

弗卢米嫩塞联邦大学

arXiv:2305.05059v2 [math.CO] 5 Jun 2023

结构种上的组合微分算子

Arthur Gonçalves Fidalgo

尼泰罗伊
2023 年 3 月

结构物种上的组合微分算子

Arthur Gonçalves Fidalgo

提交给弗卢米嫩塞联邦大学数学研究生项目的学位论文，作为获得数学硕士学位的部分要求。

导师：Slobodan Tanushevski教授

尼泰罗伊

2023 年 3 月

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

F449o Fidalgo, Arthur Gonçalves
On combinatorial differential operators on species of structures / Arthur Gonçalves Fidalgo. - 2023.
99 p.: il.

Orientador: Slobodan Tanushevski.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2023.

1. Matemática. 2. Análise combinatória. 3. Operador diferencial. 4. Produção intelectual. I. Tanushevski, Slobodan, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

弗卢米嫩塞联邦大学硕士学位论文

por

Arthur Gonçalves Fidalgo

提交至数学研究生项目，作为获得以下学位的部分要求：

数学硕士

论文题目：

结构种上的组合微分算子

于*2023*年*3*月*3*日公开答辩。

答辩委员会成员如下：

Slobodan Tanushevski 弗卢米嫩塞联邦大学 指导教师 TaísaLopes Martins 弗卢米嫩塞联邦大学 评审委员 HugodeHolanda Cunha Nobrega 里约热内卢联邦大学 评审委员

知悉　　指导教师知悉并同意声明

学位论文作者：Arthur Gonçalves Fidalgo 答辩日期：2023年3月3日 指导教师：Slobodan Tanushevski

为此，兹声明**已知悉**本**修订版**的内容。该版本根据答辩委员会成员在论文答辩会议上提出的建议编制，本人**同意**将其提交并发布于**UFF机构知识库**。

尼泰罗伊，2023年3月3日。

Slobodan Tanushevski

谨以此文献给那些投入时间增长知识的人、始终不断学习的人，以及一路陪伴在我身边的人，
尤其是 Patrícia、Guilherme 和 Ariane。

致谢

首先，感谢我的家人——Patrícia、Guilherme 和 Ariane——在这段历程中给予我的所有支持。

感谢我的本科教师，尤其是 Laiz 和 Vinícius，是他们为我指明了正确的前进方向。

感谢我的所有研究生阶段教师，感谢他们传授给我的知识与能力，也感谢那里其他参与我们日常工作的人。

最后，感谢我的好朋友们，无论是我在 UFF 结识的朋友，还是陪伴我走过人生历程的朋友，感谢他们在这段时间给予我的关爱；尤其是从我进入研究生阶段起就一直陪伴我的 Caio 和 Alicia，以及多年来一直陪伴我的挚友 Flávio Isaac。

本研究工作得到了巴西高等教育人员培训协调机构（CAPES）的支持——资助代码 001。本研究获得了 CAPES 提供的硕士奖学金资助，对此谨致谢意。

“数学是无比有趣的事物……它的从业者栖居于真正的概念天堂，一个庄严而诗意、凡不懂数学的芸芸众生全然无法企及的境界。”（阿波斯托洛斯·多克西亚迪斯）

摘要

1981年，安德烈·若亚尔 [Joy81] 为形式幂级数代数提供了一种组合学解释；形式幂级数代数是枚举组合学工具中的核心工具之一。在约亚尔结构种理论中，组合种（如排列、图、划分等）被体现为有限集与双射范畴上的自函子。结构种可以进行加法、乘法、复合与求导；新的结构种可以作为微分方程和函数方程的解出现。此外，在结构种层面所获得的一切结果，都可以直接转换为生成函数的语言，用于枚举带标号和无标号结构。

最近，Labelle 和 Lamathe [LL09]发展出了一套关于结构种上的微分算子的一般理论，例如循环或导数图。本学位论文的主要目标是介绍这一理论的部分内容。

关键词：组合学、枚举、结构种、递推方程、组合微分算子。

摘要

1981年，安德烈·若亚尔 [Joy81] 为形式幂级数代数提供了一种组合解释，这是枚举组合学工具箱中的核心工具。在若亚尔的结构物种理论中，组合物种（如置换、图、划分等）体现为有限集与双射范畴上的自函子。物种可以进行加法、乘法、复合与微分；新的物种可作为函数方程和微分方程的解出现。此外，在物种层面取得的一切成果，都可以直接转译为生成级数的语言，用于枚举有标号结构和无标号结构。

近来，Labelle 和 Lamathe [LL09] 发展了一套关于结构物种上的微分算子的通用理论，例如循环或导数图。本学位论文的主要目标是介绍该理论的部分内容。

关键词：组合数学、枚举、结构物种、递推方程、组合微分算子。

目录

0 引言 **13**

1 有限差分微积分 17

1.1 有限差分算子.17 1.2 计数满射.20 1.3 有限差分演算基本定理.21 1.4 递推方程.22

2 形式幂级数 27

2.1 柯西代数.27 2.2 幂级数与收敛.29 2.3 形式导数.32 2.4 形式指数与对数.35 2.5 有理生成函数基本定理.38

3 波利亚理论 41

3.1 置换与轨道.41 3.2 波利亚定理.42 3.3 同构图.46

4 结构物种 51

4.1 范畴论.51 4.2 结构物种及其相关级数.53 4.3 物种的相等与加法.58 4.4 两种乘积.60 4.5 物种的复合.63 4.6 导数与指点.67 4.7 多类型物种.70 4.8 虚物种.73

5 树状结构 75

5.1 富化树. 75

5.2 T非对称性定理.7 7

6 微分方程 **81**

6.1 虚物种上的微分方程.81 6.2 线性物种.82 6.3 线性物种上的微分方程.85

7 一般 微分算子 8 **9**

7.1 定义与运算.89 7.2 Hammond 微分算子.95

参考文献 **99**

第1章 0

引言

在数学学习的早期阶段，学生会接触到一种研究函数变化的精妙方法：牛顿（和莱布尼茨）的微分学。它在物理学领域有诸多用途；例如，只有借助导数这一概念，才能真正理解速度。随着学习的深入，学生会面对大量抽象概念，而微积分的技巧很快便超越了“性质良好”的实值函数这一范畴。

这使数学家意识到，可能存在许多具有相似性质、但定义于其他语境并作用于不同类型数学对象上的（微分）算子。本学位论文的一个目标正是介绍一些源自组合数学研究的微分算子。例如，研究定义在离散空间上的函数的变化，其中微分的概念与递推的概念密切相关。有限差分算子是离散空间中微分的对应物，可用于求解递推方程，也可用于解决一些经典组合问题，例如计算有限集之间的满射数量和求幂和，甚至还能帮助回答有关勾股三角形几何的问题。第1章将简要介绍有限差分学。

学生们把目光从阴影中移开后，很快便会发现，迄今看来各不相同的事物，本质上其实是相同的（尤里卡，$0.99\ldots = 1$）。波利亚理论是一门避免对同一事物重复计数的艺术。它能帮助我们枚举无标号图、多色项链，甚至化学异构体（见 [PRA87]）。第3章将探讨波利亚理论；其思想，尤其是使用循环指标，是 Joyal 进行枚举研究的关键工具。

借助范畴论这一统一语言，安德烈·若亚尔 [Joy81] 提出了形式幂级数代数的一种组合解释。在若亚尔的结构物种理论中，组合物种（如置换、图、划分等）体现为有限集与双射范畴上的自函子。物种可以相加、相乘、求导、复合等。随后，物种上的运算可以直接转化为生成级数上的等价运算（用于枚举有标号和无标号结构）。这一转变绕开了枚举组合数学核心信条中的信息流：组合对象的结构关系被直接转写为生成级数之间的代数关系。在第4章中，我们开始介绍若亚尔的

结构物种理论。在形成正确的直觉之后，坚持读下去的读者会欣喜地发现，结构物种理论抽象的技术体系逐渐化为对图画的轻松摆弄。

Joyal 的枚举方法揭示了树状结构的递归性与某些类型的函数方程（及微分方程）之间深刻的联系。这又回到了本学位论文的最初构想：对微分进行抽象。原本的牛顿导数由组合微分算子取代，而（富化）树则自然地作为（虚拟线性）物种领域中的微分方程的解出现。第5章和第6章将对此进行探讨。

最近，Labelle 和 Lamathe [LL09] 发展了一般组合微分算子理论，例如导数的循环排列或图形排列。他们尤其将第1章讨论的差分算子推广到了结构物种领域。这为微分带来了彻底革新；从组合学的角度看，这类似于本引言开头几段中那位假想的数学系学生所经历的变化。第7章将介绍 Labelle 和 Lamathe 理论的部分内容。

本专著旨在追溯微分的一般组合理论的发展历程，沿着几位杰出数学家的足迹展开。我们希望读者能从中获得愉悦与启发。

预备符号与定义

记号 0.0.1. 集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 记作 $[n]$。我们还定义 $[0]$ 为空集。

记号 0.0.2. 给定两个集合 A,B，从 A 到 B 的函数集合记为 B^A。

定义 0.0.3. 克罗内克δ $\delta_{n,k}$ 定义为 $\delta_{n,k}=1$，当 $n=k$ 时；否则为 $\delta_{n,k}=0$。

定义 0.0.4. 多项式 $x^k=x(x-1)\cdots(x-k+1)$，$k\geq 1$ 称为 x 的 k 阶下降阶乘。此外，$x^0:=1$。

定义 0.0.5. 多项式 $\binom{x}{k}=\frac{1}{k!}x^k$ 称为 x 选 k，或称为 x,k 项式。特别地，可以定义 $\binom{0}{k}=\delta_{0,k}$。

记号 0.0.6. 有限集 A 的 k 元子集集合记为 $\binom{A}{k}$。自然地，$|\binom{A}{k}|=\binom{|A|}{k}$。

定义 0.0.7. 对于 $k\geq 2$，将多项式系数 $\binom{n}{a_1,\ldots,a_k}$ 定义为

$$\binom{n}{a_1,\ldots,a_k}:=\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdots\binom{n-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_k}=\frac{n!}{a_1!\cdots a_k!}.$$

第1章

有限差分学

本章首先定义有限差分算子及其若干性质，并简要介绍差分演算这一微分学的离散类比。我们先介绍算子本身，接着说明它在有限集之间满射计数这一经典问题中的用途。之后，我们将通过展示它与微积分基本定理及微分方程的类似之处，进一步研究差分演算。关于差分演算的更多详情，请参阅[Wag20，第 9] 章，以及 [Liu68，第 3]章。

1.1 有限差分算子

要研究微分学，首先必须定义微分算子。要在离散空间中进行微积分，也必须定义一个具有类似性质的线性算子。

定义 1.1.1. 设 $S \subseteq \mathbb{C}$ 为一个非空集合，且若 $x \in S$，则 $x+1 \in S$。对于 S，一些不错的选择是 $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$。当 $S \subseteq \mathbb{Z}$时，函数 $f \in \mathbb{C}^S$ 通常称为序列。对于 $f \in \mathbb{C}^S$，将差分算子 Δ 定义为

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x).$$

差分算子具有以下性质：

命题 1.1.2。设 f，$g \in \mathbb{C}^S$。则

i) Δ 是 $\mathbb{C}^S$上的线性算子；

ii) 如果 f 是 S 上的常值函数，那么 $\Delta f \equiv 0$；

iii) $\Delta x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k$；

iv) $\Delta x^{\underline{n}} = n x^{\underline{n-1}}$；

v) $\Delta \binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}$；

vi) $\Delta 2^x = 2^x$；

vii) $\Delta[f(x)g(x)] = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$
$= f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x)$
$= f(x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x) + \Delta f(x)\Delta g(x);$

viii) $\Delta\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}$.

证明。 i) 加法: $\Delta[f(x) + g(x)] = f(x+1) + g(x+1) - f(x) - g(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$。

Scalar multiplication: $\Delta\lambda f(x) = \lambda f(x+1) - \lambda f(x) = \lambda[f(x+1) - f(x)] = \lambda\Delta f(x).$

ii) 若 $f \equiv c \in \mathbb{C}$, 则对于所有 $x \in S$, $f(x+1) = f(x) = c$, 且 $\Delta f(x) = c - c = 0$。

iii) 我们有 $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, 由此得到 $\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k$。

iv) $\Delta x^{\underline{n}} = (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} = (x+1)x\cdots(x-n+2) - x(x-1)\cdots(x-n+1)$
$= [x(x-1)\cdots(x-n+2)](x+1-x+n-1) = nx^{\underline{n-1}}.$

v) $\Delta\binom{x}{n} = \Delta\dfrac{x^{\underline{n}}}{n!} = \dfrac{1}{n!}\Delta x^{\underline{n}} = \dfrac{nx^{\underline{n-1}}}{n!} = \dfrac{x^{\underline{n-1}}}{(n-1)!} = \binom{x}{n-1}.$

vi) $\Delta 2^x = 2^{x+1} - 2^x = 2^x(2-1) = 2^x$。

vii) $\Delta[f(x)g(x)] = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x)$
$= f(x+1)g(x+1) - f(x+1)g(x) + f(x+1)g(x) - f(x)g(x)$
$= f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$

另外两个恒等态射也可以用类似的方法证明。

viii) $\Delta\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x+1)}{g(x+1)} - \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x+1)g(x) - f(x)g(x+1)}{g(x)g(x+1)}$
$= \dfrac{f(x+1)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+1)}{g(x)g(x+1)} = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}.$

□

现在，我们来介绍差分算子在几何领域的一项应用 .

定义 1.1.3. 有直角的三角形，如果它的三条边的长度都是正整数，就称为勾股三角形。若正整数三元组（a, b, c）满足 $a < b < c$，则称其为勾股数组。

定义 1.1.4. 若存在正整数 λ，使得（a, b, c）=（$\lambda x, \lambda y, \lambda z$），则称两个勾股数组（$a, b, c$），（$x, y, z$）属于同一类。

定理 1.1.5. 存在无穷多个形状不同的勾股三角形，也就是说，存在无穷多个勾股数组类。

证明。 根据命题 1.1.2.iii), $\Delta x^2 = 2x + 1$。设 $a \geq 3$ 为一个正奇数。那么，对于 $x = \frac{a^2-1}{2}$，有 $\Delta x^2 = a^2$。换言之，$(x+1)^2 = x^2 + a^2$，且 $(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2-1}{2} + 1)$ 是一个勾股数组。此外，若 $b \geq 3$ 是另一个正奇数，则不存在整数 $\lambda > 1$使得 $b = \lambda a$ 且 $\frac{b^2-1}{2} = \lambda\frac{a^2-1}{2}$；因此，可以将正奇数 $a \geq 3$ 与形如 $(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2-1}{2} + 1)$ 的勾股数组类配对，由此可知这样的数组类有无穷多个。

□

仅 li 与连续情形一样，可以归纳地定义高阶差分算子 ly.

定义 1.1.6. n阶差分算子定义如下： $\Delta^0 f = f$，且$\Delta^{n+1} f = \Delta(\Delta^n f)$。

即使在高阶情形下，线性性仍然成立。根据命题 1.1.2.iii)，差分算子会使多项式的次数降低一。因此， n阶差分算子会使多项式的次数降低n 。

通过简单的归纳法，我们得到命题 1.1.2.iv) 和 v) 的以下推广。

推论 1.1.7. 若 $0 \le k \le n$， $\Delta^k x^n = \underline{n^k} x^{n-k}$，且 $\Delta^k \binom{x}{n} = \binom{x}{n-k}$。

为了能够高效地处理高阶差分算子，我们将 Δ 写成两个更简单的可交换算子之差。

定义 1.1.8。 移位算子 E定义为 $Ef(x) = f(x+1)$，高阶移位算子定义为 $E^n f(x) = f(x+n)$，其中 $n \in \mathbb{N}$。

定义 1.1.9。 恒等算子 I定义为 $If(x) = f(x)$。

显然， $\Delta = E - I$。由此可见， $\Delta^k f(x)$ 的值由 $f(x)$……， $f(x+k)$ 的值决定。

定理 1.1.10。对所有 $k \in \mathbb{N}$， $\Delta^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j)$。

证明。 由于 I 与 E 可交换，我们有

$$\begin{aligned}\Delta^k f(x) = (E-I)^k f(x) &= \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-I)^{k-j} E^j\right] f(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} E^j f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j).\end{aligned}$$

□

前面的定理可用于证明二项式系数的一个著名正交关系。

推论 1.1.11. 对于 $n, k \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{n} = \delta_{k,n}$。

证明。 根据定理 1.1.10，这个和等于 $[\Delta^k \binom{x}{n}]|_{x=0}$；根据推论 1.1.7，它等于 $\binom{0}{n-k} = \delta_{k,n}$。

□

记号 1.1.12。令 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$。记 $p_k(m) := [\Delta^k p(x)]|_{x=m}$。

多项式 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ 次数为 n 时，完全由取值 $p(0), \ldots, p(n)$ 决定。根据定理 1.1.10，我们还可知，这些取值决定了 $p_k(0)$、 $0 \le k \le n$。反过来，有一个有趣的公式可用于根据 $p_k(0)$ ($0 \le k \le n$) 恢复多项式 $p(x)$，从而在多项式情形下给出有限差分版本的泰勒定理。

定理 1.1.13。 令 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$，且 $\deg p = n$。则 $p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(0)\binom{x}{k}$。

证明。 由于二项式系数 $\binom{x}{0}$, $\binom{x}{1}$, $\binom{x}{2}$, ...构成 $\mathbb{C}[x]$（视为关于 $\mathbb{C}$ 的向量空间）的一个基，因此对于某些 $a_j \in \mathbb{C}$、$0 \le j \le n$，有 $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\binom{x}{j}$。于是

$$\Delta^k p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \Delta^k \binom{x}{j} = \sum_{j=k}^{n} a_j \binom{x}{j-k},$$

由此得到 $p_k(0) = [\Delta^k p(x)]|_{x=0} = a_k$。 □

1.2 满射的计数

本节旨在说明差分演算对组合分析的用处。我们将聚焦于一个经典问题：计算有限集之间的满射数量。

在着手计算满射数量之前，我们先确定两个有限集之间的单射数量。

定理 1.2.1。 设 A、B 为有限集。那么，从 A 到 B 的单射函数数量为 $|B|^{\underline{|A|}}$。特别地，如果 $|A| = |B| = n$，则 A 与 B 之间有 $n!$ 个双射。

证明。 设 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$。若 $|B| = k$，则对于单射函数 $f \in B^A$，$f(a_1)$有k 种选择，接着 $f(a_2)$ 有 $k-1$ 种可能的选择，依此类推。因此，从 A到 B共有$k(k-1)\cdots(k-n+1) = k^{\underline{n}} = |B|^{\underline{|A|}}$ 种可能的单射。

若 $|A| = |B| = n$，则从 A 到 B有 $n^{\underline{n}} = n!$ 个单射。自然地，这些单射将 A 的 n 个元素映射到 B中互不相同的 n 个元素上，也就是说，映射到 B的所有元素，因此它们是双射。

□

与计数单射不同，计数满射并非如此简单。

记号 1.2.2。 **</style}数目 (**, k) 表示从 $[n]$ 到 $[k]$的满射函数的数量。

定理 1.2.3。 对于所有 $n, k \in \mathbb{N}$, $\sigma(n,0) = \sigma(0,n) = \delta_{n,0}$ 和

$$\sigma(n,k) = k\sigma(n-1,k-1) + k\sigma(n-1,k).$$

证明。 考虑将 n 个有标号球分配到 k 个有标号盒子中，且不留下空盒的情况。其中，标号为 n 的球单独留在一个盒子中的情况有 $k\sigma(n-1,k-1)$种，而该球未单独留在一个盒子中的情况有 $k\sigma(n-1,k)$种。 □

这个定理为我们提供了一种利用递归性计算满射的方法，但如果能得到它们的闭式公式也会很有意思。为此，我们必须关联多项式$x^{\underline{n}}$ 和 $\binom{x}{k}$。

定理 1.2.4。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k)\binom{x}{k}$。

证明。 由于两个不同的多项式不可能在无限集合上取相同的值，因此只需证明，对于所有 $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,k)\binom{r}{k}$。为说明这一点，请注意，在所有函数 $f \in [r]^{[n]}$, $\sigma(n,k)\binom{r}{k}$ 中，枚举了满足 $|\mathrm{Im}(f)| = k$ 的那些函数，因为可以从 $[r]$ 中选出 $\binom{r}{k}$ 个元素的子集，而对于每个这样的子集，都有 $\sigma(n,k)$ 个从 $[n]$ 到该子集的满射。

□

我们暂且离题片刻，以介绍上述定理的一个有趣应用 e.

