arXiv:2305.05051v2 [math.LO] 3 Aug 2023

线性逻辑及相关系统中的插值

Wesley Fussner[a]，Simon Santschi[b]

[a]捷克科学院计算机科学研究所，捷克[b]伯尔尼大学数学研究所，瑞士

摘要

我们证明，带交换规则的完整 Lambek 演算存在连续统多个具有演绎插值性质的公理扩张。此外，我们将这一结果推广到经典线性逻辑和直觉主义线性逻辑，以及它们的乘法—加法片段。我们所展示的这些逻辑都不具有克雷格插值性质，但我们证明它们都满足克雷格插值的守卫形式。我们还展示了这些逻辑各自存在连续统多个不具有演绎插值性质的公理扩张。

关键词：插值性质，amalgamation 性质，线性逻辑，次结构逻辑

2020 年 MSC：03B47,03C40,03C05

1. 引言

本文是旨在理解次结构逻辑中的插值的一项更大规模研究的一部分。后者在特殊情形下已得到广泛研究，其中一些情形还已知具有各种插值性质的次结构逻辑的完整分类。例如，Maksimova 证明，具有演绎插值性质（简称 DIP）的一致超直觉主义逻辑恰有 7 个，并给出了它们的具体公理化 [29]。另一方面，[11]的结果给出了具有 DIP 的卢卡西维奇逻辑的公理扩张的完整分类，这类扩张共有 $\aleph_0$ 个。更一般地，围绕 H´ajek 基础模糊逻辑开展的一系列研究表明，后者存在不可数多个不具有 DIP 的公理扩张，并给出了一些部分分类 [31, 2, 18]。上述所有逻辑都是带交换规则的完整兰贝克演算 $\mathbf{FL_e}$ 的扩张，而本研究最初的目标是确定 $\mathbf{FL_e}$ 是否存在具有 DIP 的不可数多个公理扩张。我们不仅对 $\mathbf{FL_e}$给出了肯定答案，对经典线性逻辑和直觉主义线性逻辑及其乘法-加法片段也给出了肯定答案。我们进一步证明，我们所确定的不可数多个逻辑中没有一个具有克雷格插值性质（简称 CIP），但它们都具有一种受限的

电子邮箱地址：fussner@cs.cas.cz（Wesley Fussner），simon.santschi@unibe.ch（Simon Santschi）

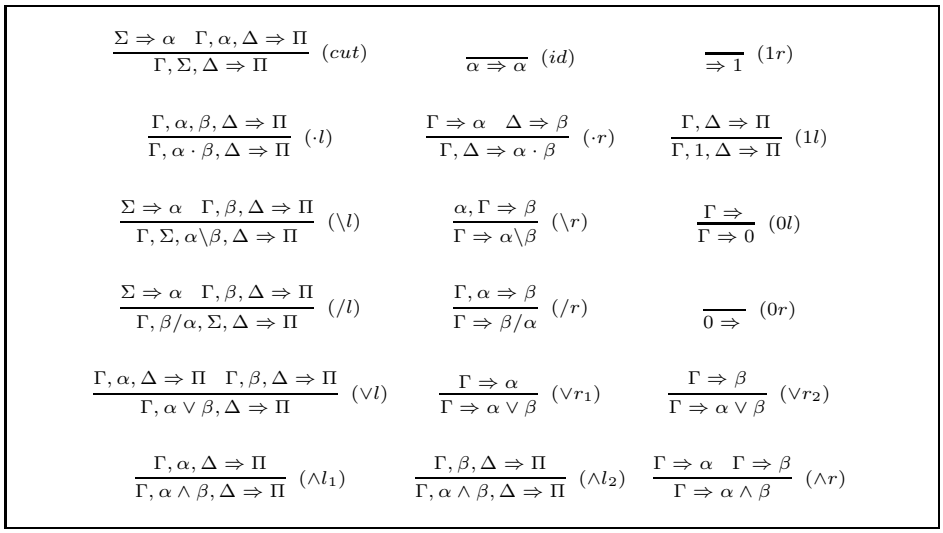


图1：完整兰贝克演算。

CIP 变体。由于现有文献表明，插值通常是非经典逻辑，尤其是次结构逻辑中相对罕见的性质，这些结果颇为令人惊讶。它们不仅有助于研究本文考察的特定逻辑，也有助于从更广泛的层面理解插值。

次结构逻辑由一类多样的资源敏感逻辑构成，通常通过一种称为完整兰贝克演算的根岑式序列演算来呈现，如图1所示。完整兰贝克演算缺少基本的结构规则（即弱化、收缩和交换），因此能够灵活地刻画许多这些规则可能不成立的推理形式。以这种方式刻画的最重要的逻辑，是完整兰贝克演算加上交换规则的公理扩张：

$$\frac{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (e)$$

规则（$\cdot l$）和（$\cdot r$）规定，演算中的逗号分隔符被内化为联结词 $\cdot$，通常称为强合取或融合。规则（e）刻画了该联结词的交换律，而带交换规则的完整兰贝克演算 $\mathbf{FL_e}$ 涵盖了许多起源各异的重要逻辑系统。其中包括研究最深入的关联逻辑、 [3], 哈耶克的基本模糊逻辑及其推广、 [25, 15, 16, 19], 强否定构造逻辑 [34, 8], , 以及经典命题逻辑和直觉主义命题逻辑。近年来，人们广泛运用代数逻辑的工具，对 $\mathbf{FL_e}$ 的公理扩张进行了深入而有效的研究；概述见 [20] 。

线性逻辑由 Girard 于 [23] 提出，旨在为并行计算提供逻辑基础。在此后的岁月里，它得到了广泛研究，并在

约束编程 [13], 、逻辑编程 [30],及其他领域中获得了诸多应用。其乘法-加法片段 MALL 属于完整兰贝克演算的框架，该演算通过加入额外常量而得到扩展（见 [20, 第 109]页）。完整线性逻辑 LL 不仅通过额外常量和对合否定扩展了 FL 的基本语言 $_{\mathbf{e}}$，还加入了指数算子 ! 和 ?，它们可被视为某些模态算子；见 [23, 4]。由于线性逻辑源于证明即程序范式，通常以证明论术语来呈现和研究。这种方法强调证明本身，而非可证明性这一概念，因此不采用塔斯基式后承关系的框架。然而，Avron 在 [4] 提出了线性逻辑的希尔伯特式证明系统，并研究了相应的后承关系，尤其引入了代数语义。后来，Blok 和 Pigozzi 在 [5], 提出了强大的逻辑的代数化框架，Aglian`o 于 20 世纪 90 年代证明，线性逻辑的后承关系按照 Blok 和 Pigozzi 的意义是可代数化的。[1] 由于线性逻辑学家与后承关系范式研究者的研究动机不同，之后对线性逻辑的代数研究并不多。线性逻辑的大多数语义学研究都聚焦于范畴方法或相空间，通常并未采用 Blok-Pigozzi 框架（但参见 [24]）。

本文采用代数技术，研究与 FL$_{\mathbf{e}}$、LL 及若干相关系统对应的后承关系的插值问题。特别是，我们的主要结果（定理 3.11）表明，这些系统各自都有连续统多个具有演绎插值性质的公理扩张。我们的结果基于上述演绎系统的代数化 [21, 1], ，以及以下事实：这些演绎系统各自具有演绎插值性质，当且仅当其对应的代数模型类具有 amalgamation 性质 [10]。因此，我们构造了连续统多个具有 amalgamation 性质的相应代数模型簇（亦称方程类）。我们通过从适当选取的阿贝尔群构造生成代数，得到这些簇。我们对这些代数模型的构造旨在利用阿贝尔群范畴中内射对象十分丰富这一事实（见定理3.1）；这是使我们所确定的簇具有 amalgamation 性质的关键。

上述结果表明，FL$_{\mathbf{e}}$、LL 和乘法-加法线性逻辑都具有丰富的带有演绎插值性质的扩展。为了提供更多背景，我们在定理 4.5 中证明，这些逻辑中的每一种也都有连续统多个不具有演绎插值性质的公理扩展。此前已知 FL$_{\mathbf{e}}$ 的这一结论（见 [29]），但对于线性逻辑及其乘法-加法片段而言，这是一个新结果。结合此前阐述的正面结果，这表明 FL$_{\mathbf{e}}$、LL 及若干相关系统都提供了这样的环境：插值的存在与缺失都十分普遍。

我们所使用的方法关键依赖于代数逻辑的工具，以及阿贝尔群的特殊性质。因此，我们不认为我们的结果能够

[1]值得一提的是，Aglian`o 关于线性逻辑的原始研究从未发表，在代数逻辑学家中作为一种传闻流传了二十多年，但最近已在 [1] 上公开。

很容易通过其他技术，尤其是证明论方法复现。因此，我们认为，本研究不仅为次结构逻辑中的插值研究作出了贡献，也展示了代数工具在线性逻辑中的潜力。相应地，我们希望本研究能引起代数逻辑专家以外的广泛兴趣。为了尽可能让更多读者能够理解这项工作——同时也因为 Aglian`o 关于代数线性逻辑的研究成果直到最近才问世——我们在第2节对预备知识作了格外详尽的讨论。我们希望这能为一般逻辑学家提供指引，使他们领会论证的关键特征，并启发代数技术应用的其他途径。

2. 线性逻辑与代数逻辑

我们的研究以代数次结构逻辑为基础，现回顾其中一些相关事实。我们的论述旨在为非专业人士简明扼要地介绍代数次结构逻辑的要点，同时说明我们所考虑的代数结构类别。有关代数次结构逻辑的更多信息，请参阅 [20]。关于抽象代数逻辑的一般背景，请参阅 [14]；关于普适代数的预备知识，请参阅 [7]。

