi_{\sigma(j)}|} \\
&\times \prod_{j\geq\sigma^{-1}(n)} \frac{\sin((s_{j+1}-s_j)|\eta_n-\xi_{\sigma(j+1)}-\ldots-\xi_{\sigma(n)}|)}{|\eta_n-\xi_{\sigma(j+1)}-\ldots-\xi_{\sigma(n)}|} \\
&\times \prod_{j=1}^{n-1} |\xi_j|^{1-2H} |\eta_n-\xi_1-\ldots-\xi_{n-1}|^{1-2H} d\xi_1\ldots d\xi_{n-1} d\eta_n := \left(\ell_R * g^{(n)}_{\mathbf{t},\mathbf{s},\sigma}\right)(0),
\end{aligned}$$

其中，函数 $g^{(n)}_{\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{s}\ ,,\sigma}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
g^{(n)}_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{s},\sigma}(x) &:= \frac{\sin((t-t_n)|x|)}{|x|} \frac{\sin((s-s_n)|x|)}{|x|} \\
&\times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sin((t_{j+1}-t_j)|\xi_1+\ldots+\xi_j|)}{|\xi_1+\ldots+\xi_j|} \prod_{j<\sigma^{-1}(n)} \frac{\sin((s_{j+1}-s_j)|\xi_{\sigma(1)}+\ldots+\xi_{\sigma(j)}|)}{|\xi_{\sigma(1)}+\ldots+\xi_{\sigma(j)}|} \\
&\times \prod_{j\geq\sigma^{-1}(n)} \frac{\sin((s_{j+1}-s_j)|x-\xi_{\sigma(j+1)}-\ldots-\xi_{\sigma(n)}|)}{|x-\xi_{\sigma(j+1)}-\ldots-\xi_{\sigma(n)}|} \\
&\times \prod_{j=1}^{n-1} |\xi_j|^{1-2H} |x-\xi_1-\ldots-\xi_{n-1}|^{1-2H} d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}.
\end{aligned}$$

为了定义 $g_{\mathbf{t},\mathbf{s},\sigma}(\mathbf{0})$，我们采用约定 $\sin_x{}^x\big|_{x=0} = 1$。

由于当 $R\to\infty$时，ℓ_R 是恒等近似，根据控制收敛定理，我们得到

$$\sum_{n\geq 2} \theta^n Q_{n,R}(t,s) = 4\pi \sum_{n\geq 2} \theta^n c_H^n \int_{T_n(t)} \int_{T_n(s)} \sum_{\sigma\in S_n} \left(\ell_R * g_{\mathbf{t},\mathbf{s},\sigma}\right)(0) d\mathbf{s} d\mathbf{t}$$

$$\to 4\pi \sum_{n\geq 2} \theta^n c_H^n \int_{T_n(t)} \int_{T_n(s)} \sum_{\sigma\in S_n} g_{\mathbf{t},\mathbf{s},\sigma}(0) d\mathbf{s} d\mathbf{t} =: K_\theta(t,s), \quad \text{as } R\to\infty. \tag{65}$$

剩下需要证明控制收敛定理的应用是合理的。为此，我们将证明存在一个函数 $H_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})$，使得

$$\left| \sum_{\sigma\in S_n} \left(\ell_R * g_{\mathbf{t},\mathbf{s},\sigma}\right)(0) \right| \leq H_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})$$

对于任意 $n\geq 2$、 $R\geq 1$、 $\boldsymbol{t}\in T_n(t)$、 $\boldsymbol{s}\in T_n(s)$，以及

$$\sum_{n\geq 2} \theta^n c_H^n \int_{T_n(t)} \int_{T_n(s)} H_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{t} d\boldsymbol{s} < \infty. \tag{66}$$

特别是，这将意味着极限 $K_\theta(t,s)$ 是有限的。

我们将使用以下不等式：对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的任意函数 h_1、h_2，以及定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的任意对称测度 μ_n，

$$\left| \sum_{\sigma\in S_n} \int_{\mathbb{R}^n} h_1(\xi_1,\ldots,\xi_n) h_2(\xi_{\sigma(1)},\ldots,\xi_{\sigma(n)}) \mu_n(d\xi_1,\ldots,d\xi_n) \right| \leq$$
$$\frac{n!}{2}\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |h_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)|^2 \mu_n(d\xi_1,\ldots,d\xi_n) + \int_{\mathbb{R}^n} |h_2(\xi_1,\ldots,\xi_n)|^2 \mu_n(d\xi_1,\ldots,d\xi_n) \right\},$$

这可通过应用不等式 $ab\leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 证明。由此可得

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\sigma\in S_n} \left(\ell_R * g_{\mathbf{t},\mathbf{s},\sigma}\right)(0) \right| &\leq \frac{n!}{2}\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \ell_R(\xi_1+\ldots+\xi_n) \prod_{j=1}^n \frac{\sin^2((t_{j+1}-t_j)|\xi_1+\ldots+\xi_j|)}{|\xi_1+\ldots+\xi_j|^2} \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{1-2H} d\boldsymbol{\xi} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \ell_R(\xi_1+\ldots+\xi_n) \prod_{j=1}^n \frac{\sin^2((s_{j+1}-s_j)|\xi_1+\ldots+\xi_j|)}{|\xi_1+\ldots+\xi_j|^2} \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{1-2H} d\boldsymbol{\xi} \right\} \\
&=: \frac{n!}{2}\Big(\mathcal{I}_{n,R}(\boldsymbol{t}) + \mathcal{I}_{n,R}(\boldsymbol{s}) \Big).
\end{aligned}$$

我们只计算第一个积分，第二个积分的计算过程类似。我们对 $\eta_j = \xi_1+\ldots+\xi_j$ 作变量代换 $j=1$、.....、n（其中 $\eta_0=0$），然后应用不等式 (24)：

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{n,R}(\boldsymbol{t}) &\leq \sum_{\alpha\in D_n} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2((t_{j+1}-t_j)|\eta_j|)}{|\eta_j|^2} |\eta_j|^{\alpha_j} d\eta_j \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2((t-t_n)|\eta_n|)}{|\eta_n|^2} \ell_R(\eta_n) |\eta_n|^{\alpha_n} d\eta_n \right) \\
&\leq c^{n-1} \sum_{\alpha\in D_n} \prod_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}-t_j)^{1-\alpha_j} (t-t_n)^2 \frac{1}{\pi R} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(R|\eta_n|)}{|\eta_n|^2} |\eta_n|^{\alpha_n} d\eta_n \\
&= c^n \sum_{\alpha\in D_n} \prod_{j=1}^{n-1} (t_{j+1}-t_j)^{1-\alpha_j} (t-t_n)^2 R^{-\alpha_n} \leq c^n \sum_{\alpha\in D_n} t^{1+\alpha_n} \prod_{j=1}^{n} (t_{j+1}-t_j)^{1-\alpha_j}
\end{aligned}$$

因此，假设 $s \le t$，我们得到：

$$\left|\sum_{\sigma\in S_n}\left(\ell_R * g_{\mathbf{t},\mathbf{s},\sigma}\right)(0)\right| \le n!c^n \sum_{\alpha\in D_n} t^{1+\alpha_n}\Big(\prod_{j=1}^{n}(t_{j+1}-t_j)^{1-\alpha_j} + \prod_{j=1}^{n}(s_{j+1}-s_j)^{1-\alpha_j}\Big) =: H_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}).$$

为说明 (66) 成立，我们注意到

$$\begin{aligned}\int_{T_n(t)}\int_{T_n(s)} H_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s}d\boldsymbol{t} &\le 2c^n \sum_{\alpha\in D_n} t^{1+\alpha_n}\int_{T_n(t)}\prod_{j=1}^{n}(t_{j+1}-t_j)^{1-\alpha_j}d\boldsymbol{t}\\ &\le 2c^n \sum_{\alpha\in D_n} t^{1+\alpha_n}\frac{t^{(2H+1)n}}{\Gamma((2H+1)n+1)}.\end{aligned}$$

□

最后，我们证明当 $s=t$ 时，极限 $K_\theta(t,t)$ 非零。为此，我们使用以下引理。

引理 6.3. 若 h 是 $(\mathbb{R}^d)^n$ 上的可测函数，且 μ_n 是 $(\mathbb{R}^d)^n$ 上的对称测度，则

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in S_n}\int_{(\mathbb{R}^d)^n} h(\xi_1,\ldots,\xi_n)h(\xi_{\sigma(1)},\ldots,\xi_{\sigma(n)})\mu_n(d\xi_1,\ldots,d\xi_n) \qquad (67)\\ &\qquad = \frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^d)^n} |\widetilde{h}(\xi_1,\ldots,\xi_n)|^2\mu_n(d\eta_1,\ldots,d\eta_n).\end{aligned}$$

证明. 我们用 I 表示 (67) 的左侧。对任意 $\rho\in S_n$，令 $h_\rho(\xi_1,\ldots,\xi_n) = h(\xi_{\rho(1)},\ldots,\xi_{\rho(n)})$。于是，对任意 $\rho\in S_n$, $I = n!\int h h d\mu_n = n!\int h_\rho h d\mu_n$，其中第二个等号源于 μ_n 的对称性。对所有 $\rho\in S_n$ 求和，得到 $n!I = n!\int \sum_{\rho\in S_n} h_\rho h d\mu_n = (n!)^2\int h^2 d\mu_n$。

□

引理 6.4. 对任意 $t>0$, $K_\theta(t,t) > 0$。

证明. 我们首先证明，对于所有 $n\ge 1$ 和 $R>0$，$Q_{n,R}(t,t) \ge 0$。为此，我们使用 (64)。将引理 6.3 应用于测度

$$\mu_n(d\xi_1,\ldots,d\xi_n) = \ell_R(\xi_1+\ldots+\xi_n)\prod_{j=1}^{n}|\xi_j|^{1-2H}d\xi_1\ldots d\xi_n$$

以及函数

$$h(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \int_{T_n(t)} \frac{\sin((t-t_n)|\xi_1+\ldots+\xi_n|)}{|\xi_1+\ldots+\xi_n|}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\sin((t_{j+1}-t_j)|\xi_1+\ldots+\xi_j|)}{|\xi_1+\ldots+\xi_j|}d\boldsymbol{t},$$

我们得到：

$$Q_{n,R}(t,t) = 4\pi c_H^n n! \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{h}(\xi_1,\ldots,\xi_n)|^2 \mu_n(d\xi_1,\ldots,d\xi_n) \geq 0.$$

这意味着，对所有 $n \geq 1$， $Q_n(t,t) := \lim_{R\to\infty} Q_{n,R}(t,t) \geq 0$，因此 $K_\theta(t,t) = \sum_{n\geq 2} \theta^n Q_n(t,t) \geq \theta^2 Q_2(t,t)$。因此，只需证明 $Q_2(t,t) > 0$。