推论 1.2.5。多项式 x^n 的 n 阶差为常数，等于 $n!$，即 $\Delta^n x^n \equiv n!$。

证明。由定理 1.2.4 可得 $x^n = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,\ k)\binom{x}{k}$。结合定理 1.1.13，可得 $[\Delta^n x^n]|_{x=0} = \sigma(n,\ n) = n!$ 由于 Δ^n 会使多项式的次数降低 n，因此 $\Delta^n x^n$ 是一个常数（等于 $n!$）。

□

定理 1.1.10 和定理 1.1.13 为我们提供了一种有趣的方法，用于枚举两个有限集合之间的满射。

定理 1.2.6。给定 $n,\ k \in \mathbb{N},\ \sigma(n,\ k) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$。

证明。根据定理 1.2.4，$x^n = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n,\ k)\binom{x}{k}$。根据定理 1.1.13，$\sigma(n,\ k) = [\Delta^k x^n]|_{x=0}$，而定理 1.1.10 告诉我们 $[\Delta^k x^n]|_{x=0} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$。 □

1.3 有限差分学基本定理

给定一个函数 $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$，若 $\Delta F = f$，则称 F 是 f 的反差分，并记作 $F = \Delta^{\langle -1\rangle} f$。显然，若 F 是 f 的反差分，则对任意 $c \in \mathbb{C},\ F + c$ 也是 f 的反差分。此外，这完整地描述了 f 的所有反差分。事实上，假设 G 是 f 的反差分；那么 $\Delta(F - G) \equiv 0$，因此对于某个 $c \in \mathbb{C}$，有 $G = F + c$。

以下定理是微积分基本定理的离散类比。

定理 1.3.1. 设 $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$，并设 a、$b \in \mathbb{N}$ 满足 $a \le b$。则

i) f 有反差分；

ii) $\sum_{x=a}^{b} f(x) = F(b+1) - F(a)$，其中 F 是 f 的任意一个反差分。

证明. *i)* 容易验证，由 $F(0) := 0$ 和 $F(x) := \sum_{i=0}^{x-1} f(i)$（对于 $x \ge 1$）定义的函数是 f 的一个反差分。

ii) 根据假设 $F = \Delta^{\langle -1\rangle} f$，我们有

$$\sum_{x=a}^{b} f(x) = \sum_{x=a}^{b} \Delta F(x) = \sum_{x=a}^{b} [F(x+1) - F(x)]$$

而最后这个和经望远镜求和后得到 $F(b+1) - F(a)$】【。 □

设 $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\binom{x}{k} \in \mathbb{C}[x]$ 为一个次数为 $n \ge 0$ 的多项式。由命题 1.1.2.v) 可知，多项式 $\sum_{k=0}^{n} a_k\binom{x}{k+1} \in \mathbb{C}[x]$ 是 $p(x)$ 的一个反差分。因此，任何非零的次数为 $n \ge 0$ 的多项式的反差分都是次数为 $n+1$ 的多项式。

现在让我们对多项式 $(x+1)^r$ 进行积分。

定义 1.3.2. 设 $r,\ n \in \mathbb{N}$。r 次幂和定义为 $S_r(n) := \sum_{k=0}^{n} k^r$。为了使 $S_0(n)$ 有意义，还需考虑 $0^0 = 1$。

注意， $S_r(x)$ 是 $(x+1)^r$ 的反差分。由上述讨论可知，$S_r(x)$ 是一个次数为 $r+1$ 的多项式。

定理 1.3.3。 第 r 个幂和可以写成 $S_r(x) = \sum_{j=0}^{r} \sigma(r,j) \binom{x+1}{j+1}$。

证明。 对于 $r=0$，这显然成立。对于 $r \geq 1$，写作 $S_r(x) = \sum_{j=0}^{r} a_{j+1}\binom{x+1}{j+1}$。根据定理 1.1.13， $a_{j+1} = [\Delta^{j+1}S_r(x)]|_{x+1=0}$。我们有 $\Delta S_r(x) = (x+1)^r$，由此得到$\Delta^{j+1}S_r(x) = \Delta^j(x+1)^r$。根据定理 1.1.10，

$$[\Delta^j(x+1)^r]|_{x=-1} = \left[\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}(x+1+k)^r\right]\Bigg|_{x=-1} = \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}k^r$$

并由定理 1.2.6， $\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}k^r = \sigma(r,\ j)$。我们得出 $a_{j+1} = \sigma(r,\ j)$。 □

1.4 递推方程

在通常的微积分中，导数的使用引出了微分方程的概念。同样，有限差分算子引出了递推方程的概念。本节的目标是介绍线性递推方程，并展示一种求解它们的闭式公式的方法。

本节中讨论的所有函数均属于 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。

定义 1.4.1。 设 d 为一个正整数， $c_0,\ldots,c_d,v_0,\ldots,v_{d-1} \in \mathbb{C}$，其中 $c_0c_d \neq 0$。次数为 d 、具有常系数的齐次线性递推方程是如下形式的方程。

$$c_d f(n+d) + c_{d-1}f(n+d-1) + \ldots + c_1 f(n+1) + c_0 f(n) = 0 \tag{1.1}$$

其初始条件为 $f(0) = v_0, f(1) = v_1, \ldots, f(d-1) = v_{d-1}$。

为简化术语，我们将常系数齐次线性递推方程简称为递推方程。递推方程这一名称自然源于初始条件以递归方式定义了解:

$$f(n+d) = -\frac{1}{c_d}\sum_{k=0}^{d-1} c_k f(n+k),\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

这种递归性保证，给定初始条件后，递推方程总有唯一解。这意味着，寻找微分方程解的皮卡定理的离散类比是显而易见的。

为了揭示一种描述给定递推方程的解的方法，必须回顾 1.1.8 中定义的算子 $E = \Delta + I$。利用移位算子，可以将方程 1.1 重写为

$$(c_d E^d + c_{d-1}E^{d-1} + \ldots + c_1 E + c_0 I)(f) = \overline{0}, \tag{1.3}$$

其中，对所有 $n \in \mathbb{N}$， $0(n) = 0$

记号 1.4.2. 我们用 L 表示线性算子 $c_d E^d + \ldots + c_0 I$，并用 N_L 表示方程 1.3 的所有解的集合。

定理 1.4.3. 集合 N_L 是 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的一个维数为 d 的子空间。

证明。 映射 $f \mapsto (f(0)\ldots, f(d-1))$ 是从 N_L 到 $\mathbb{C}^d$ 的线性映射。根据解的唯一性，它是单射；根据给定初始条件时解的存在性，它是满射。 □

由于递推方程的解构成一个向量空间，自然会想到寻找它的一组基。为此，我们必须先定义特征多项式。

定义 1.4.4。 给定 1.4.2 中的线性算子 L ，其特征多项式 $p_L(x)$定义为L 的 $p_L(x)$:
$= c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \ldots + c_1 x + c_0$。

定理 1.4.5。 设 $\alpha \in \mathbb{C}$。若 $p_L(\alpha) = 0$，则函数 $f(n) = \alpha^n$ 是 $L(f) = 0$的一个解。

证明。 根据假设， $p_L(\alpha) = c_d\alpha^d + \ldots + c_1\alpha + c_0 = 0$，因此

$$c_d\alpha^{n+d} + \ldots + c_1\alpha^{n+1} + c_0\alpha^n = \alpha^n p_L(\alpha) = 0$$

对于所有的 $n \in \mathbb{N}$，且 $f(n) = \alpha^n$ 是 $L(f) = 0$的解。 □

既然我们已经了解了递推方程的一些解，现在来说明，形如 α^n 的函数可用于求出 N_L的一组基。我们考虑两种不同的情形：一种是所有根都互不相同，另一种则更一般。

定理 1.4.6. 设 $p_L(x)$ 有 d 个互不相同的根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$。记 $f_j(n) = \alpha_j^n$。那么$\{f_1, \ldots, f_d\}$ 是 N_L 的一组基。

证明。 根据定理 1.4.5，每个 f_j 都是 N_L的一个元素，而定理 1.4.3 表明 N_L 的维数为 d。因此，只需证明函数 $f_1, \ldots, f_d$ 线性无关。

设 $A_1 f_1(x) + \ldots + A_d f_d(x) = 0(x)$。将 $x = 0, \ldots, d-1$代入求值，得到以下方程组：

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_{d-1} + A_d = 0 \\ A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_{d-1}\alpha_{d-1} + A_d\alpha_d = 0 \\ \quad \vdots \\ A_1\alpha_1^{d-1} + A_2\alpha_2^{d-1} + \ldots + A_{d-1}\alpha_{d-1}^{d-1} + A_d\alpha_d^{d-1} = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

这等价于以下矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{d-1} & \alpha_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{d-1} & \alpha_2^{d-1} & \ldots & \alpha_{d-1}^{d-1} & \alpha_d^{d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{d-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

当且仅当 1.5 中的 $d \times d$ 矩阵可逆时，系统 1.4 才以 $A_1 = \ldots = A_d = 0$ 为其唯一解。这等价于该矩阵的行列式非零。但这个矩阵是范德蒙矩阵，其行列式由 $\prod_{1 \le i < j \le d}(\alpha_j - \alpha_i)$ 给出，见 [Wag20, 定理 9.6.4]。根据假设， $\alpha_i \neq \alpha_j$ 对于 $i \neq j$ 成立，因此该矩阵可逆，从而，

向量（$f_i(0)\ldots,f_i(d-1)$) $1\le i\le d$, 在 $\mathbb{C}^d$中线性无关。沿着定理 1.4.3 证明中给出的同构逆向推回，这意味着集合$\{f_1,\ldots,f_d\}$线性无关。

□

定理 1.4.7. 设 $v_0,\ldots,v_{d-1}\in\mathbb{C}$，并假设 $p_L(x)$ 有 d 个互不相同的根 $\alpha_1,\ldots,\alpha_d$。那么 $f(n)=A_1\alpha_1^n+\ldots+A_d\alpha_d^n$，其中 $A_1,\ldots,A_d$ 由下式给出

$$\begin{cases} A_1+A_2+\ldots+A_{d-1}+A_d=v_0\\ A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\ldots+A_{d-1}\alpha_{d-1}+A_d\alpha_d=v_1\\ \quad\vdots\\ A_1\alpha_1^{d-1}+A_2\alpha_2^{d-1}+\ldots+A_{d-1}\alpha_{d-1}^{d-1}+A_d\alpha_d^{d-1}=v_{d-1}, \end{cases}$$

是满足初始条件 $f(0)=v_0,\ldots,f(d-1)=v_{d-1}$的 $L(f)=0$ 的唯一解。

证明。 定理 1.4.6 表明， N_L 中的所有函数都具有形式 $f(n)=A_1\alpha_1^n+\ldots+A_d\alpha_d^n$，其中某些 $A_1,\ldots,A_d$。解的唯一性源于 1.2 中的递归性。于是，只需将 $A_1\alpha_1^n+\ldots+A_d\alpha_d^n$代入 $n=0,\ldots,d-1$，即可得到 $A_1,\ldots,A_d$ 的值。 □

定理 1.4.7 为我们提供了一种方法，用于求出某些递推序列的闭式公式。特别地，我们可以用该定理求出斐波那契序列的公式。

推论 1.4.8. 第 n 个斐波那契数由 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[\Phi^{n+1}-\phi^{n+1}]$ 给出，其中 $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\phi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

证明。 已知 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$。这表明，如果 $F(n)=F_n$，那么 $L(F)=0$，其中 $L=E^2-E-I$。 $p_L(x)=x^2-x-1$ 的两个根分别为 Φ 和 ϕ，因此 $F_n=A_1\Phi^n+A_2\phi^n$。利用定理 1.4.7 中的方程组，并结合初始条件 $v_0=v_1=1$，可得 $A_1=\frac{\Phi}{\sqrt{5}}$ 和$A_2=-\frac{\phi}{\sqrt{5}}$

□

现在考虑更一般的情形，即 $p_L(x)$ 可能具有带重数的根。

定理 1.4.9。 令 $p_L(x)=c_d\prod_{j=1}^k(x-\alpha_j)^{m_j}$，其中所有 $m_j>0$ 均成立，所有 α_j 两两不同，并且$m_1+\ldots+m_k=d$。则 N_L 的一组基由 $\bigcup_{j=1}^k\{\alpha_j^n,n\alpha_j^n,\ldots,n^{m_j-1}\alpha_j^n\}$ 给出。

证明。 我们对 m （其中 $0\le m<m_j$）进行归纳，证明 $(E-\alpha_jI)^{m+1}(n^m\alpha_j^n)=0$。 $m=0$ 的情形显然成立，现假设 $m\ge1$。

根据归纳假设，对于所有 $0\le r\le m-1$，均有 $(E-\alpha_jI)^m(n^r\alpha_j^n)=0$；根据线性性，对于次数至多为 $m-1$ 的任意多项式 $p(n)$，我们有 $(E-\alpha_jI)^m(p(n)\alpha_j^n)=0$。

现在很容易看出，对于某个次数至多为 $m-1$ 的多项式 $p(n)$，有 $(E-\alpha_jI)(n^m\alpha_j^{n-1})=p(n)\alpha_j^n$。因此，

$$(E-\alpha_jI)^{m+1}(n^m\alpha_j^n)=\alpha_j(E-\alpha_jI)^m[(E-\alpha_jI)(n^m\alpha_j^{n-1})]=\alpha_j(E-\alpha_jI)^m(p(n)\alpha_j^n)=\overline{0}.$$

由此可知， $\{\alpha_j^n,n\alpha_j^n,\ldots,n^{m_j-1}\alpha_j^n\}$ 是 $L(f)=0$的解集，接下来只需证明 $\bigcup_{j=1}^k\{\alpha_j^n,n\alpha_j^n,\ldots,n^{m_j-1}\alpha_j^n\}$ 是线性无关集。为此，我们使用 the

与定理 1.4.6 的证明中相同的技巧。令 $h := d-1$，我们需要证明下列矩阵可逆：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & ... & \alpha_1 & ... & \alpha_k & \alpha_k & ... & \alpha_k \\ 2^{m_1-1}\alpha_1^2 & 2^{m_1-2}\alpha_1^2 & ... & \alpha_1^2 & ... & 2^{m_k-1}\alpha_k^2 & 2^{m_k-2}\alpha_k^2 & ... & \alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{m_1-1}\alpha_1^h & h^{m_1-2}\alpha_1^h & ... & \alpha_1^h & ... & h^{m_k-1}\alpha_k^h & h^{m_1-2}\alpha_k^h & ... & \alpha_k^h \end{bmatrix}$$

根据 [Liu68，附录 3，1],该矩阵的行列式等于

$$[\prod_{1\le i\le k} \alpha_i^{\binom{m_i}{2}}][\prod_{1\le i<j\le k} (\alpha_i-\alpha_j)^{m_i m_j}].$$

由于 $c_0 \neq 0$， $p_L(x)$ 的所有根都非零，因此行列式非零。因此，该矩阵可逆，并且 $\bigcup_{j=1}^{k}\{\alpha_j^n, n\alpha_j^n, ..., n^{m_j-1}\alpha_j^n\}$ 是一个线性无关集。 □

还要注意，在一般情形下，也可以构造出定理 1.4.7 的类似结论。该方法完全相同。

第2章

形式幂级数

本章将介绍复形式幂级数的代数。我们首先介绍柯西代数，将其作为研究这一理论的基础环境。接着，我们为其引入一种拓扑，以便建立收敛的概念。之后，我们定义形式幂级数，并将其视为基础环境中的元素。最后，我们将探讨这一背景下的导数、对数和指数函数，以及一个关于有理函数的有趣结果。若想进一步阅读，我们推荐 [Wag20，第 13]章。

2.1 柯西代数

Befo在给出柯西代数的定义之前，让我们回顾一下代数的定义 .

定义 2.1.1. 域上的代数是一个配备了双线性乘积的向量空间。如果乘积是结合的（分别地，交换的），我们就称其为结合代数（分别地，交换代数）。

定义 2.1.2. 复数列的集合 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 及其运算

$$(F+G)(n) = F(n) + G(n)$$

$$(F \cdot G)(n) = \sum_{k=0}^{n} F(k)G(n-k)$$

$$(\lambda \cdot F)(n) = \lambda F(n)$$

$(F,\ G \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C})$ 构成一个结合且交换的 $\mathbb{C}$-代数，称为柯西代数。柯西代数的加法单位元是 $0(n) \equiv 0$；序列 $1(n) = \delta_{0,\ n}$ 是乘法单位元。自然地，$F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的幂由 $F^0 = 1$ 和 $F^n = F^{n-1} \cdot F$ 给出。

命题 2.1.3. 设 $F, G \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。若 $F,G \neq 0$，则 $F \cdot G \neq 0$。换言之，$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 是一个整环。

证明. 设 $r = \min\{k;\ F(k) \neq 0\}, s = \min\{k;\ G(k) \neq 0\}$。则

$$(F \cdot G)(r+s) = \sum_{k=0}^{r+s} F(k)G(r+s-k) = F(r)G(s) \neq 0,$$

如同 $k < r$，然后 $F(k) = 0$，并且如果 $k > r, r+s-k < s$ 和 $G(k) = 0$。因此，$F \cdot G \neq 0$。 □

命题 **命题 2.1.4.** 函数 $F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 存在乘法逆元，当且仅当 $F(0) \neq 0$.

证明。必要性：假设 F 有一个乘法逆元 F^{-1}。那么

$$F^{-1}(0)F(0) = (F^{-1} \cdot F)(0) = \overline{1}(0) = 1,$$

因此 $F(0) \neq 0$。

充分性：通过递归定义函数 $G \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$：令 (i) $G(0) = 1/F(0)$，并令 (ii) $G(n+1) = -F^{-1}(0)\sum_{k=1}^{n+1} F(k)G(n+1-k)$。根据定义，我们有

$$F(0)G(n+1) + F(1)G(n) + \ldots + F(n)G(1) + F(n+1)G(0) = 0.$$

但这个方程的左边恰好是 $(F \cdot G)(n+1)$，因此，$F \cdot G = \delta_{0,n} = \overline{1}$. □

同样容易看出，如果函数 F具有乘法逆元 F^{-1}，那么 $F^r, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$也具有乘法逆元，并且 $(F^r)^{-1} = (F^{-1})^r$。我们将 F^{-r} 记作 $(F^r)^{-1}$。

现在考虑集合 $\mathbb{C}_1^{\mathbb{N}} := \{F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ F(0) = 1\}$。这个集合具有一些与正实数集合 $\mathbb{R}_+$ 类似的性质。下面的定理说明了其中的一些性质。

定理 2.1.5。设 $F \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$和 $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。则存在唯一的 $G \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$，记作 $F^{\frac{1}{r}}$，使得 $G^r = F$。

证明。我们需要找到满足以下条件的 $G \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$F(n) = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_r=n \\ n_i \geq 0}} G(n_1)\cdots G(n_r)$$

对所有 $n \geq 0$均成立。我们递归地定义 G。对于 $n = 0$，令 $G(0) = 1$；对于 $n = 1$，$G(1) = F(1)^{\frac{1}{r}}$。更一般地，我们可以在上述方程中分离出 $n_i = n$对某个 $i = 1, \ldots\ldots, r$成立的情形，从而得到 G的递归公式：

$$G(n) = \frac{1}{r}\left[F(n) - \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_r=n \\ 0 \leq n_i < n}} G(n_1)\cdots G(n_r)\right].$$

G 的唯一性现在显而易见。 □

推论 2.1.6. 设 $F \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$、$r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 $q \in \mathbb{Z}$，则存在唯一的 $G \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$，记作 $F^{\frac{q}{r}}$，使得 $G^r = F^q$。

证明. 在前一个定理的证明中，用 F^q 替换 F。 □

定理 2.1.7. 设 F、$G \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 和 $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。假设 $F^r = G^r$。若 r 为奇数，则 $F = G$；若 r 为偶数，则 $F = G$ 或 $F = -G$。

证明。如果 F 或 G 中任一个为 0，则显然成立。否则，令 $\xi_r = e^{\frac{2\pi i}{r}}$ 为单位根的本原 r次根。于是有 $\prod_{k=1}^{r}(F - \xi_r^k G) = F^r - G^r = 0$。如果 $\xi_r^k \notin \mathbb{R}$，那么$F - \xi_r^k G \neq 0$，因为 F和 G 都取实值且非零。如果 r 为奇数，则 ξ_r^k为实数当且仅当 $k = r$，且 $F = G$。如果 r 为偶数，则 ξ_r^k 为实数当且仅当 $k = r$ 或 $k = \frac{r}{2}$，于是$F = G$ 或 $F = -G$。

□

2.2 幂级数与收敛

本节将给出形式幂级数的适当定义。我们首先将柯西代数 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$拓扑化。

定义 2.2.1. 序函数 $o: \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 定义为 $o(0) := \infty$ 且 $o(F) := \min\{k;\ F(k) \neq 0\}$ 当 $F \neq 0$时。

序函数具有以下性质。

命题 2.2.2. 对于 $F,\ G \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$o(F \cdot G) = o(F) + o(G)$$

$$o(\lambda F) = o(F)$$

$$o(F+G) \geq \min\{o(F), o(G)\},\ \textit{and the equality holds whenever } o(F) \neq o(G).$$

证明. 若 $F = \overline{0}$, 则所有恒等态射显然成立。因此，我们可以假设 $F \neq 0$ 且 $G \neq \overline{0}$。于是，我们有

$$\begin{aligned} o(F \cdot G) &= \min\{n; \sum_{k=0}^{n} F(k)G(n-k) \neq 0\} = \min\{n = j+k; F(j)G(k) \neq 0\} \\ &= \min\{j; F(j) \neq 0\} + \min\{k; G(k) \neq 0\} = o(F) + o(G); \\ o(\lambda F) &= \min\{n; \lambda F(n) \neq 0\} = \min\{n; F(n) \neq 0\} = o(F); \end{aligned}$$

<escape>$o(F+G) = \min\{n;\ F(n) + G(n) \neq 0\} \geq \min\{n;\ F(n) \neq 0 \text{或 } G(n) \neq 0\} = \min\{o(F)\ o(G)\}$.</escape>

现在考虑 $o(F) \neq o(G)$ 的情形。不失一般性，假设 $o(F) < o(G)$。那么 $o(F+G) = o(F) =: n$，因为 $F(n) + G(n) = F(n) + 0 = F(n)$，且对于所有 $k < n$，$F(k) + G(k) = 0 + 0 = 0$。 □

现在我们在 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上定义绝对值。

定义 2.2.3. 设 $F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。则我们将 F的绝对值定义为 $|F| := 2^{-o(F)}$，其中$2^{-\infty} = 0$。

命题 2.2.4. 绝对值函数具有以下性质:

i) $|F| = 0$ *if and only if* $F = \overline{0}$;

ii) $|F \cdot G| = |F| \cdot |G|$;

iii) $|\lambda F| = |F|$ *for all* $\lambda \neq 0$;

iv) $|F+G| \leq$最大值$\{|F|, |G|\}$，等号成立当且仅当 $|F| \neq |G|$。

证明。 由命题 2.2.2 立即得出。 □

定义 2.2.5. 我们将 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上的距离映射定义为 $d(F,G) := |F-G|$。

命题 **命题 2.2.6.** 设 $F, G, H \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。距离映射具有以下性质：

i) $d(F, G) = 0$ 当且仅当 $F = G$;

ii) $d(F, G) = d(G, F)$;

iii) $d(F, H) \leq d(F, G) + d(G, H)$;

iv) $d(F, H) \leq$最大值$\{d(F, G)\ d(G, H)\}$，等号在 $d(F, G) \neq d(G, H)$时成立 .