2.1. 演绎系统与所讨论的逻辑

照例，我们固定一个可数无限的命题变量集 Var。给定一个代数语言 $\mathcal{L}$（其成员充当逻辑联结词），我们用 $\mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$表示由 $\mathcal{L}$ 和 Var 中的变量构成的公式集。若 $\varphi \in \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$，则 $\mathrm{var}(\varphi)$表示公式 φ中出现的变量集；我们将此记法推广到任意公式集 $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$，规定 $\mathrm{var}(\Gamma) = \bigcup\{\mathrm{var}(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$。代换是语言$\mathcal{L}$上的绝对自由代数 $\mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$ 的一个自同态。此外，$\mathcal{L}$ 上的后承关系是一个关系 $\vdash \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}) \times \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$，它从公式集映射到公式，并满足对任意 $\Gamma \cup \Pi \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$:

1. 如果 $\varphi \in \Gamma$，那么 $\Gamma \vdash \varphi$ (自反性)；2. 如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 $\Gamma \subseteq \Pi$，那么 $\Pi \vdash \varphi$ (单调性)；3. 如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 且对于每个 $\psi \in \Gamma$ 都有 $\Pi \vdash \psi$，那么 $\Pi \vdash \varphi$ (传递性)；4. 如果 $\Gamma \vdash \varphi$，那么对于每个代换 σ，都有 $\sigma[\Gamma] \vdash \sigma(\varphi)$(结构性)。

演绎系统是一个后承关系 $\vdash$，其具有有限性，具体而言:

5. 如果 $\Gamma \vdash \varphi$，那么存在一个有限子集 $\Gamma' \subseteq \Gamma$，使得 $\Gamma' \vdash \varphi$。

如果 $\vdash$ 是语言 $\mathcal{L}$ 上的后承关系，那么若 $\vdash \varphi$，公式 $\varphi \in \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$ 就称为 $\vdash$ 的定理。如果 Γ、$\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$，且 $\vdash$ 是 $\mathcal{L}$ 上的后承关系，那么若对每个 $\varphi \in \Sigma$ 都有 $\Gamma \vdash \varphi$，我们记作 $\Gamma \vdash \Sigma$。此外，若 $\Gamma \vdash \Sigma$ 且 $\Sigma \vdash \Gamma$，我们记作 $\Gamma \dashv\vdash \Sigma$。

文献中，“逻辑”一词有几种精确的含义，有时指演绎系统，有时指公式集、特定的证明论

表述等。这些不同层次的描述具有不同程度的具体性：一个演绎系统可以通过许多不同的证明论形式体系来表述，而不同的演绎系统也可能具有相同的定理。由于计算与证明之间存在联系，线性逻辑文献通常将“逻辑”理解为特定的演算。本文采取一种更注重后果的视角，并将“逻辑”一词用于表示“演绎系统”。

设 $\vdash$ 是语言 $\mathcal{L}$ 上的一个逻辑。如果存在一个公式集 $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$，其中 Σ 在代换下封闭，使得 ..... 那么，语言 $\mathcal{L}$ 上的逻辑 $\vdash^*$ 是 $\vdash$ 的一个公理扩张。

$$\Gamma \vdash^* \varphi \iff \Gamma, \Sigma \vdash \varphi.$$

直观地说，逻辑 $\vdash$ 的公理扩张只是通过向 $\vdash$ 添加新的公理模式，并将所得集合对推论封闭而得到的。注意，语言 $\mathcal{L}$ 上的逻辑 $\vdash$ 的每个公理扩张都是 $\mathcal{P}(\mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}) \times \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$ 的子集，而 $\vdash$ 的公理扩张在包含关系下构成一个格。

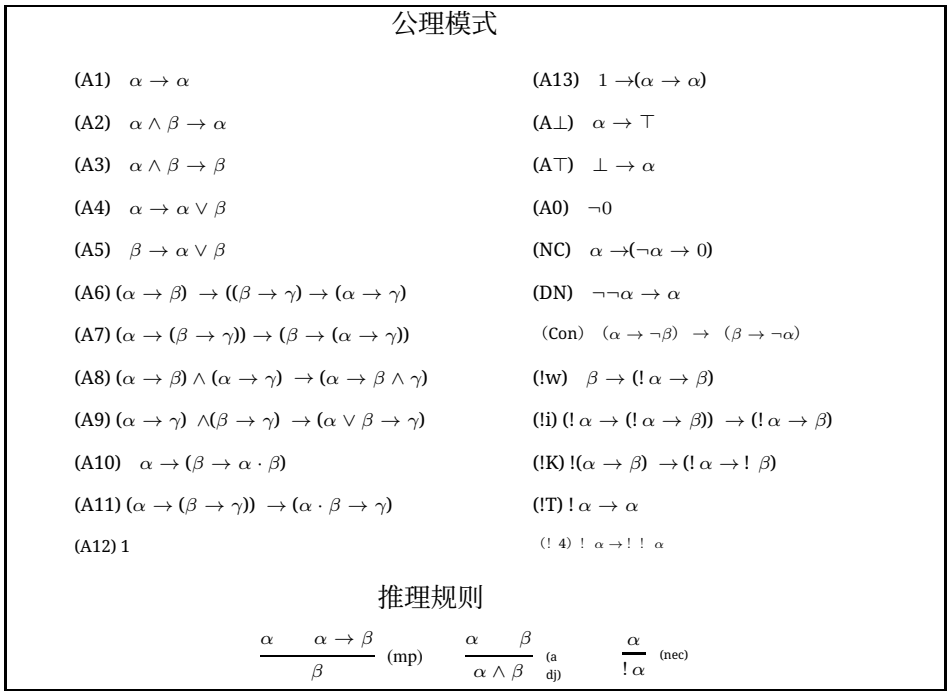
我们关注定义在基本语言 $\mathcal{RL} = \{\wedge, \vee, \cdot, \to, 1\}$ 的超集上的某些演绎系统，其中 $\wedge$、$\vee$、$\cdot$、$\to$ 是二元的，而 1 是零元的。特别地，我们用 0、$\bot$、$\top$ 表示零元函数符号/联结词，用 !、? 表示一元函数符号/联结词；我们将考察定义在语言 $\mathcal{RL} \cup S$ 上的若干演绎系统，其中 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !, ?\}$。

图 2 展示了 Avron 的经典线性逻辑希尔伯特式演算 [4]。其中$\neg\alpha$ 是 $\alpha \to 0$ 的缩写；按惯例，联结词 $\wedge$、$\vee$、$\cdot$、! $\neg$ 的结合力强于 $\to$；联结词 ? 在此系统中可定义为 $\neg !\neg$的缩写，因此无需纳入语言。对于语言 $\mathcal{RL} \cup \{0\}$，由 (A1)–(A13) 与 (mp) 和 (adj) 构成的演算公理化了带交换的完整兰贝克演算的演绎系统$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$；其无 0 片段$\vdash_{\mathbf{RL_e}}$可通过使用语言 $\mathcal{RL}$ 来定义（参见 [20]）。[2] 加入 (A$\bot$) 和 (A$\top$)，并使用$\mathcal{RL} \cup \{0, \bot, \top\}$，即可得到带界的完整兰贝克演算的演算。再加入 (A0)–(Con)，便得到经典乘法-加法线性逻辑的演绎系统 $\vdash_{\mathbf{MALL}}$。完整经典线性逻辑的可推导关系 $\vdash_{\mathbf{LL}}$ 由进一步加入公理模式 (!w)–(!4) 和规则 (nec) 来规定。

文献中存在不同的记法约定，其中次结构逻辑学界与线性逻辑学界之间的差异尤为显著。本文主要采用次结构逻辑学家普遍使用的记法，但对于 ! 和 ?，我们保留 Girard 的记法，即 [23]。在这一点上，我们与 Avron [4] 的做法不同；Avron 注意到 ! 等同于 S4 型模态逻辑中的必然算子，因此使用 $\Box$ 代替 !。然而，我们在图 2 中为公理模式采用的命名约定反映了模态逻辑中的命名惯例。图 3 展示了如何在线性逻辑学家在 [23] 中使用的记法与本文采用的记法之间进行转换。

一般而言，具有交换规则的次结构逻辑只有局部演绎定理；参见 [21]。例如，$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash_{\mathbf{MALL}}$都是如此。相比之下，$\vdash_{\mathbf{LL}}$ 具有

[2]具体而言，假设 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 是该语言中的一组公式。那么，在完整兰贝克演算（见图1）中，序列 $\Rightarrow \varphi$ 可由序列集 $\{\Rightarrow \psi$ 证明，当且仅当在由（A1）–（A13）以及（mp）和（adj）定义的希尔伯特演算中，φ可由 Γ 证明。



Fi图 2：线性逻辑及相关　　系统

显式演绎定理。

定理 2.1（Avron 的演绎定理（[4]））。设 $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ 是线性逻辑语言中的一组公式。那么：

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathbf{LL}} \psi \iff \Gamma \vdash_{\mathbf{LL}} !\varphi \to \psi.$$

注 2.2。显然，Avron 的演绎定理也适用于经典线性逻辑的任意公理扩张。也可以通过应用第 2.2 节总结的代数化结果，从语义上证明这一点。

2.2. 代数化

我们将考察刚刚介绍的演绎系统的代数对应物。我们先讨论相关的代数结构类，随后讨论它们与演绎系统 $\vdash_{\mathbf{LL}}$、$\vdash_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$ 的联系。

