arXiv:2305.05044v1 [math.RA] 4 May 2023

仿射 $\mathcal{C}$-半群的一些性质

J. I. Garc´ıa-Garc´
ıa D. Mar´ın-Arag´on
A. S´anchez-Loureiro
A. Vigneron-Tenorio

摘要

数值半群在文献中得到了广泛研究，其许多不变量也已得到刻画。本文将关于对称性、伪对称性或基本间隙的一些重要结果推广到仿射 $\mathcal{C}$-半群。此外，我们给出算法，用于计算具有给定 Frobenius 向量的不可约 $\mathcal{C}$-半群和 $\mathcal{C}$-半群的树。

关键词： $\mathcal{C}$-半群，弗罗贝尼乌斯元素，基本间隙，不可约半群，伪弗罗贝尼乌斯元素，伪对称半群，特殊间隙，对称半群。

*2020*年数学主题分类：20M14（主分类），68R05（次分类）。

引言

$\mathcal{C}$-半群是 $\mathbb{N}^p$ 的一个非空子集（其中 p为某个非零自然数），包含 0 且对加法封闭，并且 $\mathcal{C} \setminus S$ 是有限的；$\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$ 表示由 S生成的整数锥。这些半群是数值半群在高维上的自然推广。此外，与数值半群相关的一些对象也可以推广到 $\mathcal{C}$-半群。例如， $\mathcal{C} \setminus S$ 中的元素称为 S的间隙，其间隙集的基数称为 S的亏格。我们用$\mathcal{H}(S)$表示这个集合，用 $g(S)$表示其基数。

还有其他对象在推广时需要考虑 $\mathbb{N}^p$上的全序。例如，数值半群的弗罗贝尼乌斯数是不属于该半群的最大整数。不过，如果不固定全序，它在$\mathcal{C}$半群上的推广并不唯一。因此，固定 $\mathbb{N}^p$上的一个全序后， S 的弗罗贝尼乌斯元素为 $\max_{\prec}(\mathcal{C} \setminus S)$。

尽管 $\mathcal{C}$-半群经常出现在半群理论中，但直到 [10] 发表后，它们才成为独立的研究对象。本文将广义数值半群定义为满足锥 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{N}^p$ 的 $\mathcal{C}$-半群。自 2016 年以来，已有多篇研究

致力于研究 $\mathcal{C}$-半群的一般性质，尤其是广义数值半群的性质。例如，在 [6], 中，作者证明每个 $\mathbb{N}^p$- 半群都有唯一的极小生成系，并给出一种算法，可根据 $\mathbb{N}^p$-半群的一组生成元计算其间隙集。在 [12], 中，作者将数值半群的 Wilf 猜想推广到 $\mathcal{C}$- 半群；在 [3], 中，作者又为 $\mathbb{N}^p$- 半群提出了另一种推广。本文还研究了 $\mathbb{N}^p$-半群的不可约性。关于 $\mathbb{N}^p$-半群的较新论文包括 [1], [4],[5], [7], 和 [17]。对于任意 $\mathcal{C}$-半群， [9], 中的作者主要给出一种算法，用于检验由生成集给出的仿射半群是否为 $\mathcal{C}$-半群，并计算其间隙集。

本文的主要目标是将数值半群的若干结果推广到 $\mathcal{C}$-半群。当一个 $\mathcal{C}$-半群可以表示为两个真包含它的 $\mathcal{C}$-半群的交集时，称其为 $\mathcal{C}$-可约的（简而言之，可约）（见 [13]）；否则， S 是 $\mathcal{C}$-不可约的（简而言之，不可约）。本文还根据亏格和广义弗罗贝尼乌斯数刻画不可约的 $\mathcal{C}$-半群。我们还研究锥 $\mathcal{C}$ 的子集何时是某个 $\mathcal{C}$-半群的间隙集，或能确定该半群。最后，我们给出一些用于检验相应性质的算法。

此外，还给出了一些用于计算与 $\mathcal{C}$ 半群相关对象的算法。特别地，定义了一棵树，其顶点集是具有固定 Frobenius 向量的所有不可约 $\mathcal{C}$ 半群的集合。还介绍了一种计算这棵树的算法。对于任意整数锥 $\mathcal{C}$ 和任意非零元素 $\mathbf{f} \in \mathcal{C}$，我们给出一个过程，用于求出所有 Frobenius 元素等于 $\mathbf{f}$ 的 $\mathcal{C}$ 半群。

本文通过若干示例展示了研究结果。为此，我们已在专用于研究数值半群和仿射半群的库 *CommutativeMonoids* 中实现了本文介绍的所有算法（参见 [11]）；该库由作者使用 Python [14] 和 C++开发。本文所有示例的笔记本可通过以下链接找到：
https://github.com/D-marina/CommutativeMonoids/blob/master/CClassCSemigroups/SomePropertiesCSemigroup.ipynb。

本文内容组织如下：第 1 节旨在为读者提供正确理解本文所必需的背景知识。第 2 节介绍对称和伪对称 $\mathcal{C}$-半群的概念，并给出这些概念的一些刻画。第 3 节转而关注不可约$\mathcal{C}$-半群；我们证明，可以将所有具有固定 Frobenius 向量的这类半群构成一棵树，并给出计算它们的算法。同样地，第 5 节给出了计算所有具有固定 Frobenius 向量的 $\mathcal{C}$-半群的算法。最后，在第 4 节中，我们研究 $\mathcal{C}$-半群的基本间隙，并且对于任意集合 $X \subset \mathcal{C}$，给出判定 $\mathcal{C} \setminus X$ 是否为 $\mathcal{C}$-半群的条件。

1 预备知识

在本文中， $\mathbb{Q}$、 $\mathbb{Q}_{\geq}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示有理数集、非负有理数集和非负整数集。对于任意$n \in \mathbb{N}$， $[n]$ 表示集合 $\{1, \ldots, n\}$。

$\mathbb{Q}_{\geq}^{p}$ 中的非退化有理锥是由 $\mathbb{Q}_{\geq}^{p}$ 中有限条从原点出发的半直线的凸包。这些锥也可以通过其支撑超平面来确定。我们认为，有理锥的整数点在 $\mathbb{N}^{p}$ 中构成一个整数锥。众所周知，整数锥 $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^{p}$ 是有限生成的，当且仅当其每条极射线上都存在一个有理点。此外， $\mathcal{C}$ 的任意子半群都是有限生成的，当且仅当该子半群在 $\mathcal{C}$的每条极射线上都存在一个元素。这两个结果在 [2, 第 2], 章中得到证明，该章还对锥进行了深入研究。我们假设本文所讨论的任意整数锥都是有限生成的。

在全文中，我们使用 $\mathcal{H}(S)$ 中的一些特殊间隙，其定义对于数值半群 [15] 是相同的:

- $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S)$ 是一个基本间隙，如果 $2\mathbf{x}$,$3\mathbf{x} \in S$。这些元素的集合记为 FG(S)。

- $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S)$ 是伪弗罗贝尼乌斯元素，当且仅当$\mathbf{x} + (S \setminus \{0\}) \subset S$； S 的伪弗罗贝尼乌斯元素集合记为 PF(S)，其基数称为 S的型，记作 $t(S)$。

- $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S)$ 是 S 的特殊间隙，当且仅当$\mathbf{x} \in$PF(S) 且 $2\mathbf{x} \in S$。我们用 SG(S) 表示 S的特殊间隙集合。

本文考虑一些集合上的不同序。对于非空集合 $L \subset \mathbb{N}^{p}$，且$\mathbf{x}$， $\mathbf{y} \in \mathbb{N}^{p}$, 定义偏序$\mathbf{x} \leq_{L} \mathbf{y}$，当且仅当$\mathbf{y} - \mathbf{x} \in L$。此外，我们还固定 $\preceq$ 由单项式序确定的 $\mathbb{N}^{p}$ 上的一个全序。单项式序是给定多项式环中所有（首一）单项式集合上的全序（见 [8]）。根据单项式序的性质， $\mathbb{N}^{p}$ 上的（诱导）全序 $\preceq$ 满足:

- 若 $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ 且 $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^{p}$，则 $\mathbf{a} + \mathbf{c} \preceq \mathbf{b} + \mathbf{c}$,
- 若 $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^{p}$，则 $0 \preceq \mathbf{c}$。