证明。 由命题 2.2.4 可立即得出。 □

定义了这个度量之后，我们就可以讨论收敛了。下文中，$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$表示 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 中的一个序列，且 $F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。

定义 2.2.7。 如果序列$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$收敛到 F，就记作 $\lim_{n\to\infty} F_n = F$，若 $\lim_{n\to\infty} d(F_n, F) = 0$。由于 $d(F_n, F)$趋于 0，当且仅当 $o(F_n - F)$趋于无穷大，因此我们也可以用一种等价的方式定义这个极限：如果对于所有 $j \in \mathbb{N}$，都存在一个 $n_j \in \mathbb{N}$，使得 $n \geq n_j$ 蕴含 $F_n(i) = F(i)$对所有 $0 \leq i \leq j$成立，那么序列$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 F。

我们可以将这个定义推广到级数。

定义 2.2.8。 记 $S_n := F_0 + \ldots + F_n$。如果存在 $S \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，那么我们称级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n$ 收敛到 S，并记作 $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n = S$。

定理 2.2.9。 级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n$ 收敛，当且仅当 极限 $\lim_{n\to\infty} F_n = 0$。 –

证明。必要性：假设 $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n = S$。那么对于所有 $j \in \mathbb{N}$，存在 $n_j \in \mathbb{N}$，使得$n \geq n_j$ 蕴含 $S_n(j) = S(j)$。如果 $n \geq n_j + 1$，那么 $F_n(j) = S_n(j) - S_{n-1}(j) = S(j) - S(j) = 0$，因此 $\lim_{n\to\infty} F_n = 0$. –

充分性：假设 $\lim_{n\to\infty} F_n = 0$。那么对于每个 $j \in \mathbb{N}$，都存在一个最小的 $n_j \in \mathbb{N}$，使得 $n \geq n_j$ 蕴含 $F_n(j) = 0$。现在定义 $S \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 为 $S(j) := F_0(j) + \ldots + F_{n_j-1}(j)$。显然，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，对所有 $n \geq n_j$，我们都有 $S(j) = S_n(j)$。由此可得 $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n = S$。 □

请注意，这个定理在通常分析中并不成立。例如，级数$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ 不收敛，尽管 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。 –

现在我们可以开始思考形式幂级数本身是什么。为此，我们来看一个特定的函数。

定义 2.2.10. “不定元”函数 $X : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 定义为 $X(n) = \delta_{1,n}$。容易验证， $X^r(n) = \delta_{r,n}$。

定理 2.2.11. 设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个复数序列。那么级数 $\sum_{n\in N} a_n X^n$收敛。此外，若$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是另一个复数序列，那么

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \ \ implies\ \ a_n = b_n\ for\ all\ n \in \mathbb{N}.$$

证明。 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n X^n = 0$，根据定理 2.2.9，可知 $\sum_{n\in N} a_n X^n$ 收敛。此外，容易看出 $S = \sum_{n\in N} a_n X^n$，其中 $S(n) = a_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。 □

定义 2.2.12. 每个 $a_n \in \mathbb{C}$ 均为 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ 形式的级数，称为系数取自 $\mathbb{C}$ 的形式幂级数。我们用 $\mathbb{C}[[X]]$ 表示所有系数取自 $\mathbb{C}$ 的形式幂级数所构成的集合。

定理 2.2.13. 对于所有 $F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$F = \sum_{n\in\mathbb{N}} F(n)X^n. \tag{2.1}$$

此外， F 表示为形式幂级数的方式是唯一的。

证明。 这可由定理 2.2.11 立即得出。 □

由上述定理可知，我们可以将集合 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 与系数取自 $\mathbb{C}$的形式幂级数集合 $\mathbb{C}[[X]]$ 等同起来。我们将那些满足如下条件的幂级数$F(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} F(n)X^n \in \mathbb{C}[[X]]$：对于除有限多个 n以外的所有 $F(n) = 0$，称为多项式。我们用 $\mathbb{C}[X]$表示多项式的集合。

我们可以现在用形式幂级数的记号重写柯西代数的运算 s:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n)X^n$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)X^n$$

$$\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda a_n)X^n$$

除了定理 2.2.9 中的等价关系之外，还有一种在通常分析中并不成立、但在形式幂级数的情形下成立的等价关系，即收敛与可求和性之间的等价关系。

定义 2.2.14。 当 (i) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$收敛，且 $(ii)\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ 对 $\mathbb{N}$ 的任意置换 σ 以及 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$都收敛时，序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$是可求和的。

定理 2.2.15。 F_n序列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 中收敛，当且仅当它可求和。

证明。充分性：根据定义显然成立。

必要性： 考虑以下矩阵。

$$M = \begin{bmatrix} F_0(0) & F_0(1) & F_0(2) & \cdots \\ F_1(0) & F_1(1) & F_1(2) & \cdots \\ F_2(0) & F_2(1) & F_2(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad M^\sigma = \begin{bmatrix} F_{\sigma(0)}(0) & F_{\sigma(0)}(1) & F_{\sigma(0)}(2) & \cdots \\ F_{\sigma(1)}(0) & F_{\sigma(1)}(1) & F_{\sigma(1)}(2) & \cdots \\ F_{\sigma(2)}(0) & F_{\sigma(2)}(1) & F_{\sigma(2)}(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} F_n = 0$， M 的所有列都只有有限个非零项。由于 M^σ 是通过对 M 的行进行置换得到的，因此 M^σ 的所有列也都只有有限个非零项。此外，这两个矩阵的列和完全相同。因此，我们有 $\lim_{n\to\infty} F_{\sigma(n)} = 0$，且 $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} F_{\sigma(n)}$。

□

命题 2.2.16。 设$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 中的可求和序列，且 $H \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。那么$(F_n + G_n)_{n\in\mathbb{N}}$和$(H \cdot F_n)_{n\in\mathbb{N}}$均可求和，且

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(F_n + G_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} F_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} G_n;$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(H \cdot F_n) = H \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

证明。 我们在此证明中不再展示可求和性，因为这显而易见。接下来证明这些方程成立。

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}(F_n + G_n) &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n(j) + G_n(j)\right] X^j \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n(j)\right] X^j + \sum_{j\in\mathbb{N}}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} G_n(j)\right] X^j = \sum_{n\in\mathbb{N}} F_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} G_n; \\ \sum_{n\in\mathbb{N}}(H \cdot F_n) &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\sum_{k=0}^{j} H(k)F_n(j-k)\right] X^j \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{j} H(k)\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n(j-k)\right] X^j = H \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} F_n.\end{aligned}$$

□

现在考虑集合 $\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}} := \{F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ F(0) = 0\}$。这个集合也可以定义为由满足 $|F| < 1$ 的元素 $F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 所组成的集合，因为 $F(0) = 0$ 当且仅当 $o(F) > 0$，这等价于说 $|F| = 2^{-o(F)} < 1$。与经典分析中一样，我们可以在这个集合上定义几何级数。

定理 2.2.17。 若 $F \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$，则 $(F^n)_{n\in\mathbb{N}}$是可求和的，且几何级数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} F^n$收敛到 $(1-F)^{-1}$。特别地，$\sum_{n\in\mathbb{N}} X^n = (1-X)^{-1}$。 –

证明。 根据命题 2.2.4.ii)，$|F^n| = |F|^n$，进而 $|F| < 1$ 推出 $\lim_{n\to\infty} |F^n| = 0$。由此可得 $\lim_{n\to\infty} F^n = 0$，因此 $(F^n)_{n\in\mathbb{N}}$是可求和的。此外，

$$\begin{aligned}(\overline{1} - F) \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} F^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(\overline{1} - F) \cdot F^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(F^n - F^{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty}[(F^0 - F^1) + \ldots + (F^n - F^{n-1})] = \lim_{n\to\infty}(\overline{1} - F^{n-1}) = \overline{1}.\end{aligned}$$

因此，$\sum_{n\in\mathbb{N}} F^n = (1-F)^{-1}$。 □

2.3 形式导数

定义 2.3.1。 导数 $D\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$定义为 $DF(n) := (n+1)F(n+1)$，对所有$n \in \mathbb{N}$均成立。用幂级数记号表示，这相当于

$$D\sum_{n\in\mathbb{N}} F(n)X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)F(n+1)X^n.$$

我们有时用 F' 代替 DF。 D 的非负整数次幂递归定义为 $D^0F = F$、 $D^1F = DF$ 和 $D^nF = D(D^{n-1}F)$。

与通常的导数算子一样，形式导数具有以下性质 .

命题 2.3.2。设 F、$G \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$、$\lambda \in \mathbb{C}$、$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$以及 $r \in \mathbb{Q}$。则

i) $D(F+G) = DF + DG$; ii) $D(\lambda F) = \lambda DF$; iii) $D(F \cdot G) = DF \cdot G + F \cdot DG$; iv) $D(F^n) = nF^{n-1} \cdot DF$; v) 如果 F 是可逆的，那么 $D(F^{-n}) = -nF^{-n-1} \cdot DF$; vi) 如果 $F \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$，那么 $D(F^r) = rF^{r-1} \cdot DF$; vii) 如果 F、$G \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$ 和 $DF = DG$，那么 $F = G$; viii) 当且仅当对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}$，$DF = 0$ $F = \lambda \cdot 1$。ii) $D\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda F(n)X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(n+1)F(n+1)X^n = \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)F(n+1)X^n = \lambda DF$; iii) $DF \cdot G = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)F(n+1)X^n \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} G(n)X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+1)F(k+1)G(n-k)\right]X^n$。类似地，$F \cdot DG = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)F(k)G(n-k+1)\right]X^n$。于是我们有$_n(DF \cdot G + F \cdot DG)(n) = (n+1)F(0)G(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1)F(k)G(n-k+1) + \sum_{k=1}^{n}(k+1)F(k+1)G(n-k) + (n+1)F(n+1)G(0) = (n+1)F(0)G(n+1) + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)F(k)G(n-k+1) + \sum_{k=1}^{n} kF(k)G(n-k+1) + (n+1)F(n+1)G(0) = (n+1)F(0)G(n+1) + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1+k)F(k)G(n-k+1) + (n+1)F(n+1)G(0) = \sum_{k=0}^{n}(n+1)F(k)G(n-k+1) = (n+1)(F \cdot G)(n+1) = [D(F \cdot G)](n)$;

Proof. 1) $D\sum_{n\in\mathbb{N}}(F+G)(n)X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)(F+G)(n+1)X^n$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)[F(n+1)+G(n+1)]X^n = DF + DG;$$

iv) 证明通过对 n 进行归纳法完成。对于 $n=1$，我们有 $D(F^1) = DF = \bar{1}\cdot 1\cdot DF$，如所断言。假设等式对 $n \le k$ 成立。那么

$$D(F^{k+1}) = D(F^k)\cdot F + F^k\cdot DF = kF^{k-1}\cdot DF\cdot F + F^k\cdot DF = (k+1)F^k\cdot DF.$$

v) 由 $F^{-n}\cdot F^n = 1$，我们得到 $D(F^{-n})\cdot F^n + F^{-n}\cdot nF^{n-1}\cdot DF = 0$。于是有$D(F^{-n})\cdot F^n = -nF^{-1}\cdot DF$，这意味着 $D(F^n) = -nF^{-n-1}\cdot DF$。

vi) 假设 $r = p/q$。我们有 $D[(F^r)^q] = q(F^r)^{q-1}\cdot D(F^r)$。但我们也有 $D[(F^r)^q] = D(F^p) = pF^{p-1}\cdot DF$ 因此，$q(F^r)^{q-1}D(F^r) = pF^{p-1}DF$，从而 $D(F^r) = \frac{p}{q}F^{\frac{p}{q}-1}\cdot DF = rF^{r-1}\cdot DF$。

vii) 若 $DF = DG$，则对所有 $n\ge 1$，$F(n) = G(n)$。由于 $F,\ G\in\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$, $F(0) = G(0) = 0$，并且对所有 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $F(n) = G(n)$。由此可得 $F = G$。

viii) 必要性：若 $DF = 0,\bar{}$则对所有 $n\ge 1$，$F(n) = 0$。显然，对于某个 $\lambda\bar{}\in\mathbb{C}$，$F = \lambda.1$。

充分性：$D(\lambda\cdot 1)\bar{} = \lambda\cdot D1 \bar{} = \lambda\cdot 0 \bar{} = 0\bar{}$

□

W现在可以给出麦克劳林（或泰勒）级数的形式幂级数等价形式 es.

定理 2.3.3. 设 $F\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。则

$$F = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}(D^nF)(0)X^n.$$

证明。只需证明对所有 $n\in\mathbb{N}$，$F(n) \bar{} = \frac{1}{n!}(D^nF)(0)$。多次应用导数的定义，可得 $(D^nF)(k) = (k+1)(k+2)\cdots(k+n)F(k+n)$，因此 $(D^nF)(0) = n!F(n)$。

□

推论 2.3.4. 设 $r\in\mathbb{Q}$ 且 $\lambda\in\mathbb{C}$。则

$$(\bar{1}+\lambda X)^r = \sum_{n\in\mathbb{N}}\binom{r}{n}\lambda^nX^n.$$

证明。我们有 $[D(\bar{1}+\lambda X)](0) = \lambda$。然后，通过应用命题 2.3.2.vi) n 次，我们得到$[D^n(1+\bar{\lambda X})^r](0) = r^n\lambda^n$。–最后，根据定理 2.3.3,

$$(\bar{1}+\lambda X)^r = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}r^{\underline{n}}\lambda^nX^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\binom{r}{n}\lambda^nX^n.$$

□

定理 2.3.5. 设 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$中的可求和序列。那么$(DF_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 可求和，并且

$$D\sum_{n\in\mathbb{N}}F_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}DF_n. \tag{2.2}$$

证明。由于 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是可求和的，$\lim_{n\to\infty} F_n = 0$。因此，对于所有 $j \in \mathbb{N}$，存在 $n_j \in \mathbb{N}$，使得 $n \geq n_j$ 蕴含 $F_n(j+1) = 0$，并且 $(DF_n)(j) = (j+1)F_n(j+1) = 0$。由此可得 $\lim_{n\to\infty} DF_n = 0$，因此 $(DF_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是可求和的。此外，

$$\left(D\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)(j) = (j+1)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)(j+1) = (j+1)\sum_{n=0}^{n_j} F_n(j+1) = \sum_{n=0}^{n_j}(j+1)F_n(j+1)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}}(j+1)F_n(j+1) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(DF_n)(j) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} DF_n\right)(j)$$

且方程 2.2 成立。 □

2.4 形式指数与对数

熟悉复分析的读者或许会想起指数函数和对数函数的以下幂级数展开：

$$e^z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\log(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

在本节中，我们将介绍它们在形式幂级数背景下的等价形式。

定义 2.4.1. 设 $F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 满足 $|F| < 1$。则形式指数函数 $\exp : \mathbb{C}_0^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$ 定义为 $\exp(F) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} F^n$。

定义 2.4.2. 设 $F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 满足 $|F| < 1$。则形式对数函数 $\log : \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$ 定义为 $\log(1+F) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} F^n$。

命题 2.4.3. 对于所有 $F \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$ 和 $G \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$，

i) $D(\exp(F)) = \exp(F) \cdot DF$;

ii) $D(\log(G)) = G^{-1} \cdot DG$。

Proof. i) $$D(\exp(F)) = D\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} F^n\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} F^{n-1} \cdot DF$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} F^n \cdot DF = \exp(F) \cdot DF;$$

ii) 假设对于某个 $H \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$，有 $G = 1 + H$。则

$$D(\log(G)) = D\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} H^n = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} H^{n-1} \cdot DH$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n H^n \cdot DH = (\overline{1} + H)^{-1} \cdot DH = G^{-1} \cdot DG$$

如 $DH = DG$。

□

以下对数性质对于形式对数仍然成立。

命题 2.4.4。设 $F,\ G \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$则

i) $\log(F \cdot G) = \log(F) + \log(G)$;

ii) $\log(F^m) = m\log(F)$ 对所有 $m \in \mathbb{Z}$;

iii) $\log(F^r) = r\log(F)$ 对所有 $r \in \mathbb{Q}$。

证明。 i) 由于 $\log(F \cdot G)$ 和 $\log(F) + \log(G)$ 都是 $\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$ 的元素，因此只需证明$D(\log(F \cdot G)) = D(\log(F) + \log(G))$。这是成立的，因为

$$\begin{aligned} D(\log(F \cdot G)) &= (F \cdot G)^{-1} \cdot D(F \cdot G) = (G^{-1} \cdot F^{-1}) \cdot (G \cdot DF + F \cdot DG) \\ &= F^{-1} \cdot DF + G^{-1} \cdot DG = D(\log(F) + \log(G)). \end{aligned}$$

ii) 同样，只需证明它们的导数相同。我们有

$$D(\log(F^m)) = F^{-m} \cdot D(F^m) = F^{-m} \cdot mF^{m-1} \cdot DF = mF^{-1} \cdot DF = D(m\log(F)).$$

iii) 假设 $r = p/q$。令 $F^r = G$，则 $F^p = G^q$且 $\log(F^p) = \log(G^q)$。根据前一项，这与 $p\log(F) = q\log(F^r)$ 相同，因此 $\log(F^r) = r\log(F)$。

□

现在来看形式对数的单射性。

引理 2.4.5. 等式 $\log(G) = 0$ 成立，当且仅当 $G = 1$。

证明。必要性： 由于 $\log(G) = 0$，我们有 $G^{-1} \cdot DG = 0$。显然， $G^{-1} \neq 0$，因此 $DG \equiv 0$。由此可知，对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}$， $G = \lambda \cdot 1$。由于对数函数的定义域是 $\mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$， $G \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$，从而 $G = 1$。

Sufficiency: $\log(\overline{1} + \overline{0}) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \overline{0}^n = \overline{0}.$ □

定理 2.4.6. 形式对数函数是单射。

证明。 设对于 $F, G \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$，$\log(F) = \log(G)$。那么 $\log(F \cdot G^{-1}) = \log(F) - \log(G) = \overline{0}$。根据引理 2.4.5， $F \cdot G^{-1} = 1$，因此 $F = G$。 □

下述定理表明，在形式幂级数的语境中，对数与指数函数之间的逆关系依然成立。

定理 2.4.7。设 $F \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$和 $G \in \mathbb{C}_1^{\mathbb{N}}$。则

i) $\log(\exp(F)) = F$;

ii) $\exp(\log(G)) = G$。

证明。 i) 由于形式对数函数的陪域是 $\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$，只需证明$D(\log(\exp(F))) = DF$。这是成立的，因为

$$D(\log(\exp(F))) = [\exp(F)]^{-1} \cdot D(\exp(F)) = [\exp(F)]^{-1} \cdot \exp(F) \cdot DF = DF.$$

ii) 根据上一项，$\log(\exp(\log(G))) = \log(G)$，又由于对数函数具有单射性，我们得到 $\exp(\log(G)) = G$。

□

现在来看推论 2.3.4 的一个推广。

定理 2.4.8. 设 $F \in \mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$。那么，对所有 $r \in \mathbb{Q}$，

$$(\overline{1} + F)^r = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{r}{n} F^n.$$

证明. 序列 $\left(\binom{r}{n}F^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 显然是可求和的，因为 $\lim_{n\to\infty} |F^n| = 0$。记 $G = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{r}{n} F^n$。那么 $DG = DF \cdot \sum_{n\geq 1} n\binom{r}{n} F^{n-1}$，并且

$$\begin{aligned}
(\overline{1} + F) \cdot DG &= DF \cdot \sum_{n\geq 1} n\binom{r}{n} F^{n-1} + DF \cdot \sum_{n\geq 1} n\binom{r}{n} F^n \\
&= DF \cdot \sum_{n\geq 1} n\binom{r}{n} F^{n-1} + DF \cdot \sum_{n\geq 2} (n-1)\binom{r}{n-1} F^{n-1} \\
&= rDF + DF \cdot \sum_{n\geq 2} \left[n\binom{r}{n} + (n-1)\binom{r}{n-1} \right] F^{n-1} \\
&= rDF + rDF \cdot \sum_{n\geq 2} \binom{r}{n-1} F^{n-1} \\
&= rDF \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{r}{n} F^n = rG \cdot DF.
\end{aligned}$$

将方程 $(1 + F) \cdot DG = rG \cdot DF$ 两边乘以 $G^{-1} \cdot (1 + F)^{-1}$，得到 $G^{-1} \cdot DG = r(1 + F)^{-1} \cdot DF$。由此可得

$$\begin{aligned}
D(\log(G)) = G^{-1} \cdot DG = r(\overline{1} + F)^{-1} \cdot DF = r(\overline{1} + F)^{-1} \cdot D(\overline{1} + F) \\
= D(r \log(\overline{1} + F)) = D(\log(\overline{1} + F)^r).
\end{aligned}$$

由于 $\log(G)$ 和 $\log(1 + F)^r$ 都属于 $\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$，我们可以得出 $\log(G) = \log(1 + F)^r$。对数函数的单射性进而保证 $G = (1 + F)^r$。 □