给定一个同类型代数类 K，我们分别用 $\mathbb{H}$(K)、$\mathbb{S}$(K)、$\mathbb{P}$(K)、$\mathbb{P}_U$(K) 和 $\mathbb{I}$(K) 表示其在取同态像、子代数、直积、超直积和同构像下的闭包。我们回顾一下，簇是满足给定方程集的同类型代数类（形式定义如下）。同类型代数类 K 是簇，当且仅当 K 在 $\mathbb{H}$、$\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{P}$ 下闭合。事实上，如果 K 是任意同类型代数类，则包含 K 的最小簇与 $\mathbb{HSP}$(K) 重合。我们将由 K 生成的簇 $\mathbb{HSP}$(K) 记为 $\mathbb{V}$(K)。还要回顾的是，一个 K 类

Girard记法	我们的记法
$\&$	$\wedge$
$\oplus$	$\vee$
$\multimap$	$\to$
$(\,)^{\perp}$	$\neg$
$\otimes$	$\cdot$
$1, \perp$	$1, 0$
$0, \top$	$\perp, \top$

图 3：不同记法约定之间的对应关系

同类型代数称为拟簇，当且仅当它可由一组准方程公理化，或者等价地，当 $\mathbb{ISPPP}_U(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$。

交换剩余格是形如 $\langle A, \wedge, \vee, \cdot, \to 1\rangle$ 的代数，其中 $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ 是一个格，$\langle A, \cdot, 1\rangle$ 是一个交换幺半群，并且对所有 $a, b, c \in A$，

$$a \cdot b \leq c \iff a \leq b \to c,$$

其中 $\leq$ 是与格运算对应的偏序（也就是说，$a \leq b$ 当且仅当 $a \wedge b = a$）。注意，最后这个条件可以替换为有限个恒等式，因此交换剩余格构成一个有限可公理化簇。带指点的交换剩余格是在其型中添加一个额外常元 0 的交换剩余格。

当（带指点的）交换剩余格的底层偏序集有界时，我们通常会在型中加入常元符号 $\perp$ 和 $\top$，分别表示偏序集的最小元和最大元。我们将这一扩充型中的结构称为有界（带指点的）交换剩余格。

交换剩余格 $\langle A, \wedge, \vee, \cdot, \to 1\rangle$ 上的对合是一个一元运算 $\neg$，定义在 A 上，并满足：对所有 $a, b \in A$, $\neg\neg a = a$ 和 $a \to \neg b = b \to \neg a$。如果交换剩余格 $\langle A, \wedge, \vee, \cdot, \to, 1\rangle$上的 $\neg$是一个对合，我们通常将 $\neg 1$ 简写为 $\mathbf{0}$。此时，对所有 $a \in A$，都有 $a = (a \to 0) \to 0$。我们将满足后一恒等式的任意常元 $\mathbf{0}$ 称为否定常元。如果某个交换剩余格 $\langle A, \wedge, \vee, \cdot, \to, 0\rangle$中存在否定常元 $\mathbf{0}$，那么可以通过令 $\neg a = a \to 0$来定义一个对合 $\neg$。因此，对交换剩余格 $\langle A, \wedge, \vee, \cdot, \to, 0\rangle$ 扩充一个对合，与扩充否定常元 $0 = \neg 1$在项意义下等价。这两种项等价的扩充都称为对合交换剩余格。请注意，这一术语会带来歧义，但不会对本研究造成严重问题。我们将有界对合交换剩余格称为 A-代数。[3]

一个代数 $\langle A, \wedge, \vee, \cdot, \to, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \perp, \top, !\rangle$ 是一个 girale，当且仅当其 $\langle A, \wedge, \vee, \cdot, \to, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \perp, \top\rangle$ 是一个 A-代数，并且 $!$ 是 A 上的一个一元运算，满足对于所有 $a, b \in A$:

(G1) $!1 = 1$。

[3]A-代数中的“A”既代表 Agliano`，也代表 Avron。

(G2) $!a \leq a \wedge 1$.

(G3) $!a \cdot !b = !(a \wedge b)$.

(G4) $!!a = !a$.

我们分别用 RL、PRL、A 和 G 表示交换剩余格、指点交换剩余格、A-代数和 girale 的簇。它们各自都是具有同余扩张性质的算术簇。[4]

刚刚介绍的代数结构类与我们的研究密切相关，因为它们为第2节中的演绎系统提供了代数模型。为了准确说明这一点，我们必须对若干概念进行形式化。给定一个代数语言$\mathcal{L}$，关于 $\mathcal{L}$ 的一个方程是一个有序对 $\langle s,t\rangle \in \mathrm{Fm}^2_{\mathcal{L}}$。我们将一个方程 $\langle s,t\rangle$ 记作$s \approx t$，并用$\mathrm{Eq}\mathcal{L}$ 表示由 $\mathcal{L}$ 以及来自Var的变量构成的方程集合。如果A是语言 $\mathcal{L}$中的一个代数，那么到A中的一个赋值就是一个从 $\mathcal{L}$ 上的绝对自由代数到A的同态 h 。对于语言 $\mathcal{L}$中的代数类K，我们定义一个关系 $\models_{\mathsf{K}} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{Eq}\mathcal{L}) \times \mathrm{Eq}\mathcal{L}$，该关系将方程集映射到方程，其定义如下：

$$E \models_{\mathsf{K}} (u \approx w) \iff \text{For each } \mathbf{A} \in \mathsf{K} \text{ and each assignment } h \text{ into } \mathbf{A},\ h(u) = h(w) \text{ whenever } h(s) = h(t) \text{ for all } (s \approx t) \in E.$$

关系 $\models_{\mathsf{K}}$ 称为 K 的方程推论关系。我们采用所有惯用记号，写作 $E \models_{\mathsf{K}} S$ 表示 $E \models_{\mathsf{K}} S$ 和 $S \models_{\mathsf{K}} E$，等等。

若存在单变量 x 上的有限方程集 $\tau(x)$、双变量 x, y 上的有限公式集 $\Delta(x, y)$，以及一个拟簇 K，使得演绎系统 $\vdash$ over $\mathcal{L}$ 可代数化（参见 [5]）：

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \varphi &\iff \tau[\Gamma] \models_{\mathsf{K}} \tau(\varphi) \\ \Theta \models_{\mathsf{K}} \varepsilon \approx \delta &\iff \Delta[\Theta] \vdash \Delta(\varepsilon, \delta) \\ \varphi &\dashv\vdash \Delta[\tau(\varphi)] \\ \varepsilon \approx \delta &\models_{\mathsf{K}} \tau[\Delta(\varepsilon, \delta)] \end{aligned}$$

对于每个公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$ 和方程集 $\Theta \cup \{\varepsilon \approx \delta\} \subseteq \mathrm{Eq}\mathcal{L}$ 都成立。在这种情况下，方程 $\tau(x)$ 称为定义方程，公式 $\Delta(x, y)$ 称为等价公式，而 K 称为$\vdash$的等价代数语义学。当一个演绎系统 $\vdash$ 可代数化，且其等价代数语义学是一个簇时，我们称它为强可代数化。

当 K 是演绎系统 $\vdash$ 的等价代数语义时，定义方程和等价公式见证了 $\vdash$ 与 K 的方程推论之间的相互逆翻译。这在 $\vdash$ 与 K 之间建立了强有力的联系，促进了两者之间性质的双向传递。下面这个众所周知的结果就是这样一种联系，我们将在当前工作中加以利用。

[4]如果一个簇既是同余分配的，又是同余可置换的，则称其为算术的。

命题 2.3（[14, 推论 3.40]）。设 $\vdash$ 是一个强可代数化演绎系统，V 是其等价代数语义。那么，$\vdash$ 的公理扩张格与 V 的子变种格在对偶意义下同构。

Galatos 和 Ono 在 [21] 中证明了 $\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 以及若干相关演绎系统是强可代数化的，而次结构逻辑已广泛采用这些方法进行研究。代数语义在研究线性逻辑时的应用则少得多。Avron 在 [4], 中为线性逻辑引入了代数语义，但没有证明等价代数语义所要求的相互可解释性。在一份未发表的手稿中（更新于 [1]），Aglian`o 证明了 $\vdash_{\mathbf{MALL}}$和 $\vdash_{\mathbf{LL}}$ 是可代数化的，并确定了 A-代数与 girale 的簇在一个项等价的型下的对应关系。[5] 以下定理概述了我们将在后文中用到的关于可代数化性的信息。

定理 2.4. 设 $\delta(x) = x \wedge 1 \approx 1$ 且 $\Delta(x, y) = \{x \to y, y \to x\}$。

(i) 系统 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$ 是强可代数化的，其定义方程为 $\delta(x)$，等价公式为 $\Delta(x, y)$，等价代数语义为 RL。(ii) 系统 $\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 是强可代数化的，其定义方程为 $\delta(x)$，等价公式为 $\Delta(x, y)$，等价代数语义为 PRL。(iii) 系统 $\vdash_{\mathbf{MALL}}$ 是强可代数化的，其定义方程为 $\delta(x)$，等价公式为 $\Delta(x, y)$，等价代数语义为 A。(iv) 系统 $\vdash_{\mathbf{LL}}$ 是强可代数化的，其定义方程为 $\delta(x)$，等价公式为 $\Delta(x, y)$，等价代数语义为 G。

注 2.5. 由于演绎系统 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$、$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$、$\vdash_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash_{\mathbf{LL}}$ 的等价代数语义是簇，命题 2.3 给出了它们的公理扩张格与相应等价代数语义的子簇格之间的反同构。

2.3. 插值、amalgamation 与内射性

若任意逻辑 $\vdash$ 满足演绎插值性质（或称 DIP），则称其具有演绎插值性质：若 $\Gamma \vdash \varphi$，则存在一组公式 Γ'，使得 $\mathrm{var}(\Gamma') \subseteq \mathrm{var}(\Gamma) \cap \mathrm{var}(\varphi)$，且 $\Gamma \vdash \Gamma'$、$\Gamma' \vdash \varphi$。公式集合 Γ' 称为演绎插值式。