每个单项式序都可以通过矩阵表示。对于一个非奇异整数 ($p \times p$)-矩阵 M，其行分别为 $M_1, \ldots, M_p,$， M-序 $\prec$定义为: 当且仅当存在一个属于 $[p-1]$, 的整数 i，使得 $M_1\mathbf{a} = M_1\mathbf{b} \ldots, M_i\mathbf{a} = M_i\mathbf{b}$ 且 $M_{i+1}\mathbf{a} < M_{i+1}\mathbf{b}$。

根据 $\mathbb{N}^{p}$上的固定全序， S, $F(S)$的 Frobenius 向量是 $\mathcal{H}(S)$ 中相对于 $\preceq$的最大元素，并将 $n(S)$ 定义为 $\mathcal{N}(S) = \{\mathbf{x} \in S \mid \mathbf{x} \preceq F(S)\}$ 的基数。

下面的引理将 [15] 中的命题 2.26 推广到了 $\mathcal{C}$-数值半群。

引理 1. 设 S 是一个 $\mathcal{C}$-数值半群。那么， $g(S) \leq t(S)n(S)$。

证明。与数值半群中的情形一样，对于任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S)$，存在 $(\mathbf{f}, \mathbf{s}) \in \mathrm{PF}(S) \times S$ 使得 $\mathbf{f} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$，且 $\mathbf{f_x} = \min_{\preceq}\{\mathbf{f} \in \mathrm{PF}(S) \mid \mathbf{f} - \mathbf{x} \in S\}$。因此，由 $x \mapsto (\mathbf{f_x}, \mathbf{f_x} - \mathbf{x})$ 定义的映射 $\mathcal{H}(S) \to \mathrm{PF}(S) \times \mathcal{N}(S)$ 是单射，故 $g(S) \leq t(S)n(S)$。 □

2 对称与伪对称 $\mathcal{C}$-半群

取一个亏格为 g 的 $S \subset \mathbb{N}^p$ a $\mathcal{C}$-半群。本节利用亏格刻画对称与伪对称 $\mathcal{C}$-半群。若 $\mathrm{PF}(S)$ 等于 $\{F(S)\}$ 或 $\{F(S)\ F(S)/2\}$（见 [13]），则称 S 为 $\mathcal{C}$-不可约。若 $\mathrm{PF}(S) = \{F(S)\}$，则称 S 为对称；若 $\mathrm{PF}(S) = \{F(S)\ F(S)/2\}$，则称其为伪对称。

对于 $\mathcal{C}$ 中的任意元素 $\mathbf{n}$，令 $I_S(\mathbf{n})$ 为集合 $\{\mathbf{s} \in S \mid \mathbf{s} \leq_{\mathcal{C}} \mathbf{n}\}$。

注记 2。 注意，对于任意 $\mathbf{s} \in S$，$\mathbf{s} \in I_S(F(S))$ 当且仅当 $F(S) - \mathbf{s} \in \mathcal{H}(S)$。因此， $g \geq \sharp I_S(F(S))$。

我们有对称和伪对称$\mathcal{C}$-半群的如下刻画。

命题 3. 设 S 是亏格为 g 的 $\mathcal{C}$-半群。那么， S 对称当且仅当 $g = \sharp I_S(F(S))$。

证明。 假设 S 对称。因此， $F(S)$ 是 S 唯一的伪弗罗贝尼乌斯元素。此外，对于任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S)$，存在 $\mathbf{s} \in S$ 使得 $\mathbf{x} + \mathbf{s} = F(S)$，也就是说 $\mathbf{s} \in I_S(F(S))$，于是 $\sharp I_S(F(S)) \geq g$。由于 $g \geq \sharp I_S(F(S))$，我们得出结论 $g = \sharp I_S(F(S))$。

反过来，注意到 $I_S(F(S)) = \{\mathbf{s} \in S \mid F(S) - \mathbf{s} \in \mathcal{H}(S)\}$，并假设 $g = \sharp I_S(F(S))$。因此，每个 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S) \setminus \{F(S)\}$ 都满足$F(S) - \mathbf{x} \in S$，于是$\mathbf{x}$不是 S的伪弗罗贝尼乌斯元素。 □

命题 4。 设 S 是一个亏格为 g的 $\mathcal{C}$-半群。那么， S 是伪对称的，当且仅当 $g = 1 + \sharp I_S(F(S))$ 且 $F(S)/2 \in \mathbb{N}^p$。

证明。假设 S是伪对称的，因此 $\mathrm{PF}(S) = \{F(S)\ F(S)/2\}$，且 $g > \sharp I_S(F(S))$。对所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S) \setminus \{F(S)/2\}$，存在某个 $\mathbf{s} \in S$，使得 $\mathbf{x} + \mathbf{s} = F(S)$，或 $\mathbf{x} + \mathbf{s} = F(S)/2$。若满足第一种情况，则 $\mathbf{s} \in I_S(F(S))$。否则，$\mathbf{x} + \mathbf{s} + F(S)/2 = F(S)$，于是 $\mathbf{s} + F(S)/2$也属于 $I_S(F(S))$。此外，对每个 $\mathbf{s} \in S$，都有 $F(S)/2 + \mathbf{s} \neq F(S)$。因此， $\sharp I_S(F(S)) \geq g - 1$。

反之，假设 $g = \sharp I_S(F(S)) + 1$和 $F(S)/2 \in \mathbb{N}^p$。因此，只存在唯一一个 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S) \setminus \{F(S)\}$，使得对于所有 $\mathbf{s} \in S$，均有 $\mathbf{x} + \mathbf{s} \neq F(S)$。因此，$\mathrm{PF}(S) = \{F(S), \mathbf{x}\}$。如果 $\mathbf{x} \neq F(S)/2$，那么存在一个 $\mathbf{s} \in S$，使得 $F(S)/2 + \mathbf{s} = F(S)$，且 $F(S)/2 \in S$，但这是不可能的。因此，$\mathbf{x} = F(S)/2$。 □

考虑相对于 $\mathbf{b} \in S \setminus \{0\}$ 的 $\mathcal{C}$-半群 S 的 Ap´ery 集，记作 $\mathrm{Ap}(S,\mathbf{b}) = \{\mathbf{a} \in S \mid \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{H}(S)\}$。以下命题展示了 S 的伪弗罗贝尼乌斯元素与其 Ap´ery 集之间的关系。

命题 5. *[13,* 命题 *16]* 设 S 是一个 $\mathcal{C}$-数值半群，且 $\mathbf{b} \in S\setminus\{0\}$. 那么，

$$\mathrm{PF}(S) = \{\mathbf{a} - \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in \mathrm{maximals}_{\leq_S} \mathrm{Ap}(S, \mathbf{b})\}.$$

根据这一结果，我们可以推广 [15] 中的推论 4.12 和 4.19。

推论 6. 设 S 是一个 $\mathcal{C}$-数值半群，且 $\mathbf{b} \in S \setminus \{0\}$. 数值半群 S 是对称的，当且仅当 极大元$\leq_s \mathrm{Ap}(S, \mathbf{b}) = \{F(S) + \mathbf{b}\}$。

推论 7. 设 S 是一个 $\mathcal{C}$-数值半群，且 $\mathbf{b} \in S \setminus \{0\}$. 数值半群 S 是伪对称的，当且仅当 极大元$\leq_s \mathrm{Ap}(S, \mathbf{b}) = \{F(S)+\mathbf{b}\ F(S)/2+\mathbf{b}\}$。

数值半群的弗罗贝尼乌斯数是一个不属于该半群的最大非负整数。我们将 $\mathcal{C}$-数值半群 S的（广义）弗罗贝尼乌斯数定义为 $\mathcal{F}(S) = \sharp I_S(F(S)) + g(S)$。根据这个定义，我们可以轻易地改写前面的命题 3 和 4。

推论 8。 设 S 是一个亏格为 g 的 $\mathcal{C}$-半群。那么， S 是对称的，当且仅当 $2g = \mathcal{F}(S)$。

推论 9。 设 S 是一个亏格为 g 的 $\mathcal{C}$-半群。那么， S 是伪对称的，当且仅当 $2g = 1 + \mathcal{F}(S)$ 且 $F(S)/2 \in \mathbb{N}^p$。

这些推论特化到数值半群或 $\mathbb{N}^p$-半群时，分别等价于 [15], 中的推论 4.5 以及 [5], 中的定理 5.6 和 5.7。

我们用一个简单的例子来说明前面的结果。

例 10。 设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^2$ 为一个锥，其极射线为 $\longrightarrow(7,3)$ 和 $\longrightarrow(15,1)$。