我们通过使用上述定理求出斐波那契数的另一个公式，来结束本节。

例 2.4.9。令 $F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 为满足 $F(n)$ 是第 n 个斐波那契数的函数。则 $F(0) = F(1) = 1$，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$F(n + 2) = F(n) + F(n + 1)$。我们有

$$\begin{aligned}
F &= \overline{1} + X + \sum_{n\geq 2} [F(n-2) + F(n-1)]X^n = \overline{1} + X + \sum_{n\geq 0} [F(n) + F(n+1)]X^{n+2} \\
&= \overline{1} + X + X\sum_{n\geq 1} F(n)X^n + X^2 \sum_{n\geq 0} F(n)X^n = \overline{1} + X + X(F - \overline{1}) + X^2F = \overline{1} + XF + X^2F.
\end{aligned}$$

这意味着 $1 = F(1 - X - X^2)$，由此可得 $F = (1 - X - X^2)^{-1}$。应用上述定理，我们得到

$$F = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{-1}{n} (-X - X^2)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} X^n(\overline{1} + X)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n+k},$$

这意味着 $F(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$。

2.5 有理生成函数基本定理

在本节中，我们证明，形式幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ 是有理函数，当且仅当其系数序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$（最终）满足一个常系数线性递推关系。

回想一下，我们分别用 E 和 I 表示 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上的移位算子和恒等算子。

定理 2.5.1（有理生成函数基本定理）。令 d 为正整数，c_0、……、c_d 为复数，使得 $c_0 c_d \neq 0$、$L = c_d E^d + \ldots + c_1 E + c_0 I$ 和 $p_L(X) = c_d X^d + \ldots + c_1 X + c_0 = c_d \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$，其中每个 $m_i > 0$、$m_1 + \ldots + m_k = d$ 以及 α_1、……、α_k 都是互不相同的复数。考虑集合

$$N_L = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}; L(f) = \overline{0}\};$$

$$G_1 = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}; \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) X^n = \frac{q(X)}{X^d p_L(X^{-1})} \text{ for some } q \in \mathbb{C}[X], \deg q < d \right\};$$

$$G_2 = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}; \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) X^n = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(X)}{(\overline{1} - \alpha_i X)^{m_i}} \text{ for some } g_i \in \mathbb{C}[X], \deg g_i < m_i \right\};$$

$$F = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}; f(n) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(n) \alpha_i^n \text{ for some } \lambda_i \in \mathbb{C}[n], \deg \lambda_i < m_i \right\}.$$

于是 $N_L = G_1 = G_2 = F$。

证明。首先注意到，这四个集合都是向量空间 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的子空间。此外，它们的维数均为 d，因为

i) 映射 $f \mapsto (f(0) \ldots, f(d-1))$ 是从 N_L 到 $\mathbb{C}^d$ 的同构；

ii) 如果 $q(X) = a_0 + \ldots + a_{d-1} X^{d-1}$，则映射 $f \mapsto (a_0, \ldots, a_{d-1})$ 是从 G_1 到 $\mathbb{C}^d$ 的同构；

iii) 如果 $g_i(X) = a_{i,0} + \ldots + a_{i,m_i-1} X^{m_i-1}$，则映射 $f \mapsto (a_{1,0}, \ldots, a_{1,m_1-1}, a_{2,0}, \ldots, a_{k,m_k-1})$ 是从 G_2 到 $\mathbb{C}^d$ 的同构；

iv) 若 $\lambda_i(n) = l_{i,0} + \ldots + l_{i,m_i-1} n^{m_i-1}$，则映射 $f \mapsto (l_{1,0}, \ldots, l_{1,m_1-1}, l_{2,0}, \ldots, l_{k,m_k-1})$ 是从 F 到 $\mathbb{C}^d$ 的同构。

我们已在第 1.4 节证明了 $N_L = F$。因此，为了确立其余等式，只需证明 i) $G_1 \subseteq N_L$ 和 ii) $G_2 \subseteq G_1$。

i) 若 $f \in G_1$，则

$$(c_d + \ldots + c_1 X^{d-1} + c_0 X^d) \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) X^n = q(X).$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$，上述方程左侧的 X^{n+d} 的系数等于 $c_d f(n+d) + \ldots + c_1 f(n+1) + c_0 f(n)$，而右侧等于零。因此，$L(f) = 0$ 和 $f \in N_L$。

ii) 如果 $f \in G_2$，那么

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) X^n = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(X)}{(\overline{1} - \alpha_i X)^{m_i}}.$$

将右侧的分数相加，得到

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) X^n = \frac{c_d \sum_{j=1}^{k} g_j(X) \prod_{i\neq j} (\overline{1} - \alpha_i X)^{m_i}}{c_d \prod_{i=1}^{k} (\overline{1} - \alpha_i X)^{m_i}}.$$

分母等于 $X^d p_L(X^{-1})$。此外，由于 $g_j(X)$ 的次数小于 m_j，我们有分子的次数小于 d，因此可以将其视为我们的 $q(X)$。因此，$f \in G_1$。

□

例 2.5.2. 设 $F \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 为满足 $F(n)$ 是第 n 个斐波那契数的函数。记 $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$、$\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$、$A = \frac{\Phi}{\sqrt{5}}$ 和 $B = -\frac{\phi}{\sqrt{5}}$。那么函数 F 可以通过以下方式刻画。

i) $(E^2 - E - I)(F) = \overline{0}$, with $F(0) = F(1) = 1$;

ii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} F(n) X^n = (\overline{1} - X - X^2)^{-1}$;

iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} F(n) X^n = \frac{A}{\overline{1} - \Phi X} + \frac{B}{\overline{1} - \phi X}$;

iv) $F(n) = A\Phi^n + B\phi^n$.

第3章

波利亚理论

本章将介绍循环指标（也称为循环指标级数），并利用它对着色进行计数。为此，我们将简要介绍波利亚理论，这是一种有趣的计数技巧，可以避免重复计数。我们先研究置换的一些有用结果，接着介绍波利亚两定理，并用它们解决项链计数问题。最后，我们将运用本章介绍的技巧，对无标号顶点上的图进行计数；同时请读者仔细留意这一思路，因为它有助于理解下一章中的无标号结构概念。循环指标在后续章节中也将非常有用，届时我们会介绍结构物种的概念。本章假设读者具备一些群论知识。若要进一步阅读，请参阅 [PRA87], [Wag20，第 10] 章，以及 [BLL98，附录1]。

3.1 置换与轨道

设 A 是一个非空有限集。 A 上的置换群记作 $S(A)$，称为 A 的 对称群。当 $A = [n]$ 时，我们用 S_n 代替 $S([n])$。

定义 3.1.1。给定一个有限集 A，若群 G 是 A 的置换群，则称 G 是 $S(A)$ 的子群。

定义 3.1.2。给定一个有限集 A 及其置换群 G，若存在 $g \in G$ 使得 $g(x) = y$，则称 A 中的两个元素 x 和 y 模 G 同余。模 G 同余是 A 上的一种等价关系。该等价关系的等价类就是 G 的轨道。包含元素 $x \in A$ 的 G 的轨道记作 $\mathcal{O}_x$；由固定 x 的置换构成的 G 的子群记作 G_x，称为 x 的稳定子。我们用 $\mathcal{O}(G)$ 表示 G 的所有轨道构成的集合。

定理 3.1.3 (轨道-稳定子定理)。设 G 是有限集 A 上的一个置换群，且 $x \in A$。则

$$|\mathcal{O}_x| = [G : G_x].$$

证明。 考虑函数 $\psi : \mathcal{O}_x \to G/G_x$， $g(x) \mapsto gG_x$。首先，我们来验证该函数是良定义的，也就是说，置换 g 的选取无关紧要。若 $g_1(x) = g_2(x)$，则$g_2^{-1} \circ g_1(x) = x$；因此， $g_2^{-1} \circ g_1 \in G_x$，从而 $g_1 G_x = g_2 G_x$。

现在来证明这个函数是满射。显然，如果 $gG_x \in G/G_x$，那么 $\psi(y) = gG_x$，其中 $y = g(x)$。

最后，来证明 ψ 是单射。设 $y_1 = g_1(x)$ 和 $y_2 = g_2(x)$ 是 $\mathcal{O}_x$ 中满足 $\psi(y_1) = \psi(y_2)$ 的两个元素。这意味着 $g_1 G_x = g_2 G_x$，因此 $g_1^{-1} \circ g_2 \in G_x$。于是我们有 $y_2 = g_2(x) = g_1 \circ g_1^{-1} \circ g_2(x) = g_1(x) = y_1$。 □

现在回想一下，有限集上的每个置换都可以唯一地（除序的改变外）表示为若干不相交循环的复合。

记号 3.1.4. 设 G 是有限集 A 上的一个置换群，且 $g \in G$。那么，我们用 $\lambda_i(g)$ 表示 g 的分解中长度为 i 的循环个数。

有了这些准备，我们就可以证明第一个有用的引理。

引理 3.1.5 (柯西-弗罗贝尼乌斯)。 设 G 是作用在有限集 A 上的置换群。 G 的轨道数等于 G 中置换的不动点数的平均值，换句话说，

$$|\mathcal{O}(G)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda_1(g).$$

证明。 根据轨道-稳定子定理，我们有

$$\sum_{g \in G} \lambda_1(g) = \sum_{g \in G} \sum_{\substack{x \in A \\ g(x) = x}} 1 = \sum_{x \in A} \sum_{g \in G_x} 1 = \sum_{x \in A} |G_x| = \sum_{x \in A} \frac{|G|}{|\mathcal{O}_x|}$$

$$= \sum_{O \in \mathcal{O}(G)} \sum_{\substack{x \in A \\ \mathcal{O}_x = O}} \frac{|G|}{|O|} = \sum_{O \in \mathcal{O}(G)} |G| = |G| \cdot |\mathcal{O}(G)|.$$

□

继续之前，我们先以一个推论的形式，给出一个著名组合学结果的另一种证明。

推论 3.1.6。 有 $(n-1)!$ 种由颜色各异的 n 颗珠子组成的圆形排列 $s.$

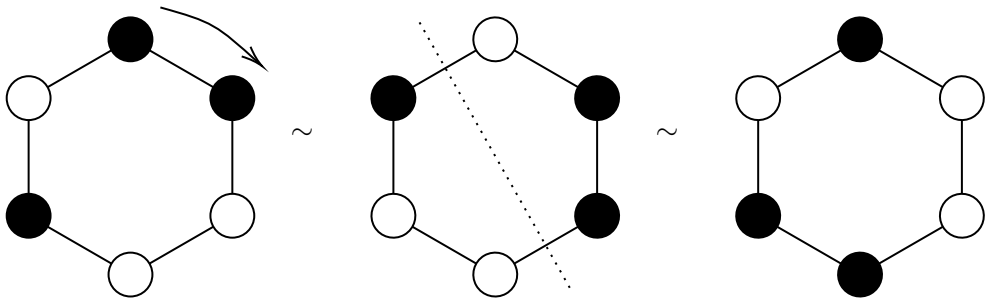
证明。 令 A 为所有由 n 个颜色各异的珠子组成的、视觉上彼此不同的圆形排列的集合，令 G 为 n 种可能的顺时针旋转的集合。唯一有不动点的旋转是恒等旋转，它固定所有排列。旋转等价类与 G 的轨道重合，根据引理 3.1.5，我们有 $\frac{1}{n}(n! + 0 + ... + 0) = (n-1)!$ 个这样的等价类。 – □

3.2 波利亚定理

在本节中，我们将介绍波利亚两定理。为此，我们选取两个集合 C， D，其中$|C| = k$，$|D| = n$，以及 n， $k \geq 2$。我们称 C为颜色集合，并称 $\varphi \in C^D$为 D的着色。

定义 3.2.1. 设 G 是 D 上的一个置换群。我们在 C^D 上定义一个等价关系 $\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff (\exists g \in G)\, \varphi_1 \circ g = \varphi_2$。$\sim$ 的等价类称为 G-类。

例 3.2.2。作为这种等价关系用法的一个例子，设 D 是六边形项链上均匀分布的 6 颗珠子组成的集合，$C = \{black, white\}$，并设 $G = D_6$ 是六边形二面体群（视为作用于 D上的置换群）。那么，所有由黑色或白色珠子组成、视觉上彼此不同的六边形项链的集合可以自然地与 C^D对应。注意，当且仅当两个视觉上不同的项链只不过是本质上同一条项链的不同画法时，它们才属于同一个 G-类。例如，下面这些视觉上不同的六边形项链是等价的。



让我们在 G-类与着色集合上的一个置换群之间建立一种关系。

定义 3.2.3。设 G 是 D上的一个置换群。对于每个 $g \in G$，$\varphi \in C^D$，定义$g(\varphi) := \varphi \circ g$，这是 C^D上的一个自函数。由于 g是可逆的，$\varphi_1 \circ g = \varphi_2 \circ g \implies \varphi_1 = \varphi_2$；因此，$g$ 是单射，从而是 C^D上的一个置换。将所有这样的 g组成的集合定义为 G。

引理 3.2.4. 集合 G 是作用在 C^D 上的置换群，$|G| = |G|$的 G-类与 G 的轨道重合。

证明。为了证明 G 是 $S(C^D)$ 的子群，只需证明对于 $g, h \in G$，有 $g \circ h \in G$。但是，对于所有 $\varphi \in C^D$，$g \circ h(\varphi) = \varphi \circ h \circ g = h \circ g(\varphi)$，并且由于 $h \circ g \in G$，$h \circ g \in G$。

对于 $|G| = |G|$，只需证明映射 $g \mapsto g$ 是单射，因为根据定义，G 是该映射的像。设 g，$h \in G$ 是不同的置换。对于某个 $x \in D$，$g(x) \neq h(x)$。由于$k \geq 2$，存在某个 $\varphi \in C^D$，使得 $\varphi(g(x)) \neq \varphi(h(x))$，因此 $g(\varphi) \neq h(\varphi)$。于是，$g \neq h$，且该映射是单射。

最后，令 φ_1，$\varphi_2 \in C^D$。根据定义，

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff (\exists g \in G)\, \varphi_1 \circ g = \varphi_2 \iff (\exists g \in G)\, g(\varphi_1) = \varphi_2$$

因此，G-类与 G 的轨道重合。 □

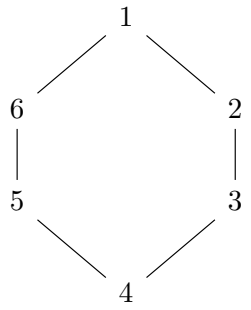
定义 3.2.5。置换群 G 的循环指标 是级数 $Z(G; x_1, x_2, \ldots)$，定义为

$$Z(G; x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\lambda_1(g)} x_2^{\lambda_2(g)} \ldots$$

显然，由于 G 是一个（有限）置换群，循环指标是一个多项式

$$Z(G; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\lambda_1(g)} \cdots x_n^{\lambda_n(g)}.$$

例3.2.6。 将下列六边形作为记号标准。



那么， D_6 的元素由下式给出

$$
\begin{aligned}
I &= (1)(2)(3)(4)(5)(6) & S_{1,4} &= (1)(4)(2\ 6)(3\ 5)\\
R &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) & S_{2,5} &= (2)(5)(1\ 3)(4\ 6)\\
R^2 &= (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) & S_{3,6} &= (3)(6)(1\ 5)(2\ 4)\\
R^3 &= (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6) & S_{12,45} &= (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)\\
R^4 &= (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4) & S_{23,56} &= (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)\\
R^5 &= (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2) & S_{34,61} &= (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)
\end{aligned}
$$

由此很容易看出， $Z(D_6;\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_6) = \frac{1}{12}(x_1^6 + 4x_2^3 + 3x_1^2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_6)$。

有了这些结果，我们就可以陈述波利亚第一定理。

定理 3.2.7 (波利亚第一定理)。 由 $\sim$ 诱导的 G-类的数量等于$Z(G;\ k, \ldots, k)$。

证明。 由引理3.1.5和3.2.4可得

$$|\mathcal{O}(\overline{G})| = \frac{1}{|\overline{G}|}\sum_{\overline{g}\in\overline{G}}\lambda_1(\overline{g}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{\varphi\in C^D;\varphi\circ g=\varphi\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}k^{\lambda_1(g)+\ldots+\lambda_n(g)}$$

因为 $\varphi\circ g = \varphi$ 当且仅当 φ 在 g的各个循环上为常数，并且 g 有 $\lambda_1(g) + \ldots + \lambda_n(g)$个循环。

□

例3.2.8. 我们通过枚举具有两种颜色珠子（即黑色和白色）的六边形项链的类型数量，来扩展例3.2.2和例3.2.6。根据定理 3.2.7，该数量等于

$$Z(D_6;2,\ldots,2) = \frac{1}{12}(2^6 + 4\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 2^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2) = \frac{156}{12} = 13,$$

i.也就是说，由两种颜色的珠子组成的六边形项链共有 13 个等价类。

接下来，假设 $C = [k]$ 和 $D = [n]$。

定义3.2.9。 给定 $\varphi\in[k]^{[n]}$， φ 的频数类型为

$$(f_1(\varphi),\ldots,f_k(\varphi)) = (|\varphi^{-1}(\{1\})|,\ldots,|\varphi^{-1}(\{k\})|).$$

引理3.2.10。 如果两个着色属于同一个 G-类，那么它们具有相同的频数类型。

证明。 设 φ_1 和 φ_2 是同一个 G-类中的两个着色。那么，对于某个 $g \in G$，有 $\varphi_1 \circ g = \varphi_2$。由于 g 是一个置换，它可以写成若干不相交循环的乘积。因此，只需证明 $g = (a_1 a_2 \dots a_{j-1} a_j)$ 为单个循环时结论成立。

设 $b_i = \varphi_1(a_i)$，其中 $1 \le i \le j$。注意，$b_i's$ 不一定两两不同。有序集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j\}$ 在 φ_1 下的像是有序多重集 $\{b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_j\}$。自然，同一有序集合在 $\varphi_1 \circ g$ 下的像是有序多重集 $\{b_2, b_3, ..., b_j, b_1\}$，它只是前者的一个简单重排。由此可见，频数类型保持不变。 □

上述引理使我们能够讨论 G-类的频数类型。

定义 3.2.11. G-类的模式库存多项式定义为

$$P(G; x_1, \dots, x_k) := \sum_{\substack{f_1+\dots+f_k=n \\ f_j \ge 0}} G_{f_1 \dots f_k} x_1^{f_1} \cdots x_k^{f_k}$$

其中，$G_{f_1 \dots f_k}$ 是频数类型为（f_1，.....，f_k）的 G-类的数量。

为了找到一种合适的方法来枚举模式清单多项式的系数，我们必须首先定义权重并推广柯西-弗罗贝尼乌斯引理。

定义 3.2.12. 设 G 是有限集 A 上的置换群，R 是满足 $\mathbb{Q} \subseteq R$ 的交换环。若映射 $w: A \to R$ 满足 w 在 G 的轨道上为常数，则称其为关于 G 的 A 上的权函数。这自然诱导出映射 $W: \mathcal{O}(G) \to R$。

引理 3.2.13。 在上述定义的背景下，

$$\sum_{O \in \mathcal{O}(G)} W(O) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{x \in A \\ g(x)=x}} w(x)$$

证明。

$$\sum_{g \in G} \sum_{\substack{x \in A \\ g(x)=x}} w(x) = \sum_{x \in A} w(x) \sum_{\substack{g \in G \\ g(x)=x}} 1 = \sum_{x \in A} w(x)|G_x| = |G| \sum_{x \in A} \frac{w(x)}{|\mathcal{O}_x|}$$

$$= |G| \sum_{O \in \mathcal{O}(G)} \sum_{x \in O} \frac{w(x)}{|O|} = |G| \sum_{O \in \mathcal{O}(G)} \sum_{x \in O} \frac{W(O)}{|O|} = |G| \sum_{O \in \mathcal{O}(G)} W(O).$$

□

Wi借助这些结果，我们可以从循环指标中恢复模式库存多项式。

定理 3.2.14（波利亚的第二定理）。 模式库存多项式与循环指标的关系由下列公式给出：

$$P(G; x_1, \dots, x_k) = Z(G; \sum_{j=1}^{k} x_j, \sum_{j=1}^{k} x_j^2, \dots, \sum_{j=1}^{k} x_j^n)$$

证明。对于每个着色 φ，定义 $w(\varphi) := \prod_{i=1}^{n} x_{\varphi(i)} = x^{f_1(\varphi)}_1 \cdots x^{f_k(\varphi)}_k$。由引理 3.2.4 和 3.2.10，$G$-类与 G 的轨道重合，且 w 在 G 的轨道上为常数。按照定义 3.2.12，从 w 自然地导出 W。于是，模式库存多项式显然为 $P(G; x_1, \ldots, x_k) = \sum_{O \in \mathcal{O}(G)} W(O)$。由引理 3.2.13，

$$\sum_{O \in \mathcal{O}(\overline{G})} W(O) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{\varphi \in [k]^{[n]} \\ \overline{g}(\varphi) = \varphi}} w(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{\varphi \in [k]^{[n]} \\ \overline{g}(\varphi) = \varphi}} x_1^{f_1(\varphi)} \cdots x_k^{f_k(\varphi)}. \tag{3.1}$$