注 2.6。我们所称的演绎插值性质有时也称为“弱演绎插值性质”。此外，还有一种更强的概念：如果对于任意Γ、$\Delta \vdash \varphi$，都存在一个公式集合 Γ'，使得 $\mathrm{var}(\Gamma') \subseteq \mathrm{var}(\Gamma) \cap \mathrm{var}(\Delta \cup \{\varphi\})$，$\Gamma \vdash \Gamma'$，且 Γ'、$\Delta \vdash \varphi$，则称一个演绎系统具有强演绎插值性质。然而，对于我们所考虑的演绎系统，这两个概念是等价的，因为这些系统是带交换的次结构逻辑（参见[20]）。

[5]我们注意到，! 的模态性质是 $\vdash_{\mathbf{LL}}$ 代数化的关键。参见图 2，公理模式 (!K) 和必然化规则 (nec) 的强形式尤为重要；关于正规模态逻辑全局后承关系的代数化讨论，见 [5, 第 46–47] 页。

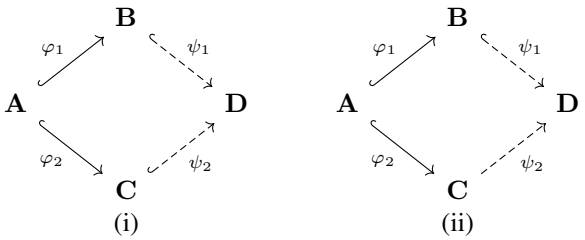


图4：amalgamation 性质的交换图

如果存在一个含两个变量的公式 κ（x、 y），使得对于每个公式集合 $\Gamma \cup \{\varphi, \psi, \gamma\}$，我们就称后承关系 $\vdash$ 具有合取性，

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \gamma \iff \Gamma, \kappa(\varphi, \psi) \vdash \gamma.$$

注2.7. 若后承关系 $\vdash$ 具有有限性且合取性，则它具有演绎插值性质，当且仅当对于所有公式 φ、 ψ，只要 $\varphi \vdash \psi$，就存在公式 δ，使得 var(δ) $\subseteq$ var(φ) $\cap$var(ψ) 且 $\varphi \vdash \delta, \delta \vdash \varphi$。特别地，这对逻辑 $\vdash_{\mathbf{LL}}$、 $\vdash_{\mathbf{MALL}}$、 $\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$ 的任意公理扩张都成立，其中 $\kappa(x, y) = x \wedge y$。

当 $\vdash$ 是一种其语言包含蕴涵联结词 $\rightarrow$ 的逻辑时，若只要 $\vdash \varphi \rightarrow \psi$，就存在公式 δ，使得 $\vdash \varphi \rightarrow \delta, \vdash \delta \rightarrow \psi$，且 δ 中出现的变元均属于 φ 和 ψ 中共同出现的变元，则称 $\vdash$ 具有克雷格插值性质（或 CIP）。此时，我们称 δ 为克雷格插值式。文献 [21] 指出，若 $\vdash$ 是具有交换的次结构逻辑，且 $\vdash$ 具有 CIP，那么它也具有演绎插值性质。反之通常不成立。直观而言，插值式解释了某个特定推理为何成立；参见 [26]。

注2.8. 对于逻辑 $\vdash_{\mathbf{LL}}$, $\vdash_{\mathbf{MALL}}$, $\vdash_{\mathbf{FL_e}}$和 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$，可以利用恰当的无切根岑式序列演算，从句法上证明克雷格插值性质；见 [20, 33]。特别地，这意味着这些逻辑具有演绎插值性质。

演绎插值性质的代数对应概念是 amalgamation 性质。

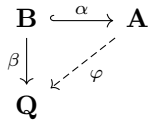
K 中的一个跨度是由代数 A、B、C $\in$ K 以及嵌入 φ_1: A $\rightarrow$ B 和 φ_2 : A $\rightarrow$ C 构成的五元组 $\langle$A, B, C $\varphi_1, \varphi_2\rangle$。K 中跨度 $\langle$A, B, C $\varphi_1, \varphi_2\rangle$ 的一个 amalgam 是三元组 $\langle\psi_1, \psi_2$, D$\rangle$，其中 D $\in$K，且 ψ_1 : B $\rightarrow$ D、 ψ_2: C $\rightarrow$ D 是嵌入，并满足 $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$，即图4(i)中的图表可交换。若此外还满足 $(\psi_1 \circ \varphi_1)[A] = \psi_1[B] \cap \psi_2[C]$，则称 amalgam $\langle\psi_1, \psi_2$, D$\rangle$ 为强 amalgam。如果 K 中的每个跨度都有一个（强）amalgam，则称类 K 具有（强）amalgamation 性质。

K 中一个跨度 $\langle$A, B, C $\varphi_1, \varphi_2\rangle$ 的单侧 amalgam 是一个三元组 $\langle\psi_1, \psi_2$, D$\rangle$，其中 D $\in$ K，且 ψ_1: B $\rightarrow$ D 是一个嵌入， ψ_2: C $\rightarrow$ D 是一个同态，并且 $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$，即图4(ii)中的图表可交换。如果 K 中的每个跨度都有一个单侧 amalgam，则称类 K 具有单侧 amalgamation 性质。

为了证明簇 V 具有 amalgamation 性质，通常可以借助簇 V 的一个易于处理的生成类。回顾一下，如果代数 A 的最小同余 Δ 是交不可约的，也就是说，对于 A 的任意同余关系 Θ 和 Ψ，若有 $\Delta = \Theta \cap \Psi$，则必有$\Delta = \Theta$ 或 $\Delta = \Psi$，那么称 A 为有限次子直积不可约。以下内容可见于 [18, 定理 3.4]。

定理 2.9. 假设 V 是具有同余扩张性质的簇，并且 $\mathrm{V}_{\mathrm{FSI}}$ 中的有限次子直不可约成员构成的类对取子代数封闭。那么，V 具有 amalgamation 性质，当且仅当 $\mathrm{V}_{\mathrm{FSI}}$ 具有单侧 amalgamation 性质。

设 K 是一类同类型代数。若代数 $\mathbf{Q} \in \mathbf{K}$ 满足：对于任意代数 $\mathbf{A}、\mathbf{B} \in \mathbf{K}$、嵌入 $\alpha\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ 以及同态 $\beta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{Q}$，都存在同态 $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Q}$，使得 $\varphi \circ \alpha = \beta$，则称 Q 在 K 上内射，也就是说，下图交换：



若 K 中的每个代数都能嵌入 K 中一个在 K 上内射的代数，则称 K 有足够的内射对象。

引理 2.10（参见 [28]）。设 K 是一类对有限积封闭的同类型代数。若 K 有足够的内射对象，则 K 具有 amalgamation 性质。

设 K 是同类型代数构成的类，且 $\mathbf{A}、\mathbf{B} \in \mathbf{K}$。若对任意 $\mathbf{C} \in \mathbf{K}$ 及同态 $\psi_1, \psi_2\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$，只要 $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi$，就有 $\psi_1 = \psi_2$，则称同态 $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 是 K 中的满态射。若 K 中的每个满态射都是满射，则称类 K 具有满上同态性质。

引理 2.11（参见 [28]）。拟簇 K 具有满上同态性质和 amalgamation 性质，当且仅当它具有强 amalgamation 性质。

下面概述一些著名的桥定理。为准确表述这些定理，我们回顾一下：若存在一个由二元公式集组成的族 Λ，使得对所有 $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathcal{L}}$，都有 $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ 当且仅当存在 $\lambda \in \Lambda$，使得对所有 $l \in \lambda$,$\Gamma \vdash l(\varphi, \psi)$，则称演绎系统 $\vdash$ 在 $\mathcal{L}$ 上满足局部演绎定理。局部演绎定理是显式演绎定理的推广，例如 Avron 关于线性逻辑的演绎定理。

定理 2.12（[6]）。设 $\vdash$ 是一个具有等价代数语义 V 的强可代数化演绎系统。那么，当且仅当 V 具有同余扩张性质时，$\vdash$ 具有局部演绎定理。

定理 2.13（[10]）。设 $\vdash$ 是一个具有局部演绎定理且具有等价代数语义 V 的强可代数化演绎系统。那么，$\vdash$ 具有演绎插值性质，当且仅当 V 具有 amalgamation 性质。

3. 具有演绎插值性质的连续统多个扩张

我们将为 RL、PRL、A 和 G 中的每一个构造出连续统多个具有 amalgamation 性质的子簇。根据命题 2.3，这些子簇分别与$\vdash_{\mathbf{RL_e}}$、$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$、$\vdash_{\mathbf{MALL}}$ 和$\vdash_{\mathbf{LL}}$ 的公理扩张一一对应。因此，我们可以由定理 2.13 和 2.4 得出，$\vdash_{\mathbf{RL_e}}$、$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$、$\vdash_{\mathbf{MALL}}$ 和$\vdash_{\mathbf{LL}}$ 各自都有连续统多个具有演绎插值性质的公理扩张。在每种情况下，上述子簇的生成代数都是由适当选取的某些阿贝尔群构造而成的。最近， [22] 研究了类似类型的剩余格。

对于每个素数 p，我们令 $\mathbf{Z}_p = \langle Z_p, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ 表示阶为 p 的循环群，并令 $\mathbf{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0\rangle$ 表示整数群。如果群 H 的子群 G 满足：对于 H 的每个非平凡子群 $\mathbf{G}'$， $G \cap G'$ 都非平凡，则称 G 是 H 的本质子群。