由以下元素极小生成的 $\mathcal{C}$-半群 S_1

$$\Lambda_{S_1} = \{(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(7,1),(7,3),(8,1),(8,3),(9,1),(10,1),\\ (11,1),(12,1),(12,5),(13,1),(14,1),(15,1)\}$$

是对称的，而由 S_2 极小生成的

$$\Lambda_{S_2} = \{(3,1),(5,2),(6,1),(7,1),(7,2),(7,3),(8,1),(9,1),(10,1)\\ (11,1),(12,1),(13,1),(14,1),(15,1)\}$$

是伪对称的。

注意，$\mathrm{PF}(S_1) = \mathrm{SG}(S_1) = \mathcal{H}(S_1) = \{(5,2)\}$，但 $\mathcal{H}(S_2) = \{(4,1),(5,1),(8,2)\}$，$\mathrm{PF}(S_2) = \{(4,1),(8,2)\}$，而 $\mathrm{SG}(S_2) = \{(8,2)\}$。

3 不可约 $\mathcal{C}$-半群的树

本节描述了一棵树，其顶点集是具有固定 Frobenius 向量的所有不可约$\mathcal{C}$-半群的集合。

再次，考虑 $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$ 一个整数锥以及 $\mathbf{f} \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$。考虑 $\mathbb{N}^p$上的单项式序 $\preceq$，并将集合 $I_{\mathcal{C}}(\mathbf{f})$分解为 $I_{\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = I_1(\mathbf{f}) \sqcup I_2(\mathbf{f})$，其中 $I_1(\mathbf{f}) = \{\mathbf{x} \in I_{\mathcal{C}}(\mathbf{f}) \mid \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \preceq \mathbf{f}/2\}$，而 $I_2(\mathbf{f}) = \{\mathbf{x} \in I_{\mathcal{C}}(\mathbf{f}) \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{f}/2\}$（当 $\mathbf{f}/2 \notin \mathbb{N}^p$时，将 $\preceq$ 视为扩展到 $\mathbb{Q}^p_{\geq}$ 上的单项式序）。我们将 $\mathcal{C}$-半群 $S(\mathbf{f})$定义为 $\big(\mathcal{C} \setminus \{\mathbf{f}\}\big) \setminus I_1(\mathbf{f})$。这个半群将成为我们的不可约 $\mathcal{C}$-半群树的根；如下例所示，这个根取决于固定的单项式序。

例子 11. 令 $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^2$ 为极射线分别为 $\longrightarrow(1,0)$ 和 $\longrightarrow(1,2)$ 的整数锥，并令 $\mathbf{f} = (4,2)$。那么，$\mathbf{f}/2 = (2,1)$ 和

$$I_{\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(4,2)\}.$$

令 $\prec_1$ 和 $\prec_2$ 分别为由矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 定义的序。在第一种情况下，$I_1(\mathbf{f})_{\prec_1} = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1)\}$和

$$S(\mathbf{f})_{\prec_1} = \langle (3,0),(4,0),(5,0),(3,1),(4,1),\\ (5,1),(2,2),(3,2),(2,3),(3,3),(4,3),(2,4),(3,4),(3,5),(3,6)\rangle.$$

在另一个半群中，$I_1(\mathbf{f})_{\prec_2} = \{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0)\}$ 和

$$S(\mathbf{f})_{\prec_2} = \langle (4,0),(5,0),(6,0),(7,0),(3,1),\\ (4,1),(5,1),(6,1),(1,2),(2,2),(3,2),(2,3),(3,3)\rangle.$$

$S(\mathbf{f})$ 满足以下引理中总结的一些有趣性质。

引理 12. *$\mathcal{C}$-半群 $S(\mathbf{f})$ 是不可约的。此外，对于任意单项式序，$\mathbf{f}$ 都是 $S(\mathbf{f})$ 的 Frobenius 向量，并且 $S(\mathbf{f})$ 是唯一一个满足其所有间隙都属于 $I_1(\mathbf{f}) \cup \{\mathbf{f}\}$ 的不可约 $\mathcal{C}$-半群。*

证明。根据 $S(\mathbf{f})$ 的定义，$\mathbf{f}$是 $\mathcal{H}(S(\mathbf{f}))$ 中关于 $\leq_{\mathcal{C}}$ 的唯一最大元。因此，它也是 $\mathcal{H}(S(\mathbf{f}))$ 中关于 $\leq_{\mathbb{N}^p}$ 的唯一最大元。这一事实意味着，对于任意单项式序，$\mathbf{f}$ 都是 $S(\mathbf{f})$ 的 Frobenius 向量。

$S(\mathbf{f})$ 的间隙集是集合 $\mathcal{H}(S(\mathbf{f})) = I_1(\mathbf{f}) \cup \{\mathbf{f}\}$，并且$I_{S(\mathbf{f})}(\mathbf{f}) = I_2(\mathbf{f}) \setminus \{\mathbf{f}\}$。此外，对于任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S(\mathbf{f}))$，元素 $\mathbf{f} - \mathbf{x}$ 属于 $I_{S(\mathbf{f})}(\mathbf{f})$。否则，$\mathbf{f} = \mathbf{f} - \mathbf{x} + \mathbf{x} \prec \mathbf{f}/2 + \mathbf{f}/2 = \mathbf{f}$。进一步，由于 $\mathbf{x} \in I_{S(\mathbf{f})}(\mathbf{f})$ 当且仅当 $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in \mathcal{H}(S(\mathbf{f}))$，我们有 $\mathcal{H}(S(\mathbf{f}))$ 的基数在 $\mathbf{f} \in 2\mathbb{N}^p$ 时等于 $1 + \sharp I_{S(\mathbf{f})}(\mathbf{f})$，而在另一种情况下等于 $\sharp I_{S(\mathbf{f})}(\mathbf{f})$。根据命题 4 或命题 3（分别），$S(\mathbf{f})$ 是一个不可约 $\mathcal{C}$-半群。

$S(\mathbf{f})$的唯一性由其定义给出。 □

以下命题从一个已有的数值半群构造出不可约 $\mathcal{C}$-半群，使二者具有相同的 Frobenius 向量。

命题 13. 设 S 是一个不可约的 $\mathcal{C}$-半群，其 *Frobenius* 向量为$\mathbf{f}$，并且 $\mathbf{x} \in I_S(\mathbf{f})$ 是其一个满足以下条件的极小生成元：

1. $2\mathbf{x} - \mathbf{f} \notin S$.
2. $3\mathbf{x} \neq 2\mathbf{f}$.
3. $4\mathbf{x} \neq 3\mathbf{f}$.

于是，$S' = (S \setminus \{\mathbf{x}\}) \cup \{\mathbf{f} - \mathbf{x}\}$ 是一个不可约的 $\mathcal{C}$-半群，其 *Frobenius* 向量为$\mathbf{f}$。

证明。注意 $F(S') = \mathbf{f}$。我们证明 S' 在加法运算下封闭。由于$\mathbf{x} = (\mathbf{f} - \mathbf{x}) + (2\mathbf{x} - \mathbf{f})$，$2\mathbf{x} - \mathbf{f}$ 不能属于 S，也就是说，第二个条件是必要的。

显然，$S \setminus \{\mathrm{x}\}$ 中任意两个元素的加法仍属于该集合。此外，对于任意 $\mathrm{s} \in S \setminus \{\mathrm{x}\}$，$\mathrm{f} - \mathrm{x} + \mathrm{s} \in S \setminus \{\mathrm{x}\}$。其他情况下，对于某个 $\mathrm{s} \in S \setminus \{\mathrm{x}\}$，$\mathrm{f} - \mathrm{x} + \mathrm{s} = \mathrm{x}$，或者 $\mathrm{f} - \mathrm{x} + \mathrm{s} \in \mathcal{H}(S)$。若 $\mathrm{f} - \mathrm{x} + \mathrm{s} = \mathrm{x}$，则 $\mathrm{s} = 2\mathrm{x} - \mathrm{f} \notin S$。若 $\mathrm{f} - \mathrm{x} + \mathrm{s} \in \mathcal{H}(S)$，则存在 $\mathrm{s}' \in S$，使得 $\mathrm{f} - \mathrm{x} + \mathrm{s} + \mathrm{s}' \in \mathrm{PF}(S)$。当 $\mathrm{f} - \mathrm{x} + \mathrm{s} + \mathrm{s}' = \mathrm{f}/2$ 时，我们有 $2(\mathrm{s} + \mathrm{s}') = 2\mathrm{x} - \mathrm{f} \notin S$；而当 $\mathrm{f} - \mathrm{x} + \mathrm{s} + \mathrm{s}' = \mathrm{f}$ 时，$\mathrm{x} = \mathrm{s} + \mathrm{s}'$。这两种结论都不可能成立。