为证明这一点，我们将使用 $Q_n(t,t)$ 的另一种表达式。记 $H(\xi_1,\ldots,\xi_n) = |h(\xi_1,\ldots,\xi_n)|^2 \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{1-2H}$，并作变量代换 $\xi_n \mapsto \eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$：

$$\begin{aligned}
Q_{n,R}(t,t) &= 4\pi c_H^n n! \int_{\mathbb{R}^n} H(\xi_1,\ldots,\xi_n)\ell_R(\xi_1+\ldots+\xi_n)d\xi_1\ldots d\xi_n \\
&= 4\pi c_H^n n! \int_{\mathbb{R}^n} H(-\xi_1,\ldots,-\xi_n)\ell_R(\xi_1+\ldots+\xi_n)d\xi_1\ldots d\xi_n \\
&= 4\pi c_H^n n! \int_{\mathbb{R}^n} H(-\xi_1,\ldots,-\xi_{n-1},\xi_1+\ldots+\xi_{n-1}-\eta_n)\ell_R(\eta_n)d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}d\eta_n \\
&= 4\pi c_H^n n! \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(H(-\xi_1,\ldots,-\xi_{n-1},\cdot) * \ell_R\Big)(\xi_1+\ldots+\xi_{n-1})d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}.
\end{aligned}$$

取 $R \to \infty$，得到：

$$Q_n(t,t) = 4\pi c_H^n n! \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H(-\xi_1,\ldots,-\xi_{n-1},\xi_1+\ldots+\xi_{n-1})d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}.$$

现在考虑 $n = 2$ 的情形。在这种情况下，

$$\widetilde{h}(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2}\int_{T_2(t)} \frac{\sin((t-t_2)|\xi_1+\xi_2|)}{|\xi_1+\xi_2|}\left(\frac{\sin((t_2-t_1)|\xi_1|)}{|\xi_1|} + \frac{\sin((t_2-t_1)|\xi_2|)}{|\xi_2|}\right)dt_1dt_2$$

and

$$H(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}\left(\int_{T_2(t)} \frac{\sin((t-t_2)|\xi_1+\xi_2|)}{|\xi_1+\xi_2|}\left(\frac{\sin((t_2-t_1)|\xi_1|)}{|\xi_1|} + \frac{\sin((t_2-t_1)|\xi_2|)}{|\xi_2|}\right)dt_1dt_2\right)^2 |\xi_1|^{1-2H}|\xi_2|^{1-2H}.$$

根据约定 $\text{正弦}_x{}^x|_{x=0} = \cancel{1,}$ 直接计算可得：

$$H(-\xi_1,\xi_1) = \frac{1}{4}\left(\int_{T_2(t)} \frac{\sin((t_2-t_1)|\xi_1|)}{|\xi_1|}dt_1dt_2\right)^2 |\xi_1|^{2(1-2H)} = \left(t - \frac{\sin(t|\xi_1|)}{|\xi_1|}\right)^2 |\xi_1|^{-4H-2}.$$

由于 $H(-\xi_1,\xi_1) > 0$ 几乎对所有 $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $Q_2(t,t) = \int_{\mathbb{R}} H(-\xi_1,\xi_1)d\xi_1 > 0$. □

6.2 定量中心极限定理

在本节中，我们证明定理 1.2。我们将证明分为几个步骤。为简化记号，在这一部分中我们省略对 θ 的依赖，并以 $F_R(t)$ 和 $\sigma_R(t)$ 分别代替 $F_{R,\theta}(t)$ 和 $\sigma_{R,\theta}(t)$。

步骤 1。将适用于时间无关噪声的命题 2.4 的一个版本应用于 $F = F_R(t)$，我们得到：

$$d_{TV}\left(\frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)}, Z\right) \leq \frac{2\sqrt{3}}{\sigma_R^2(t)}\sqrt{C_H^3 \mathcal{A}^*},$$

其中 $Z \sim N(0,1)$ 且

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* = \int_{\mathbb{R}^6} &\|D_z F_R(t) - D_{z'} F_R(t)\|_4 \|D_w F_R(t) - D_{w'} F_R(t)\|_4 \\ &\|D^2_{z,y} F_R(t) - D^2_{z,y'} F_R(t) - D^2_{z',y} F_R(t) + D^2_{z',y'} F_R(t)\|_4 \\ &\|D^2_{w,y} F_R(t) - D^2_{w,y'} F_R(t) - D^2_{w',y} F_R(t) + D^2_{w',y'} F_R(t)\|_4 \\ &|y-y'|^{2H-2}|z-z'|^{2H-2}|w-w'|^{2H-2} dy dy' dz dz' dw dw'.\end{aligned}$$

对四个范数应用闵可夫斯基不等式，并作变量代换 $y' \to y+y', z' \to z+z', w' \to w+w'$，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* \leq \mathcal{A} = \int_{[-R,R]^4} \int_{\mathbb{R}^6} &\|D_z u_\theta(t,x_1) - D_{z+z'} u_\theta(t,x_1)\|_4 \|D_w u_\theta(t,x_2) - D_{w+w'} u_\theta(t,x_2)\|_4 \\ &\left\|D^2_{z,y} u_\theta(t,x_3) - D^2_{z,y+y'} u_\theta(t,x_3) - D^2_{z+z',y} u_\theta(t,x_3) + D^2_{z+z',y+y'} u_\theta(t,x_3)\right\|_4 \\ &\left\|D^2_{w,y} u_\theta(t,x_4) - D^2_{w,y+y'} u_\theta(t,x_4) - D^2_{w+w',y} u_\theta(t,x_4) + D^2_{w+w',y+y'} u_\theta(t,x_4)\right\|_4 \\ &|y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2}|w'|^{2H-2} dy dy' dz dz' dw dw' dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \qquad (68)\end{aligned}$$

由于 $\sigma_R^2(t) \sim C_t R$ 当 $R \to \infty$ 时，因此只需证明 $\mathcal{A} \leq C_t R$。

对于前两个范数，我们在 $p=4$ （因此也在 $\eta = 12\theta$）的条件下使用定理 4.1.b)。得到：

$$\|D_z u_\theta(t,x_1) - D_{z+z'} u_\theta(t,x_1)\|_4 \leq \sqrt{2\theta} \int_0^t I_1(z,z',x_1;r,t)dr \qquad (69)$$

$$\|D_w u_\theta(t,x_2) - D_{w+w'} u_\theta(t,x_2)\|_4 \leq \sqrt{2\theta} \int_0^t I_1(w,w',x_2;r,t)dr. \qquad (70)$$

对于后两个范数，我们在 $p=4$ （因此也在 $\eta = 18\theta$）的条件下使用定理 4.2.b)。得到：

$$\begin{aligned}&\left\|D^2_{z,y} u_\theta(t,x_3) - D^2_{z,y+y'} u_\theta(t,x_3) - D^2_{z+z',y} u_\theta(t,x) + D^2_{z+z',y+y'} u_\theta(t,x_3)\right\|_4 \\ &\qquad \leq 4\theta \int_{0<s<r<t} \big(I_2(z,z',y,y',x_3;s,r,t) + I_2(y,y',z,z',x_3;s,r,t)\big) ds dr \qquad (71) \\ &\left\|D^2_{w,y} u_\theta(t,x_4) - D^2_{w,y+y'} u_\theta(t,x_4) - D^2_{w+w',y} u_\theta(t,x_4) + D^2_{w+w',y+y'} u_\theta(t,x_4)\right\|_4 \\ &\qquad \leq 4\theta \int_{0<s<r<t} \big(I_2(w,w',y,y',x_4;s,r,t) + I_2(y,y',w,w',x_4;s,r,t)\big) ds dr. \qquad (72)\end{aligned}$$

H因此，将恒等式 (69)、(70)、(71) 和 (72) 代入 (68)，得到

$$\mathcal{A} \leq (4\theta)^3 \int_{[-R,R]^4} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \int_{\mathbb{R}^3} dy dz dw \int_{\mathbb{R}^3} |y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2}|w'|^{2H-2} dy' dz' dw'$$

$$\int_0^t dr_1 \int_0^t dr_2 \int_{0<s_3<r_3<t} ds_3 dr_3 \int_{0<s_4<r_4<t} ds_4 dr_4 I_1(z,z',x_1;r_1,t) I_1(w,w',x_2;r_2,t)$$
$$\times \big(I_2(z,z',y,y',x_3;s_3,r_3,t) + I_2(y,y',z,z',x_3;s_3,r_3,t)\big)$$
$$\times \big(I_2(w,w',y,y',x_4;s_4,r_4,t) + I_2(y,y',w,w',x_4;s_4,r_4,t)\big). \tag{73}$$

步骤 2。在此步骤中，我们计算 (73) 中的空间积分。得到

$$\int_{[-R,R]^4} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \int_{\mathbb{R}^3} dy dz dw \int_{\mathbb{R}^3} |y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2}|w'|^{2H-2} dy' dz' dw'$$
$$I_1(z,z',x_1;r_1,t) I_1(w,w',x_2;r_2,t)\big(I_2(z,z',y,y',x_3;s_3,r_3,t) + I_2(y,y',z,z',x_3;s_3,r_3,t)\big)$$
$$\times \big(I_2(w,w',y,y',x_4;s_4,r_4,t) + I_2(y,y',w,w',x_4;s_4,r_4,t)\big)$$
$$\leq \int_{[-R,R]} dx_4 \int_{\mathbb{R}^3} |y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2}|w'|^{2H-2} dy' dz' dw'$$
$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I_1(z,z',x_1;r_1,t) dx_1 \sup_{w\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I_1(w,w',x_2;r_2,t) dx_2$$
$$\times \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \big(I_2(z,z',y,y',x_3;s_3,r_3,t) + I_2(y,y',z,z',x_3;s_3,r_3,t)\big) dz dx_3$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \big(I_2(w,w',y,y',x_4;s_4,r_4,t) + I_2(y,y',w,w',x_4;s_4,r_4,t)\big) dw dy$$
$$\leq \int_{[-R,R]} dx_4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I_1(z,z',x_1;r_1,t) dx_1 \sup_{w\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I_1(w,w',x_2;r_2,t) dx_2\right)^2 |z'|^{2H-2}|w'|^{2H-2} dz' dw'\right)^{1/2}$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \big(I_2(z,z',y,y',x_3;s_3,r_3,t) + I_2(y,y',z,z',x_3;s_3,r_3,t)\big) dz dx_3\right)^2 |y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2} dy' dz'\right)^{1/2}$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \big(I_2(w,w',y,y',x_4;s_4,r_4,t) + I_2(y,y',w,w',x_4;s_4,r_4,t)\big) dw dy\right)^2 |y'|^{2H-2}|w'|^{2H-2} dy' dw'\right)^{1/2}. \tag{74}$$

其中，对于最后一个不等式，我们对积分 $\iiint dy'dz'dw'$ 使用引理 6.5。

接下来，我们需要逐一计算这三个积分 $dz'dw'$、$dy'dz'$、$dy'dw'$ 。我们先从积分 $dz'dw'$ 开始。根据定理 2.3、引理 3.2 和引理 5.2，对于任意$r \in [0,t]$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} I_1(z,z',x_1;r,t) dx_1 =& \int_{\mathbb{R}} \|u_{12\theta}(r,z) - u_{12\theta}(r,z+z')\|_2 \left\|v_{12\theta}^{(r,z)}(t,x_1)\right\|_2 dx_1 \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \|u_{12\theta}(r,z+z')\|_2 \left\|v_{12\theta}^{(r,z)}(t,x_1) - v_{12\theta}^{(r,z+z')}(t,x_1)\right\|_2 dx_1 \\
\leq& 2tC_{12\theta,2,t,v} \|u_{12\theta}(r,0) - u_{12\theta}(r,z')\|_2 \\
&+ C_{12\theta,2,t,u} \int_{\mathbb{R}} \left\|v_{12\theta}^{(r,z)}(t,x_1) - v_{12\theta}^{(r,z+z')}(t,x_1)\right\|_2 dx_1.
\end{aligned}$$