引理 3.1（[12]）。每个阿贝尔群都是某个内射阿贝尔群的本质子群。

对于每个素数集合 P，我们定义准方程集合

$$\Sigma_P = \{x^p \approx 1 \Rightarrow x \approx 1 : p \in P\}.$$

此外，我们用 $\mathbf{Q}_P$ 表示由 Σ_P 公理化的阿贝尔群拟簇。

命题 3.2. 对于每个素数集合 P，拟簇 $\mathbf{Q}_P$ 具有摊合性质。

证明。由引理 2.10，只需证明 $\mathbf{Q}_P$ 有足够的内射对象。取 $\mathbf{G} \in \mathbf{Q}_P$。由引理 3.1，G 是某个内射阿贝尔群 H 的本质子群。我们要证明 $\mathbf{H} \in \mathbf{Q}_P$。假设 $\mathbf{H} \notin \mathbf{Q}_P$，则产生矛盾。于是存在一个素数 $p \in P$，使得 $\mathbf{H} \not\models x^p \approx 1 \Rightarrow x \approx 1$，也就是说，存在一个 $a \in H$，满足$a^p = 1$ 且 $a \neq 1$。由于由 a 生成的子群 S 是一个阶为 p的循环群，并且由于 G 是 H 的本质子群，存在 $b \in S \cap G$，使得 $b \neq 1$。现在，由于 p 是素数， $b^p = 1$，因此 $\mathbf{G} \notin \mathbf{Q}_P$，矛盾。于是我们得到 $\mathbf{H} \in \mathbf{Q}_P$。 □

下面的引理表明，在某些情况下，可以在 A-代数上项定义一个指数运算。

引理 3.3. 设 A 是一个 A-代数，使得对于所有 $a \in A$，$(a \wedge 1)^2 = a \wedge 1$，并定义 !: $A \to A$，其中 $!\, a = a \wedge 1$。那么代数 $\langle \mathbf{A}, ! \rangle$ 是一个 girale。

证明. 对每个 $a \in A$, $1 \wedge 1 = 1$, $a \wedge 1 \leq a \wedge 1$，我们都有 $a \wedge 1 \wedge 1 = a \wedge 1$。因此， $\langle \mathbf{A}, ! \rangle$ 满足 (G1)、(G2) 和 (G4)。此外，对于 (G3)，注意到根据假设，对于所有 $a, b \in A$, $a \wedge 1 \leq 1$, $b \wedge 1 \leq 1$ 都是幂等的，因此可得 $(a \wedge 1)(b \wedge 1) = (a \wedge 1) \wedge (b \wedge 1) = (a \wedge b) \wedge 1$。

□

现在，我们介绍一种代数构造，它可以从任意阿贝尔群 G 生成一个交换剩余格。由此构造得到的交换剩余格总可以扩充为有指点的交换剩余格、A-代数和 girale。

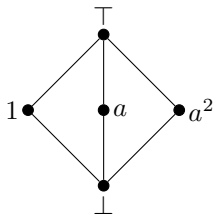


图 5：Z_3 的格扩张

设 $\mathsf{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ 是一个阿贝尔群。我们可以通过定义 $a \leq_G b$（当且仅当 $a = b$）将其视为一个偏序群，其中 $a, b \in G$。[6] 通过分别将 $\bot \notin G$ 和 $\top \notin G$作为新的最小元和最大元添加到 $\langle G, \leq_G\rangle$，我们得到一个有界格$\langle G \cup \{\bot, \top\}, \wedge, \vee, \bot, \top\rangle$。图 5 展示了 $\mathsf{G} = \mathsf{Z}_3$ 的格序。

现在，如果我们通过规定 $a \cdot \top = \top \cdot a = \top$，对所有 $a \in G \cup \{\top\}$，以及 $b \cdot \bot = \bot \cdot b = \bot$，对所有 $b \in G \cup \{\bot, \top\}$，将 G 上的乘法扩展到 $G \cup \{\bot, \top\}$，便可在 $\langle G \cup \{\bot, \top\}$、$\wedge$、$\vee\rangle$ 上得到一个具有单位元 $\mathbf{1}$ 的剩余、交换、结合二元运算。剩余 $\rightarrow$ 由乘法和格序通过以下公式唯一确定。

$$a \rightarrow c = \max\{b : ab \leq c\}. \tag{R}$$

因此，$\langle G \cup \{\bot, \top\}, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, 1\rangle$ 是一个交换剩余格。此外，显然 $\mathbf{1}$ 是一个否定常元，因此 $\langle G \cup \{\bot, \top\}, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, \mathbf{1}, 1, \bot, \top\rangle$ 是一个 A-代数。此外，对于每个 $a \in G \cup \{\bot, \top\}$，我们都有 $a \wedge 1 \in \{\bot, 1\}$，所以显然对于所有 $a \in G$，都有 $(a \wedge 1)^2 = a \wedge 1$。因此，根据引理 3.3，通过定义 $!a = a \wedge 1$，我们得到一个 girale $\langle G \cup \{\bot, \top\}, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, \mathbf{1}, 1, \bot, \top, !\rangle$。对于 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，我们用 $\mathsf{R}^S(\mathsf{G})$ 表示这个代数的 $\mathcal{RL} \cup S$ 约化代数。例如，对于 $S = \{0\}$，$\mathsf{R}^S(\mathsf{G})$ 是带指定元的剩余格 $\langle G \cup \{\bot, \top\}, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, \mathbf{1}, 1\rangle$。

回顾一下，若一个任意代数 A 的同余只有相等关系 $\Delta = \{\langle x, y\rangle \in A^2 : x = y\}$ 和识别所有元素的等价关系 $\nabla = A^2$，则称 A 为单。对于任意交换剩余格 A，我们可以定义另一个剩余格 A^-，其论域为负元素的集合 $A^- = \{a \in A : a \leq 1\}$。$\mathsf{A}^-$ 上的运算 $\wedge$、$\vee$、$\cdot$、$\mathbf{1}$ 继承自 A，而 A^- 的剩余 $\rightarrow^-$由项 $a \rightarrow^- b = (a \rightarrow b) \wedge 1$定义，其中 $\rightarrow$ 是 A 的剩余。代数 A^- 称为 A 的负锥。根据 [20, 引理 3.49], ，任意交换剩余格 A 的同余格与其负锥 A^-的同余格同构。

以下引理给出了 $\mathsf{R}^S(\mathsf{G})$ 的一些基本性质。

引理 3.4. 设 G 是一个阿贝尔群，且 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$。

(i) $\mathbf{R}^S(\mathbf{G})$ *is simple.*

[6]偏序群是配备了偏序的群，并且左平移和右平移都保持序关系。

(ii) *For every* $a \in \mathrm{R}^S(\mathbf{G}) \setminus \{\top\}$, $\top \to a = \bot$.

(iii) *For all* $a, b \in G$, $a \to b = a^{-1}b$.

证明。对于 (i)，我们注意到，对于 $S = \emptyset$，R^S(G) 的负锥与二元剩余格同构。由于该代数是单代数，且 R^S(G) 的同余关系与其负锥的同余关系之间存在一一对应关系，因此 $S = \emptyset$ 的结论成立。如果 $S \neq \emptyset$，我们注意到，R^S(G) 的一个同余关系特别也是其交换剩余格约化代数的一个同余关系，因此该结论可由前述讨论得出。

对于 (ii)，注意，如果 $a \neq \top$，那么满足 $b \cdot \top \leq a$ 的最大元素 b 是 $\bot$。因此，该断言由 (R) 得出。(iii) 同样可由直接计算 (R) 得出。 □

对于由素数构成的集合 $P \neq \emptyset$，且 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，我们定义类

$$\mathsf{K}_P^S = \mathbb{I}(\{\mathbf{R}^S(\mathbf{G}) : \mathbf{G} \in \mathsf{Q}_P\} \cup \{\mathbf{T}\}),$$

其中，T 是指定类型中的一个平凡代数。此外，我们令 $\mathsf{V}_P^S = \mathbb{V}(\mathsf{K}_P^S)$。另外，我们分别用 $\vdash_{\mathbf{LL}}^P$、$\vdash_{\mathbf{MALL}}^P$、$\vdash_{\mathbf{FL_e}}^P$ 和 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}^P$ 表示 $\vdash_{\mathbf{LL}}$、$\vdash_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$ 对应于簇 $\mathsf{V}_P^{\{0,\bot,\top,!\}}$、$\mathsf{V}_P^{\{0,\bot,\top\}}$、$\mathsf{V}_P^{\{0\}}$ 和 $\mathsf{V}_P^{\emptyset}$ 的扩张。

注意，在簇 V_P^S中，运算 0 可由 $0 = 1$定义，$\top$ 可由 $\top = \bot \to 1$定义，$\bot$ 可由 $\bot = \top \to 1$定义，而 ! 可由 $!x = x \wedge 1$定义。因此，在下文中，我们可以假设 $S = \{\bot, \top\}$ 或 $S = \emptyset$。

命题 3.5. 对于每个素数集合 $P \neq \emptyset$ 和 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，类 K_P^S是一个全称类，即 $\mathbb{HSP}_U(\mathsf{K}_P^S) = \mathsf{K}_P^S$。

证明. 注意，$\mathsf{K}_P^{\{\bot,\top\}}$ 相对于有界交换剩余格由准方程集合 Σ_P 以及以下全称语句公理化：

$$(\forall x)((x \not\approx \bot) \,\&\, (x \not\approx \top) \implies (x(x \to 1) \approx 1)), \tag{1}$$
$$(\forall x)(\forall y)((x \not\approx \bot) \,\&\, (y \not\approx \bot) \,\&\, (x \not\approx y) \implies (x \vee y \approx \top)), \tag{2}$$
$$(\forall x)(\forall y)((x \not\approx \top) \,\&\, (y \not\approx \top) \,\&\, (x \not\approx y) \implies (x \wedge y \approx \bot)), \tag{3}$$
$$(\forall x)((x \not\approx \bot) \implies (x \cdot \top \approx \top)). \tag{4}$$