为完成此证明，我们证明 $2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) \in S \setminus \{\mathrm{x}\}$。假设 $2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) \notin S \setminus \{\mathrm{x}\}$，则 $2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) = \mathrm{x}$，或者 $2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) + \mathrm{s} \in \mathrm{PF}(S)$，其中某个 $\mathrm{s} \in S$。由于 $3\mathrm{x} \neq 2\mathrm{f}$，$2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) \neq \mathrm{x}$。半群 S 不可约意味着 $2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) + \mathrm{s} \in \{\mathrm{f}, \mathrm{f}/2\}$，但由于 $2\mathrm{x} - \mathrm{f} \notin S$，$2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) + \mathrm{s}$ 不等于 f。因此，$2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) + \mathrm{s} = \mathrm{f}/2$。由于 $4\mathrm{x} \neq 3\mathrm{f}$，$\mathrm{s} \neq 0$，而由 $2\mathrm{x} - \mathrm{f} \notin S$，可得 $2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) + \mathrm{s} \neq \mathrm{f}/2$。由此得出 $2(\mathrm{f} - \mathrm{x}) \in S \setminus \{\mathrm{x}\}$。

由于 $\sharp I_S(\mathbf{f}) = \sharp I_{S'}(\mathbf{f})$ 且 $\sharp\mathcal{H}(S) = \sharp\mathcal{H}(S')$，根据命题 3 和 4，$S'$ 是不可约的。 □

从现在起，我们将使用记号 $m(S)$ 表示 S 的极小生成集中关于偏序 $\preceq$ 的最小元素。这个元素通常称为 S 的重数。

我们用 $\mathfrak{I}(\mathrm{f})$ 表示具有 Frobenius 向量 f 的不可约 $\mathcal{C}$-半群的集合。给定 $S \in \mathfrak{I}(\mathrm{f})$，考虑 $S_0 = S$，并且当 $m(S_{n-1}) \in I_1(\mathrm{f})$ 时，$S_n = (S_{n-1} \setminus \{m(S_{n-1})\}) \cup \{\mathrm{f} - m(S_{n-1})\}$；否则，对$n > 1$，则为 $S_n = S_{n-1}$。注意，如果 $S_n = S(\mathrm{f})$，则 $S_n = S_{n-1}$。由于 $I_1(\mathrm{f})$ 是有限集，集合 $\{S_0, S_1, \ldots\}$ 也是有限的。令 $G = (V, E)$ 为由顶点集 $V = \mathfrak{I}(\mathrm{f})$ 和边集 $E = \big\{(A, B) \in V \times V \mid m(A) \prec \mathrm{f}/2$ 以及 $B = (A \setminus \{m(A)\}) \cup \{\mathrm{f} - m(A)\}\big\}$ 所定义的有向图。

定理 14. 设 $\preceq$ 是 $\mathbb{N}^p$上的单项式序，$\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$ 是一个整数锥，且$\mathbf{f} \in \mathcal{C}$ 是一个非零元素。有向图 G 是一棵以 $S(\mathbf{f})$为根的有根树。

证明。设 S是属于 $\mathfrak{I}(\mathbf{f})$的一个元素。若 $m(S) \notin I_1(\mathbf{f})$，则 $S = S(\mathbf{f})$。假设 $m(S) \in I_1(\mathbf{f})$。在这种情况下， $m(S) \prec \mathbf{f}/2$，也就是说，$2m(S) - \mathbf{f} \notin S$， $3m(S) \neq 2\mathbf{f}$，且 $4m(S) \neq 3\mathbf{f}$。根据命题 13， $S_1 = (S \setminus \{m(S)\}) \cup \{\mathbf{f} - m(S)\}$是不可约的。这意味着$(S, S_1) \in E$。按照这一构造， G 是一棵以 $S(\mathbf{f})$为根的树。

□

根据前面的构造和结果，我们得到一种算法，用于计算所有具有给定 Frobenius 向量且单项式序固定的不可约 $\mathcal{C}$-半群构成的树（算法 1）。

算法 1： 计算具有给定 Frobenius 向量的不可约 $\mathcal{C}$-半群构成的树。
具有给定的 Frobenius 向量。

输入： $\mathbb{N}^p$ 上的单项式序 $\preceq$、整数锥 $\mathcal{C}$ 和 $\mathbf{f} \in \mathcal{C}$。
输出： Frobenius 向量为
$\mathbf{f}$.

开始
  $X \leftarrow \{S(\mathbf{f})\}$;
  $Y \leftarrow \emptyset$;
  当 $X \neq \emptyset$ **时**
    $S \leftarrow$First(X);
    $A \leftarrow \{x \in S \mid x \in I_2(\mathbf{f}) \cap \Lambda_S,\ 2x - \mathbf{f} \notin S,\ 3x \neq \mathbf{f}\ 4x \neq 3\mathbf{f},\ \mathbf{f} - x \prec m(S)\}$;
    如果 $A = \emptyset$，**那么**
      $Y \leftarrow Y \cup \{S\}$;
    else
      对于 $x \in A$，**执行**
        $H \leftarrow (\mathcal{H}(S) \setminus \{\mathbf{f} - x\}) \cup \{x\}$;
        $S' \leftarrow \mathcal{C}$-半群，带有 $\mathcal{H}(S') = H$;
        $X \leftarrow X \cup \{S'\}$;
    $X \leftarrow X \setminus \{S\}$;
  返回 Y

下面的示例展示如何使用例 11 中的半群应用算法 1。

示例 15。 令 $S(\mathbf{f})_{\prec_1}$ 为由以下元素张成的半群

$$\{(3,0),(4,0),(5,0),(3,1),(4,1),(5,1),(2,2),(3,2),(2,3),(3,3),(4,3),(2,4),$$
$$(3,4),(3,5),(3,6)\}.$$

应用算法1，我们得到 $I_{2_{\prec_1}}(\mathbf{f}) = \{(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(4,2)\}$。因此， $S(\mathbf{f})_{\prec_1}$ 有三个子节点:

- $\langle (4,0),(5,0),(6,0),(7,0),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(1,2),(2,2),(3,2),(2,3),(3,3)\rangle$,
- $\langle (3,0),(4,0),\ (5,0),(1,1),(3,2),(2,3),(2,4),(3,6)\rangle$,

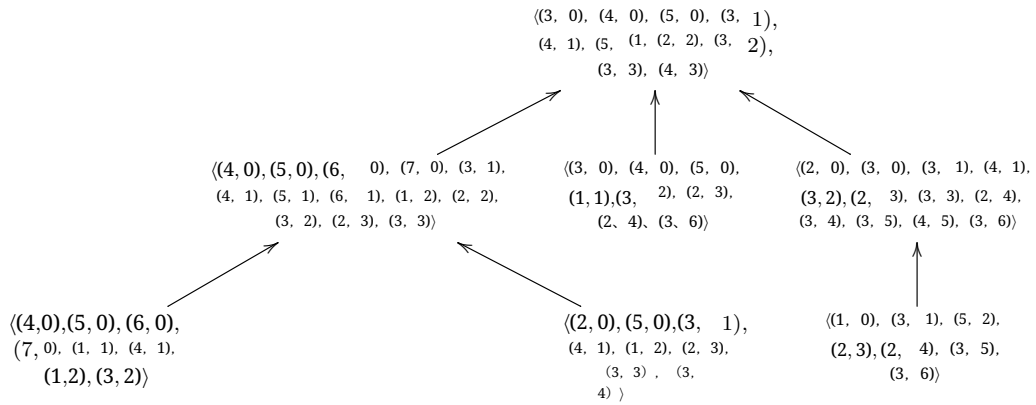


图1：具有 $\prec_1$ 的不可约 $\mathcal{C}$-数值半群树。

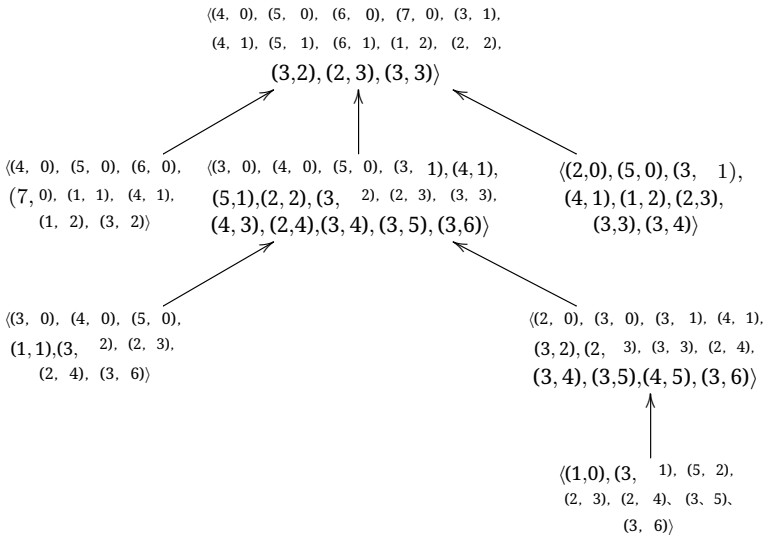


图2：具有 $\prec_2$的不可约 $\mathcal{C}$-数值半群树。

- $\langle (2,0),(3,0),(3,1),(4,1),(3,2),(2,3),(3,3),(2,4),(3,4),(3,5),(4,5),(3,6)\rangle$.