由于第二个和中的每个 φ 在 g 的循环上都是常数，因此我们可以将每个 $f_i(\varphi)$ 写成 $1t_{i,1} + 2t_{i,2} + \ldots + nt_{i,n}$，其中 $t_{i,j}$ 是 g 中长度为 j 且 φ 赋予颜色 i 的循环数。我们有

$$\begin{aligned} x_1^{f_1(\varphi)} x_2^{f_2(\varphi)} \cdots x_k^{f_k(\varphi)} &= x_1^{1t_{1,1}+2t_{1,2}+\ldots+nt_{1,n}} x_2^{1t_{2,1}+2t_{2,2}+\ldots+nt_{2,n}} \cdots x_k^{1t_{k,1}+2t_{k,2}+\ldots+nt_{k,n}} \\ &= (x_1^{t_{1,1}} x_2^{t_{2,1}} \cdots x_k^{t_{k,1}})(x_1^{2t_{1,2}} x_2^{2t_{2,2}} \cdots x_k^{2t_{k,2}}) \cdots (x_1^{nt_{1,n}} x_2^{nt_{2,n}} \cdots x_k^{nt_{k,n}}). \end{aligned}$$

由于 $t_{1,j} + t_{2,j} + \ldots + t_{k,j} = \lambda_j(g)$，存在 $\binom{\lambda_1(g)}{t_{1,1}, \ldots, t_{k,1}} \binom{\lambda_2(g)}{t_{1,2}, \ldots, t_{k,2}} \cdots \binom{\lambda_n(g)}{t_{1,n}, \ldots, t_{k,n}}$ 种着色 φ，其对应的分解为 $(x^{t_{1,1}}_1 x^{t_{2,1}}_2 \cdots x^{t_{k,1}}_k)(x^{2t_{1,2}}_1 x^{2t_{2,2}}_2 \cdots x^{2t_{k,2}}_k) \cdots (x^{nt_{1,n}}_1 x^{nt_{2,n}}_2 \cdots x^{nt_{k,n}}_k)$，因为这些数目表示选择哪个循环获得哪种颜色的方式数。相应地分组后，我们得到方程 3.1 等于

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{t_1 + \ldots + t_k = \lambda_1(g)} \binom{\lambda_1(g)}{t_1, \ldots, t_k} x_1^{t_1} \cdots x_k^{t_k} \right) \cdots \left(\sum_{t_1 + \ldots + t_k = \lambda_n(g)} \binom{\lambda_n(g)}{t_1, \ldots, t_k} x_1^{nt_1} \cdots x_k^{nt_k} \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (x_1 + \ldots + x_k)^{\lambda_1(g)} \cdots (x_1^n + \ldots + x_k^n)^{\lambda_n(g)} = Z(G; \sum_{j=1}^{k} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{k} x_j^n) \end{aligned}$$

□

例 3.2.15. 我们以统计六边形项链中黑色珠子和白色珠子的数量分布来结束例3.2.8。为此，令 b 为统计黑色珠子的变量，w 为统计白色珠子的变量。那么，表示这种分布的多项式，也就是模式清单，为

$$\begin{aligned} P(D_6; b, w) &= Z(D_6; b + w, b^2 + w^2, \ldots, b^6 + w^6) \\ &= \frac{1}{12}[(b+w)^6 + 4(b^2+w^2)^3 + 3(b+w)^2(b^2+w^2)^2 + 2(b^3+w^3)^2 + 2(b^6+w^6)] \\ &= 1b^6 + 1b^5w^1 + 3b^4w^2 + 3b^3w^3 + 3b^2w^4 + 1b^1w^5 + 1w^6. \end{aligned}$$

3.3 同构图

本节将运用上一节证明的定理来统计图的同构类型。

定义 3.3.1。 有限集 V 上的图是一个有序对 (V, E)，其中 $E \subseteq \binom{V}{2}$。V 的元素称为顶点，E 的元素称为边。

定义 3.3.2. 如果存在一个双射σ：$V_1 \to V_2$，使得 $\{u,v\} \in E_1 \iff \{\sigma(u)\ \sigma(v)\} \in E_2$，则称两个图 (V_1, E_1),(V_2, E_2) 是同构的。我们称两个同构的图具有相同的同构类型。

现在假设所有图都定义在一个包含 $V = [n]$ 和 $n \geq 3$ 的集合上。我们的目标是利用波利亚理论，枚举定义在 $V = [n]$ 上的图的同构类型。为此，我们将每个图 $([n], E)$ 与一个着色 $\varphi : \binom{[n]}{2} \to \{yes, no\}$ 相关联，其中，当 $\{u,v\} \in E$ 时，$\varphi(\{u,v\}) = yes$，否则 $\varphi(\{u,v\}) = no$。按照惯例，用 S_n 表示 $[n]$ 上的对称群，用 $S(\binom{[n]}{2})$ 表示 $\binom{[n]}{2}$ 的对称群。

定义 3.3.3. 对于每个 $\sigma \in S_n$ 和 $\{u,v\} \in \binom{[n]}{2}$，定义 $g_\sigma(\{u,v\}) := \{\sigma(u)\ \sigma(v)\}$。

由于 $\sigma : [n] \to [n]$ 是单射，$g_\sigma : \binom{[n]}{2} \to \binom{[n]}{2}$ 也是单射，因此是一个置换。由于 $g_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = g_{\sigma_1} \circ g_{\sigma_2}$，映射 $\sigma \mapsto g_\sigma$ 是从 S_n 到 $S(\binom{[n]}{2})$的同态。此外，这个同态是单射。事实上，对于所有 $k = 2, \ldots, n$，若 $g_{\sigma_1}(\{1,k\}) = g_{\sigma_2}(\{1,k\})$，则$\sigma_1(j) = \sigma_2(j)$对所有 $j \in [n]$都成立。（注意，对于 $n = 2$，该同态不是单射，因为恰有两个置换使得 $g_{\sigma_1}(\{1,2\}) = g_{\sigma_2}(\{1,2\})$，即 $\sigma_1 = Id_2$和 $\sigma_2 =$(1 2)。）

注意　释 3.3.4. 将映射 $\sigma \mapsto g_\sigma$ 的像记作 $S_n^{(2)}$，并称其为对偶群。

对偶群使我们能够从波利亚理论的角度来看待这个问题。于是，我们可以将定义 3.3.2 改写为

定义 3.3.5. 当两个图 $([n], E_1)$,$([n], E_2)$ 的相应着色 φ_1, φ_2 属于同一个 $S_n^{(2)}$-类时，它们具有相同的同构类型；也就是说，存在 $\sigma \in S_n$ 使得$\varphi_1 = \varphi_2 \circ g_\sigma$。

接下来的两个定理是波利亚两定理的推论。

定理 3.3.6. n 个顶点的图的同构类型数由$Z(S_n^{(2)};\ x_1, \ldots, x_{\binom{n}{2}})|_{x_i=2}$给出。

证明。 由定理 3.2.7 立即可得。 □

定理 3.3.7。 令 $\mathcal{G}_j$ 表示具有 n 个顶点且恰有 j 条边的图的同构类型数。则

$$\sum_{j=0}^{\binom{n}{2}} \mathcal{G}_j x^j = Z(S_n^{(2)}; 1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^{\binom{n}{2}})$$

证明。 由定理 3.2.14 立即可得，只需将与 no 相关的变量替换为 1，并将与 yes 相关的变量替换为 x。 □

现在，要枚举这些同构类型，最后一步是计算$S_n^{(2)}$的循环指标 。有一种算法可以完成这项工作，它源于循环指标 与 S_n的关系。根据 [Wag20，定理 10.2.3], ，我们有

$$Z(S_n; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \frac{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}}{1^{\lambda_1}\lambda_1! 2^{\lambda_2}\lambda_2! \cdots n^{\lambda_n}\lambda_n!} \tag{3.2}$$

下面几个引理将展示 S_n 中的置换与 $S_n^{(2)}$中的置换之间的关系。从现在起，假设 σ 和 g_σ 与之前一样。

记号 3.3.8. 用 $a \bmod m$ 表示满足 $a \equiv r \bmod m$的唯一 $r \in [m]$ 。

引理 3.3.9. 若 $m \in \mathbb{N}$，则 σ的不交循环分解中的每个循环 $(v_1 v_2 \dots v_{2m+1})$ 都会在 g_σ 中产生 m 个长度为 $2m+1$的循环，其中后者的项是来自 $\{v_1, v_2, \dots, v_{2m+1}\}$的顶点对。

证明。 考虑满足 j,且 k在 $[2m+1]$中互不相同的 $\{v_j, v_k\}$。我们断言，包含$\{v_j, v_k\}$ 的 g_σ的循环为

$$(\{v_{j+i-1 \bmod 2m+1}, v_{k+i-1 \bmod 2m+1}\})_{1 \le i \le 2m+1}$$

显然， $g_\sigma(\{v_{j+i-1 \bmod 2m+1}, v_{k+i-1 \bmod 2m+1}\}) = \{v_{j+i \bmod 2m+1}, v_{k+i \bmod 2m+1}\}$。要证明这个循环的长度为 $2m+1$，我们必须证明，如果 $i, i' \in [2m+1]$ 且

$$\{v_{j+i-1 \bmod 2m+1}, v_{k+i-1 \bmod 2m+1}\} = \{v_{j+i'-1 \bmod 2m+1}, v_{k+i'-1 \bmod 2m+1}\}$$

则为 $i = i'$。考虑仅有的两种可能情况：

i) $v_{j+i-1 \text{ 模 } 2m+1} = v_{k+i'-1 \text{模 } 2m+1}$ 和 $v_{k+i-1 \text{ 模} 2m+1} = v_{j+i'-1 \text{ 模 } 2m+1}$，或

ii) $v_{j+i-1 \text{ 模 } 2m+1} = v_{j+i'-1 \text{模 } 2m+1}$。

但 (i) 蕴含 $j+i-1 \equiv k+i'-1$ 模 $2m+1$ 和 $k+i-1 \equiv j+i'-1$ 模 $2m+1$，由此可得 $j \equiv k$ 模 $2m+1$ 和 $j = k$，这与假设矛盾；由 (ii) 我们有$j+i-1 \equiv j+i'-1$ 模 $2m+1$，由此可得 $i \equiv i'$ 模 $2m+1$，以及 $i = i'$。

由于我们对 g_σ 进行不交循环分解，这些循环将集合 $\binom{\{v_1, v_2, \dots, v_{2m+1}\}}{2}$ 划分为大小为 $2m+1$ 的块，因此共有 $\binom{2m+1}{2}/(2m+1) = m$ 个循环。 □

引理 3.3.10. 如果 $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，那么 σ 的每个循环$(v_1 v_2 ... v_{2m})$ 在 g_σ 中产生 $m-1$ 个长度为 $2m$ 的循环以及一个长度为 m 的循环，后者的各项是来自 $\{v_1, v_2, ..., v_{2m}\}$ 的顶点对。

证明。 考虑 $\{v_j, v_k\}$，其中 j， k在 $[2m]$中互不相同。如果 $j \equiv k$模 m，那么包含$\{v_j, v_k\}$的循环为 $(\{v_1, v_{m+1}\}\{v_2, v_{m+2}\} \dots \{v_m, v_{2m}\})$。否则，仿照引理 3.3.9 的证明可得，包含 $\{v_j, v_k\}$ 的循环为 $(\{v_{j+i-1 \bmod 2m}, v_{k+i-1 \bmod 2m}\})_{1 \le i \le 2m}$。为确定这类循环的数量，我们看到这些循环将 $\binom{\{v_1, v_2, \dots, v_{2m}\}}{2}$ 划分为一个大小为 m 的部分和 x 个大小为 $2m$的部分，由此得到 $m + 2mx = \binom{2m}{2}$， 以及 $x = m-1$。 □

引理 3.3.11。 如果 $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 中的每一对 $\{(u_1 \dots u_r), (v_1 \dots v_s)\}$ 循环在 σ 中产生的结果，在 g_σ 中会形成 $\gcd(r,s)$ 个长度为 $\operatorname{lcm}(r,s)$ 的循环，其中后者各循环的元素形式为 $\{u_j, v_k\}$。

证明。 显然， $g_\sigma(\{u_{j+i-1 \text{模 } r}, v_{k+i-1 \text{模 } s}\}) = \{u_{j+i \text{模 } r}, v_{k+i \text{模 } s}\}$, $i \in [\operatorname{lcm}(r,s)]$，而这些数对显然互不相同。因此， $\{u_1, \dots, u_r\} \times \{v_1, \dots, v_s\}$ 中的 rs 个数对被划分为长度为 $\operatorname{lcm}(r,s)$ 的部分，所以这样的循环有 $rs/\operatorname{lcm}(r,s) = \gcd(r,s)$ 个。

□

现在我们已具备构造 $S_n^{(2)}$ 的 循环指标 所需的工具。

定理 3.3.12。 $S_n^{(2)}$的循环指标由 S_n 的循环指标按以下方式推导：

i) 循环指标中某一项的因子 x_{2m+1} 会在 S_n 的循环指标中产生因子 x_{2m+1}^m $S_n^{(2)}$；

ii) 循环指标中某一项的因子 x_{2m} 会在 S_n 的循环指标中产生因子 $x_m x_{2m}^{m-1}$ $S_n^{(2)}$；

iii) 循环指标中某一项的因子 $x_r x_s$ 会在 S_n 的循环指标中产生因子 $x^{\gcd(r,s)\ \mathrm{lcm}(r,s)}$ $S_n^{(2)}$。

证明。 映射 $\sigma \mapsto g_\sigma$ 的单射性给出 $|S_n| = |S_n^{(2)}|$。由此，定理立即可由引理 3.3.9、3.3.10、3.3.11 和定义 3.2.5 得出。 □

现在，我们通过使用定理 3.3.6 计算四个无标号顶点的图的数量，并利用定理 3.3.7 计算这些图按照边的数量进行分类的分布情况，以此结束本节。根据公式 3.2，我们有

$$Z(S_4; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$$

根据定理 3.3.12，我们有 $S_4^{(2)}$ 的循环指标 如下：

i) x_1^4 中的四个 x_1 各自贡献一个因子1，而每一对 $\{x_1, x_1\}$ 贡献一个因子x_1；因此， x_1^4 贡献一个因子 x_1^6。

ii) 两个 x_1 in $x_1^2x_2$ 各产生一个因子 1， x_2 产生一个因子 x_1，配对$\{x_1, x_1\}$产生一个因子 x_1，而每一对 $\{x_1, x_2\}$产生一个因子 x_2；因此$6x_1^2x_2$ 产生一个因子 $6x_1^2x_2^2$。

iii) x_1x_3 中的 x_1 产生因子 1， x_3 产生因子 x_3，而 $\{x_1, x_3\}$这一对产生因子 x_3；因此 $8x_1x_3$ 产生因子 $8x_3^2$。

iv) x_2^2 中的每个 x_2 产生因子 x_1，而 $\{x_2, x_2\}$ 这一对产生因子 x_2^2；因此$3x_2^2$ 产生因子 $3x_1^2x_2^2$。

v) x_4 产生因子 x_2x_4；因此 $6x_4$ 产生因子 $6x_2x_4$。

由此可得

$$Z(S_4^{(2)}; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 9x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2x_4).$$

于是，四个无标号顶点上的图的数量为

$$\frac{1}{24}(x_1^6 + 9x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2x_4)|_{x_i=2} = \frac{1}{24}(2^6 + 9 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^2) = 11,$$

其关于边数的分布由多项式给出

$$\frac{1}{24}[(1+x)^6 + 9(1+x)^2(1+x^2)^2 + 8(1+x^3)^2 + 6(1+x^2)(1+x^4)] =$$

$$\frac{1}{24}[24 + 24x + 48x^2 + 72x^3 + 48x^4 + 24x^5 + 24x^6] = 1 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 1x^5 + 1x^6.$$

第 4 章

结构物种

本章将介绍结构、结构物种以及物种空间上的一些运算。我们首先简要介绍范畴论，因为范畴论包含函子这一关键概念，后文将用它来定义物种。接着，我们给出结构物种的正式定义，并展示用于对其进行计数的级数。之后，我们介绍一些用于联系不同物种的运算，例如加法、乘积和复合。最后，我们介绍多排序和虚物种的概念，这些概念将在后续章节中发挥作用。本章的主要参考文献为[Joy81], [BLL98],和 [BLL13]。

4.1 范畴论

为了充分理解结构物种的概念，了解一些范畴论知识会很有帮助。

定义 4.1.1. 范畴 $\mathscr{C}$ 由以下数学对象组成：

i) 一个类 $\mathbf{Ob}(\mathscr{C})$，其元素称为 $\mathscr{C}$ 的对象；

ii) 对每一对 $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$，有一个集合 $\mathbf{Mor}(\mathscr{C})(A, B)$，其元素称为从 A 到 B 的态射；

iii) 对每个 $A, B, C \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$，有一个复合映射

$$\mathbf{Mor}(\mathscr{C})(B, C) \times \mathbf{Mor}(\mathscr{C})(A, B) \to \mathbf{Mor}(\mathscr{C})(A, C), \quad (g, f) \mapsto g \circ f;$$

iv) 对每个 $A \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$，有一个恒等态射 $Id_A \in \mathbf{Mor}(\mathscr{C})(A, A)$.

态射的复合必须满足以下条件：

v) 对于 $A, B, C, D \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$, $f \in \mathbf{Mor}(\mathscr{C})(A, B)$, $g \in \mathbf{Mor}(\mathscr{C})(B, C)$, $h \in \mathbf{Mor}(\mathscr{C})(C, D)$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

vi) 对于 A, B, $C \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$, $f \in \mathbf{Mor}(\mathscr{C})(A, B)$, $g \in \mathbf{Mor}(\mathscr{C})(C, A)$,

$$f \circ Id_A = f, \quad Id_A \circ g = g.$$

例 4.1.2. 以下是一些范畴的例子。在每个例子中，态射的复合都是通常的函数复合。

- 群与群同态的范畴 $\mathbf{Grp}$；
- 域 $\mathbb{K}$ 上的有限维向量空间及线性变换的范畴 $\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}$；
- 拓扑空间及连续映射的范畴 $\mathbf{Sp}$；
- 有限集与函数的范畴 $\mathbb{E}$；
- 有限集与双射构成的范畴 $\mathbb{B}$。

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，并令 $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$。我们用更直观的记号 $f\colon A \to B$ 替换繁琐的记号 $f \in \mathbf{Mor}(\mathscr{C})(A, B)$。

定义 4.1.3. 令 $\mathscr{C}$ 为一个范畴，且 $f\colon A \to B$ 是 $\mathscr{C}$中的一个态射。当且仅当存在一个态射 $g\colon B \to A$，使得 $f \circ g = Id_B$和 $g \circ f = Id_A$时，态射 f 称为同构。容易看出，若这样的 g 存在，则它是唯一的。因此，我们有理由称 g 为 f的逆，并记作 $g = f^{-1}$。

例如，$\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}$ 中的同构是向量空间之间的线性同构，而$\mathbf{Sp}$ 中的同构是拓扑空间之间的同胚。此外，$\mathbb{B}$ 中的每个态射都是同构。

定义 4.1.4. 设 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 为范畴。一个从 $\mathscr{A}$到 $\mathscr{B}$ 的函子 F由以下数据给出：

i）一个函数 $F_{\mathbf{Ob}}\colon$ **对象**$(\mathscr{A}) \to$ **对象**$(\mathscr{B})$，称为 F 的对象部分；

ii) 一族函数 $F_{\mathbf{Mor}} = \{F_{C,D}\colon \mathbf{Mor}(\mathscr{A})(C, D) \to \mathbf{Mor}(\mathscr{B})(F[C], F[D])\}_{C,D\in\mathbf{Ob}(\mathscr{A})}$，称为 F 的态射部分，满足 $F[Id_C] = Id_{F[C]}$和 $F[g \circ f] = F[g] \circ F[f]$。

如果 $\mathscr{A} = \mathscr{B}$，那么我们称 F 为 $\mathscr{A}$ 的自函子。例如，对于每个范畴 $\mathscr{A}$，我们都有一个恒等函子 $Id : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$，它保持所有对象和所有态射不变。此外，为了简化记号，我们将 $F_{\mathbf{Ob}}$ 和 $F_{C,\ D}$ 统称为 F，具体指函子的对象部分还是态射部分，将由上下文明确说明。

自函子的一个非平凡例子是函子 $F : \mathrm{FVect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{FVect}_{\mathbb{K}}$，它在对象上的定义为 $F(V) = V^{**}$，其中 $V^{**} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}), \mathbb{K})$ 是向量空间 V 的双对偶；对于有限维 $\mathbb{K}$-向量空间之间的线性变换 $T\colon V \to W$，令$F(T) = T^{**}$，其中 $T^{**}\colon V^{**} \to W^{**}$ 是由 T 诱导的线性变换。（更准确地说，先定义 $T^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, \mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$，使得 $T^*(f) = f \circ T$，然后对所有 $\phi \in V^{**}$ 令 $T^{**}(\phi) := T^* \circ \phi$。）

命题 4.1.5。 函子保持同构，也就是说，如果 $\mathscr{C}$、$\mathscr{D}$ 是两个范畴，$F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是一个函子，A、$B \in \mathbf{Ob}(\mathscr{C})$，且 $\sigma\colon A \to B$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个同构，那么 $F[\sigma]$ 就是 $\mathscr{D}$ 中的一个同构。此外，$F[\sigma]^{-1} = F[\sigma^{-1}]$。

证明。 函子保持复合和恒等态射，因此

$$F[\sigma]\circ F[\sigma^{-1}] = F[\sigma\circ\sigma^{-1}] = F[Id_B] = Id_{F[B]},\text{ and}$$
$$F[\sigma^{-1}]\circ F[\sigma] = F[\sigma^{-1}\circ\sigma] = F[Id_A] = Id_{F[A]}.$$

因此， $F[\sigma]$ 是一个同构，其逆为 $F[\sigma^{-1}]$。 □

最后，我们定义自然变换的概念。

定义 4.1.6. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是范畴， F,G 是从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的函子。从 F 到 G 的自然变换是一个态射族 $\tau = \{\tau_C\colon F[C]\to G[C]\}_{C\in\mathbf{Ob}(\mathscr{A})}$，满足

$$\begin{array}{ccc} F[C] & \xrightarrow{\tau_C} & G[C] \\ {\scriptstyle F[f]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G[f]} \\ F[D] & \xrightarrow[\tau_D]{} & G[D] \end{array}$$