为此，设 A 是一个满足这些公理的非平凡代数。于是，根据 (1)，集合$A \setminus \{\bot, \top\}$ 可导出一个阿贝尔群 G_A，其中 $a^{-1} = a \to 1$ 适用于 $a \in A \setminus \{\bot, \top\}$。此外，由于 A 满足 Σ_P，G_A 也满足 Σ_P，即 $\mathsf{G}_A \in \mathsf{Q}_P$。现在，利用 (2)、(3) 和 (4)，很容易验证 A 与 $\mathrm{R}^S(\mathsf{G}_A)$ 同构。

对于 $\mathsf{K}_P^{\emptyset}$，注意到 $\bot$ 和 $\top$ 可由公式 $\varphi_\bot(x) = (\forall y)(x \wedge y \approx x)$ 以及 $\varphi_\top(x) = (\forall y)(x \vee y \approx x)$ 定义。因此，可以调整上述语句以得到 $\mathsf{K}_P^{\emptyset}$的公理化，即 $\mathsf{K}_P^{\emptyset}$在 $\mathbb{P}_U$下封闭。根据引理 3.4 (i) 以及 Q_P在子代数下封闭这一事实，可得其在 $\mathbb{HS}$ 下封闭。 □

推论 3.6. 设 $P \neq \emptyset$ 是一个素数集合，且 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$。那么：

(i) $\mathrm{V}_P^S = \mathbb{ISP}(\mathrm{K}_P^S)$。

(ii) V_P^S 中有限次子直积不可约成员的类恰好是 K_P^S。

证明。对于 (i)，我们注意到，根据 J´onsson 引理以及命题 3.5，V_P^S 中每个次直不可约成员都属于 K_P^S。因此，由于 V_P^S 中的每个代数都同构于若干次直不可约代数的次直积，我们得到 $\mathrm{V}_P^S = \mathbb{ISP}(\mathrm{K}_P^S)$。对于 (ii)，注意到由 (i) 可知 $\mathrm{V}_P^S = \mathbb{ISP}(\mathrm{K}_P^S)$，由 [9, 引理 1.5] 可得，$\mathrm{V}_P^S$ 中每个有限次子直积不可约成员都属于 $\mathbb{ISP}_U(\mathrm{K}_P^S)$，并且根据命题 3.5，有 $\mathbb{ISP}_U(\mathrm{K}_P^S) = \mathrm{K}_P^S$。另一方面，$\mathrm{K}_P^S$ 中的每个成员要么是平凡的，要么是单的，因此特别是有限次子直积不可约的。□

引理 3.7. 设 G 和 H 为阿贝尔群，且 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$。

(i) 每个嵌入 α: G $\to$ H 都唯一延拓为一个嵌入 β: R^S(G) $\to$ R^S(H)。(ii) 每个嵌入 β: R^S(G) $\to$ R^S(H) 都限制为一个嵌入 α: G $\to$ H。

证明。对于 (i)，设 α: G $\to$ H 是一个嵌入，定义 β: R^S(G) $\to$ R^S(H)，使得 $\beta(a) = \alpha(a)$，其中 $a \in G$，以及 $\beta(\top) = \top, \beta(\bot) = \bot$。显然，$\beta$ 是一个（有界）格同态和幺半群同态。此外，根据引理 3.4 (ii) 和 (iii)，对于 $a \in G \cup \{\top\}$，有 $\top \to a = \bot$；对于 $a, b \in G$，有 $a \to b = a^{-1}b$。此外，对于 $a \in G \cup \{\bot, \top\}$，有 $\bot \to a = \top$；对于 $a \in G \cup \{\top\}$，有 $a \to \bot = \bot$。R^S(H) 也具有相同的性质。因此，由于 α 是一个群同态，β 保持 $\to$。显然，β是唯一的扩张，因为任何从 R^S(G) 到 R^S(H) 的嵌入都必须将 $\bot$ 映射到 $\bot$，并将 $\top$ 映射到 $\top$。部分 (ii) 可直接由引理 3.4 (iii) 得出。□

定理 3.8. 对于任意素数集合 $P \neq \emptyset$，若 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，则簇 V_P^S 具有 amalgamation 性质。

证明。由推论 3.6(ii)，簇 V_P^S 的有限次次直积成员类恰为 K_P^S；并且由命题 3.5，该类对子代数封闭。由于 V_P^S 与某个（可能有界或带指定元素的）交换剩余格簇项等价，根据引理 3.57]，V_P^S 具有同余扩张性质。因此，由定理 2.9，只需证明 K_P^S 具有 amalgamation 性质。

由引理 3.7 和命题 3.2 可知，K_P^S 中任何不含平凡代数的跨度在 K_P^S中都有 amalgam，因为我们可以提升群约化代数跨度的 amalgam。若 $S = \{\bot, \top\}$，K_P^S 中的平凡代数只能嵌入平凡代数，因此结论成立。若 $S = \emptyset$，我们注意到，在 K_P^S中任何包含平凡代数的跨度里，都可以用代数 R^S(0) 替换这些平凡代数，其中 0 是平凡阿贝尔群，并相应扩展嵌入。因此，对于 $S = \emptyset$，结论也成立。□

由定理 2.13 可得关于相应公理扩张的以下结果。

推论 3.9。对于任意素数集合 $P \neq \emptyset$，$\vdash^P_{\mathbf{LL}}$、$\vdash^P_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash^P_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash^P_{\mathbf{RL_e}}$ 中的每一个都具有演绎插值性质。

前一个命题表明，我们所确定的扩展具有演绎插值性质。接下来还需证明这类扩展有连续统多个。

命题 3.10. 对于两个非空的素数集合 P 和 P'，若 $P \neq P'$ 且 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，则 $\mathrm{V}^S_P \neq \mathrm{V}^S_{P'}$。

证明. 若 $P \neq P'$，则不失一般性，存在一个 $p \in P$，使得 $p \notin P'$。由于对每个素数 $q \neq p$，都有 $\mathrm{Z}_p \not\models x^p \approx 1 \Rightarrow x \approx 1$ 和 $\mathrm{Z}_p \models x^q \approx 1 \Rightarrow x \approx 1$，因此得到 $\mathrm{Z}_p \notin \mathrm{Q}_P$ 和 $\mathrm{Z}_p \in \mathrm{Q}_{P'}$。但于是也有 $\mathrm{R}^S(\mathrm{Z}_p) \notin \mathrm{K}^S_P$ 和 $\mathrm{R}^S(\mathrm{Z}_p) \in \mathrm{K}^S_{P'}$。因此，根据命题 3.5 并结合 J´onsson 引理，我们得到 $\mathrm{R}^S(\mathrm{Z}_p) \notin \mathrm{V}^S_P$ 和 $\mathrm{R}^S(\mathrm{Z}_p) \in \mathrm{V}^S_{P'}$，即 $\mathrm{V}^S_P \neq \mathrm{V}^S_{P'}$。 □

最后，我们终于得到了本文的主要结果：

定理 3.11.

(i) RL、PRL、A 和 G 各自都有连续统多个具有 amalgamation 性质的子簇。(ii) $\vdash_{\mathbf{LL}}$、$\vdash_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$ 各自都有连续统多个具有演绎插值性质的公理扩张。

证明。(i) 由定理 3.8 和命题 3.10 立即可得，因为存在连续统多个不同的素数集合。(ii) 则由 (i)、定理 2.4 和命题 2.3 推出。

□

我们所识别出的连续统多个逻辑都具有演绎插值，但可以证明它们都不具有 CIP。为此，我们仔细考察相应簇中的强嵌入 amalgamation 性质。

命题 3.12。对于每个非空素数集合 $P$and $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，簇 V^S_Pdoes not have 满上同态and hence lacks the strong amal- gamation property。

证明。设 P是一个非空的素数集合，且 $p \in P$。那么我们有 $\mathrm{Z} \in \mathrm{Q}_P$，即 $\mathrm{R}^S(\mathrm{Z}) \in \mathrm{K}^S_P$。考虑由下式定义的嵌入 φ: $\mathrm{R}^S(\mathrm{Z}) \to \mathrm{R}^S(\mathrm{Z})$

$$\varphi(a) = \begin{cases} a & \text{if } a \in \{\bot, \top\} \\ pa & \text{if } a \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

显然，φ不是满射。设 $\mathrm{A} \in \mathrm{V}^S_P$，其单位元为 e，并设 ψ_1、ψ_2: $\mathrm{R}^S(\mathrm{Z}) \to \mathrm{A}$ 是满足 $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi$ 的同态。由于 $\mathrm{R}^S(\mathrm{Z})$ 是单的，因此要么 ψ_1 和 ψ_2 都是常值映射，要么 ψ_1 和 ψ_2 都是嵌入。在第一种情况下，显然有 $\psi_1 = \psi_2$，因此我们可以假设这些映射都是嵌入。由于 1 生成 $\mathrm{R}^S(\mathrm{Z})$，只需证明 $\psi_1(1) = \psi_2(1)$。现在，根据假设，$(\psi_1(1) \cdot \psi_2(-1))^p = \psi_1(p) \cdot \psi_2(-p) = e$。但是，由于 $\mathrm{V}^S_P \models x^p \approx 1 \Rightarrow x \approx 1$，我们得到 $\psi_1(1) \cdot \psi_2(-1) = e$，即 $\psi_1(1) = \psi_2(1)$。因此，$\psi_1 = \psi_2$。 □

注 3.13. 命题 3.12 的证明表明，在簇 V_P^S 中， p次根是隐式可定义的，但不是显式可定义的。这体现了满态射的满射性与 Beth 可定义性之间的联系；例如，参见 [27]。不过，我们在此不再进一步讨论 Beth 可定义性。