重复这一过程后，得到图1中的树。由于 $S(\mathbf{f})$ 的定义取决于单项式序，因此改变单项式序会得到一棵新树。例如，使用序 $\prec_2$ 时，得到图2。

$\mathcal{C}$-数值半群的4个基本间隙

本节将数值半群基本间隙相关的若干结果推广到 $\mathcal{C}$-半群（参见 [15, 第 4] 章）。首先给出一些结果，用于判断任意有限子集 $X \subset \mathcal{C}$ 何时构成 $\mathcal{C}$-半群。记 $D(X)$ 为集合 $\{\mathbf{a} \in \mathcal{C} \mid n\mathbf{a} \in X$，其中某个 $n \in \mathbb{N}\}$ 存在。

命题 16. 设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$ 为一个整数锥， X 为 $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ 的有限子集。那么，$\mathcal{C} \setminus X$ 是一个 $\mathcal{C}$-半群，当且仅当对于每个$(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in (X, \mathcal{C} \setminus X)$，若$\mathbf{s} \leq_{\mathcal{C}} \mathbf{x}$，则 $\mathbf{x} - \mathbf{s} \in X$。

证明。令 S 为集合 $\mathcal{C} \setminus X$，并假设 S 是一个 $\mathcal{C}$-半群。取 $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in (X, S)$，其中 $\mathbf{s} \leq_{\mathcal{C}} \mathbf{x}$。由于 $\mathbf{s} \leq_{\mathcal{C}} \mathbf{x}$，我们有 $\mathbf{x} - \mathbf{s} \in \mathcal{C}$。若 $\mathbf{x} - \mathbf{s} \notin X$，则对于某个 $\mathbf{s}' \in S$，有 $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{s}'$，且 S 不是半群。因此，对于任意满足 $\mathbf{s} \leq_{\mathcal{C}} \mathbf{x}$ 的 $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in (X, \mathcal{C} \setminus X)$，都有 $\mathbf{x} - \mathbf{s} \in X$。

反过来，由于对于每个满足 $\leq_{\mathcal{C}} \mathbf{x}$ 的 $(\mathbf{x},\mathbf{s}) \in (X, S)$，$\mathbf{x}-\mathbf{s}$ 都属于 X，因此 S 是 $\mathbb{N}^p$ 的加法子幺半群，且在 $\mathcal{C}$中具有有限补集；也就是说， S 是一个 $\mathcal{C}$-半群。 □

根据上述命题， $\mathcal{C} \setminus X$ 是 $\mathcal{C}$-半群意味着 $X = D(X)$；例如，若考虑由 $\{(1,0),(1,1),(1,2)\}$ 和 $X = \{(2,0),(2,1)\}$生成的锥 $\mathcal{C}$，那么 $\mathcal{C} \setminus X$不是半群，因为 $D(X) = \{(2,0),(2,1),(1,0)\}$。现在我们给出一种算法，用于判断 $\mathcal{C} \setminus X$是否为 $\mathcal{C}$-半群（算法 2）。

算法 2： 检查 $\mathcal{C} \setminus X$ 是否为 $\mathcal{C}$-半群。

输入： $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$ 一个整数锥，以及 X $\mathcal{C} \setminus \{0\}$的一个有限子集。

输出： 若 $\mathcal{C} \setminus X$ 是一个 $\mathcal{C}$半群，则为 True，否则为 False。**若** $X \neq D(X)$ **则返回** False**当** $X \neq \emptyset$ **时，令** $\mathbf{x} \leftarrow$ First(X);$A \leftarrow \{\mathbf{s} \in \mathcal{C} \setminus X \mid \mathbf{s} \leq_{\mathcal{C}} \mathbf{x}\}$;$s \leftarrow$First$(A)$;**当** $A \neq \emptyset$ **时，若** $\mathbf{x} - \mathbf{s} \notin X$ **则返回** False$s \leftarrow$ First$(A \setminus \{\mathbf{s}\})$;$X \leftarrow X \setminus \{\mathbf{x}\}$;**返回** True。

由于对于每个 $\mathbf{x} \in X$，集合 $\{\mathbf{s} \in \mathcal{C} \setminus X \mid \mathbf{s} \leq_{\mathcal{C}} \mathbf{x}\}$ 都可能非常非常大，因此在算法 2 中必须反复多次检查条件 $\mathbf{x}-\mathbf{s} \notin X$，而对于最坏情况则需要进行许多次迭代。为提高该问题的计算求解效率，我们根据以下引理和 [12, 引理 3]给出一种替代算法（算法 3）。

引理 17。 在 $\mathbb{N}^p$ 上固定一个全序 $\preceq$，并令 $X = \{\mathbf{x}_1 \preceq \mathbf{x}_2 \preceq \cdots \preceq \mathbf{x}_t\}$为整数锥 $S_0 = \mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$ 的子集。假设 $S_t = \mathcal{C} \setminus X$ 是一个$\mathcal{C}$-半群。那么，对于每个 $i \in [t]$， $S_i = S_{i-1} \setminus \{\mathbf{x}_i\}$ 都是一个 $\mathcal{C}$-半群，且 $\mathbf{x}_i$ 是 S_{i-1} 的极小生成元。

证明。注意，$\mathbf{x}_i$ 是 S_i 关于 $\preceq$ 的 Frobenius 向量。因此，对于每个 $i \in [t]$，$S_{i-1} = S_i \cup \{\mathbf{x}_i\}$ 都是一个 $\mathcal{C}$-半群，且 $\mathbf{x}_i$ 是 S_{i-1} 的极小生成元。□

算法 3： 检查 $\mathcal{C} \setminus X$ 是否为 $\mathcal{C}$-半群。

输入： $\mathbb{N}^p$上的全序 $\preceq$、$\Lambda_{\mathcal{C}}$ 该
整数锥 $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$的极小生成集，以及 $X = \{\mathbf{x}_1 \preceq \cdots \preceq \mathbf{x}_t\} \subset \mathcal{C} \setminus \{0\}$。

输出： 如果 $\mathcal{C} \setminus X$ 是 $\mathcal{C}$-半群，则输出其极小生成集；否则输出空集。

开始

- **如果** $X \subset \Lambda_{\mathcal{C}}$ **那么**
  - **return** $\mathcal{C} \setminus X$的极小生成集
- **if** $X \neq D(X)$ **then**
  - **返回** $\{\}$
- $\Lambda \leftarrow \Lambda_{\mathcal{C}}$;
- **对于** $1 \leq i \leq t$ **而言**
  - **如果** $\mathbf{x_i} \notin \Lambda$，**则**
    - **返回** $\{\}$
  - $\Lambda \leftarrow \langle\Lambda\rangle \setminus \{$的极小生成集$\mathbf{x}_i\}$;
  - $X \leftarrow X \setminus \{\mathbf{x}_i\}$;
  - **如果** $X \subset \Lambda$，**则**
    - **返回** $\langle\Lambda\rangle \setminus X$的极小生成集

我们用以下例子说明这一算法。

例 18. 设 $\mathcal{C}$为由 $\Lambda_{\mathcal{C}} = \{(1,0),(1,1),(1,2)\}$ 以及$X = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$生成的锥。由于 $X \not\subset \Lambda_{\mathcal{C}}$和$X = D(X)$，若应用算法 3，可得:

- $t = 0$, $\Lambda = \{(2,0),(3,0),(1,1),(2,1),(1,2)\}$,
- $t = 1$, $\Lambda = \{(2,0),(3,0),(2,1),(3,1),(1,2),(2,2),(2,3)\}$,
- $t = 2$, $\Lambda = \{(2,0),(3,0),(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(2,3),(3,3),(2,4),(3,4),(3,5),(3,6)\}$.