根据注 5.3，右侧的积分与 z 无关。因此，由引理 5.1 和引理 5.5，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{z\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}I_1(z,z',x_1;r,t)dx_1\right)^2|z'|^{2H-2}dz'\\
\leq&8t^2C_{12\theta,2,t,v}^2\int_{\mathbb{R}}\|u_{12\theta}(r,0)-u_{12\theta}(r,z')\|_2^2|z'|^{2H-2}dz'\\
&+2C_{12\theta,2,t,u}^2\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{z\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{12\theta}^{(r,z)}(t,x_1)-v_{12\theta}^{(r,z+z')}(t,x_1)\right\|_2dx_1\right)^2|z'|^{2H-2}dz'\\
\leq&8t^2C_{12\theta,2,t,v}^2C'_{u,2,H,t,12\theta}+2C_{12\theta,2,t,u}^2C'_{v,2,H,t,12\theta}.
\end{aligned}$$

类似地，对于任意 $r\in[0,t]$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{w\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}I_1(w,w',x_2;r,t)dx_2\right)^2|w'|^{2H-2}dw'\leq 8t^2C_{12\theta,2,t,v}^2C'_{u,2,H,t,12\theta}+2C_{12\theta,2,t,u}^2C'_{v,2,H,t,12\theta}.$$

因此，对于任意 r_1、$r_2\in[0,t]$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2}\left(\sup_{z\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}I_1(z,z',x_1;r_1,t)dx_1\sup_{w\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}I_1(w,w',x_2;r_2,t)dx_2\right)^2|z'|^{2H-2}|w'|^{2H-2}dz'dw'\\
&\leq\left(8t^2C_{12\theta,2,t,v}^2C'_{u,2,H,t,12\theta}+2C_{12\theta,2,t,u}^2C'_{v,2,H,t,12\theta}\right)^2.
\end{aligned}\tag{75}$$

其次，我们处理积分 $dy'dz'$，它由两项组成。对于第一项，根据定理 2.3、引理 3.2 和引理 5.2，对于任意 $0\leq s<r\leq t$，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2}I_2(z,z',y,y',x_3;s,r,t)dzdx_3\\
\leq&2tC_{18\theta,2,t,v}\left\|u_{18\theta}(s,0)-u_{18\theta}(s,z')\right\|_2\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(r,y)}(t,x_3)-v_{18\theta}^{(r,y+y')}(t,x_3)\right\|_2dx_3\\
&+C_{18\theta,2,t,u}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(s,z)}(r,y)-v_{18\theta}^{(s,z+z')}(r,y)\right\|_2dz\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(r,y)}(t,x_3)-v_{18\theta}^{(r,y+y')}(t,x_3)\right\|_2dx_3\\
&+2tC_{18\theta,2,t,v}\left\|u_{18\theta}(s,0)-u_{18\theta}(s,z')\right\|_2\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(s,z)}(r,y)-v_{18\theta}^{(s,z)}(r,y+y')\right\|_2dz\\
&+2tC_{18\theta,2,t,v}C_{18\theta,2,t,u}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(s,z)}(r,y)-v_{18\theta}^{(s,z)}(r,y+y')-v_{18\theta}^{(s,z+z')}(r,y)+v_{18\theta}^{(s,z+z')}(r,y+y')\right\|_2dz.
\end{aligned}\tag{76}$$

对于第二项，我们先对 dx_3 积分，然后再对 dz 积分。我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2}I_2(y,y',z,z',x_3;s,r,t)dzdx_3\\
\leq&2tC_{18\theta,2,t,v}\left\|u_{18\theta}(s,0)-u_{18\theta}(s,y')\right\|_2\sup_{z\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(r,z)}(t,x_3)-v_{18\theta}^{(r,z+z')}(t,x_3)\right\|_2dx_3\\
&+C_{18\theta,2,t,u}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(s,y)}(r,z)-v_{18\theta}^{(s,y+y')}(r,z)\right\|_2dz\sup_{z\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(r,z)}(t,x_3)-v_{18\theta}^{(r,z+z')}(t,x_3)\right\|_2dx_3
\end{aligned}$$

$$+2tC_{18\theta,2,t,v}\left\|u_{18\theta}(s,0)-u_{18\theta}(s,y')\right\|_2\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(s,y)}(r,z)-v_{18\theta}^{(s,y)}(r,z+z')\right\|_2dz$$
$$+2tC_{18\theta,2,t,v}C_{18\theta,2,t,u}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(s,y)}(r,z)-v_{18\theta}^{(s,y)}(r,z+z')-v_{18\theta}^{(s,y+y')}(r,z)+v_{18\theta}^{(s,y+y')}(r,z+z')\right\|_2dz. \tag{77}$$

由注 5.3 可知，(76) 和 (77) 右端的积分不依赖于 y。因此，根据引理 5.1 和引理 5.5，并结合不等式 $(\sum_{i=1}^4 a_i)^2\le 4\sum_{i=1}^4 a_i^2$，我们有

$$\begin{aligned}&\max\Bigg\{\int_{\mathbb{R}^2}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2}I_2(z,z',y,y',x_3;s_3,r_3,t)dzdx_3\right)^2|y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2}dy'dz',\\&\int_{\mathbb{R}^2}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2}I_2(y,y',z,z',x_3;s_3,r_3,t)dzdx_3\right)^2|y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2}dy'dz'\Bigg\}\\\le&8\left(2tC_{18\theta,2,t,v}\right)^2C'_{u,2,H,t,18\theta}C'_{v,2,H,t,18\theta}+4C_{18\theta,2,t,u}^2\left(C'_{v,2,H,t,18\theta}\right)^2+4\left(2tC_{18\theta,2,t,v}C_{18\theta,2,t,u}\right)^2C'_{v,2,H,t,18\theta}.\end{aligned}$$

因此，利用不等式 $(a_1+a_2)^2\le 2a_1^2+2a_2^2$，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2}\left(I_2(z,z',y,y',x_3;s_3,r_3,t)+I_2(y,y',z,z',x_3;s_3,r_3,t)\right)dzdx_3\right)^2|y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2}dy'dz'\\&\le 32\left(2tC_{18\theta,2,t,v}\right)^2C'_{u,2,H,t,18\theta}C'_{v,2,H,t,18\theta}+16C_{18\theta,2,t,u}^2\left(C'_{v,2,H,t,18\theta}\right)^2+16\left(2tC_{18\theta,2,t,v}C_{18\theta,2,t,u}\right)^2C'_{v,2,H,t,18\theta}.\end{aligned} \tag{78}$$

第三，我们处理积分 $dy'dw'$。通过变量代换 $(w,w')\leftrightarrow(y,y')$，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}I_2(w,w',y,y',x_4;s_4,r_4,t)dwdy\right)^2|y'|^{2H-2}|w'|^{2H-2}dy'dw'\\=&\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}I_2(y,y',w,w',x_4;s_4,r_4,t)dwdy\right)^2|y'|^{2H-2}|w'|^{2H-2}dy'dw'.\end{aligned}$$

因此，只需计算第一个积分。任取 $0\le s<r\le t$。根据定理 2.3、引理 3.2 和引理 5.2，我们先对 dw 积分，再对 dy 积分，得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}I_2(w,w',y,y',x_4;s,r,t)dwdy\\&\le 2tC_{18\theta,2,t,v}\left\|u_{18\theta}(s,0)-u_{18\theta}(s,w')\right\|_2\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(r,y)}(t,x_4)-v_{18\theta}^{(r,y+y')}(t,x_4)\right\|_2dy\\&+C_{18\theta,2,t,u}\sup_{y\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(s,w)}(r,y)-v_{18\theta}^{(s,w+w')}(r,y)\right\|_2dw\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(r,y)}(t,x_4)-v_{18\theta}^{(r,y+y')}(t,x_4)\right\|_2dy\\&+2tC_{18\theta,2,t,v}\left\|u_{18\theta}(s,0)-u_{18\theta}(s,w')\right\|_2\sup_{y\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(s,w)}(r,y)-v_{18\theta}^{(s,w)}(r,y+y')\right\|_2dw\\&+2tC_{18\theta,2,t,v}C_{18\theta,2,t,u}\sup_{y\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left\|v_{18\theta}^{(s,w)}(r,y)-v_{18\theta}^{(s,w)}(r,y+y')-v_{18\theta}^{(s,w+w')}(r,y)+v_{18\theta}^{(s,w+w')}(r,y+y')\right\|_2dw.\end{aligned}$$

因此，利用引理 5.1 和引理 5.5 以及不等式 $(\sum_{i=1}^4 a_i)^2 \le 4\sum_{i=1}^4 a_i^2$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2} I_2(w,w',y,y',x_4;s_4,r_4,t)dwdy\right)^2 |y'|^{2H-2}|w'|^{2H-2}dy'dw'\\ \le& 8\left(2tC_{18\theta,2,t,v}\right)^2 C'_{u,2,H,t,18\theta}C'_{v,2,H,t,18\theta} + 4C^2_{18\theta,2,t,u}(C'_{v,2,H,t,18\theta})^2 + 4\left(2tC_{18\theta,2,t,v}C_{18\theta,2,t,u}\right)^2 C'_{v,2,H,t,18\theta}.\end{aligned} \tag{79}$$

因此，利用不等式 $(a_1+a_2)^2 \le 2a_1^2+2a_2^2$，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2} \big(I_2(w,w',y,y',x_4;s_4,r_4,t)+I_2(y,y',w,w',x_4;s_4,r_4,t)\big)dwdy\right)^2 |y'|^{2H-2}|w'|^{2H-2}dy'dw'\\ \le& 32\left(2tC_{18\theta,2,t,v}\right)^2 C'_{u,2,H,t,18\theta}C'_{v,2,H,t,18\theta} + 16C^2_{18\theta,2,t,u}(C'_{v,2,H,t,18\theta})^2 + 16\left(2tC_{18\theta,2,t,v}C_{18\theta,2,t,u}\right)^2 C'_{v,2,H,t,18\theta}.\end{aligned} \tag{80}$$

最后，将 (75)、(78) 和 (80) 代入 (74)，得到空间积分的以下估计：

$$\begin{aligned}&\int_{[-R,R]^4} dx_1dx_2dx_3dx_4 \int_{\mathbb{R}^3} dydzdw \int_{\mathbb{R}^3} |y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2}|w'|^{2H-2}dy'dz'dw'\\ &I_1(z,z',x_1;r_1,t)I_1(w,w',x_2;r_2,t)\big(I_2(z,z',y,y',x_3;s_3,r_3,t)+I_2(y,y',z,z',x_3;s_3,r_3,t)\big)\\ &\times\big(I_2(w,w',y,y',x_4;s_4,r_4,t)+I_2(y,y',w,w',x_4;s_4,r_4,t)\big)\\ \le&\int_{[-R,R]} dx_4\left(8t^2C^2_{12\theta,2,t,v}C'_{u,2,H,t,12\theta}+2C^2_{12\theta,2,t,u}C'_{v,2,H,t,12\theta}\right)\\ &\times\left(32\left(2tC_{18\theta,2,t,v}\right)^2 C'_{u,2,H,t,18\theta}C'_{v,2,H,t,18\theta} + 16C^2_{18\theta,2,t,u}(C'_{v,2,H,t,18\theta})^2 + 16\left(2tC_{18\theta,2,t,v}C_{18\theta,2,t,u}\right)^2 C'_{v,2,H,t,18\theta}\right).\end{aligned}$$