推论 3.14. 对于每个非空素数集合 P，扩张 $\vdash^P_{\mathbf{LL}}$、$\vdash^P_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash^P_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash^P_{\mathbf{RL_e}}$ 都不具有克雷格插值性质。

证明. 设 P 是一个非空素数集合，且 $\vdash^P$ 是扩张 $\vdash^P_{\mathbf{LL}}$、$\vdash^P_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash^P_{\mathbf{FL_e}}$ 或 $\vdash^P_{\mathbf{RL_e}}$ 之一，其等价代数语义为 V_P^S。若 $\vdash^P$ 具有 CIP，则 V_P^S 将具有强嵌入 amalgamation 性质；例如参见 [20]，并注意到，由于我们可以假设 $S = \{\bot, \top\}$ 或 $S = \emptyset$，其中关于 $\mathbf{FL_e}$ 公理扩张的结果适用。但这样一来，引理 2.11 就会推出 V_P^S 具有满上同态，这与命题 3.12 矛盾。 □

注 3.15. 本节的结果表明，其他一些次结构逻辑也有连续统多个具有演绎插值性质、但不具有克雷格插值性质的扩张。例如，这适用于带交换的自反完整兰贝克演算 $\mathbf{InFL_e}$ 的演绎系统，以及带交换和右弱化的完整兰贝克演算 $\mathbf{FL_{eo}}$ 的演绎系统（参见 [20]）。此外，由于线性逻辑和乘法-加法线性逻辑分别是直觉主义线性逻辑和直觉主义乘法-加法线性逻辑的公理扩张，这些逻辑也适用上述结果（例如参见 [32]，其中给出了直觉主义线性逻辑及其片段的定义）。

虽然我们所确定的逻辑不具有 CIP，但相对于 $\rightarrow$，它们具有一种弱形式的插值性质。若对于任意 $\vdash !\varphi \rightarrow !\psi$，都存在一个公式 δ，其变量包含于 φ 和 ψ 中共同出现的变量之中，并且满足 $\vdash !\varphi \rightarrow !\,\delta$ 且 $\vdash !\,\delta \rightarrow !\,\psi$，则称逻辑 $\vdash$ 具有守卫插值性质。

引理 3.16. 对于每个公式集 $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$，

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathbf{LL}} \psi \iff \Gamma \vdash_{\mathbf{LL}} !\varphi \rightarrow !\psi.$$

证明. 该等价关系可由 Avron 的演绎定理以及以下事实推出：根据代数化，且由于 ! 在每个 girale 中都是幂等、保序且收缩的，$\vdash_{\mathbf{LL}} !\,\psi \rightarrow \psi$；并且若 $\Gamma \vdash_{\mathbf{LL}} !\,\varphi \rightarrow \psi$，则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{LL}} !\,\varphi \rightarrow !\psi$。 □

由注2.7和引理 3.16 可得：

命题 3.17. 逻辑 $\vdash$ 的公理扩张 $\vdash_{\mathbf{LL}}$ 具有演绎插值性质，当且仅当它具有守卫插值性质。

注记 3.18。命题 3.17 只是 [10,第 4 节4] 中关于具有演绎分离定理（DDT）的合取演绎系统的一般观察的一个特例。鉴于命题 3.17，我们所考虑的 DDT 见证是公式 $!x \rightarrow !y$。然而，考虑 $!x \rightarrow y$ Avron 的演绎定理中的公式，还可得到另一种等价的插值性质。

推论 3.19. 对于每个素数集合 $P \neq \emptyset$，公理扩张 $\vdash^P_{\mathbf{LL}}$都具有受限插值性质。

4. 演绎插值性质的连续统多个失败

最后，我们将说明，$\vdash_{\mathbf{LL}}$的连续统多个公理扩张不满足演绎插值性质。我们的方法是证明，连续统多个 girale 簇不满足 amalgamation 性质；这些簇是通过向上一节构造的连续统多个簇各自的生成代数类中添加一个有限代数而得到的。

Sugihara幺半群 [17] 作为某些关联逻辑的代数模型，已得到广泛研究；我们将在此利用它们来构造刚才提到的 girale 簇。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$C_{2n+1} = \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}.$$

这个（$2n+1$）元奇数Sugihara链是全序交换剩余格 $\mathbf{C}_{2n+1} = \langle C_{2n+1}, \wedge, \vee, \cdot, \to, 0\rangle$，其中 $x \wedge y = \min(x, y)$，$x \vee y = \max(x, y)$，

$$x \cdot y = \begin{cases} x \wedge y & \text{if } |x| = |y| \\ y & \text{if } |x| < |y| \\ x & \text{if } |y| < |x| \end{cases} \quad \text{and} \quad x \to y = \begin{cases} (-x) \vee y & \text{if } x \leq y \\ (-x) \wedge y & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $|x|$ 是 x 的绝对值。注意，0 是否定常元，对每个 $x \in C_{2n+1}$ 都满足 $x \to 0 = -x$。此外，对于每个 $x \in C_{2n+1}$，我们有 $x \cdot x = x \wedge x = x$。因此，根据引理 3.3，Sugihara 链 $\mathbf{C}_{2n+1}$ 产生一个 girale$\langle C_{2n+1}, \wedge, \vee, \cdot, \to, 0, 0, -n, n, !\rangle$，其中 $!x = x \wedge 0$。如上一节所述，对于每个 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，我们用 $\mathbf{C}^S_{2n+1}$ 表示其相应的约化代数。对于 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，我们定义 $\mathbf{K}^S_7 = \mathbb{I}(\{\mathbf{C}^S_1, \mathbf{C}^S_3, \mathbf{C}^S_5, \mathbf{C}^S_7\})$；对于非空的素数集合 P，我们令 $\mathbf{W}^S_P = \mathbb{V}(\mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7)$。我们分别用 $\vdash^{P+7}$ LL、$\vdash^{P+7}$ MALL、$\vdash^{P+7}$ $\mathbf{FL_e}$ 和 $\vdash^{P+7}$ $\mathbf{RL_e}$ 表示与簇 $\mathbf{W}^{\{0,\bot,\top,!\}}_P$、$\mathbf{W}^{\{0,\bot,\top\}}_P$、$\mathbf{W}^{\{0\}}_P$ 和 $\mathbf{W}^{\emptyset}_P$ 相对应的 $\vdash_{\mathbf{LL}}$、$\vdash_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$ 的公理扩张。注意，出于与上一节相同的原因，在下文中我们再次可以假设 $S = \{\bot, \top\}$ 或 $S = \emptyset$。

引理4.1. 设 P 是一个非空的素数集合，且 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$。

(i) $\mathbb{HSP}_U(\mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7) = \mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7$.

(ii) $\mathbf{W}^S_P$ 的有限次子直不可约成员类是 $\mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7$。

证明。对于 (i)，我们注意到，根据命题 3.5，且由于在同构意义下 $\mathbf{K}^S_7$ 仅由有限多个有限代数组成，$\mathbb{HSP}_U(\mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7) = \mathbf{K}^S_P \cup \mathbb{HS}(\mathbf{K}^S_7)$。简单计算可得 $\mathbf{K}^S_7 = \mathbb{HS}(\mathbf{C}^S_7)$，从而得到 $\mathbb{HS}(\mathbf{K}^S_7) = \mathbf{K}^S_7$。

对于 (ii)，注意到根据 J´onsson 引理以及 (i)，$\mathbf{W}^S_P$ 的每个次直不可约成员都包含在 $\mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7$ 中，因此 $\mathbf{W}^S_P = \mathbb{ISP} \subseteq \mathbb{V}(\mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7)$。于是，根据 [9, 引理 1.5], , $\mathbf{W}^S_P$ 的每个有限次子直积不可约成员都包含在 $\mathbb{ISP}_U\mathbb{V}(\mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7) = \subseteq \mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7$ 中。另一方面，根据推论 3.6，并且由于任何非平凡有限全序交换剩余格都是次直不可约的，$\mathbf{K}^S_P \cup \mathbf{K}^S_7$ 中的每个代数都是有限次子直积不可约的。 □

下一个结果表明，将代数 C_7^S 加入 V_P^S 的生成元后，所得的簇不具有 amalgamation 性质。

定理 4.2. 对任意非空素数集合 P 且 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，簇 W_P^S 不具有 amalgamation 性质。

证明. 根据引理 4.1(ii)，W_P^S 的有限次次直积成员类恰好是 $\mathsf{K}_P^S \cup \mathsf{K}_7^S$；并且根据引理 4.1(i)，它对取子代数封闭。此外，由于 W_P^S 同样项等价于一个（可能有界或带指定点的）交换剩余格簇，W_P^S 具有同余扩张性质，依据 [20, 引理 3.57]。因此，根据定理 2.9，只需证明 $\mathsf{K}_P^S \cup \mathsf{K}_7^S$ 不具有单侧 amalgamation 性质。为此，我们考虑跨度 $\langle \mathsf{C}_5^S, \mathsf{C}_7^S, \mathsf{C}_7^S, \varphi_1, \varphi_2 \rangle$，其中 $\varphi_1(-2) = \varphi_2(-2) = -3$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\varphi_1(2) = \varphi_2(2) = 3$,$\varphi_1(-1) = -2$, $\varphi_1(1) = 2$, $\varphi_2(-1) = -1$, $\varphi_2(1) = 1$。反设该跨度有一个单侧 amalgam $\langle \psi_1, \psi_2, \mathsf{D} \rangle$，且 $\mathsf{D} \rangle$ 属于 $\mathsf{K}_P^S \cup \mathsf{K}_7^S$。注意，在同构意义下，$\mathsf{C}_7^S$ 是 $\mathsf{K}_P^S \cup \mathsf{K}_7^S$ 中高度至少为 7 的唯一成员。然而，由于 ψ_1 是将 C_7^S 嵌入 D 的嵌入，D 的高度必须至少为 7，因此不失一般性，可假设 $\mathsf{D} = \mathsf{C}_7^S$ 且 ψ_1 是恒等映射。于是我们有 $\psi_2(-1) = \psi_2(\varphi_2(-1)) = \varphi_1(-1) = -2$ 且$\psi_2(-3) = \psi_2(\varphi_2(-2)) = \varphi_1(-2) = -3$。因此，由于 $\psi_2(-3) \leq \psi_2(-2) \leq \psi_2(-1)$，要么 $\psi_2(-2) = \psi_2(-3)$，要么 $\psi_2(-2) = \psi(-1)$。第一种情况导致

$$-3 = -3 \cdot 3 = \psi_2(-2) \cdot \psi_2(3) = \psi_2(-2 \cdot 3) = \psi_2(3) = 3,$$