对所有 $f\in\mathbf{Mor}(\mathscr{A})(C,D)$均可交换。当 τ 是一个由同构组成的族时，自然变换称为自然同构。

设 F :$\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}\to\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}$ 是双对偶函子。对于有限维 $\mathbb{K}$-向量空间 V，设 $\tau_V\colon V\to V^{**}$ 为由 $\tau_V(v)[\phi]=\phi(v)$定义的求值映射，其中对所有 $v\in V$和$\phi\in V^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$均成立。那么，线性变换族

$$\tau = \{\tau_V : Id[V]\to F[V]\}_{V\in\mathbf{Ob}(\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}})}$$

定义了从$\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}$ 上的恒等函子到双对偶函子的自然同构。相反，尽管每个有限维向量空间 V 都与其对偶 V^*同构，却不存在以自然方式识别 V 和 V^*的方法。

有了这些定义，我们就可以继续开始研究结构物种了。

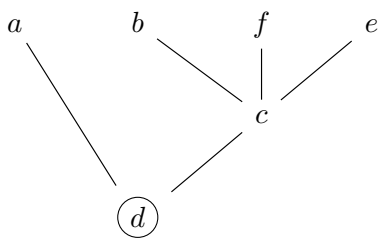
4.2 结构物种及其相关级数

结构这一概念是后续研究的根基。我们先给出结构的非正式定义。

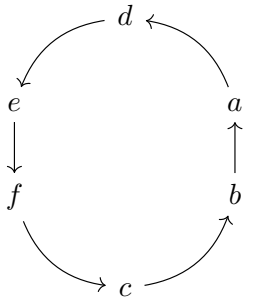
定义 4.2.1. 结构是一个有序对 $s=(U,\gamma)$，其中 U 是一个有限集，而 γ 是在 U上进行的一种构造。我们称 U 为 s的底集。

这个定义有些模糊，因为 γ 可以是任何建立在底集 U上的东西。接下来我们举几个例子。

例 4.2.2。 设 $U=\{a,b,c,d,e,f\}$，以及 $\gamma=(\{d\},\ \{\{d,a\},\{d,c\},\{c,b\},\{c,f\},\{c,e\}\})$。那么 $s=(U,\ \gamma)$ 如下所示，是一棵有根树。



例 4.2.3。 设 $U=\{a,b,c,d,e,f\}$，以及 $\gamma=\{(c,\ b)、(b,\ a)、(a,\ d)、(d,\ e)、(e,\ f)、(f,\ c)\}$。然后 $s=(U,\ \gamma)$ 如下所示，是一个循环。

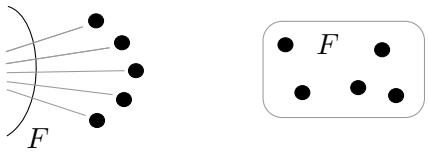


例 4.2.4. 设 $U=\{a,b,c,d,e,f\}$，且 $\gamma=\{\{a,b,e\},\{c,f\},\{d\}\}$。则 $s=(U,\ \gamma)$ 是集合 U 的一个划分。

现在开始研究物种。

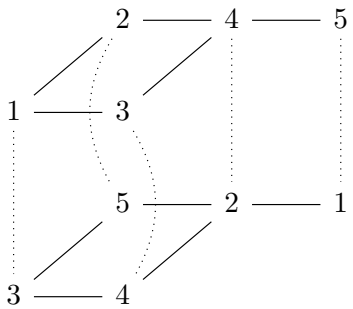
定义 4.2.5. 结构物种是一个自函子 F，定义在由有限集和双射构成的范畴 $\mathbb{B}$ 上。在某些情况下，将 F 视为从 $\mathbb{B}$ 到 $\mathbb{E}$ 的函子也有意义。一个 F-结构是某个有限集 U 上的一个元素 $s\in F[U]$。给定有限集之间的一个双射 $\sigma\colon U\to V$，称 $F[\sigma]$ 为沿着 σ 对 F-结构的传输。

一般 F-结构的两种可能表示如下：



定义 4.2.6. 设 $s_1\in F[U]$，$s_2\in F[V]$ 是两个 F-结构。双射 $\sigma\colon U\to V$ 是从 s_1 到 s_2 的一个同构，当且仅当 $s_2=F[\sigma](s_1)$。此时称这两个结构具有相同的同构类型。若 $s_1=s_2$，则称 σ 为一个自同构。

例 4.2.7. 简单图物种 $\mathcal{G}$ 定义如下。对于有限集 U，我们令 $\mathcal{G}[U]=\{(U,\ E);\ E\subseteq\binom{U}{2}\}$，并且给定有限集之间的一个双射 $\sigma\colon U\to V$，我们定义$\mathcal{G}[\sigma]\colon \mathcal{G}[U]\to\mathcal{G}[V]$，使得对每个 $(U,\ E)\in\mathcal{G}[U]$，$\mathcal{G}[\sigma]((U,\ E))=(V,\ \{\{\sigma(x)\ \sigma(y)\};\ \{x,y\}\in E\}$。容易验证，$\mathcal{G}$ 确实是 $\mathbb{B}$ 上的一个自函子。下图中，$U=V=[5]$和 $\sigma=(1\ 3\ 4\ 2\ 5)$，将使 $\mathcal{G}[\sigma]$ 的定义更加清晰。



接下来，我们将给出一些结构物种的例子，以及本文中用于表示它们的记号。态射部分将省略，因为它可以自然地推导出来（可参照例 4.2.7）。

记号 4.2.8. 以下是一个物种列表。

- 物种 $\mathcal{A}$ 有根树;
- 简单图的物种 $\mathcal{G}$;
- 树的物种 $\mathfrak{a}$;
- 集合划分的物种 Par;
- 子集的物种 $\wp$;
- 自映射物种的物种 End;
- 置换的物种 $\mathcal{S}$;
- 循环排列的物种 $\mathcal{C}$;
- 线性序（或全序）的物种 L ;
- 集合的物种 E，即 $E[U] = \{U\}$ 对于每个有限集 U;
- 基数为 n的集合的物种 E_n，即 $E_n[U] = \{U\}$ 若 $|U| = n$，否则 $E_n[U] = \emptyset$;
- 单元素集的物种 X ，即 $X[U] = \{U\}$ 若 $|U| = 1$ ，否则 $X[U] = \emptyset$;
- 空集的特征物种 1，即 $1[\emptyset] = \{\emptyset\}$ 并且 $1[U] = \emptyset$ 若 $|U| > 0$;
- 空物种 0，定义为：对于所有有限集 U，均有 $0[U] = \emptyset$ 。

我们暂且稍作停顿，谈谈置换。

记号 4.2.9。 设 σ 是有限集 U上的一个置换。那么， σ 的循环类型是序列 $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots)$，其中每个 σ_j 表示 σ的不交循环分解中大小为 j的循环数。特别地，$\mathbf{fix}(\sigma) = \sigma_1$ 是 σ固定的 U 中的元素数。由于我们讨论的是有限集，可以忽略序列末尾的零，并将循环类型记为 $(\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_n)$，其中 n 大于或等于σ中循环的最大长度。

引理 4.2.10. 设 σ、 $\tau \in S_n$ 是置换。那么 $\mathcal{S}[\sigma](\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$。

证明. 设 τ 的（唯一）不交循环分解为 $(t_1 \ldots t_{k_1})(t_{k_1+1} \ldots t_{k_2}) \cdots$。我们要证明方程

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \mathcal{S}[\sigma](\tau) := (\sigma(t_1) \ldots \sigma(t_{k_1}))(\sigma(t_{k_1+1}) \ldots \sigma(t_{k_2})) \cdots .$$

给定 $j \in [n]$，由于 σ 是双射，对于某个 $i \in [n]$，我们有 $j = \sigma(i)$。不失一般性，假设 $j = \sigma(t_1)$。从右边可得 $\mathcal{S}[\sigma](\tau)(\sigma(t_1)) = \sigma(t_2)$。另一方面，由 $\tau(t_1) = t_2$，可得 $\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(t_1)) = \sigma\tau(t_1) = \sigma(t_2)$。 □

现在我们开始寻找一种方法，将第3.3节中对图所做的工作推广开来。为此，我们必须定义三个级数，以及有标号结构和无标号结构的概念。由于所有传输都是双射， $F[U]$的基数只取决于 U的基数，因此可以假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $U = [n]$。为简化记号，我们将用 $F[n]$ 代替 $F[[n]]$。

定义 4.2.11. 设 F 是一个结构物种。带标号的 F-结构是某个有限集 U的$F[U]$中的一个元素 s。

定义 4.2.12. 设 F 是一个结构物种。不带标号的 F-结构是某个有限集 U上 $F[U]$的结构的一个同构类型。

定义 4.2.13. 设 F 是一个结构物种。 F的（指数）生成级数是幂级数

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!}$$

其中 $f_n = |F[n]|$。此级数枚举带标号的 F-结构。

定义 4.2.14. 设 F 是一个结构物种。 F 的（同构）类型生成级数是幂级数

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{f_n} x^n$$

~其中 f_n是 $F[n]$的同构类型（不带标号的 F-结构）的数量。更准确地说，对于 s_1, $s_2 \in F[n]$，当且仅当 s_1和 s_2是定义在 $[n]$上的同构 F-结构时，记作 $s_1 \sim s_2$；那么 $\sim\sim$ 是 $F[n]$上的一个等价关系，而 f_n 恰好是 $\sim$的等价类数量。

定义 4.2.15。 设 F 是一个结构物种。 F 的 循环指标 是级数

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{fix}(F[\sigma]) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \ldots$$

其中 S_n 是作用在 $[n]$上的对称群。

如果不了解物种上的运算，就只能在一些简单的情形下计算这些级数。

例 4.2.16。 以下生成级数可通过直接枚举验证。

- $L(x) = \frac{1}{1-x}$，因为 n 个元素共有 $n!$种可能的线性序；
- $\mathcal{S}(x) = \frac{1}{1-x}$，因为在作用于 $[n]$的对称群中有 $n!$ 个置换；
- $\mathcal{C}(x) = -\log(1-x)$，因为在含有 n 个元素的集合上有 $(n-1)!$ 个循环，且 $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$；
- $E(x) = e^x$，因为对于任意有限集 U， $E[U]$ 中只有一个元素；
- $\wp(x) = e^{2x}$，因为 $[n]$有 2^n 个子集；
- $X(x) = x$；
- $1(x) = 1$；

- $0(x)=0$;
- $\mathcal{G}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\binom{n}{2}}\frac{x^n}{n!}$，因为边集合有 $2^{\binom{n}{2}}$ 种可能的选择；
- $\mathrm{End}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^n\frac{x^n}{n!}$，因为 $[n]^{[n]}$ 中有 n^n 个函数。

Exam例 4.2.17. 以下类型生成级数可通过直接枚举验证。

- $\widetilde{L}(x)=\frac{1}{1-x}$，因为所有在 n 个元素上的线性序都同构；
- $\widetilde{\mathcal{S}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}$，其中 $p(n)$ 是 n 的划分数，因为两个置换同构当且仅当它们具有相同的循环类型；$\sim$
- $\mathcal{C}(x)=\frac{x}{1-x}$通过与上述相同的论证；
- $\widetilde{E}(x)=\frac{1}{1-x}$，因为对于任意有限集 U，$E[U]$ 中只有一个元素；$\sim$
- $X(x)=x$;
- $\widetilde{1}(x)=1$;
- $\widetilde{0}(x)=0$。

注意，线性序和置换的生成级数相同，但类型生成级数不同。这种差异源于同构的性质。

例 4.2.18。 以下是一些物种的循环指标 。

- $Z_0(x_1,x_2,...)=0$;
- $Z_1(x_1,x_2,...)=1$;
- $Z_X(x_1,x_2,...)=x_1$;
- $Z_L(x_1,x_2,...)=\frac{1}{1-x_1}$;
- $Z_{\mathcal{S}}(x_1,x_2,...)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x_k}$;
- $Z_E(x_1,\ x_2,\ .....)=\exp(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{i})$。

证明。 我们只证明最后三种情况，因为前三种显而易见。

- 给定任意线性序，它仅被恒等置换固定，因此**固定点**$(L[\sigma])\neq 0$ 当且仅当 $\sigma=Id$。于是我们有

$$Z_L(x_1,x_2,...)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathbf{fix}(L[\sigma])x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{fix}(L[Id_n])x_1^n=\sum_{n=0}^{\infty}x_1^n=\frac{1}{1-x_1}.$$

- 根据引理 4.2.10，置换 τ 属于 $\mathcal{S}[n]$，被 $\mathcal{S}[\sigma]$、$\sigma\in S_n$固定，当且仅当$\sigma\tau\sigma^{-1}=\tau$，或等价地，$\sigma\tau=\tau\sigma$。因此，$\mathbf{fix}(\mathcal{S}[\sigma])$ 等于 σ 在 S_n中的中心化子的序，而这又等于 $n!\,|\mathcal{C}_\sigma|$，其中 $\mathcal{C}_\sigma$ 表示 σ的共轭类。注意，两个置换在 S_n 中共轭，当且仅当它们具有相同的

循环类型。根据 [Wag20，定理 6.6.6]，， S_n 中循环类型为（a_1， a_2，……， a_n）的置换有 $n!\prod i^{a_i}a_i!$ 个。因此，$\mathbf{fix}(\mathcal{S}[\sigma]) = \prod_{j\geq 1} j^{\sigma_j}\sigma_j!$。由此可得

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{S}}(x_1, x_2, \ldots) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{fix}(\mathcal{S}[\sigma]) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{a_1+2a_2+ \\ +na_n=n}} \left[\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{a_i} a_i!} (\prod_{i=1}^{n} i^{a_i} a_i!) x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{a_1+2a_2+\ldots \\ +na_n=n}} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x_k}. \end{aligned}$$

- 给定有限集 U 上的任意置换 σ， $E[\sigma]$ 固定了 $E[U]$ 中唯一的元素，因此我们有

$$\begin{aligned} Z_E(x_1, x_2, \ldots) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma_1+2\sigma_2+\ldots \\ +n\sigma_n=n}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{\sigma_i}\sigma_i!} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \\ &= \sum_{\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \ldots} \prod_{i \geq 1} \frac{x_i^{\sigma_i}}{i^{\sigma_i}\sigma_i!} = \prod_{i \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{(x_i/i)^k}{k!} = \prod_{i \geq 1} \exp(\frac{x_i}{i}) = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{i}). \end{aligned}$$

□

与上一章一样，循环指标 在连接不同的枚举方法方面发挥着基础性作用。在物种研究中，它连接了带标号计数与非标号枚举。

定理 4.2.19. 对于任意结构物种 F，我们有 $F(x) = Z_F(x, 0, 0, \ldots)$，并且$\widetilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \ldots)$。

证明。 对于第一个等式，我们有 $Z_F(x, 0, 0, \ldots) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{固定}(F[\sigma]) x^{\sigma_1} 0^{\sigma_2+\sigma_3+\cdots}$，并且对每个 n，当且仅当 $\sigma_1 = n$ 时，这个第二个求和才非零，也就是说， $\sigma = Id_n$；因此$Z_F(x, 0, 0, \ldots) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \mathbf{固定}(F[Id_n]) x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} |F[n]| x^n = F(x)$。

对于第二个等式，考虑由 $s \sim t \iff s, t$ 同构所给出的等价关系 $\sim$。然后我们使用引理 3.1.5 来证明

$$Z_F(x, x^2, x^3, \ldots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{fix}(F[\sigma]) x^n = \sum_{n \geq 0} |F[n]/\sim| x^n = \widetilde{F}(x).$$

□

4.3 物种的相等与加法

在接下来的几节中，我们将介绍结构物种上的一些运算，并用它们来构造和枚举更复杂的物种。我们假设读者熟悉莫比乌斯反演（参见 [Wag20，第 8] 章）。首先，我们可能会问，何时两个结构物种本质上相同，也就是说，它们具有相同的组合性质。

定义 4.3.1. 如果两个物种 F, G 之间存在自然同构，就称它们（在组合意义上）相等，记作 $F \simeq G$ 或 $F = G$。也可以说 F 和 G 同构。

不过，需要注意的是，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 都满足 $|F[n]| = |G[n]|$，并不足以成为 F 和 G 同构的充分条件：例如，L 和 $\mathcal{S}$ 就具有这一性质，但它们并不同构。

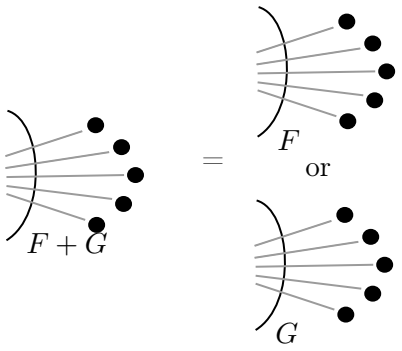
现在让我们开始介绍物种上的一些运算。第一个运算是加法。

定义 4.3.2. 设 F, G 为两个结构物种。物种 $F + G$ 称为F 与 G的和，其定义如下：有限集 U 上的一个（$F + G$）-结构，是指一个定义在 U上的F-结构，或者一个定义在 U上的 G-结构。更形式化地说，

$$(F + G)[U] = F[U] \sqcup G[U]$$

$$(F + G)[\sigma](s) = \begin{cases} F[\sigma](s), \text{if } s \in F[U], \\ G[\sigma](s), \text{if } s \in G[U]. \end{cases}$$

在图示中，这一运算可以直观地表示为



$F+G$的定义要求 $F[U] \cap G[U] = \emptyset$。如果情况并非如此，则必须先创建这些集合的不交副本。可以通过将 $F[U]$ 替换为 $F[U] \times \{1\}$，并将 $G[U]$ 替换为$G[U] \times \{2\}$来实现。然后我们定义 $(F + G)[U] = (F[U] \times \{1\}) \sqcup (G[U] \times \{2\})$.

加法运算在同构意义下满足结合律和交换律。此外，物种 0 是此运算的单位元，也就是说，对于任意结构物种 F、$F + 0 = 0 + F = F$。

定理 4.3.3. 设 F、G 是结构物种。那么

$$(F + G)(x) = F(x) + G(x);$$

$$\widetilde{(F + G)}(x) = \widetilde{F}(x) + \widetilde{G}(x);$$

$$Z_{F+G}(x_1, x_2, ...) = Z_F(x_1, x_2, ...) + Z_G(x_1, x_2, ...)$$

证明。 由定义立即可得。 □

在以下情形中，加法的概念可以推广到无穷和。

定义 4.3.4. 若一个物种族 $\{F_i\}_{i \in I}$ 满足：对于任意有限集 U，只有有限多个 i 使得 $F_i[U] \neq \emptyset$，则称该族可求和。在这种情况下，

$(\sum_{i\in I} F_i)[U] = \bigsqcup_{i\in I}(F_i[U]\times\{i\})$

$(\sum_{i\in I} F_i)[\sigma](s,i) = (F_i[\sigma](s),i)$

$(\sum_{i\in I} F_i)(x) = \sum_{i\in I} F_i(x)$

$(\widetilde{\sum_{i\in I} F_i})(x) = \sum_{i\in I} \widetilde{F}_i(x)$

$Z_{\sum_{i\in I} F_i}(x_1,x_2,...) = \sum_{i\in I} Z_{F_i}(x_1,x_2,...)$

可求和物种族的定义使我们能够为任意结构物种定义一个规范分解。

定义 4.3.5. 对于每个结构物种 F，都存在一个可枚举的可求和物种族 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其定义为：当 $|U|=n$ 时，$F_n[U]=F[U]$；否则为 $F_n[U]=\emptyset$。其传输由 F 的传输自然地诱导。于是我们有 $F=F_0+F_1+F_2+\ldots$。我们还用 F_+ 表示物种 $F_1+F_2+\ldots$。

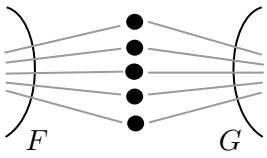
加法的另一种用途是将自然数集引入为结构物种。

定义 4.3.6. 对于所有 $\mathbf{n}\in\mathbb{N}$，都可以定义物种 $n := 1+1+\ldots+1$，即将物种 **1** 相加恰好 **n** 次。物种 n 在空集上有 **n** 个结构，在基数大于零的集合上没有结构，而且这些结构两两不同构。

4.4 两种乘积

将要介绍的第二种运算是叠加，也称为笛卡儿积。

定义 4.4.1。设 F,G 是两个结构物种。那么，$F\times G$，即 F 与 G 的叠加，定义如下：有限集 U 上的一个 $(F\times G)$-结构是一个对 $s=(f,g)$，其中 $f\in F[U]$ 且 $g\in G[U]$，其传输由 $(F\times G)[\sigma](f,g) = (F[\sigma](f)\ G[\sigma](g))$ 给出。以下图示直观地展示了这些结构。



为了将 $F\times G$ 的级数与 F 和 G 的级数联系起来，我们需要定义级数的阿达玛积。

定义 4.4.2. 令 $\mathcal{X}=(x_1,x_2,...)$ 为一个变量序列。给定一个仅含有限个非零项的自然数序列 $\mathcal{N}=(n_1,n_2,...)$，令 $\mathcal{X}^{\mathcal{N}} = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots$ 和 $\mathrm{aut}(\mathcal{N}) = 1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\ldots$。现在，若 $f(\mathcal{X}) = \sum_{\mathcal{N}} f_{\mathcal{N}}\ \frac{\mathcal{X}^{\mathcal{N}}}{\mathrm{aut}(\mathcal{N})}$ 且 $g(\mathcal{X}) = \sum_{\mathcal{N}} g_{\mathcal{N}}\ \frac{\mathcal{X}^{\mathcal{N}}}{\mathrm{aut}(\mathcal{N})}$，我们定义

$$(f\times g)(\mathcal{X}) = \sum_{\mathcal{N}} f_{\mathcal{N}} g_{\mathcal{N}} \frac{\mathcal{X}^{\mathcal{N}}}{\mathrm{aut}(\mathcal{N})}.$$