因此，回到 (73)，我们得到 $\mathcal{A} \le C(\theta,t,H)R$，其中 $C(\theta,t,H)$ 是一个正定常数，仅依赖于 θ、t、H，且随 t 增大而增大。证明完毕。

在上述论证中，我们使用了以下柯西-施瓦茨不等式的广义形式。

引理 6.5. 设 n_1、n_2、$n_3 \in \mathbb{N}$，且 $f \in L^2(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ $g \in L^2(\mathbb{R}^{n_2+n_3})$ $h \in L^2(\mathbb{R}^{n_3+n_1})$。则以下不等式成立。

$$\begin{aligned}&\int f(x_1,x_2)g(x_2,x_3)h(x_3,x_1)dx_1dx_2dx_3\\ \le&\left(\int f^2(x_1,x_2)dx_1dx_2\right)^{1/2}\left(\int g^2(x_2,x_3)dx_2dx_3\right)^{1/2}\left(\int h^2(x_3,x_1)dx_3dx_1\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

证明。首先对积分 dx_1dx_2 应用柯西-施瓦茨不等式，然后对 dx_3应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到。

$$\int f(x_1,x_2)g(x_2,x_3)h(x_3,x_1)dx_1dx_2dx_3$$

$$\leq \left(\int f^2(x_1,x_2)dx_1dx_2\right)^{1/2}\left(\int dx_1dx_2\left(\int g(x_2,x_3)h(x_3,x_1)dx_3\right)^2\right)^{1/2}$$
$$\leq \left(\int f^2(x_1,x_2)dx_1dx_2\right)^{1/2}\left(\int dx_1dx_2\left(\int g^2(x_2,x_3)dx_3\right)\left(\int h^2(x_3,x_1)dx_3\right)\right)^{1/2}$$
$$= \left(\int f^2(x_1,x_2)dx_1dx_2\right)^{1/2}\left(\int g^2(x_2,x_3)dx_2dx_3\right)^{1/2}\left(\int h^2(x_3,x_1)dx_3dx_1\right)^{1/2}.$$

□

6.3 函数型中心极限定理

本节中，我们给出定理 1.3 的证明。

步骤 1.（紧性）为此，我们证明对于任意 $p \geq 2$、 $0 \leq s < t \leq T$ 和 $R \geq 1$,

$$\|F_R(t) - F_R(s)\|_p \leq CR^{1/2}(t-s), \tag{81}$$

其中 $C = C_{p,\ \theta,\ T} > 0$ 是一个依赖于 (p, θ, T) 的常数。由柯尔莫哥洛夫连续性定理可知，过程 $F_R = \{F_R(t)\}_{t\in[0,T]}$ 存在连续修正（我们仍将其记为 F_R）。此外，由柯尔莫哥洛夫-切恩佐夫定理（ [11]中的定理 12.3），族 $\{F_R\}_{R>1}$ 在 $C([0,T])$ 中是紧的。

为证明 (81)，我们按照 [5] 第 4.3 节中的方法进行。利用混沌展开，我们有：$F_R(t) - F_R(s) = \sum_{n\geq 1}\theta^{n/2}I_n(g_{n,\ R}(\cdot;\ t, s))$，其中

$$g_{n,R}(x_1,\ldots,x_n;t,s) = \int_{B_R}\big(f_n(x_1,\ldots,x_n,x;t) - f_n(x_1,\ldots,x_n,x;s)\big)dx.$$

由超收缩性可知，对于任意 $p \geq 2$,

$$\|F_R(t) - F_R(s)\|_p \leq \sum_{n\geq 1}\theta^{n/2}(p-1)^{n/2}(n!)^{1/2}\|\widetilde{g}_{n,R}(\cdot;t,s)\|_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}. \tag{82}$$

采用与 [5], 中 (54)–(55) 相同的论证，再经$\eta_j = \xi_1 + \ldots + \xi_j$ 变量代换 $\eta_j = \xi_1 + \ldots + \xi_j$ 并利用不等式 (24)，可得：

$$n!\|\widetilde{g}_{n,R}(\cdot;\ t,s)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}} \leq (t-s)^2t^nc_H^n$$
$$\times \int_{T_n(t)}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}\mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi_1+\ldots+\xi_n)|^2\left|\prod_{j=1}^{n-1}\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\xi_1+\ldots+\xi_j)\right|^2\prod_{j=1}^{n}|\xi_j|^{1-2H}d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{t}$$
$$\leq c_H^n(t-s)^2t^n\sum_{\alpha\in D_n}\int_{T_n(t)}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\eta_j)\right|^2|\eta_j|^{\alpha_j}d\eta_j\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}\mathbf{1}_{[-R,R]}(\eta_n)|^2|\eta_n|^{\alpha_n}d\eta_n\right)d\boldsymbol{t}.$$

注意到 $\mathcal{F}1_{[-R,R]}(\eta) = {}^{2\sin(\eta R)}\!/_{\eta}$，利用引理 C.2 以及 $\alpha_n \in \{0, 1-2H\}$ 这一事实，我们得到：

$$\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}\mathbf{1}_{[-R,R]}(\eta_n)|^2|\eta_n|^{\alpha_n}d\eta_n = \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{2\sin(\eta_nR)}{\eta_n}\right|^2|\eta|^{\alpha_n}d\eta = 4R^{1-\alpha_n}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2\eta_n}{|\eta_n|^2}|\eta_n|^{\alpha_n}$$

$$\leq 8R^{1-\alpha_n}\left(\frac{1}{1-\alpha_n}+\frac{1}{1+\alpha_n}\right)\leq 8R\left(\frac{1}{H}+1\right).$$

类似地，对于任意 $j=1,\ldots,n-1$，利用引理 C.2，我们有：

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}G_{t_{j+1}-t_j}(\eta_j)\right|^2|\eta_j|^{\alpha_j}d\eta_j=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2\left((t_{j+1}-t_j)|\eta_j|\right)}{|\eta_j|^2}|\eta_j|^{\alpha_j}d\eta_j\leq\frac{2}{1-\alpha_j}+\frac{2(t_{j+1}-t_j)^2}{1+\alpha_j}$$
$$\leq 2\left(\frac{1}{4H-1}+1\right)(1+t^2),$$

由于 $\alpha_j\in\{0,1-2H,2(1-2H)\}$ 以及 $H\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$。因此，

$$n!\|\widetilde{g}_{n,R}(\cdot;t,s)\|^2_{\mathcal{P}_0^{\otimes n}}\leq(t-s)^2t^{2n}C_H^n(1+t^2)^{n-1}\frac{1}{n!}R, \tag{83}$$

其中，$C_H>0$ 是依赖于 H 的常数。关系式 (81) 可由 (82)、(83) 和斯特林公式推出。

步骤 2。（有限维收敛）令 $Q_R(t)=R^{-1/2}F_R(t)$。我们需要证明，对于任意 $m\geq 1$、$0\leq t_1<\ldots<t_m\leq T$，

$$\big(Q_R(t_1),\ldots,Q_R(t_m)\big)\xrightarrow{d}\big(\mathcal{G}_1(t_1),\ldots,\mathcal{G}_m(t_m)\big)$$

使用与 [5]，中定理 1.3.(iii)（步骤 2）的证明相同的论证，只需证明对于任意的 i、$j=1$、……、m，

$$\mathrm{Var}\Big(\langle DF_R(t_i),-DL^{-1}F_R(t_j)\rangle_{\mathcal{P}_0}\Big)\leq CR.$$

为了估计这个方差，我们使用 [6]的命题 B.1。剩下需要证明的是

$$\int_{[-R,R]^4}\int_{\mathbb{R}^6}\|D_zu_\theta(t_j,x_1)-D_{z+z'}u_\theta(t_j,x_1)\|_4\,\|D_wu_\theta(t_j,x_2)-D_{w+w'}u_\theta(t_j,x_2)\|_4$$
$$\big\|D^2_{z,y}u_\theta(t_i,x_3)-D^2_{z,y+y'}u_\theta(t_i,x_3)-D^2_{z+z',y}u_\theta(t_i,x_3)+D^2_{z+z',y+y'}u_\theta(t_j,x_3)\big\|_4$$
$$\big\|D^2_{w,y}u_\theta(t_i,x_4)-D^2_{w,y+y'}u_\theta(t_i,x_4)-D^2_{w+w',y}u_\theta(t_i,x_4)+D^2_{w+w',y+y'}u_\theta(t_i,x_4)\big\|_4$$
$$|y'|^{2H-2}|z'|^{2H-2}|w'|^{2H-2}dydy'dzdz'dwdw'dx_1dx_2dx_3dx_4\leq CR.$$

这可以用与 $\mathcal{A}^*\leq CR$ 第 6.2 节中相同的论证证明。细节从略。

利用超收缩性的矩比较

本节将按照 [1] 中定理 B.1 的思路，给出一个关于一般随机偏微分方程的解的矩比较结果。

令 $W=\{W(\varphi);\ \varphi\in\mathcal{H}\}$ 为与希尔伯特空间 $\mathcal{H}$相关联的等距正态高斯过程。假设以下条件之一成立：(i) $\mathcal{H}$ 由定义在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$上的函数（或分布）组成，即 W 依赖于时间；并且

(ii)$\mathcal{H}$ 由 $\mathbb{R}^d$上的函数（或分布）构成，即 W 与时间无关。

令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上的二阶伪微分算子，且 u_θ 为随机偏微分方程的解：

$$\mathcal{L}u(t,x) = \sqrt{\theta}u(t,x)\dot{W}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d \tag{84}$$

具有（确定性的）初始条件。根据定义，方程 (84) 的（温和 Skorohod）解是一个适应平方可积过程 $u_\theta = \{u_\theta(t,x); t > 0, x \in \mathbb{R}^d\}$，满足

$$u_\theta(t,x) = w(t,x) + \sqrt{\theta}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y)u_\theta(s,y)W(\delta s, \delta y),$$

若噪声 W 依赖于时间，则分别为

$$u_\theta(t,x) = w(t,x) + \sqrt{\theta}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y)u_\theta(s,y)W(\delta y)ds,$$

若噪声 W 与时间无关，且这些积分有定义。这里，$W(\delta s, \delta y)$（分别为 $W(\delta y)$）表示关于 W 的 Skorohod 积分，G 是 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上的 $\mathcal{L}$ 的基本解，而 w 是 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上确定性方程 $\mathcal{L}u = 0$ 的解，其初始条件与 (84) 相同。

引理 A.1. 假设对于任意 $\theta > 0$，方程 (84) 都有唯一解 U_θ，并且对于任意 $t > 0$、$x \in \mathbb{R}^d$ 和 $p > 1$，$\mathbb{E}|U_\theta(t,x)|^p < \infty$。