一个矛盾。对于第二种情况，请注意，如果 $\psi_2(-2) = \psi_2(-1) = -2$，那么由于 φ 保持对合，$\psi_2(2) = \psi_2(1) = 2$ 也成立。因此

$$-2 = -2 \cdot 2 = \psi_2(-1) \cdot \psi_2(2) = \psi_2(-1 \cdot 2) = \psi_2(2) = 2,$$

这再次构成了矛盾。 □

定理 2.13 得出关于相应公理扩张的以下推论。

推论 4.3。对于任意非空素数集合 P，扩展 $\vdash^{P+7}_{\mathbf{LL}}$、$\vdash^{P+7}_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash^{P+7}_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash^{P+7}_{\mathbf{RL_e}}$ 均不具有演绎插值性质。

命题 4.4. 对于两个非空的素数集合 P和 P'，若 $P \neq P'$和 $S \subseteq \{0, \bot, \top, !\}$，则 $\mathsf{W}_P^S \neq \mathsf{W}_{P'}^S$。

证明。若 $P \neq P'$，则由命题 3.10 可得 $\mathsf{V}_P^S \neq \mathsf{V}_{P'}^S$。不失一般性，设 $\mathsf{V}_P^S \nsubseteq \mathsf{V}_{P'}^S$。因此，由推论 3.6(ii)，存在一个代数 $\mathsf{A} \in \mathsf{K}_P^S$，且 $\mathsf{A} \notin \mathsf{K}_{P'}^S$。此外，$\mathsf{K}_7^S$中唯一高度为 3 的成员是 C_3^S，它与 $\mathsf{R}^S(0)$ 同构，其中 0 是一个平凡群。因此，由于 $\mathsf{K}_{P'}^S$ 的所有非平凡成员的高度均为 3，我们得到 $\mathsf{A} \in \mathsf{K}_P^S \cup \mathsf{K}_7^S$、$\mathsf{A} \notin \mathsf{K}_{P'}^S \cup \mathsf{K}_7^S$，而引理 4.1(ii)推出 $\mathsf{W}_P^S \neq \mathsf{W}_{P'}^S$。 □

定理 4.5.

(i) RL、PRL、A 和 G 各自都有连续统多个不具备 amalgamation 性质的子簇。(ii) $\vdash_{\mathbf{LL}}$、$\vdash_{\mathbf{MALL}}$、$\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$ 各自都有连续统多个不具备演绎插值性质的公理扩张。

证明。（i）由命题 4.4 以及素数集合的数量为连续统立即可得；（ii）则由（i）、定理 2.4 和命题 2.3 得出。 □

注 4.6。注意，对于 $\vdash_{\mathbf{FL_e}}$ 和 $\vdash_{\mathbf{RL_e}}$，该结果已可由 [29], 得出，其中证明了在连续统多个超直觉主义逻辑中，只有有限多个具有演绎插值性质。然而，由于超直觉主义逻辑不具有对合否定，该结果对于 $\vdash_{\mathbf{LL}}$ 和 $\vdash_{\mathbf{MALL}}$ 而言是新的。类似的结果也适用于其他各种次结构逻辑，例如 $\mathbf{InFL_e}$ 和 $\mathbf{FL_{eo}}$ 的演绎系统。

参考文献

[1] P. Aglian`o. 线性逻辑的代数研究。2023年。手稿。可通过 arXiv:2305.12408 获取。[2] S. Aguzzoli 和 M. Bianchi. 由具有有限多个分量的单链生成的 BL-代数簇的 amalgamation 性质。载于 U. Fahrenberg、M. Gehrke、L. Santocanale 和 M. Winter（编），《第19届关系与代数方法在计算机科学中的国际会议论文集》（RAMiCS 2021），LNCS 第13027卷，第1–18页。Springer，2021年。[3] A. R. Anderson 和 N. D. Belnap.《蕴涵》，第1卷。普林斯顿大学出版社，1975年。[4] A. Avron. 线性逻辑的语义学与证明论。《Theoret. Comput. Sci.》，57(2-3):161–184，1988年。[5] W.J. Blok 和 D. Pigozzi.《可代数化逻辑》。美国数学学会回忆录第77卷第396号。美国数学学会，1989年。[6] W.J. Blok 和 D.L. Pigozzi. 代数逻辑中的局部演绎定理。载于《代数逻辑：1988年8月8日至14日在匈牙利布达佩斯举行的专题讨论会论文集》，第75–109页。阿姆斯特丹等地：北荷兰；布达佩斯：J´anos Bolyai 数学学会，1991年。[7] S. Burris 和 H. P. Sankappanavar.《普遍代数教程》。数学研究生教材。施普林格出版社，纽约，1981年。[8] M. Busaniche 和 R. Cignoli. 作为次结构逻辑的强否定构造逻辑。《J. Logic Comput.》，20:761–793，2010年。

[9] J. Czelakowski 和 W. Dziobiak. 其有限次子直不可约成员构成全称类的同余分配拟准 variety. Algebra Universalis, 27:128–149, 1990年。[10] J. Czelakowski 和 D. Pigozzi. 抽象代数逻辑中的 amalgamation 与插值. 载于 X. Caicedo 和 C. H. Montenegro 编，《模型、代数与证明》，纯粹与应用数学讲义第203卷，第187–265页. Marcel Dekker, Inc., 1999年。[11] A. Di Nola 和 A. Lettieri. MV-代数的单链生成簇. J. Algebra, 225(2):667–697, 2000年。.[12] B. Eckmann 和 A. Schopf. 关于内射模. Archiv der Mathematik, 4(2):75–78, 1953年。[13] F. Fages, P. Ruet 和 S. Soliman. 线性并发约束编程：操作语义与相位语义. Information and Computation, 165:14–41, 2001年。[14] J. Font. 《抽象代数逻辑：入门教材》. College Publications, 2016年。[15] W. Fussner. 作为关系模型的偏序集积. Studia Logica, 110:95–120, 2022年。[16] W. Fussner 和 W. Zuluaga Botero. 广义基本逻辑的一些模态与时态翻译. 载于 U. Fahrenberg, M. Gehrke, L. Santocanale 和 M. Winter 编，《第19届关系与代数方法在计算机科学中的国际会议论文集》（RAMiCS 2021），LNCS 第13027卷，第176–191页. Springer, 2021年。[17] W. Fussner 和 N. Galatos. R-mingle 的模型范畴. Ann. Pure Appl. Logic, 170:1188–1242, 2019年。[18] W. Fussner 和 G. Metcalfe. 有限次子直不可约代数的传递定理. 2022年。手稿。参见 arXiv:2205.05148。[19] W. Fussner 和 S. Ugolini. MTL-代数的拓扑方法. Algebra Universalis, 80.38, 2019年。[20] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski 和 H. Ono. 《剩余格：子结构逻辑的代数概览》. Elsevier, 2007年。[21] N. Galatos 和 H. Ono. FL 上次结构逻辑的代数化、参数化局部演绎定理与插值. Studia Logica, 83(1-3):279–308, 2006年。[22] N. Galatos 和 X. Zhuang. 单线性剩余格：公理化、簇与有限嵌入性质. 2023年。手稿。参见 arxiv.org/abs/2304.05508。[23] J.-Y. Girard. 线性逻辑. Theoret. Comput. Sci., 50:1–101, 1987年。

[24] G. Grecco 和 A. Palmigiano。线性逻辑的恰当展示。《ACM计算逻辑汇刊》，24(2):1–56，2023年。[25] P. H´ajek。《模糊逻辑的元数学》。Kluwer，1998年。[26] J. Hintikka 和 I. Halonen。插值作为解释。《科学哲学》，66:423，1999年。[27] E. Hoogland。各种 Beth可定义性性质的代数刻画。Studia Logica，65:91–112，2000年。[28] E.W. Kiss、L. M´arki、P. Pr¨ohle 和 W. Tholen。范畴代数性质：关于 amalgamation、同余扩张、满态射、剩余小性和内射性的汇编。Stud. Sci. Math. Hung.，18:79–141，1983年。[29] L.L. Maksimova。超直觉主义逻辑中的 Craig定理与伪布尔代数的可融合簇。Algebra Logika，16:643–681。[30] D. Miller。Forum：一种多结论规范逻辑。Theoret. Comput. Sci.，165:201–232，1996年。[31] F. Montagna。多值逻辑中的插值与 Beth性质：一项语义研究。Ann. Pure Appl. Logic，141:148–179，2006年。[32] M. Okada 和 K. Terui。直觉主义线性逻辑若干片段的有限模型性质。《符号逻辑杂志》，64(2):790–802，1999年。[33] D. Roorda。经典线性逻辑片段中的插值。《符号逻辑杂志》，59(2):419–444，1994年。[34] M. Spinks 和 R. Veroff。带强否定的构造逻辑是一种次结构逻辑 I。Studia Logica，88:325–348，2008年。