设 F 是一个结构物种，$n \in \mathbb{N}$ 和 σ_1，$\sigma_2 \in S_n$。假设 σ_1 和 σ_2 在 S_n 中共轭。那么存在 $\tau \in S_n$，使得 $\tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma_2$。由于 F 是一个函子，因此我们有 $F[\tau]F[\sigma_1]F[\tau]^{-1} = F[\sigma_2]$，从而 $F[\sigma_1]$ 和 $F[\sigma_2]$ 是作用于 $F[n]$ 上的共轭置换。根据引理 4.2.10，共轭置换具有相同的循环结构，由此可得 $\mathbf{fix}(F[\sigma_1]) = \mathbf{fix}(F[\sigma_2])$。因此，将共轭置换归为一组后，我们可以将循环指标重写为

$$Z_F(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{a_1+2a_2+\ldots \\ +na_n=n}} \mathbf{fix}(F[\sigma]) \frac{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}}{\prod_{i=1}^n i^{a_i} a_i!}, \tag{4.1}$$

其中，$\sigma \in S_n$ 是任意一个循环类型为（a_1，a_2，……，a_n）的置换。因此，我们得到了一个与上述定义的记号一致的循环指标 描述。

定理 4.4.3。设 F、G 为结构物种。则

$$(F \times G)(x) = F(x) \times G(x)$$

$$\widetilde{(F \times G)}(x) = (Z_F \times Z_G)(x, x^2, x^3, \ldots)$$

$$Z_{F\times G}(x_1, x_2, \ldots) = Z_F(x_1, x_2, \ldots) \times Z_G(x_1, x_2, \ldots)$$

证明。只需证明最后一个等式即可，这显然成立，因为一个 $(F \times G)$-结构是固定的，当且仅当构成它的两个结构都分别是固定的，因此 $\mathbf{fix}((F \times G)[\sigma]) = \mathbf{fix}(F[\sigma])\mathbf{fix}(G[\sigma])$，于是

$$\begin{aligned} Z_{F\times G}(x_1, x_2, \ldots) &= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{a_1+2a_2+\ldots \\ +na_n=n}} \mathbf{fix}((F \times G)[\sigma]) \frac{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}}{\prod_{i=1}^n i^{a_i} a_i!} \\ &= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{a_1+2a_2+\ldots \\ +na_n=n}} \mathbf{fix}(F[\sigma])\mathbf{fix}(G[\sigma]) \frac{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}}{\prod_{i=1}^n i^{a_i} a_i!} \\ &= Z_F(x_1, x_2, \ldots) \times Z_G(x_1, x_2, \ldots). \end{aligned}$$

□

叠合的单位元是集合物种 E，也就是说，对于任意物种 F, $E \times F = F \times E = F$，并且 $E_n \times F = F \times E_n = F_n$。然而，笛卡儿积的情形下消去律并不成立，也就是说，$A \times B = A \times C$ 并不意味着 $B = C$。例如，可以证明 $L \times L = L \times \mathcal{S}$，但 $L \neq \mathcal{S}$。

现在让我们继续讨论下一个运算：乘积。

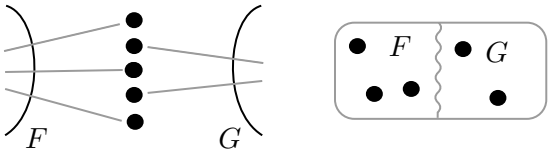
定义 4.4.4。设 F, G 为结构物种。物种 $F \cdot G$（也记作 FG）称为 F 与 G 的乘积，定义如下：有限集 U 上的一个 FG-结构是一个有序对 $s = (f, g)$，其中 $f \in F[U_1]$、$g \in G[U_2]$、$U_1 \cup U_2 = U$ 和 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$。换句话说，

$$(FG)[U] = \sum_{U_1 \sqcup U_2 = U} (F[U_1] \times G[U_2])$$

且传输由以下公式给出：

$$(FG)[\sigma](f, g) = (F[\sigma|_{U_1}](f), G[\sigma|_{U_2}](g))$$

在图示中， FG-结构可以通过以下两种方式呈现：



物种的乘积在同构意义下是结合且交换的，物种 $\mathbf{1}$ 是单位元，即 $1F = F1 = F$。此外，$0F = F0 = 0$，乘法对加法满足分配律。

定理 4.4.5. 设 F, G 是结构物种。那么

$$(FG)(x) = F(x)G(x)$$

$$\widetilde{(FG)}(x) = \widetilde{F}(x)\widetilde{G}(x)$$

$$Z_{FG}(x_1, x_2, ...) = Z_F(x_1, x_2, ...)Z_G(x_1, x_2, ...)$$

证明. 只需证明第三个等式。注意，当且仅当一个 FG-结构的两个部分都被某个置换固定时，该结构才被这个置换固定。因此，为使置换 σ of$[n] = U_1 \sqcup U_2$ 固定 $F[U_1] \times F[U_2]$ 中的一个结构，必须有 $\sigma(U_1) = U_1$ 和 $\sigma(U_2) = U_2$。利用从 $[n]$ 中选取基数为 i 的子集 U_1 的方法数为 $\binom{n}{i}$，可得

$$Z_{FG}(x_1, x_2, ...) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{U_1 \sqcup U_2 = [n]} \sum_{\sigma^1 \in S(U_1)} \sum_{\sigma^2 \in S(U_2)} \mathbf{fix}(F[\sigma^1])\mathbf{fix}(G[\sigma^2]) x_1^{\sigma_1^1+\sigma_1^2} x_2^{\sigma_2^1+\sigma_2^2} \dots$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0}} \binom{n}{i} \sum_{\sigma^1 \in S_i} \mathbf{fix}(F[\sigma^1]) x_1^{\sigma_1^1} x_2^{\sigma_2^1} ... \sum_{\sigma^2 \in S_j} \mathbf{fix}(G[\sigma^2]) x_1^{\sigma_1^2} x_2^{\sigma_2^2} \dots$$

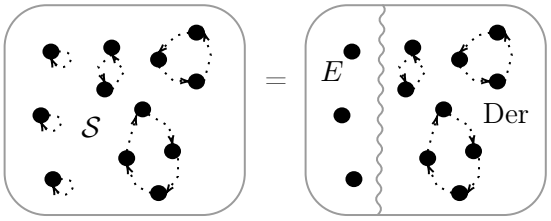
$$= \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma^1 \in S_i} \mathbf{fix}(F[\sigma^1]) x_1^{\sigma_1^1} x_2^{\sigma_2^1} ... \sum_{\sigma^2 \in S_j} \mathbf{fix}(G[\sigma^2]) x_1^{\sigma_1^2} x_2^{\sigma_2^2} \dots$$

$$= \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!} \sum_{\sigma^1 \in S_i} \mathbf{fix}(F[\sigma^1]) x_1^{\sigma_1^1} x_2^{\sigma_2^1} ... \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} \sum_{\sigma^2 \in S_j} \mathbf{fix}(G[\sigma^2]) x_1^{\sigma_1^2} x_2^{\sigma_2^2} ... = Z_F(x_1, x_2, ...)Z_G(x_1, x_2, ...).$$

□

We 现在可以利用最后这个定理，对分解为乘积的结构进行计数。

例 4.4.6。 置换可以看作不动点的集合与一个错排（没有不动点的置换）并列组成。



于是我们可以写出 $\mathcal{S} = E \cdot \mathbf{Der}$，并且由于我们已经有了 $\mathcal{S}$ 和 E的级数，利用它求出 Der 的级数，并证明著名的错排公式： $d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i n!\, i!$ 。

我们有

$\frac{1}{1-x} = e^x \mathrm{Der}(x)$

$\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^k} = \frac{1}{1-x}\widetilde{\mathrm{Der}}(x)$

$\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x_k} = e^{x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\cdots} Z_{\mathrm{Der}}(x_1, x_2, \ldots)$

经过简单计算，我们得到

$\mathrm{Der}(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

$\widetilde{\mathrm{Der}}(x) = \prod_{k\geq 2} \frac{1}{1-x^k}$

$Z_{\mathrm{Der}}(x_1, x_2, \ldots) = e^{-(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots)} \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x_k}$

由上面的第一个公式，我们推出

$$\sum_{n\geq 0} d_n \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j\geq 0} x^j\right) \implies d_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i n!}{i!}.$$

例 4.4.7。给定一个集合 U，其子集 $V \subseteq U$ 也可视为一个有序对 $(V, U \setminus V)$。这给出了组合恒等式 $\wp = E \cdot E = E^2$，由此可得公式 $\wp(x) = e^{2x}$，也为以下事实提供了另一种证明：一个含有 n 个元素的集合有 2^n 个可能的子集。我们还可以考虑由基数为 k 的子集构成的子物种 $\wp^{[k]} = E_k \cdot E$，由此得到 $\wp^{[k]}(x) = e^x \frac{x^k}{k}!$，展开后为 —

$$\sum_{n\geq 0} |\wp^{[k]}[n]| \frac{x^n}{n!} = \sum_{m\geq 0} \frac{x^{m+k}}{m!k!} = \sum_{n\geq k} \frac{x^n}{k!(n-k)!} \implies |\wp^{[k]}[n]| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},$$

回到二项式系数的定义。由于 $\wp = \sum_{k=0}^{n} \wp^{[k]}$，我们得到了著名恒等式 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ 的一个证明。

例 4.4.8. 给定一个物种 F，有 $nF = F + F + \ldots + F(n$ 项)。

例 4.4.9. 一个由 n 个元素构成的线性序可以看作由单元素集合组成的一个有序 n 元组，由此可得恒等式 $L_k = X^k$。

4.5 物种的复合

接下来，我们介绍下一个运算：复合。

定义 4.5.1. 设 F, G 为两个满足 $G[\emptyset] = \emptyset$ 的结构物种。物种 $F \circ G$（也记作 $F(G)$），称为 G 在 F中的（划分）复合物种，定义如下：有限集 U 上的一个 $F \circ G$-结构是一个三元组 $s = (\pi, \varphi, \gamma)$，其中

i) π 关于 U的一个划分；

ii) φ π的部分集合上的一个 F-结构；

iii) $\gamma = \{\gamma_p\}_{p\in\pi}$ 个 G结构的族，其中对于每个 $p \in \pi$， γ_p 是一个 G上的结构 p.

换言之,

$$(F \circ G)[U] = \sum_{\pi \in \mathrm{Par}[U]} (F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p])$$

而传输由下式给出

$$(F \circ G)[\sigma](\pi, \varphi, \gamma) = (\overline{\pi}, \overline{\varphi}, \{\overline{\gamma}_{\overline{p}}\}_{\overline{p} \in \overline{\pi}}),$$

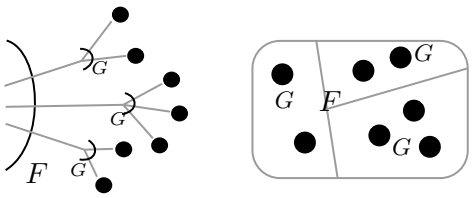
其中

i) $\overline{\pi}$ 是沿着 σ传输 π 所得的划分;

ii) 对每个$p \equiv \sigma(p) \in \pi$,$\overline{\gamma}_p$ 都是沿着 $\sigma|_p$对 γ_p 进行 G-传输所得的 G-结构;

iii) $\overline{\varphi}$是沿着双射 $\sigma\colon \pi \to \pi$对 φ进行 F-传输所得的 F-结构，该双射由σ诱导。

$F \circ G$-结构也可以解释为由 G-结构构成的 F-组装。当 $F = E$时，我们简称为组装，而不说 E-组装。通过图示更容易理解这些概念。



复合的单位元是单元素集物种 X，也就是说，对于所有物种 F，都有 $F = F(X) = X(F)$。此外，复合是结合的（在同构意义下）。

复合的定义自然地扩展到指数生成级数和循环指标，但无法以如此简单的方式扩展到类型生成级数。对此的证明不像其他情况那样直接。

定理 4.5.2. 设 F, G 是满足 $G[\emptyset] = \emptyset$ 的结构物种。那么

$$(F \circ G)(x) = F(G(x))$$

$$\widetilde{(F \circ G)}(x) = Z_F(\widetilde{G}(x), \widetilde{G}(x^2), \widetilde{G}(x^3), \ldots)$$

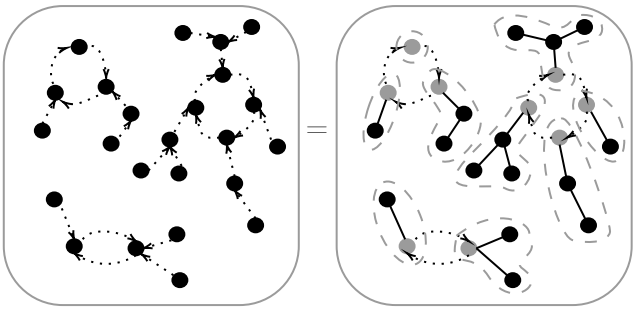
$$Z_{F \circ G}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = Z_F(Z_G(x_1, x_2, x_3, \ldots), Z_G(x_2, x_4, x_6, \ldots), Z_G(x_3, x_6, x_9, \ldots), \ldots)$$

证明。只需证明第三个等式。这需要对循环指标作出刻画，相关内容见 [BLL98，第 4.3] 节。

□

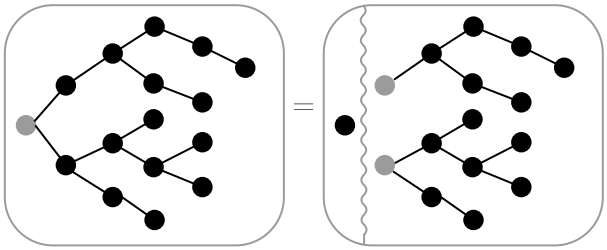
现在来看一些物种复合的例子。

例 4.5.3。一个自映射可以看作有根树的置换，如下图所示。



用数学术语来说，这表示为 $\mathsf{End} = \mathcal{S} \circ \mathcal{A}$。

例 4.5.4。 一棵有根树可以看作一个单元素集合和有根树的组装，即 $\mathcal{A} = X \cdot E(\mathcal{A})$。



例 4.5.5。 一个划分可以看作非空集合的集合，即 $\mathsf{Par} = E(E_+)$。这给出了一个枚举划分的公式：$\mathsf{Par}(x) = e^{e^x - 1}$。

定义 4.5.6。 莫比乌斯函数 $\mu\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ if } n = 1; \\ (-1)^r, \text{ if } n \text{ is a product of } r \text{ distinct primes}; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

该函数满足以下性质。

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在 $n = 1$ 的情形下，这一点显然。对于 $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} > 1$，我们有

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 \cdots p_r} \mu(d) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} = 0.$$

引理 4.5.7 （莫比乌斯反演，级数版本）。 设 $a(x_1, x_2, \ldots)$ $b(x_1, x_2, \ldots)$ 是两个幂级数。记 $a_k = a(x_k, x_{2k}, \ldots)$ $b_k = b(x_k, x_{2k}, \ldots)$。则

$$b_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} a_k \iff a_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} b_k.$$

证明。 假设左边的方程成立。那么

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} b_k = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{d \geq 1} \frac{1}{d} a_{dk} = \sum_{k \geq 1} \mu(k) \sum_{d \geq 1} \frac{1}{dk} a_{dk} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} a_n \sum_{k|n} \mu(k) = a_1.$$

现在假设右侧的方程成立。那么

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}a_k=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\sum_{d\geq 1}\frac{\mu(d)}{d}b_{dk}=\sum_{k\geq 1}\sum_{d\geq 1}\frac{\mu(d)}{dk}b_{dk}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}b_n\sum_{d|n}\mu(d)=b_1.$$

□

例4.5.8。 置换是循环的组装，即 $\mathcal{S}=E(\mathcal{C})$。这为恒等式 $\mathcal{C}(x)=-\log(1-x)$提供了另一种证明，因为它源自$\frac{1}{1-x}=\mathcal{S}(x)=e^{\mathcal{C}(x)}$。这也使我们能够利用莫比乌斯反演计算循环物种的循环指标 。

$$\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x_k}=\exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}Z_{\mathcal{C}}(x_k,x_{2k},\ldots)\right)\implies\log\left(\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x_k}\right)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}Z_{\mathcal{C}}(x_k,x_{2k},\ldots)$$

$$\implies Z_{\mathcal{C}}(x_1,x_2,\ldots)=\sum_{k\geq 1}\frac{\mu(k)}{k}\log\left(\prod_{s\geq 1}\frac{1}{1-x_{ks}}\right)=\sum_{k\geq 1}\sum_{s\geq 1}\frac{\mu(k)}{k}\log\frac{1}{1-x_{ks}}.$$

这个级数可以改写为

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{d|k}\frac{\mu(k/d)}{k/d}\log\frac{1}{1-x_k}=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\log\left(\frac{1}{1-x_k}\right)\sum_{d|k}d\mu(k/d)=\sum_{k\geq 1}\frac{\phi(k)}{k}\log\frac{1}{1-x_k},$$

~其中 ϕ 是欧拉函数。取例4.2.17中的 $\mathcal{C}(x)$，还可得到漂亮的恒等式

$$\frac{x}{1-x}=\sum_{k\geq 1}\frac{\phi(k)}{k}\log\frac{1}{1-x^k}.$$

物种的复合还为定义连通结构提供了一种恰当的方法。

定义4.5.9。 设 F是一个结构物种。则连通 F结构的物种 F^c定义为满足 $F=E(F^c)$的物种。

这自然给出了以下级数。

$F(x)=e^{F^c(x)}$

$\widetilde{F}(x)=\exp\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\widetilde{F^c}(x^k)$

$Z_F(x_1,x_2,\ldots)=\exp\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}Z_{F^c}(x_k,x_{2k},\ldots)$

与例4.5.8一样，利用莫比乌斯反演，我们可以从原始物种正确计算出任意连通结构物种的级数。

$F^c(x)=\log F(x)$

$\widetilde{F^c}(x)=\sum_{k\geq 1}\frac{\mu(k)}{k}\log\widetilde{F}(x^k)$

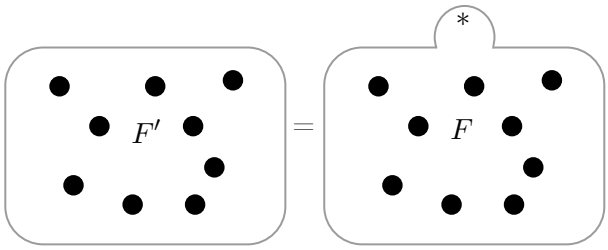
$Z_{F^c}(x_1,x_2,\ldots)=\sum_{k\geq 1}\frac{\mu(k)}{k}\log Z_F(x_k,x_{2k},\ldots).$

还值得一提的是，还存在第二种物种的复合，即函子复合，记作 $F\Box G$。感兴趣的读者可在 [BLL13, 第 2 节4] 中了解更多信息。

4.6 导数与指点

接下来介绍导数运算。

定义 4.6.1. 设 F为一个结构物种。 F的导数，记作 F'或 $\frac{d}{dX}F(X)$，定义如下：有限集U上的一个 F'-结构，是集合 $U^+ := U \sqcup \{*\}$上的一个 F-结构，其中 $* = *_U$是 U之外的一个元素。换言之， $F'[U] = F[U^+]$，沿着 $\sigma\colon U \to V$的传输由 $F'[\sigma] = F[\sigma^+]$给出，其中 $\sigma^+\colon U^+ \to V^+$满足 $\sigma^+|_U = \sigma$和$\sigma^+(*_U) = *_V$。用图示表示，这相当于



也可以将一个 F'-结构看作带有一个空位的 F-结构，并将 $*$ 与移除一个顶点联系起来。

自然数集

此外，导数可扩展到指数生成级数和循环指标。 .