(a) 对任意 $\theta > 0$、$q > p > 1$、$t > 0$、$x \in \mathbb{R}^d$ 和 $h \in \mathbb{R}^d$，我们有：

$$\left\| U_{\frac{p-1}{q-1}\theta}(t, x+h) - U_{\frac{p-1}{q-1}\theta}(t,x) \right\|_q \le \left\| U_\theta(t,x+h) - U_\theta(t,x) \right\|_p .$$

特别地，对任意 $\theta > 0$、$p > 2$、$t > 0$、$x \in \mathbb{R}^d$ 和 $h \in \mathbb{R}^d$，我们有：

$$\left\| U_\theta(t,x+h) - U_\theta(t,x) \right\|_p \le \left\| U_{(p-1)\theta}(t,x+h) - U_{(p-1)\theta}(t,x) \right\|_2 .$$

(b) 假设对任意 $\theta > 0$、$t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，$U_\theta(t,x)$ 是 k 阶 Malliavin 可微，其 Malliavin 导数是一个属于 $\mathcal{H}$ 的函数，并且对任意 z 和 $p > 1$，$\mathbb{E}|D_z U_\theta(t,x)|^p < \infty$。那么，对任意 $q > p > 1$、$t > 0$、$x \in \mathbb{R}^d$、$l \in \mathbb{N}$，对任意实数 $\{a^{(j)} : 1 \le j \le l\}$，以及对任意 $\{z_i^{(j)} : 1 \le i \le k、1 \le j \le l\}$（若噪声依赖于时间，则取自 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$；若噪声与时间无关，则取自 $\mathbb{R}^d$），我们有：

$$\left\| \sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_{\frac{p-1}{q-1}\theta}(t,x) \right\|_q \le \left(\frac{p-1}{q-1} \right)^{k/2} \left\| \sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_\theta(t,x) \right\|_p .$$

特别地，对于任意 $\theta > 0$、$p > 2$、$t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，我们有：

$$\left\| \sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_\theta(t,x) \right\|_p \le \left(\frac{1}{p-1} \right)^{k/2} \left\| \sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_{(p-1)\theta}(t,x) \right\|_2 .$$

证明。由 [1], 中定理 B.1 的证明可知，对于任意 $\tau > 0$、 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，我们有：

$$T_\tau(U_\theta(t,x)) = U_{e^{-2\tau}\theta}(t,x) \quad \text{a.s.} \tag{85}$$

其中 $(T_t)_{t\geq 0}$ 是 Ornstein-Uhlenbeck 半群（参见 [1] 的关系式 (B.6)）。

(a) 利用 (85) 以及 T_τ 是线性算子这一事实，可得：

$$T_\tau(U_\theta(t,x+h) - U_\theta(t,x)) = U_{e^{-2\tau}\theta}(t,x+h) - U_{e^{-2\tau}\theta}(t,x).$$

因此，利用 OU 半群的超收缩性性质 (13)，可得：

$$\begin{aligned}\|U_{e^{-2\tau}\theta}(t,x+h) - U_{e^{-2\tau}\theta}(t,x)\|_{q(\tau)} &= \|T_\tau(U_\theta(t,x+h) - U_\theta(t,x))\|_{q(\tau)} \\ &\leq \|U_\theta(t,x+h) - U_\theta(t,x)\|_p ,\end{aligned}$$

其中 $q(\tau) = e^{2\tau}(p-1)+1$。我们选择 τ使得 $q(\tau) = q$，这意味着 $e^{2\tau} = \frac{q-1}{p-1}$。

(b) 根据 (85) 和 12,

$$D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_{e^{-2\tau}\theta}(t,x) = D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}}\left(T_\tau(U_\theta(t,x))\right) = e^{-k\tau} T_\tau(D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_\theta(t,x)).$$

由于 T_τ 是线性算子,

$$\sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_{e^{-2\tau}\theta}(t,x) = e^{-k\tau} T_\tau\left(\sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_\theta(t,x)\right).$$

Us利用 OU 半群的超收缩性 (13)，我们得到 :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_{e^{-2\tau}\theta}(t,x)\right\|_{q(\tau)} &= e^{-k\tau}\left\|T_\tau\left(\sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_\theta(t,x)\right)\right\|_{q(\tau)} \\ &\leq e^{-k\tau}\left\|\sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U_\theta(t,x)\right\|_p ,\end{aligned}$$

其中 $q(\tau) = e^{2\tau}(p-1)+1$。我们选取 τ使得 $q(\tau) = q$，这意味着 $e^{2\tau} = \frac{q-1}{p-1}$。

□

注 A.2. 使用与上述相同的论证，可以证明引理 A.1 的以下推广。考虑算子族 $\mathcal{L}^{(1)}$、...、$\mathcal{L}^{(l)}$，并令 $U_\theta^{(j)}$ 为方程 (84) 的唯一解，其中算子 $\mathcal{L}$ 替换为 $\mathcal{L}^{(j)}$，且初始数据为 $w^{(j)}$。则

$$\left\|\sum_{j=1}^l a_j U^{(j)}_{\frac{p-1}{q-1}\theta_j}(t,x_j)\right\|_q \leq \left\|\sum_{j=1}^l a_j U^{(j)}_{\theta_j}(t,x_j))\right\|_p ,$$

$$\left\|\sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U^{(j)}_{\frac{p-1}{q-1}\theta}(t,x_j)\right\|_q \leq \left(\frac{p-1}{q-1}\right)^{k/2}\left\|\sum_{j=1}^l a^{(j)} D^k_{z_1^{(j)},\dots,z_k^{(j)}} U^{(j)}_\theta(t,x_j)\right\|_p .$$

B 时间白噪声下的随机 Volterra 方程

在本节中，我们研究两个模型，它们涉及由协方差为 (33) 的高斯噪声 $\mathfrak{X}$ 驱动的随机 Volterra 方程参数族，其中 $H \in (1_4, 1_2)$。这项研究将使我们能够建立噪声为 $\mathfrak{X}$ 且具有 delta 初始速度的 (hAm) 模型 (32) 的解 V_θ 的一些性质，这些性质将在后文中使用。

文献 [3] 研究了噪声为 $\mathfrak{X}$、且仿射函数 $\sigma(u) = au+b$ 乘以噪声的随机热方程和波动方程。这里需要用到文献 [3] 中的若干结论。例如，由文献 [3] 的定理 2.9 和闵可夫斯基不等式可得：对于任意 $p \geq 2$,

$$\left\| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} S(t,x)\mathfrak{X}(dt,dx) \right\|_p^2 \leq C_{p,H} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \|S(t,x) - S(t,y)\|_p^2 |x-y|^{2H-2} dxdydt, \quad (86)$$

其中 $C_{p,H} > 0$ 是一个依赖于 p 和 H 的常数。

令 $T > 0$ 为任意值。对于每个 $t \in [0,T]$，令 Γ_t 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的确定性非负函数。考虑以下函数：

$$J_1(t) := \int_{\mathbb{R}^2} |\Gamma_t(x) - \Gamma_t(x+h)|^2 |h|^{2H-2} dxdh$$
$$J_2(t) := \int_0^t J_3(s) J_4(t-s) ds$$
$$J_3(t) := \int_{\mathbb{R}^3} |\big(\Gamma_t(x+h) - \Gamma_t(x)\big) - \big(\Gamma_t(x+h+k) - \Gamma_t(x+k)\big)|^2 |h|^{2H-2} |k|^{2H-2} dhdkdx$$
$$J_4(t) := \int_{\mathbb{R}} \Gamma_t^2(x) dx.$$

我们作出以下假设：

假设 A. 对任意 $t \in [0,T]$ 和 $i = 1,$ $J_i(t) < \infty$，2、3、4，且

$$Q_i(T) := \int_0^T J_i(t) dt < \infty \quad \text{for } i = 1, 2.$$

当 $\Gamma_t(x) = G_t(x)$ 是波动方程的基本解（由 (2) 给出），或者当 $\Gamma_t(x) = g_t(x) := (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{x^2}{2t})$ 是热方程的基本解时，假设 A 成立：根据 [3], 的引理 3.1 和 3.3

$$J_1(t) = C \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}\Gamma_t(\xi)|^2 |\xi|^{1-2H} d\xi = \begin{cases} Ct^{2H} & \text{for wave equation} \\ Ct^{H-1} & \text{for heat equation} \end{cases}$$
$$J_3(t) = C \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}\Gamma_t(\xi)|^2 |\xi|^{2(1-2H)} d\xi = \begin{cases} Ct^{4H-1} & \text{for wave equation} \\ Ct^{2H-3/2} & \text{for heat equation} \end{cases}$$

$$J_4(t) = \begin{cases} Ct & \text{for wave equation} \\ Ct^{-1/2} & \text{for heat equation} \end{cases} \quad \text{and} \quad J_2(t) = \begin{cases} Ct^{4H+1} & \text{for wave equation} \\ Ct^{2H-1} & \text{for heat equation} \end{cases}$$

这里， C 是一个依赖于 H 的常数，并且在每次出现时可能取值不同。

令 $p \geq 2$ 为任意值。对于任意 $r \in [0,T]$，令 $\mathcal{X}_r$ 为可预测过程$\{X(t,x);\ t \in [r,T],\ x \in \mathbb{R}\}$ 的空间，使得 $\|X\|_{\mathcal{X}_r} := \|X\|_{\mathcal{X}_{r,1}} + \|X\|_{\mathcal{X}_{r,2}} < \infty$，其中

$$\|X\|_{\mathcal{X}_{r,1}} = \sup_{(t,x)\in[r,T]\times\mathbb{R}} \|X(t,x)\|_p$$

$$\|X\|_{\mathcal{X}_{r,2}} = \sup_{(t,x)\in[r,T]\times\mathbb{R}} \left(\int_r^t \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_{t-s}^2(x-y) \|X(s,y) - X(s,y+h)\|_p^2 |h|^{2H-2} dh dy ds \right)^{1/2}.$$

定理 B.1. 假设假设 A 成立。设 Λ 为任意集合。a) 对于任意 $r \in [0,T]$ 和 $\alpha \in \Lambda$, 随机沃尔泰拉方程族:

$$X(t,x) = X_0^{(r,\alpha)}(t,x) + \int_r^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{t-s}(x-y) X(s,y) \mathfrak{X}(ds,dy), \tag{87}$$

当 $t \in [r,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}$满足 $X_0^{(r,\alpha)} \in \mathcal{X}_r$时， $X^{(r,\alpha)}$ 在 $\mathcal{X}_r$中有唯一解。b) 如果进一步满足,

$$\sup_{r\in[0,T]} \sup_{\alpha\in\Lambda} \|X_0^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r} < \infty, \tag{88}$$

then

$$\sup_{r\in[0,T]} \sup_{\alpha\in\Lambda} \|X^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r} < \infty. \tag{89}$$

证明。a) 对于任意 $n \geq 0$，我们定义 Picard 迭代:

$$X_{n+1}(t,x) = X_0^{(r,\alpha)}(t,x) + \int_r^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{t-s}(x-y) X_n(s,y) \mathfrak{X}(ds,dy), \tag{90}$$

对所有 $t \in [r,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}$ 都成立。注意， $X_n = X_n^{(r,\alpha)}$ 依赖于 (r,α)。为简化表述，我们在论证的第一部分省略上标 (r,α)。