因此,

$$\mathcal{C} \setminus X = \big\langle (3,0),(4,0),(5,0),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(3,3),(4,3),(5,3),(3,4),(4,4),(5,4),(3,5),(4,5),(5,5),(3,6),(4,6),(5,6),(4,7),(5,7),(4,8),(5,8),(5,9),(5,10)\big\rangle.$$

固定一个由 $\Lambda = \{$**数值半群**$_1, \ldots,$ **数值半群**$_q$, **数值半群**$_{q+1}, \ldots,$ **数值半群**$_t\}$极小生成的 $S \subset \mathbb{N}^p$ a $\mathcal{C}$-半群，并考虑 $\Lambda_{\mathcal{C}} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q, \mathbf{a}_{q+1}, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ 作为极小生成集的

$\mathcal{C}$，其中 $\mathbf{s}_i$，$\mathbf{a}_i \in \tau_i$ 对于 $i = 1$，……，q（我们假设整数锥 $\mathcal{C}$ 有 q条极射线 $\{\tau_1, \ldots, \tau_q\}$）。

请注意，SG(S) 的元素 $\mathbf{x}$ 是 $\mathcal{H}(S)$ 中满足 $S \cup \{\mathbf{x}\}$ 仍为一个 $\mathcal{C}$-半群的那些元素。这些间隙在将一个 $\mathcal{C}$-半群分解为不可约 $\mathcal{C}$-半群（[9]）的过程中发挥着重要作用。

与数值半群类似，给定两个 $\mathcal{C}$-半群 S 和 T，且满足 $S \subsetneq T$，任意满足$\mathbf{x} \in \max_{\leq_\mathcal{C}}(T \setminus S)$ 的元素都属于 SG(S)，也就是说，$S \cup \{\mathbf{x}\}$ 是一个$\mathcal{C}$-半群。注意，如果$\mathbf{x} \in \max_{\leq_\mathcal{C}}(T \setminus S)$，那么 $2\mathbf{x} \in S$。根据这一事实，我们可以证明以下命题。

命题 19。设 S 是一个 $\mathcal{C}$-半群，且 G 是 $\mathcal{H}(S)$ 的子集。那么，$S \in$ 最大值$_\subseteq\{T$ 是一个 $\mathcal{C}$-半群 $\mid G \subseteq \mathcal{H}(T)\}$ 当且仅当 $\mathrm{SG}(S) \subseteq G$。

证明。我们知道，$\mathbf{x} \in$ SG(S) 当且仅当 $S \cup \{\mathbf{x}\}$ 是一个 $\mathcal{C}$-半群。因此，如果 $S \in \max_\subseteq\{T$ 是一个 $\mathcal{C}$-半群 $\mid G \subseteq \mathcal{H}(T)\}$，那么 $\mathbf{x} \in G$。否则，$S \subsetneq S \cup \{\mathbf{x}\}$，且 S 不是极大的。

假设 S 不是极大的，但 SG(S) $\subseteq G$，因此存在一个 $\mathcal{C}$-半群 T，使得 $S \subsetneq T$ 且 $G \subseteq \mathcal{H}(T)$。令 $\mathbf{x} \in \max_{\leq_\mathcal{C}}(T \setminus S)$，于是$\mathbf{x} \in$ SG(S) $\cap T$，但这是不可能的（SG(S) $\subseteq G \subseteq T$）。 □

S 的间隙集还有另一个有趣的子集。若 X 是 $\mathcal{H}(S)$ 的子集，且 $T\}$ 中的 $_\subseteq\{T$ max $\mathcal{C}$ 是一个 $|(X \subseteq \mathcal{H})$ S-半群，则称该子集确定 $\mathcal{H}$。这些子集最初由 [16] 针对数值半群引入。

命题 20. 设 X 是整数锥 $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$的有限子集。那么，$X$ 确定一个 $\mathcal{C}$-半群的间隙集，当且仅当 $\mathcal{C} \setminus D(X)$ 是一个$\mathcal{C}$-半群。

证明。设 $\Lambda_\mathcal{C} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q, \mathbf{a}_{q+1}, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ 是$\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$的极小生成集。

假设 X 确定了 $\mathcal{H}(S)$，其中 $\mathcal{C}$-半群为 S，因此 $X \subset D(X) \subset \mathcal{H}(S)$ 且 $S \subset \mathcal{C} \setminus D(X)$。设 S' 是非空集合

$$\{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{q} \Big\{ h_i\mathbf{a}_i + \mathcal{C} \mid h_i = \min_{n \in \mathbb{N}}\{(n\mathbf{a}_i + \mathcal{C}) \cap X = \emptyset\} \Big\}.$$

注意，S' 是一个 $\mathcal{C}$半群。设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是 S' 中的两个元素，因此 $\mathbf{a} = h_i\mathbf{a}_i + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\mathbf{a}_k$，且对于某些 h_i、h_j、j、i、α_k、$\beta_k \in \mathbb{N}$，有 $\mathbf{b} = h_j\mathbf{a}_j + \sum_{k=1}^{m} \beta_k\mathbf{a}_k$，其中 i、$j \in [q]$ 且 $k \in [m]$。因此，$\mathbf{a}+\mathbf{b} = h_i\mathbf{a}_i + (h_j\mathbf{a}_j + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k+\beta_k)\mathbf{a}_k) \in h\mathbf{a}_i + \mathcal{C}$。此外，$\mathcal{C} \setminus S'$是有限的。任取 $\mathbf{a} \in \Lambda_\mathcal{C}$，则对于某些 α_1、……、$\alpha_q \in \mathbb{Q}_\geq$，有 $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i\mathbf{a}_i$，因此对于某些 β_1、……、β_q、$k \in \mathbb{N}$，有 $k\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{q} \beta_i\mathbf{a}_i$。我们可以假设 $\beta_i \geq h_i$。在这种情况下，$\mathcal{C} \setminus S'$ 是有限集 $\{\sum_{i=1}^{q} \gamma_i\mathbf{a}_i \mid 0 \leq \gamma_i \leq \beta_i\}$ 的子集。由此可知，S' 是一个有限生成的$\mathcal{C}$半群；设 $\Lambda_{S'}$ 为其极小生成集。根据构造，集合 X 是$\mathcal{H}(S')$ 的子集。

对于每个 $\mathbf{a} \in \mathcal{C} \setminus D(X)$，我们可以将 $S_{\mathbf{a}}$ 定义为由 $\{\mathbf{a}\} \cup \Lambda_{S'}$ 生成的半群。由于 $X \subset \mathcal{H}(S_{\mathbf{a}})$，且 X 决定了 $\mathcal{H}(S)$，我们有$S_{\mathbf{a}} \subset S$。因此， $\mathcal{C} \setminus D(X) \subset S$，进而 $\mathcal{C} \setminus D(X)$ 是一个 $\mathcal{C}$半群。

反过来，任何满足 $X \subset \mathcal{H}(T)$ 的 $\mathcal{C}$-半群 T 都满足 $D(X) \subset \mathcal{H}(T)$。因此，$X$确定了 $\mathcal{C}$-半群 $\mathcal{C} \setminus D(X)$ 的间隙集。 □

确定 $\mathcal{C}$-半群间隙集的集合与其基本间隙集有关。

引理 21. 设 S 是一个 $\mathcal{C}$-半群， X 是 $\mathcal{H}(S)$的子集。那么， X确定 $\mathcal{H}(S)$ 当且仅当$\mathrm{FG}(S) \subseteq X$。

证明。根据命题 20，如果 X 确定 $\mathcal{H}(S)$，那么 $\mathcal{H}(S) = D(X)$。因此，对于所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S)$， $h\mathbf{x} \in X$ 对某个 $h \in \mathbb{N}$成立。特别地，对于 S的每个基本间隙，整数 h 必须为一。因此，$\mathbf{x} \in X$。

反过来，由于 $X \subset \mathcal{H}(S)$，我们知道 $D(X) \subseteq \mathcal{H}(S)$。令 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S)$，并考虑 $h = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S)\}$。在这种情况下， $h\mathbf{x} \in \mathcal{H}(S)$，且$2h\mathbf{x}$ $3h\mathbf{x} \in S$。因此， $h\mathbf{x} \in \mathrm{FG}(S) \subseteq X$， $\mathbf{x} \in D(X)$，并且 $\mathcal{H}(S) \subseteq D(X)$。 □