递推关系 (90) 对于 $n = -1$ 也成立，其中 $X_{-1}(t,x) = 0$。对于任意 $n \geq 0$ 和 $t \in [r,T]$, 我们定义

$$V_n(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|X_n(t,x) - X_{n-1}(t,x)\|_p^2$$

$$W_n(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_r^t \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_{t-s}^2(x-y) \|\big(X_n(s,y) - X_{n-1}(s,y)\big) - \big(X_n(s,y+h) - X_{n-1}(s,y+h)\big)\|_p^2 |h|^{2H-2} dh dy ds.$$

As 在 [3], 的定理 3.8 的证明中，对于任意 $t \in [r,T]$ 和 $n \geq 0$，我们有:

$$V_{n+1}(t) \leq 2C_{p,H} \left(\int_r^t V_n(s) J_1(t-s) ds + W_n(t) \right)$$

$$W_{n+1}(t) \leq 2C_{p,H} \left(\int_r^t V_n(s) J_2(t-s) ds + \int_r^t W_n(s) J_1(t-s) ds \right),$$

其中，$C_{p,H}$ 是式 (86) 中的常数。令 $f_n(t) = V_n(t) + W_n(t)$，则对于 $n \geq 1$,

$$f_{n+1}(t) \leq 2C_{p,H}(C_{p,H}+1)\int_r^t \big(f_n(s)+f_{n-1}(s)\big)ds, \quad \text{for all } t \in [r,T].$$

注意，这正是 [3] 中引理 3.10 给出的递推关系。要应用该引理，我们需要证明 f_0 和 f_1 一致有界。对于 $n=0$,

$$\sup_{t\in[r,T]}\sqrt{f_0(t)} \leq \sup_{t\in[r,T]}\sqrt{V_0(t)} + \sup_{t\in[r,T]}\sqrt{W_0(t)} = \|X_0^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r} =: M_0$$

对于 $n=1$，利用上述递推关系，我们有：

$$\begin{aligned} V_1(t) &\leq 2C_{p,H}\left(\int_r^t V_0(s)J_1(t-s)ds + W_0(t)\right) \leq 2C_{p,H}\|X_0^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r}^2\big(Q_1(t-r)+1\big) \\ W_1(t) &\leq 2C_{p,H}\left(\int_r^t V_0(s)J_2(t-s)ds + \int_r^t W_0(s)J_1(t-s)ds\right) \\ &\leq 2C_{p,H}\|X_0^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r}^2\big(Q_1(t-r)+Q_2(t-r)\big), \end{aligned}$$

因此

$$\sup_{t\in[r,T]} f_1(t) \leq 2C_{p,H}\|X_0^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r}^2\big(2Q_1(T-r)+Q_2(T-r)+1\big) =: M_1.$$

令 $M = M_0 + M_1$。现在应用 [3], 中的引理 3.10，我们推知存在一个正数序列 $(a_n)_{n\geq 0}$，满足性质 $\sum_{n\geq 0} a_n^{1/p} < \infty$，对任意 $p>1$ 均成立，使得

$$\sup_{t\in[r,T]} f_n(t) \leq Ma_n \quad \text{for all} \quad n \geq 0.$$

由此可得 $\|X_n - X_{n-1}\|_{\mathcal{X}_r} = \sup_{t\in[r,T]}\sqrt{V_n(t)} + \sup_{t\in[r,T]}\sqrt{W_n(t)} \leq 2\sqrt{Ma_n}$。因此，$(X_n)_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{X}_r$中的一个柯西序列。其极限 X 是 (87) 在 $\mathcal{X}_r$ 中的唯一解。

b) 现在我们证明关于 (r,α) 中一致有界性的最后一个结论。本部分也包含上标 (r,α)。我们有：

$$\|X_n^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r} \leq \|X_0^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r} + \sum_{k=1}^n \|X_k^{(r,\alpha)} - X_{k-1}^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r} \leq \|X_0^{(r,\alpha)}\|_{\mathcal{X}_r} + 2(M^{(r,\alpha)})^{1/2}\sum_{n\geq 1} a_n^{1/2}.$$

令 $n\to\infty$ 即可得到关系式 (89)；这是因为根据条件 (88)，$M^{(r,\alpha)}$ 对所有 $r\in[0,T]$ 和 $\alpha\in\Lambda$ 都一致有界。 □

例 B.2. 作为定理 B.1 的应用，我们考虑带有噪声 $\mathfrak{X}$ 和狄拉克 δ 初始速度的 (hAm) 模型 (32)。对于任意固定的 $r\in[0,T]$ 和 $z\in\mathbb{R}$，解 $V_\theta^{(r,z)}$ 满足积分方程 (34)。这正是初始条件为 $X_0^{(r,z)}(t,x) = G_{t-r}(x-z)$ 和 $\Gamma_t = \sqrt{\theta}G_t$的随机沃尔泰拉方程 (87)。在定理 B.1 的这一应用中，$\alpha = z$ 和 $\Lambda = \mathbb{R}$。显然，条件 (88) 成立，因为：

$$\|X_0^{(r,z)}\|_{\mathcal{X}_{r,1}}^2 = \sup_{(t,x)\in[r,T]\times\mathbb{R}} G_{t-r}^2(x-z) \leq \frac{1}{4}$$

$$\|X_0^{(r,z)}\|^2_{\mathcal{X}_{r,2}} = \theta \sup_{(t,x)\in[r,T]\times\mathbb{R}} \int_r^t \int_{\mathbb{R}^2} G^2_{t-s}(x-y)|G_{s-r}(y-z) - G_{s-r}(y+h-z)|^2|h|^{2H-2}dhdyds$$
$$\leq \frac{1}{4}\theta C_{H,1} \sup_{t\in[r,T]} \int_r^t (s-r)^{2H}ds = \theta C'_{H,1}(T-r)^{2H+1}.$$

由此我们得出

$$\sup_{r\in[0,T]} \sup_{z\in\mathbb{R}} \|V_\theta^{(r,z)}\|_{\mathcal{X}_r} < \infty. \tag{91}$$

注 B.3. 对于具有狄拉克 δ 初始条件的 (pAm) 模型，不能应用定理 B.1，因为 $\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} g_t(x) = \infty$，其中 $g_t(x) = (2\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/t}$ 是热核。对于任意 $x \neq 0$，函数 $t \mapsto g_t(x)$ 在 $t = x^2$ 处达到最大值；若 $|x| \leq T$，则该最大值为某个常数 $c > 0$ 的 $c|x|^{-1}$。

现在我们研究第二个参数化的随机 Volterra 方程族，它将有助于处理 V_θ 的增量。我们引入以下假设。

假设 B. 对任意 $i = 1$，3、4、$J_i(t) < \infty$，对任意 $t \in [0,T]$ 且

$$Q_i(T) := \int_0^T J_i(t)dt < \infty.$$

令 $p \geq 2$ 为任意值。对于任意 $r \in [0,T]$，令 $\mathcal{Y}_r$ 为所有过程 $\{Y(t,x,z,h);\ t \in [r,T], (x,z,h) \in \mathbb{R}^3\}$ 的集合，使得映射 $(\omega,t,x,z,h) \mapsto Y(\omega,t,x,z,h)$ 是 $\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-可测的，且 $\|Y\|_{\mathcal{Y}_r} := \|Y\|_{\mathcal{Y}_{r,1}} + \|Y\|_{\mathcal{Y}_{r,2}} < \infty$，其中

$$\|Y\|_{\mathcal{Y}_{r,1}} = \sup_{t\in[r,T]} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \|Y(t,x,z,h)\|_p^2|h|^{2H-2}dxdh\right)^{1/2}$$
$$\|Y\|_{\mathcal{Y}_{r,2}} = \sup_{t\in[r,T]} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \|Y(t,x,z,h) - Y(t,x+k,z,h)\|_p^2|h|^{2H-2}|k|^{2H-2}dxdhdk\right)^{1/2}.$$

这里，$\mathcal{P}$ 是 $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ 上的可预测 σ 场。

定理 B.4. 假设假设 B 成立。

a) 对任意 $r \in [0,T]$，随机 Volterra 方程族：

$$X(t,x,z,h) = X_0^{(r)}(t,x,z,h) + \int_r^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{t-s}(x-y)X(s,y,z,h)\mathfrak{X}(ds,dy), \tag{92}$$

其中 $t \in [r,T]$ 且 $(x,z,h) \in \mathbb{R}^3$，在 $X_0^{(r)} \in \mathcal{Y}_r$ 成立的条件下，在 $\mathcal{Y}_r$ 中有唯一解 $X^{(r)}$。

b) 若进一步，

$$M := \sup_{r\in[0,T]} \|X_0^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} < \infty,$$

then

$$\sup_{r\in[0,T]} \|X^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} \leq C_{T,H,p}M, \tag{93}$$

其中 $C_{T,H,p} > 0$ 是一个依赖于 (T,H,p) 的常数。

证明。a) 固定 $r \in [0,T]$。为说明主要思路，首先假设存在一个解 $X^{(r)}$。记 $X^{(r,z,h)}(t,x) := X^{(r)}(t,x,z,h)$。

我们使用记号 $a \lesssim b$ if $a \le Cb$，且 $C>0$ 是一个依赖于 p 和H的常数。根据 BDG 不等式 (86) 和三角不等式，

$$\begin{aligned}
&\left\|X^{(r,z,h)}(t,x)\right\|_p^2 \lesssim \left|X_0^{(r,z,h)}(t,x)\right|^2 + \\
&\int_r^t \int_{\mathbb{R}^2} \left\|\Gamma_{t-s}(x-y)X^{(r,z,h)}(s,y) - \Gamma_{t-s}(x-y-k)X^{(r,z,h)}(s,y+k)\right\|_p^2 |k|^{2H-2} dkdyds \\
&\lesssim \left|X_0^{(r,z,h)}(t,x)\right|^2 + \int_r^t \int_{\mathbb{R}} \left(\Gamma_{t-s}(x-y) - \Gamma_{t-s}(x-y-k)\right)^2 \left\|X^{(r,z,h)}(s,y)\right\|_p^2 |k|^{2H-2} dkdyds \\
&\qquad + \int_r^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{t-s}^2(x-y-k) \left\|X^{(r,z,h)}(s,y) - X^{(r,z,h)}(s,y+k)\right\|_p^2 |k|^{2H-2} dkdyds.
\end{aligned}$$

我们乘以 $|h|^{2H-2}$，并在 $\mathbb{R}^2$ 上对 $dxdh$ 积分。对于第二项，我们使用

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\Gamma_{t-s}(x-y) - \Gamma_{t-s}(x-y-k)\right)^2 |k|^{2H-2} dxdk = J_1(t-s),$$

对于第三项，我们使用 $\int_{\mathbb{R}} \Gamma_{t-s}^2(x-y-k)dx = J_4(t-s)$。于是得到：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left\|X^{(r,z,h)}(t,x)\right\|_p^2 |h|^{2H-2} dxdh \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \left|X_0^{(r,z,h)}(t,x)\right|^2 |h|^{2H-2} dxdh \\
&\quad + \int_r^t J_1(t-s) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\|X^{(r,z,h)}(s,y)\right\|_p^2 |h|^{2H-2} dydh \right) ds \\
&\quad + \int_r^t J_4(t-s) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left\|X^{(r,z,h)}(s,y) - X^{(r,z,h)}(s,y+k)\right\|_p^2 |h|^{2H-2} |k|^{2H-2} dydhdk \right) ds.
\end{aligned}$$