与数值半群的情形类似，$\mathrm{FG}(S)$ 是确定 $\mathcal{H}(S)$ 的 $\mathcal{H}(S)$ 的最小子集。此外， $\mathcal{C}$-半群的特殊间隙与基本间隙之间的关系，等同于数值半群中二者之间的关系。

引理22。 设 S 是一个 $\mathcal{C}$-半群。那么，$\mathrm{SG}(S) = \max_{\leq_S} \mathrm{FG}(S)$。

证明。显然，对于任意 $\mathbf{x} \in \mathrm{SG}(S)$，$2\mathbf{x}$,$3\mathbf{x} \in S$，因此 $\mathrm{SG}(S) \subseteq \mathrm{FG}(S)$。假设对于某个 $\mathbf{x} \in \mathrm{SG}(S)$，存在某个 $\mathbf{y} \in \mathrm{FG}(S)$，使得 $\mathbf{x} \leq_S \mathbf{y}$。于是，$\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{y}$，其中某个 $\mathbf{s} \in S$。由于 $\mathbf{x}$ 是 S 的伪弗罗贝尼乌斯元素，$\mathbf{y} \in S$。因此不可能有 $\mathbf{x} \in \max_{\leq_S} \mathrm{FG}(S)$。 □

利用上述引理，还可以通过其基本间隙来刻画一个 $\mathcal{C}$-不可约半群。

推论 23. S 是一个 $\mathcal{C}$-不可约半群，当且仅当$\max_{\leq_S} \mathrm{FG}(S)$ 的基数等于一。

下面的例子阐释了本节中的许多结果。例24。设 $\mathcal{C}$ 为由极射线 $\tau_1 = \langle(1, 0)\rangle$ 和 $\tau_2 = \langle(1, 1)\rangle$ 以及 $X = \{(1, 1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\}$构成的锥。由于 $D(X) = \{(1, 0), (1, 1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\}$，我们有

$$\begin{aligned}\{(x, s) \in (D(X), \mathcal{C} \setminus D(X)) \mid s \leq_{\mathcal{C}} D(X)\} = \\ \{((0,0),(1,1)),((0,0),(3,0)),((0,0),(3,1)),((0,0),(3,2)),\\ ((0,0),(5,1)),((0,0),(5,2)),((2,0),(3,0)),((2,0),(3,1)),((2,0),(5,1)),\\ ((2,0),(5,2)),((2,1),(3,2)),((2,1),(5,1)),((2,1),(5,2)),\\ ((2,2),(3,2)),((2,2),(5,2)),((4,0),(5,1))\}\end{aligned}$$

因此，根据命题 16，$\mathcal{C} \setminus D(X)$ 是一个 $\mathcal{C}$-半群；根据命题20，X 确定了一个 $\mathcal{C}$-半群的间隙集。若将这个半群记为 S，则有 $\mathcal{H}(S) = D(X)$。不难验证，$S = \langle(2, 0), (5, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\rangle$，并且在此情况下，FG($S$) $= X$。此外，我们可以计算 S的伪弗罗贝尼乌斯元素集，得到 PF(S) $= \{(5, 1), (5, 2)\}$，因此 SG(S) $= \{(5, 1), (5, 2)\}$。另一方面，FG(S) $= \{(1, 1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\}$，并且 max$\leq_s$FG($S$) $=\{(5, 1), (5, 2)\}$，正如引理22所知。

5 计算具有给定 Frobenius 向量的所有 $\mathcal{C}$半群

设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$ 为一个整数锥，$\preceq$ 为 $\mathbb{N}^p$上的一个单项式序，且 S 为具有 Frobenius 向量 $F(S) \in C \setminus \{0\}$的 $\mathcal{C}$半群。注意，$F(S)$是 $S \cup \{F(S)\}$的一个极小生成元。

与引理 17相反，对于某个 $t \in \mathbb{N}$，我们可以考虑如下 $\mathcal{C}$半群序列：$S_t = S$、对所有 $i = 1, \ldots, t$的 $S_{i-1} = S_i \cup F(S_i)$，以及 $S_0 = \mathcal{C}$。对于任意具有 Frobenius 向量 $F(S)$的 $\mathcal{C}$半群，都可以构造出这样的序列。因此，从 $\mathcal{C}$的一个极小生成系出发，只需移除满足$\mathbf{s}$ 的一个极小生成元$\mathbf{s} \preceq F$，即可得到新的 $\mathcal{C}$半群。尽可能多次地执行这一过程，我们便得到所有具有 Frobenius 向量 F的 $\mathcal{C}$半群。注意，由于集合 $\{\mathbf{s} \in \mathcal{C} \mid \mathbf{s} \preceq F\}$是有限的，这一过程必然终止。这个思想使我们能够提出一种算法，用于计算所有具有固定 Frobenius 向量的 $\mathcal{C}$半群（算法4）。此外，还可以修改该算法，以获得所有 Frobenius 向量小于或等于某个固定 Frobenius 向量的 $\mathcal{C}$半群。对于任意有序对集合 A，$\pi_1(A)$表示其元素的第一投影所组成的集合。

例25. 设 $\mathcal{C}$ 为由 $\{(1, 0)、(1, 1)、(1, 2)\}$ 和 $F =(2, 1)$ 生成的锥。然后，应用算法4，我们得到所有具有 Frobenius 向量 (2, 1) 的 $\mathcal{C}$-半群的集合为 {{(2, 0)、(3, 0)、(1, 1)、(1, 2)}、{(1, 0)、(3, 1)、(1, 2)、(2, 3)}、{(3, 0)、(4, 0)、(5, 0)、(1, 1)、(3, 1)、(1, 2)、(3, 2)}、{(2, 0)、(3, 0)、(3, 1)、(4, 1)
(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}, {(3, 0), (4, 0), (5, 0), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3)}, {(3, 0), (4, 0), (5, 0), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}}。这些半群如表 1 所示。

资金

第一、第二和最后一位作者获得了安达卢西亚研究小组 FQM-343 以及安达卢西亚自治区政府大学、研究与创新事务部项目 ProyExcel 00868 的部分资助。安达卢西亚大学自主研究计划研究项目——UCA 2022-2023（PR2022-004）

算法4： 计算具有给定弗罗贝尼乌斯数的 $\mathcal{C}$-半群向量。

输入： $\mathbb{N}^p$ 上的全序 $\preceq$，$\Lambda_{\mathcal{C}}$ 的极小生成集的整数锥 $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^p$，以及 $F \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$。

输出： Frobenius 向量等于 F 的 $\mathcal{C}$-半群集合。

开始

$\Lambda_{\preceq F} \leftarrow \{\mathbf{s} \in \Lambda_{\mathcal{C}} \mid \mathbf{s} \preceq F\}$;
$\mathcal{T} \leftarrow \{(\Lambda_{\mathcal{C}}, \Lambda_{\preceq F})\}$;
$\mathcal{G} \leftarrow \emptyset$;
当 $\mathcal{T} \neq \emptyset$ **时，执行**
  $(\Lambda, \Lambda') \leftarrow$ 第一$(\mathcal{T})$;
  $D \leftarrow \Lambda'$;
  当 $D \neq \emptyset$ **时**
    $\mathbf{s} \leftarrow$首先(D);
    $\Lambda'' \leftarrow \{\langle \Lambda \rangle \setminus \{\mathbf{s}$ 的极小生成集$\}\}$;
    如果 $\Lambda'' \notin \pi_1(\mathcal{T})$ **则**
      如果 $\mathbf{s} = F$ **则**
        $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \Lambda''$;
      $\Lambda''_{\preceq F} \leftarrow \{\mathbf{s} \in \Lambda'' \mid \mathbf{s} \preceq F\}$;
      如果 $\Lambda''_F \neq \emptyset$ **则**
        $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} \cup \{(\Lambda'', \Lambda''_{\preceq F})\}$;
    $D \leftarrow D \setminus \{\mathbf{s}\}$;
  $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} \setminus \{(\Lambda, \Lambda')\}$;
返回 $\mathcal{G}$

为第二位和最后一位作者提供了部分资助。大学自主研究计划研究项目——UCA 2022-2023（PR2022-011）也为所有作者提供了部分资助。本出版物及相关研究获得了西班牙加的斯大学可持续社会发展研究所（INDESS）的部分资助。