对 $z \in \mathbb{R}$ 取上确界，我们得到对任意 $t \in [r,T]$,

$$\alpha^{(r)}(t) \lesssim \left\|X_0^{(r)}\right\|_{\mathcal{Y}_{r,1}}^2 + \int_r^t \left(J_1(t-s)\alpha^{(r)}(s) + J_4(t-s)\beta^{(r)}(s)\right) ds, \tag{94}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha^{(r)}(t) &= \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \left\|X^{(r,z,h)}(t,x)\right\|_p^2 |h|^{2H-2} dxdh \\
\beta^{(r)}(t) &= \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left\|X^{(r,z,h)}(t,x) - X^{(r,z,h)}(t,x+k)\right\|_p^2 |h|^{2H-2} |k|^{2H-2} dxdhdk.
\end{aligned}$$

为了使这一论证成立，关系式(94)应与关于 $\beta^{(r)}(t)$的类似不等式配对。下面我们将展示如何得到该不等式。同样，由 BDG 不等式 (86) 和三角不等式，

$$\begin{aligned}
&\left\|X^{(r,z,h)}(t,x) - X^{(r,z,h)}(t,x+k)\right\|_p^2 \lesssim \left|X_0^{(r,z,h)}(t,x) - X_0^{(r,z,h)}(t,x+k)\right|^2 + \\
&\int_r^t \int_{\mathbb{R}^2} \left\|\left(\Gamma_{t-s}(x-y) - \Gamma_{t-s}(x+k-y)\right)X^{(r,z,h)}(s,y) -\right.
\end{aligned}$$

$$\big(\Gamma_{t-s}(x-y-w)-\Gamma_{t-s}(x+k-y-w)\big)X^{(r,z,h)}(s,y+w)\big\|_p^2|w|^{2H-2}dwdyds$$
$$\lesssim |X_0^{(r,z,h)}(t,x)-X_0^{(r,z,h)}(t,x+k)|^2+\int_r^t\int_{\mathbb{R}^2}\big|\big(\Gamma_{t-s}(x-y)-\Gamma_{t-s}(x+k-y)\big)-$$
$$\big(\Gamma_{t-s}(x-y-w)-\Gamma_{t-s}(x+k-y-w)\big)\big|^2\big\|X^{(r,z,h)}(t,x)\big\|_p^2|w|^{2H-2}dwdyds+$$
$$\int_r^t\int_{\mathbb{R}^2}\big|\Gamma_{t-s}(x-y-w)-\Gamma_{t-s}(x+k-y-w)\big|^2\big\|X^{(r,z,h)}(s,y)-X^{(r,z,h)}(s,y+w)\big\|_p^2$$
$$|w|^{2H-2}dwdyds.$$

我们乘以 $|h|^{2H-2}|k|^{2H-2}$，并在 $\mathbb{R}^3$ 上对 $dxdhdk$ 进行积分。对于第二项，我们使用

$$\int_{\mathbb{R}^3}\big|\big(\Gamma_{t-s}(x-y)-\Gamma_{t-s}(x+k-y)\big)-\big(\Gamma_{t-s}(x-y-w)-\Gamma_{t-s}(x+k-y-w)\big)\big|^2$$
$$|k|^{2H-2}|w|^{2H-2}dwdxdk=J_3(t-s),$$

对于第三项，$\int_{\mathbb{R}^2}\big|\Gamma_{t-s}(x-y-w)-\Gamma_{t-s}(x+k-y-w)\big|^2|k|^{2H-2}dxdk=J_1(t-s)$。我们得到：

$$\int_{\mathbb{R}^3}\big\|X^{(r,z,h)}(t,x)-X^{(r,z,h)}(t,x+k)\big\|_p^2|h|^{2H-2}|k|^{2H-2}dxdhdk\lesssim$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}\big|X_0^{(r,z,h)}(t,x)-X_0^{(r,z,h)}(t,x+k)\big|^2|h|^{2H-2}|k|^{2H-2}dxdhdk+$$
$$\int_r^t J_3(t-s)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\big\|X^{(r,z,h)}(t,x)\big\|_p^2|h|^{2H-2}dydh\right)ds+$$
$$\int_r^t J_1(t-s)\left(\int_{\mathbb{R}^3}\big\|X^{(r,z,h)}(s,y)-X^{(r,z,h)}(s,y+w)\big\|_p^2|h|^{2H-2}|w|^{2H-2}dydwdh\right)ds.$$

对 $z\in\mathbb{R}$ 取上确界，我们得到，对于任意 $t\in[r,T]$,

$$\beta^{(r)}(t)\lesssim\big\|X_0^{(r)}\big\|_{\mathcal{Y}_{r,2}}^2+\int_r^t\Big(J_3(t-s)\alpha^{(r)}(s)+J_1(t-s)\beta^{(r)}(s)\Big)ds.\tag{95}$$

现在我们证明方程 (92) 的解的存在性，其中 $r\in[0,T]$ 固定。对于 $n\geq0$，我们定义 Picard 迭代：

$$X_{n+1}(t,x,z,h)=X_0^{(r)}(t,x,z,h)+\int_r^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma_{t-s}(x-y)X_n(s,y,z,h)\mathfrak{X}(ds,dy),$$

对于所有 $t\in[r,T]$ 和 $x,z,h\in\mathbb{R}$。记 $X_n^{(r,z,h)}(t,x):=X_n^{(r)}(t,x,z,h)$。令 $X_{-1}^{(r,z,h)}=0$，我们看到，对于任意 $n\geq0$，以下递推关系成立：

$$\big(X_{n+1}^{(r,z,h)}-X_n^{(r,z,h)}\big)(t,x)=\int_r^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma_{t-s}(x-y)\big(X_n^{(r,z,h)}-X_{n-1}^{(r,z,h)}\big)(s,y)\mathfrak{X}(ds,dy).$$

对于任意 $n\geq0$ 和 $t\in[r,T]$，我们定义

$$\alpha_n^{(r)}(t)=\sup_{z\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2}\big\|(X_n^{(r,z,h)}-X_{n-1}^{(r,z,h)})(t,x)\big\|_p^2|h|^{2H-2}dxdh$$

$$\beta_n^{(r)}(t) = \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left\|(X_n^{(r,z,h)} - X_{n-1}^{(r,z,h)})(t,x) - (X_n^{(r,z,h)} - X_{n-1}^{(r,z,h)})(t,x+k)\right\|_p^2 |h|^{2H-2}|k|^{2H-2}dxdhdk.$$

类似于（94）和（95），我们得到对于任意 $n \geq 0$ 和 $t \in [r,T]$,

$$\alpha_{n+1}^{(r)}(t) \leq C_{p,H} \int_r^t \big(J_1(t-s)\alpha_n^{(r)}(s) + J_4(t-s)\beta_n^{(r)}(s)\big)ds$$

$$\beta_{n+1}^{(r)}(t) \leq C_{p,H} \int_r^t \Big(J_3(t-s)\alpha_n^{(r)}(s) + J_1(t-s)\beta_n^{(r)}(s)\Big)ds,$$

其中 $C_{p,\,H}$ 是依赖于 p 和 H的常数。记 $f_n^{(r)} = \alpha_n^{(r)} + \beta_n^{(r)}$和 $J = J_1 + J_3 + J_4$。那么，对于任意 $n \geq 0$ 和 $t \in [r,T]$,

$$f_{n+1}^{(r)}(t) \leq C_{p,H} \int_r^t f_n^{(r)}(s)J(t-s)ds.$$

对于初始项，我们有:

$$M_0^{(r)} := \sup_{t\in[r,T]} \big(\alpha_0^{(r)}(t) + \beta_0^{(r)}(t)\big) \leq \|X_0^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r}^2. \tag{96}$$

根据假设 A，$Q(T) := C_{p,\,H} \int_0^T J(t)dt < \infty$。由 [13] 的引理 15（Gronwall 引理的推广），存在一个由非负实数组成的序列 $(a_n)_{n\geq 0}$，满足性质 $\sum_{n\geq 1} a_n^{1/q} < \infty$，对任意 $q \geq 1$均成立，使得

$$f_n^{(r)}(t) \leq M_0^{(r)} a_n \quad \text{for all } t \in [r,T].$$

更准确地说,

$$a_n = a_n(p,H,T) = Q(T)^n P(S_n \leq T),$$

其中 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $(X_i)_{i\geq 1}$ 是取值于 $[0,T]$ 中的独立同分布随机变量，其分布为$J(\cdot) / \int_0^T J(t)dt$。由此可得:

$$\|X_n^{(r)} - X_{n-1}^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} = \sup_{t\in[r,T]} \big(\alpha_n^{(r)}(t)\big)^{1/2} + \sup_{t\in[r,T]} \big(\beta_n^{(r)}(t)\big)^{1/2} \leq 2(M_0^{(r)})^{1/2} a_n^{1/2}. \tag{97}$$

由此，我们推得 $\sum_{n\geq 0} \|X_n^{(r)} - X_{n-1}^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} < \infty$。因此，$(X_n^{(r)})_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{Y}_r$中的柯西序列。其极限 $X^{(r)}$ 是方程 (92) 的一个解。唯一性可由标准方法得到。

b）由由 (96) 和 (97)，我们得到 $\|X_n^{(r)} - X_{n-1}^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} \leq 2\|X_0^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} a_n^{1/2}$。因此 ,

$$\|X_n^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} \leq \|X_0^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} + \sum_{k=1}^n \|X_k^{(r)} - X_{k-1}^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} \leq \Big(1 + 2\sum_{k=1}^n a_k^{1/2}\Big)\|X_0^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r}.$$

令 $n \to \infty$，我们推得，对于任意 $r \in [0,T]$，$\|X^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} \leq \Big(1 + 2\sum_{n\geq 1} a_n^{1/2}\Big)\|X_0^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r}$。关系式 (93) 随即成立，其中

$$C_{p,H,T} = 1 + 2\sum_{n\geq 1} a_n^{1/2}$$

□

例 B.5. 作为定理 B.4 的一个应用，我们考虑噪声为 $\mathfrak{X}$ 且具有狄拉克 δ 初始速度的 (hAm) 模型 (32)。对于任意固定的 $r \in [0,T]$ 和 $z \in \mathbb{R}$，解 $V_\theta^{(r,z)}$ 满足积分方程 (34)。于是

$$X^{(r)}(t,x,z,h) = X^{(r,z,h)}(t,x) = V_\theta^{(r,z)}(t,x) - V_\theta^{(r,z+h)}(t,x)$$

是满足 $\Gamma_t := \sqrt{\theta} G_t$ 且具有如下初始条件的随机沃尔泰拉方程 (92) 的唯一解：

$$X_0^{(r)}(t,x,z,h) = G_{t-r}(x-z) - G_{t-r}(x-z-h).$$

在这种情况下，函数 J_1、J_3、J_4 分别替换为

$$\bar{J}_1(t) = \theta C_{H,1} t^{2H}, \quad \bar{J}_3(t) = \theta C_{H,3} t^{4H-1}, \quad \bar{J}_4(t) = \theta C_{H,4} t,$$

常数 a_n 替换为

$$\begin{aligned}\overline{a}_n &= \overline{a}_n(p,H,T,\theta) = \bar{Q}(T)^n P(S_n \le T) \\ &= C_{p,H}^n \theta^n \big(C'_{H,1} T^{2H+1} + C'_{H,3} T^{4H} + C'_{H,4} T^2\big)^n P(S_n \le T),\end{aligned}$$

其中 $\bar{Q}(T) := C_{p,H} \int_0^T \bar{J}(t)dt$ 且 $\bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_3 + \bar{J}_4$。这里 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$，其中 $(X_i)_{i\ge 1}$ 是定义在 $[0,T]$ 上的独立同分布随机变量，其分布为 $\bar{J}(\cdot)/\int_0^T \bar{J}(T)$（不依赖于 θ）。关于初始条件的界，我们有：

$$\begin{aligned}\|X_0^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_{r,1}}^2 &= \sup_{t\in[r,T]} \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \big|G_{t-r}(x-z) - G_{t-r}(x-z-h)\big|^2 |h|^{2H-2} dxdh \\ &= C_{H,1} \sup_{t\in[r,T]} (t-r)^{2H} = C_{H,1}(T-r)^{2H} \\ \|X_0^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_{r,2}}^2 &= \sup_{t\in[r,T]} \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \big|\big(G_{t-r}(x-z) - G_{t-r}(x-z-h)\big) - \\ &\qquad \big(G_{t-r}(x+k-z) - G_{t-r}(x+k-z-h)\big)\big|^2 |h|^{2H-2}|k|^{2H-2} dxdhdk \\ &= C_{H,3} \sup_{t\in[r,T]} (t-r)^{4H-1} = C_{H,3}(T-r)^{4H-1},\end{aligned}$$

因此

$$M := \sup_{r\in[0,T]} \|X_0^{(r)}\|_{\mathcal{Y}_r} = \sup_{r\in[0,T]} \big(C_{H,1}^{1/2}(T-r)^H + C_{H,3}^{1/2}(T-r)^{2H-1/2}\big) \le C_H^{1/2}(T^H + T^{2H-1/2}),$$

其中 $C_H = \max(C_{H,1}, C_{H,3})$。由定理 B.4可推得：

$$\sup_{0\le r\le t\le T} \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \big\|V_\theta^{(r,z)}(t,x) - V_\theta^{(r,z+h)}(t,x)\big\|_p^2 |h|^{2H-2} dxdh \le C_{V,p,H,T,\theta} \tag{98}$$

$$\begin{aligned}\sup_{0\le r\le t\le T} \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} &\big\|V_\theta^{(r,z)}(t,x) - V_\theta^{(r,z+h)}(t,x) - V_\theta^{(r,z)}(t,x+k) + V_\theta^{(r,z+h)}(t,x+k)\big\|_p^2 \\ &|h|^{2H-2}|k|^{2H-2} dxdhdk \le C_{V,p,H,T,\theta},\end{aligned} \tag{99}$$

其中

$$C_{V,p,H,T,\theta} = 2C_H(T^{2H} + T^{4H-1})\Big(1 + 2\sum_{n\ge 1} \overline{a}_n(p,H,T,\theta)^{1/2}\Big)^2. \tag{100}$$

注 B.6. 定理 B.4 对过程 $\{Y(t,x,z,\boldsymbol{h})\}$ 也成立：这些过程带有多参数 $\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_m)\in\mathbb{R}^m$，而不是 h；并且在范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}_{r,1}}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}_{r,2}}$ 的定义中，我们将 $\mathbb{R}$ 上的积分 $|h|^{2H-2}dh$ 替换为 $\mathbb{R}^m$ 上的积分 $\prod_{i=1}^m|h_i|^{2H-2}d\boldsymbol{h}$。此外，若从参数化中去掉 h，即考虑过程 $\{Y(t,x,z)\}$，并从范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}_{r,1}}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}_{r,2}}$ 的定义中去掉积分 $|h|^{2H-2}dh$，定理 B.4 仍然成立。

C 积分不等式

本节给出一些与函数 $\mathcal{F}G_t(\xi)=\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$ 相关的基本不等式。

引理 C.1. 设 $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$。对于 $\beta\in(0,2)$ 以及 $t,s\in\mathbb{R}$，有

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|\sin(t|x|)\sin(s|x|)|}{|x|^2}|\varphi(x)||x|^{\beta}dx\le(1+|ts|)\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

证明。我们分别用 I_1,I_2 表示在区域 $|x|\le1$ 和 $|x|>1$ 上的积分。在这些区域内，我们分别使用不等式 $|\sin(x)|\le|x|$ 和 $|\sin(x)|\le1$。于是，

$$I_1\le|ts|\int_{|x|\le1}|\varphi(x)||x|^{\beta}dx\le|ts|\int_{|x|\le1}|\varphi(x)|dx$$
$$I_2\le\int_{|x|>1}|\varphi(x)||x|^{\beta-2}dx\le\int_{|x|>1}|\varphi(x)|dx.$$

□

下一个结果可用类似的方法得到。

引理 C.2. 对于 $\beta\in(0,1)$ 以及 $t,s\in\mathbb{R}$，有

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|\sin(t|x|)\sin(s|x|)|}{|x|^2}|x|^{\beta}dx\le\frac{2}{1-\beta}+\frac{2|ts|}{1+\beta}.$$

参考文献

[1] Balan, R.M.、Chen, L. 和 Chen, X.（2022）。时间无关噪声驱动的随机波动方程的精确渐近性。Ann. Inst. Henri Poincar ´e: Prob. & Stat. 58，1590-1620。

[2] Balan, R. M.、Chen, L. 和 Ma, Y.（2022）。具有空间粗糙噪声和粗糙初始条件的抛物型 Anderson 模型。Electr. Comm. Probab. 27，第 65 号论文，1-12。

[3] Balan, R. M.、Jolis, M. 和 Quer-Sardanyons, L.（2015）。带有指标为 $\frac{1}{4}<H<\frac{1}{2}$ 的空间仿射乘性分数噪声的随机偏微分方程，Electron. J. Probab.，20，第 54 号，36 页。

[4] Balan, R. M.、Nualart, D.、Quer-Sardanyons, L. 和 Zheng, G.（2022）。双曲 Anderson 模型：Malliavin 导数的矩估计及其应用。随机偏微分方程 10，757–827。[5] Balan, R. M. 和 Yuan, W.（2023）。带有时间无关噪声的双曲 Anderson 模型解的空间积分。Stoch. Proc. Their Appl. 待刊。[6] Balan, R. M. 和 Yuan, W.（2023）。带有时间无关噪声的热方程的中心极限定理：正则情形与粗糙情形。无限维分析、量子概率与相关领域。待刊。[7] Chen, L. 和 Dalang, R.C.（2015）。带有粗糙初始条件的非线性随机热方程的矩、间歇性与增长指数。Ann. Probab. 43，3006–3051。[8] Chen, L.、Huang, J.、Khoshnevisan, D. 和 Kim, K.（2019）。抛物型随机偏微分方程的稠密爆破解。Electr. J. Probab. 24，第 118 号。[9] Chen, L. 和 Kim, K.（2017）。非线性随机分数阶热方程解的比较原理与严格正性。Ann. Inst. Henri Poincar´e: Prob. Stat. 53，358–388[10] Chen, X.、Deya, A.、Ouyang, C. 和 Tindel, S.（2021）。若干重整化抛物 Anderson 模型的矩估计。Ann. Probab. 49，2599–2636。[11] Billingsley, P.（1968）。概率测度的收敛。Wiley，纽约。[12] Bola˜nos-Guerrero, R.、Nualart, D. 和 Zheng, G.（2021）。二维随机波动方程的平均化。Electr. J. Probab. 26，第 102 号，1–32[13] Dalang, R. C.（1999）。扩展鞅测度随机积分及其在空间齐次随机偏微分方程中的应用。Electr. J. Probab. 4，第 6 号，29 页。[14] Dalang, R. C. 和 Sanz-Sol´e, M.（2009）。三维随机波动方程解的 H¨older–Sobolev 正则性。Memoirs AMS 931。[15] Delgato-Vences, F.、Nualart, D. 和 Zheng, G.（2020）。带有分数噪声的随机波动方程的中心极限定理。Ann. Inst. Henri Poincar´e 56，3020–3042。[16] Foondun, M. 和 Khoshnevisan, D.（2009）。非线性抛物型随机偏微分方程的间歇性。Electr. J. Probab. 14，第 21 号，548–568。[17] Hu, Y.、Huang, J.、Lˆe, K.、Nualart, D. 和 Tindel, S.（2017）。具有空间粗糙依赖的随机热方程。Ann. Probab. 45，6B 4561–4616。[18] Hu, Y.、Huang, J.、Nualart, D. 和 Tindel, S.（2015）。带有一般乘性噪声的随机热方程：H¨older 连续性与间歇性。Electr. J. Probab. 20，第 55 号，50 页。

[19] Hu, Y. 和 Nualart, D.（2009）。由分数噪声驱动的随机热方程与局部时。Probab. Th. Rel. Fields 143, 285-328。[20] Hu, Y.、Nualart, D. 和 Song, J.（2011）。由分数白噪声驱动的热方程的 Feynman-Kac公式。Ann. Probab. 39, 291-326。[21] Huang, J.、Nualart, D. 和 Viitasaari, L.（2020）。随机热方程的中心极限定理。Stochastic Processes and Their Applications 130, 7170-7184。[22] Huang, J.、Nualart, D.、Viitasaari L. 和 Zheng, G.（2020）。有色噪声驱动的随机热方程的高斯涨落。Stoch. PDE: Anal. Comp. 8, 402-421。[23] Lˆe, K.（2016）。关于 Xia Chen 一项结果的评注。Stat. Probab. Letters 118, 124-126。[24] Millet, A. 和 Sanz-Sol´e, M.（2021）。具有超线性系数的随机波方程的全局解。Stoch. Proc. Their Appl. 139, 175-211。[25] Nualart D.（2006）。Malliavin 微积分及相关主题。第二版。Springer-Verlag，柏林。[26] Nualart, D.、Song, Y. 和 Zheng, G.（2021）。粗糙噪声驱动的抛物型 Anderson 模型的空间平均。ALEA, Latin Amer. J. Probab. Math. Stat 18, 907-943。[27] Nualart, D.、Xia, P. 和 Zheng, G.（2022）。有色噪声驱动的抛物型 Anderson 模型的定量中心极限定理。Electr. J. Probab. 27, paper no. 120, 1-43。[28]Nualart, D. 和 Zheng, G.（2020）。高斯泛函的平均化。Electr. J. Probab. 25, paper no. 48, 1-54。[29] Nualart, D. 和 Zheng, G.（2022）。一维和二维随机波方程的中心极限定理。Stoch. PDE: Anal. Comp 22, 392-418。[30] Song, J.、Song, X. 和 Xu, F.（2020）。由空间粗糙高斯噪声驱动的分数阶随机波方程。Bernoulli 26, 2699-2726。[31] Sanz-Sol´e, M. 和 S¨uss, A.（2013）。高维随机波方程：Malliavin可微性与绝对连续性。Electr. J. Probab. 18, no. 64, 1-28。[32] Walsh, J. B.（1986）。随机偏微分方程导论。载于：´“Ecole d’´et´e de probabilit´es de Saint-Flour, XIV–1984”。Lecture Notes Math., 1180, 265-439。Springer, 柏林。