作者信息

J. I. Garc´ıa-Garc´ıa。数学系/INDESS（可持续社会发展大学研究所），加的斯大学，E-11510 皇家港（加的斯，西班牙）。电子邮箱：ignacio.garcia@uca.es。

D. Mar´ın-Arag´on。数学系，加的斯大学，E-11510 皇家港（加的斯，西班牙）。电子邮箱：daniel.marin@uca.es。

A. S´anchez-Loureiro。数学系，加的斯大学，E-11510 皇家港（加的斯，西班牙）。电子邮箱：a.sanchezlou@alum.uca.es

A. Vigneron-Tenorio。数学系/INDESS（

可持续社会发展大学研究所），加的斯大学，E-11406，赫雷斯-德拉弗龙特拉（西班牙加的斯）。电子邮件：alberto.vigneron@uca.es。

参考文献

[1]Bernardini, M.; Ten´orio, W.; Tizziotti, G., 广义数值半群的角元素, Results Math. 77 (2022), no. 4, Paper No. 141, 20 pp.[2] Bruns, W.; Gubeladze, J., 多面体、环与 K 理论，Springer 数学专著丛书。Springer，Dordrecht，2009.[3] Cisto, C.; DiPasquale, M.; Failla G.; Flores, Z.; Peterson, C.; Utano, R.,广义数值半群的 *Wilf* 猜想推广, Semigroup Forum 101 (2020), no. 2, 303–325.[4] Cisto, C.; Delgado, M.; Garc´ıa-S´anchez, Pedro A., 广义数值半群算法, J. Algebra Appl. 20 (2021), no. 5, Paper No. 2150079, 24 pp.[5] Cisto, C.; Failla G.; Peterson, C.; Utano, R., 不可约广义数值半群与弗罗贝尼乌斯元素的唯一性, Semi- group Forum 99 (2019), no. 2, 481–495.[6] Cisto, C.; Failla G.; Utano, R., 关于广义数值半群的生成元, An. St. Univ. Ovidius Constanta 27 (1) (2019), 49–59.[7] Cisto, C.; Failla G.; Ten´orio, W., 广义数值半群中的近对称性, Comm. Algebra 49 (2021), no. 6, 2337–2355.[8] Cox, D. A.; Little, J.; O'Shea, D., 理想、簇与算法：计算代数几何和交换代数导论。数学本科生教材。*Springer，Cham，2015*。[9] D´ıaz-Ram´ırez, J. D.; Garc´ıa-Garc´ıa, J. I.; Mar´ın-Arag´on, D.; Vigneron- Tenorio, A., 刻画仿射 $\mathcal{C}$-半群, Ricerche di Matem- atica, 71 (2022), 283–296.[10] Failla G.; Peterson C.; Utano, R., 广义数值半群的算法与基本渐近性质 $\mathbb{N}^p$, Semigroup Forum (2016) 92, 460–473.[11]Garc´ıa-Garc´ıa, J. I.; Mar´ın-Arag´on, D.; S´anchez-R.-Navarro, A.; Vigneron-Tenorio, A., CharacterizingAffineCSemigroup，一个用于计算 $\mathcal{C}$-半群的 Python 库，网址：https://github. com/D-marina/CommutativeMonoids。

[12] Garc´ıa-Garc´ıa J. I.; Mar´ın-Arag´on D.; Vigneron-Tenorio A., *Wilf* 猜想向仿射半群的推广, Semigroup Forum (2018), vol. 96, Issue 2, 396–408.[13] Garc´ıa-Garc´ıa, J. I.; Ojeda, I.; Rosales, J. C.; Vigneron-Tenorio, A.,关于子幺半群的伪弗罗贝尼乌斯元素 $\mathbb{N}^q$, Collectanea Math- ematica (2020), 71, 189–204.[14] Python Software Foundation, Python 语言参考，3.5 版，网址：http://www.python.org。[15] Rosales, J. C.; Garc´ıa-S´anchez, P. A., 数值半群，数学进展丛书，第 *20* 卷。*Springer*，纽约，*2009*。[16] Rosales, J. C.; Garc´ıa-S´anchez, P. A.; Garc´ıa-Garc´ıa, J. I.; Jim´enez Madrid, J. A., 关于数值半群中相对于其重数的基本间隙, J. Pure Appl. Algebra 189 (2004), no. 1-3, 301–313.[17] Singhal, D.; Lin, Y., 广义数值半群的弗罗贝尼乌斯可容许间隙, Electron. J. Combin. 29 (2022), no. 4, Paper No. 4.12–。

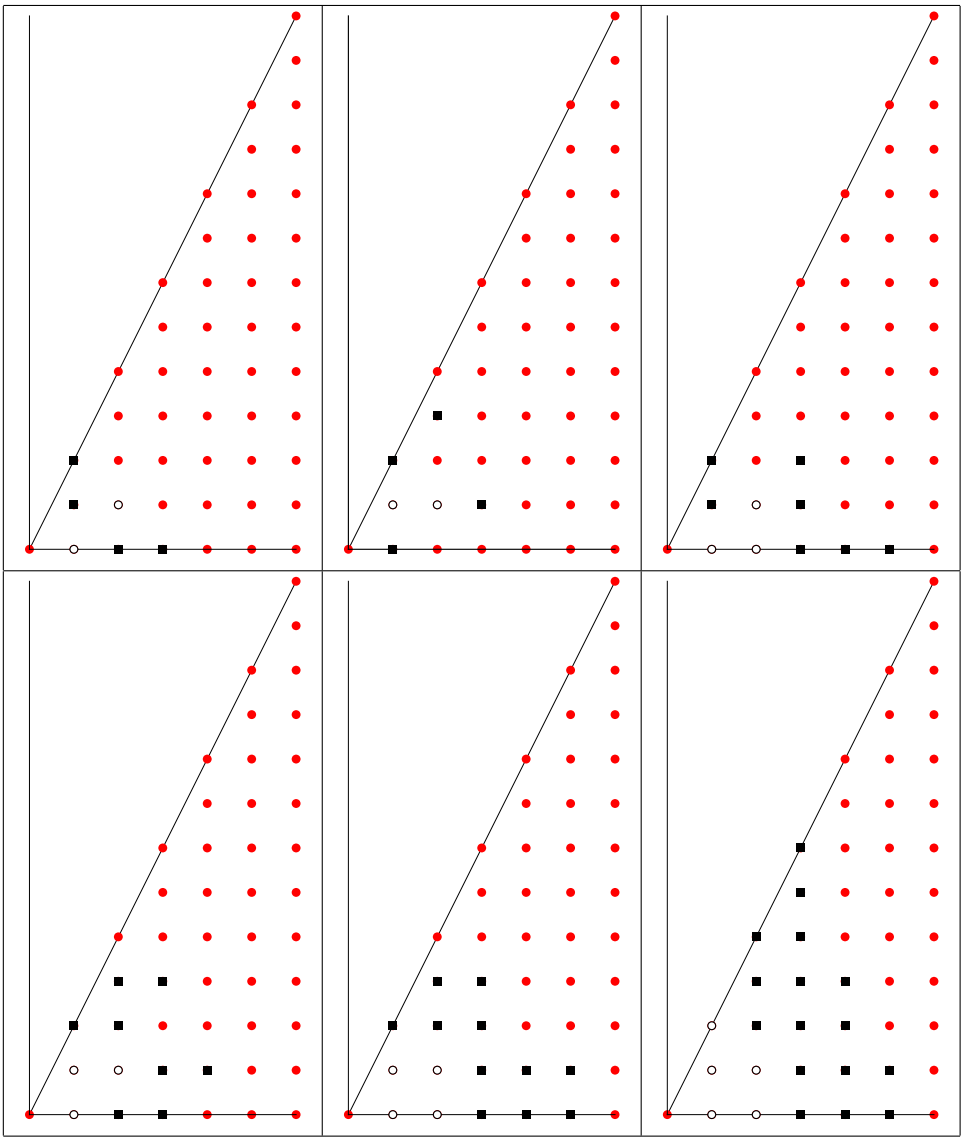


表 1：所有 $\mathcal{C}$-半群，其 $\mathcal{C} = \langle(1,0)、\ \mathcal{C}(1,1)、(1,2)\rangle$，且 Frobenius 向量等于 (2,1)；$\circ \equiv$ 间隙，$\blacksquare \equiv$ 极小生成元，$\bullet \equiv$ 中的元素 S。