定理 4.6.2. 设 F 是一个结构物种。则

$$F'(x) = \tfrac{d}{dx}F(x)$$

$$\widetilde{F'}(x) = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}Z_F\right)(x, x^2, x^3, ...)$$

$$Z_{F'}(x_1, x_2, x_3, ...) = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}Z_F\right)(x_1, x_2, x_3, ...)$$

证明。 只需证明第三个等式。我们有

$$Z_{F'}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathbf{fix}(F'[\sigma])x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathbf{fix}(F[\sigma^+])x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots \quad (4.2)$$

考虑一个非负整数序列 $\alpha = (a_1, a_2, ..)$。如果 $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = n$且 $a_k = 0$对于 $k > n$，我们称 α划分 n，并记作 $\alpha \vdash n$。如果 $\alpha \vdash n$，我们用记号 σ_α表示一个作用于 $[n]$且循环类型为 α的置换，并将作用于 $[n+1]$、循环类型为 $(a_1 + 1, a_2, a_3, ..)$，且限制在 $[n]$上时等于 σ_α的置换记作 σ_α^+。那么

$$(4.2) = \sum_{n\geq 0}\sum_{\alpha\vdash n}\mathbf{fix}(F[\sigma_\alpha^+])\frac{1}{\prod i^{a_i}a_i!}x_1^{a_1}x_2^{a_2}... = \frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{n\geq 0}\sum_{\alpha\vdash n+1}\mathbf{fix}(F[\sigma_\alpha])\frac{1}{\prod i^{a_i}a_i!}x_1^{a_1}x_2^{a_2}...$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{n\geq 1}\sum_{\alpha\vdash n}\mathbf{fix}(F[\sigma_\alpha])\frac{1}{\prod i^{a_i}a_i!}x_1^{a_1}x_2^{a_2}... = \frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\sum_{\alpha\vdash n}\mathbf{fix}(F[\sigma_\alpha])\frac{n!}{\prod i^{a_i}a_i!}x_1^{a_1}x_2^{a_2}...$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathbf{fix}(F[\sigma])x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}... = \frac{\partial}{\partial x_1}(Z_F - \text{const.})(x_1, x_2, ...) = \frac{\partial}{\partial x_1}Z_F(x_1, x_2, ...)$$

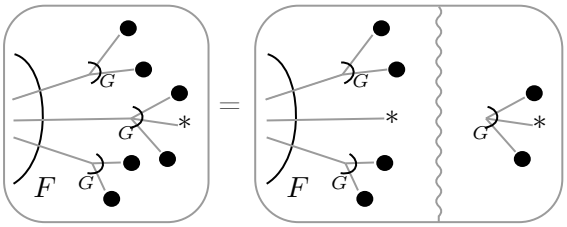
因为该导数和中唯一非零的部分是满足 $a_1 > 0$ 的部分，而且我们可以看出，新的 σ_α 就是旧的 σ_α^+。 □

定理 4.6.3. 对于物种的导数，加法、乘积和链式法则仍然成立。

证明。 加法法则指出 $(F+G)' = F' + G'$。这直接由物种加法的定义得出。

乘积法则指出 $(FG)' = F'G + FG'$。注意，在一个 $(FG)'$结构$s = (f,\ g)$中，$*$ 元素要么属于 f，要么属于 g。

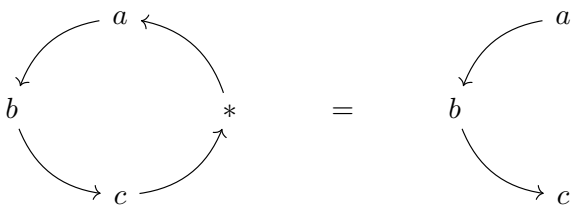
链　法则指出 $(F \circ G)' = F'(G) \cdot G'$。用一幅图来说明最为直观 e:



□

现在来看一些结构导数的具体例子。

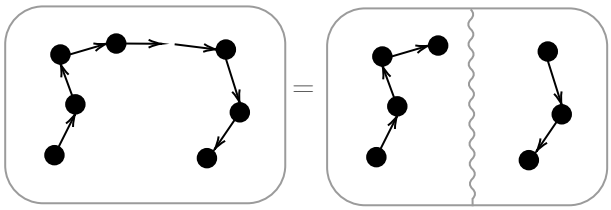
例 4.6.4。 循环的导数是一个线性序，也就是 $L = C'$。这可以通过移除元素 $*$ 得到；反过来，也可以在最大元素和最小元素之间加入 $*$。下图对此作了更清晰的展示。



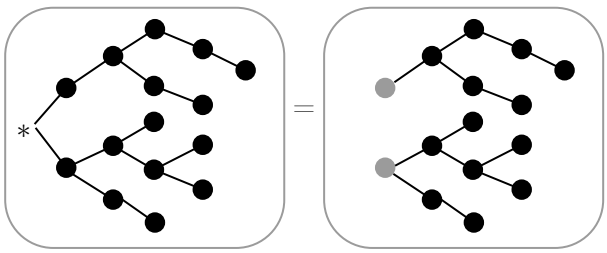
例 4.6.5。 集合的导数是一个集合，即 $E' = E$。这给出了经典恒等式 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ 的组合版本。

—

例 4.6.6. 线性序的导数是一个由线性序构成的有序对，也就是说，$L' = L^2$。下图以更清晰的方式展示了这一点。

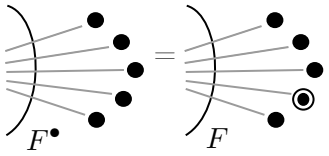


例 4.6.7。 树的导数是一个（有根）森林，也就是一个有根树的集合。这可表示为 $\mathfrak{a}' = E(\mathcal{A})$。以下图示能更清楚地说明这一点。



现在我们可以继续讨论最后一种运算：指点。

定义 4.6.8. 设 F 是一个结构物种。那么，物种 $F^\bullet$称为 F-点积，定义如下：有限集 U上的一个 $F^\bullet$-结构是一个有序对 $s = (f, u)$，其中 $f \in F[U]$且 $u \in U$。沿 σ的传输定义为 $F^\bullet[\sigma](f, u) = (F[\sigma](f)\ \sigma(u))$。有序对 (f, u) 称为带指点的F-结构。图示如下。



带指点结构的枚举满足方程 $|F^\bullet[n]| = n|F[n]|$。指点操作对应于微分算子 $x\frac{d}{dx}$，这一点在下面的定理中体现得更加清楚。 —

定理 4.6.9. 设 F 是一个结构物种。那么

$$F^\bullet(x) = x\tfrac{d}{dx}F(x)$$

$$\widetilde{F^\bullet}(x) = x\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}Z_F\right)(x, x^2, x^3, ...)$$

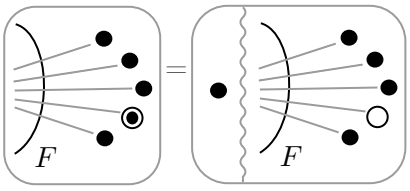
$$Z_{F^\bullet}(x_1, x_2, x_3, ...) = x_1\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}Z_F\right)(x_1, x_2, x_3, ...)$$

证明。 只需证明第三个等式。为此，设 $\sigma \in S_n$ 是一个置换。当且仅当底层 F-结构以及被指点的元素都不变时， $F^\bullet$-结构才在 $F^\bullet[\sigma]$ 作用下保持不变。这意味着，对于每个在 $F[\sigma]$作用下保持不变的 F-结构，都有 σ_1 个保持不变的 $F^\bullet$-结构，也就是说，$\mathbf{fix}(F^\bullet[\sigma]) = \sigma_1\mathbf{fix}(F[\sigma])$。因此，

$$\begin{aligned} Z_{F^\bullet}(x_1, x_2, \ldots) &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathbf{fix}(F^\bullet[\sigma])x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma_1\mathbf{fix}(F[\sigma])x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots \\ &= x_1\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathbf{fix}(F[\sigma])\sigma_1 x_1^{\sigma_1-1}x_2^{\sigma_2}\ldots = x_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}Z_F\right)(x_1, x_2, \ldots). \end{aligned}$$

□

有两种方式可以用其他运算来表示指点。第一种也是更清晰的一种，是将一个带指点的 F-结构看作一个 F'-结构与一个单元素集合的配对，这一点从下面的图中可以清楚看出。



这转化为方程 $F^\bullet = X \cdot F'$，清晰地展示了上述定理。通过其他运算理解指点的第二种方式来自笛卡儿积。由于对一个 $(F \times G)$-结构进行指点，可以看作分别对两个结构进行指点，再将它们配对，因此我们有分配律 $(F \times G)^\bullet = F^\bullet \times G = F \times G^\bullet$。由

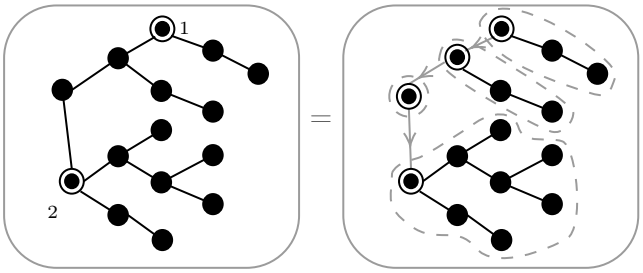
此，由于对于任意物种 F， $F = F \times E$，我们有 $F^\bullet = (F \times E)^\bullet = F \times E^\bullet = F \times (X \cdot E)$，并且可以将指点写成这两个乘积的组合。

现在来看几个指点的实例。

例 4.6.10. 有根树可以看作带有一个指点元素（即根）的树。由此可得组合恒等式 $\mathcal{A} = \mathfrak{a}^\bullet$。

例 4.6.11. 指点可用于枚举 α_n 个顶点的树的数量。考虑脊椎动物物种 $\mathcal{V} = \mathfrak{a}^{\bullet\bullet}$。由此可得恒等式 $\nu_n = n^2 \alpha_n$。

$\mathcal{V}$-结构也可以看作带有两个选定点（不一定互不相同，但有序）的树。由此得到恒等式 $\mathcal{V} = L_+(\mathcal{A})$，如下图所示。



由于我们只关心基数，可以用与 L_+ 等势的 $\mathcal{S}_+$ 替换它；又因为 $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \mathsf{End}$，所以对于 $n > 0$，脊椎动物的数量与自映射的数量相同；因此 $\nu_n = n^n$。回到树，对于 $n > 0$，有 n^{n-2} 棵树，其顶点数为 n，因此有 n^{n-1} 棵有根树。

4.7 多类型物种

本节将介绍多类型物种的概念，这一概念将在接下来的几章中发挥作用。

定义 4.7.1. A k-（多）集合是由集合构成的一个 k-元组 $U = (U_1, \ldots\ldots, U_k)$。$U_i$ 中的元素称为类型 i。如果对每个 $i = 1, \ldots\ldots, k$， U_i 都是有限集，我们就称 U 为有限 k-集合。

定义 4.7.2. k-集合之间的多值函数 $f : (U_1, \ldots\ldots, U_k) \to (V_1, \ldots\ldots, V_k)$ 是由函数构成的一个 k- 元组 $f = (f_1, \ldots\ldots, f_k)$，满足对每个 $i = 1, \ldots\ldots, k$， $f_i : U_i \to V_i$。多值函数的复合是逐分量进行的。如果每个分量函数 f_i 都是双射，我们就称 f 为双射多值函数。

定义 4.7.3. k类型物种是一个函子 F，它从由有限 k- $\mathbb{B}^k$ 集合及双射多值函数构成的范畴，映到由有限集合及双射构成的范畴。换言之， F 是一条规则，它将

i) 将每个有限的 k- $U =$集合 U_1、……、U_k，映到一个有限集合 $F[U_1, \ldots, U_k]$;

ii) 对每个双射多值函数 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) : (U_1, \ldots, U_k) \to (V_1, \ldots, V_k)$，都有一个双射 $F[\sigma_1, \ldots, \sigma_k] : F[U_1, \ldots, U_k] \to F[V_1, \ldots, V_k]$，使函子性条件得到满足，即，

$$F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma] \quad \text{and} \quad F[Id_U] = Id_{F[U]}.$$

定义 4.7.4。 k-类型物种 X_i 由类型为 i 的单元素集定义如下 s:

$$X_i[U] = \begin{cases} \{U\}, \text{ if } |U_i| = 1 \text{ and } |U_j| = 0 \text{ for all } j \neq i; \\ \emptyset, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

有时使用 X, Y, Z, T会比使用 X_1, X_2, X_3, X_4更方便。

记号 4.7.5。 如果 F是一个 k类型的物种，有时将它记作 $F(X_1, \ldots, X_k)$ 会更方便。此记号与本节稍后引入的复合相容。

例 4.7.6。 k类型物种的另一个例子是三色简单图物种，即顶点可取三种不同颜色的图。在这种情况下，沿多值函数进行的传输对应于在保留顶点颜色的同时重新标记顶点。

现在来看看上一节引入的运算如何扩展到 k类型物种。为此，我们必须先定义分割和划分。

定义 4.7.7。 k集合 U的一个 k集合分割是由两个 k集合 (V, W) 构成的有序对，使得 $V_i \cup W_i = U_i$且对每个 $i = 1, \ldots, k$都有 $V_i \cap W_i = \emptyset$。我们用 $\mathrm{Dis}[U]$ 表示 U的分割集合。

定义 4.7.8. 一个 k-集合的划分 π是一个 k-集合 $U = (U_1, \ldots, U_k)$ 的划分$U_1 \sqcup \ldots \sqcup U_k$。每个类 $C \in \pi$都可以看作一个带有 $C_i = C \cap U_i$的 k-集合。我们用 $\mathrm{Par}[U]$ 表示 U 的划分集合。

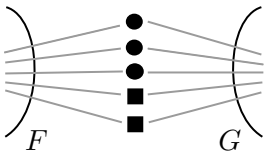
现在我们可以定义作用于 k-类型物种上的运算了。

定义 4.7.9. 两个 k-类型物种的加法定义为取它们的不交并，这与常规物种的情况相同。

定义 4.7.10. 两个 k 类型物种在 k 集合 U 上的乘积定义为。

$$(FG)[U] = \sum_{(V,W) \in \mathrm{Dis}[U]} (F[V] \times G[W]).$$

定义 4.7.11. 两个定义在一个 k-集合 $U = (U_1, \ldots, U_k)$ 上的 k-类型物种的笛卡儿积由 $(F \times G)[U_1, \ldots U_k] = F[U_1, \ldots, U_k] \times G[U_1, \ldots, U_k]$ 给出。下面的图示将使这一点更加清晰。



定义 4.7.12。设 $F(X_1, \ldots, X_m)$ 是一个 m-类型物种，且 $G_1, \ldots, G_m$是 m k-类型物种。那么复合 $F(G_1, \ldots, G_m)$ 是由下式定义的 k-类型物种。

$$F(G_1, \ldots, G_m)[U] = \sum_{\substack{\pi \in \mathrm{Par}[U] \\ \chi : \pi \to [m]}} (F[\chi^{-1}] \times \prod_{\substack{j \in [m] \\ C \in \chi^{-1}(j)}} G_j[C])$$

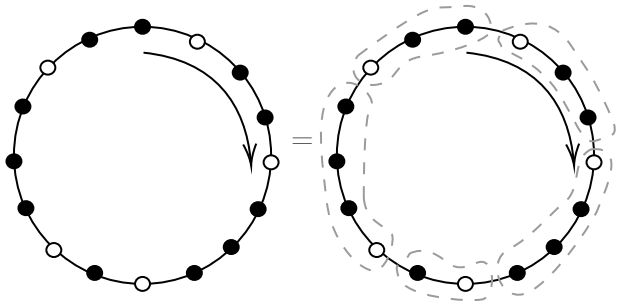
其中，对于每个函数 $\chi\colon \pi \to [m]$, χ^{-1}, m-集合为（$\chi^{-1}(1) \ldots, \chi^{-1}(m)$）。用文字来说，一个 $F(G_1, \ldots, G_m)$- 结构是一个 F- 结构，其中每个类型为 X_j 的元素都被转变成一个 G_j- 结构。

例 4.7.13。考虑两种元素种类 X 和 Y。一个 $(X+Y)$-结构是任一种类的单元素集合。若 F 是一个单类物种，则一个 $F(X+Y)$-结构是一个 F-结构，其底集 $U = U_1 \sqcup U_2$ 由两种元素组成，分别为 X 和 Y。事实上，根据复合的定义，我们有

$$F(X+Y)[U] = \sum_{\substack{\pi \in \mathrm{Par}[U] \\ \chi : \pi \to [1]}} (F[\chi^{-1}] \times \prod_{\substack{j \in [1] \\ C \in \chi^{-1}(j)}} (X+Y)[C]) = F[U_1 \sqcup U_2] \times \prod_{z \in U_1 \sqcup U_2} (X+Y)[\{z\}],$$

因为唯一使该乘积不为零的划分是最大划分。

例 4.7.14. 带有两种颜色珠子的循环物种 $\mathcal{C}(X+Y)$ 可以用方程 $\mathcal{C}(X+Y) = \mathcal{C}(X) + \mathcal{C}(Y\,L(X))$ 来描述。这反映了这样一个事实：如果循环中至少有一个颜色为 Y 的元素，那么它就可以看作链的循环，其中类型 Y 的唯一元素是第一个元素。下面的图将使这个方程更加清晰。



定义 4.7.15. 对于一个 k-类型物种，可以按以下方式定义偏导数：

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_j} F\right)[U_1, \ldots, U_k] = F[U_1, \ldots, U_j \sqcup \{*_j\}, \ldots, U_k]$$

通常的微积分法则依然适用。例如，对于二类物种，

$$\frac{\partial}{\partial X} F(G,H) = \frac{\partial F}{\partial X}(G,H) \cdot \frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y}(G,H) \cdot \frac{\partial H}{\partial X}.$$

Defi定义 4.7.16。 k-类型物种的偏指向定义为 $F^{\bullet_i} = X_i \frac{\partial}{\partial X_i} F$ —— .

对于每个运算，结构的传递以自然方式定义，就像对于常规的（单类型）物种一样。

这里我们将重点讨论二类物种，即具有两种不同元素种类的物种；不过，下文所示的级数可以很自然地推广到 k 类物种。为简化记号，我们将 $F[[n],[k]]$ 简写为 $F[n,k]$。

定义 4.7.17。 设 $F(X,\ Y)$ 是一个二类物种。那么，生成级数 $F(x,\ y)$、类型生成级数 $F(x,\ y)$，以及 循环指标 $Z_F(x_1,\ x_2,\ \ldots;\ y_1,\ y_2,\ \ldots)$ 定义如下：

$$F(x,y) = \sum_{n,k \geq 0} |F[n,k]| \frac{x^n}{n!} \frac{y^k}{k!}$$

$$\widetilde{F}(x,y) = \sum_{n,k \geq 0} |F[n,k]/\sim| x^n y^k$$

$$Z_F(x_1,x_2,\ldots;y_1,y_2,\ldots)=\sum_{n,k\geq 0}\frac{1}{n!k!}\sum_{\sigma\in S_n,\tau\in S_k}\mathbf{fix}(F[\sigma,\tau])x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots y_1^{\tau_1}y_2^{\tau_2}\ldots$$

其中，$\sim$ 是由 $s\sim t \iff (\exists\sigma)F[\sigma](s) = t$定义的等价关系。此外，下列关系成立，而且与之前相同，转化为级数的过程与运算相容。

$$F(x,y)=Z_F(x,0,\ldots;y,0,\ldots)$$

$$\widetilde{F}(x,y)=Z_F(x,x^2,\ldots;y,y^2,\ldots)$$

4.8 虚物种

本节将介绍一种方法，用以弥补物种空间中的一个缺陷：缺少定义恰当的减法和除法运算。

回想一下，半环是一种类似于环的代数结构，但不要求每个元素都必须有加法逆元。例如，自然数集在标准加法和乘法运算下构成一个半环。另一个例子是结构物种的集合（更准确地说，是自然同构的物种的等价类集合），其运算为加法和乘法。

定义 4.8.1。考虑结构物种的半环 $(\mathrm{Spe}\ +,\cdot)$。类比于从 $\mathbb{N}$构造 $\mathbb{Z}$ 的方式，我们将虚物种定义为商集中的一个元素

$$\mathrm{Virt}=(\mathrm{Spe}\times\mathrm{Spe})/\sim$$

其中，等价关系 $\sim$ 定义为

$$(F,G)\sim(H,K)\iff F+K=G+H.$$

我们用 $F-G$ 表示 (F,G) 关于 $\sim$的等价类。

$\sim$ 是等价关系这一事实依赖于物种加法的消去律。

命题 4.8.2。虚物种的集合 Virt 构成一个交换环 $(\mathrm{Virt}\ +,\cdot)$，其运算定义如下：

$$(F-G)+(H-K)=(F+H)-(G+K)$$

$$(F-G)\cdot(H-K)=(FH+GK)-(FK+GH)$$

单位元为 $0=(0-0)$ 和 $1=(1-0)$。$(F-G)$ 的加法逆元为 $(G-F)$。此外，存在一个显然的半环单射同态 $\mathrm{Spe}\to\mathrm{Virt}$，$F\mapsto F-0$。

定义 4.8.3. 设 $\Phi=F-G$ 是一个虚物种。那么与 Φ 相关联的级数定义如下

$$\Phi(x)=F(x)-G(x)$$

$$\widetilde{\Phi}(x)=\widetilde{F}(x)-\widetilde{G}(x)$$

$$Z_\Phi(x_1, x_2, \ldots) = Z_F(x_1, x_2, \ldots) - Z_G(x_1, x_2, \ldots)$$

容易验证，上述定义不依赖于代表物种 F 和 G 的选择。此外，级数乘积的性质仍然成立，也就是说，若 Φ，Ψ 是虚物种，则

$$\begin{aligned}(\Phi\Psi)(x) &= \Phi(x)\Psi(x)\\ \widetilde{(\Phi\Psi)}(x) &= \widetilde{\Phi}(x)\widetilde{\Psi}(x)\\ Z_{\Phi\Psi}(x_1, x_2, \ldots) &= Z_\Phi(x_1, x_2, \ldots)Z_\Psi(x_1, x_2, \ldots)\end{aligned}$$

在正确定义减法后，接下来我们要定义结构物种的乘法逆元，这自然会让我们对除法有一个概念。

定义 4.8.4. 设 F 和 G 是结构物种。若 G 是 F 的子物种，且记作 $G \subseteq F$，则称：

i）对于任意有限集 U, $G[U] \subseteq F[U]$;

ii) 对于任意有限集之间的双射 $\sigma:\ U \to V$，$G[\sigma] = F[\sigma]|_{G[U]}$。

例如，树的物种 $\mathfrak{a}$ 和简单连通图的物种 $\mathcal{G}^c$ 都是简单图物种 $\mathcal{G}$ 的子物种。

定义 4.8.5。 如果两个物种 F 和 G 共同拥有的唯一子物种是空物种，则称它们互不相关。如果 $\Phi = F - G$ 满足 F和 G 互不相关，则称虚物种 $\Phi = F - G$ 处于约化形式。

每个物种都可以写成约化形式。我们将约化形式记为 $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$，并分别将 Φ^+ 和 Φ^- 称为 Φ的正部分和负部分。该事实的证明需要研究分子分解，详见 [BLL98，第 2.6] 节。

定义 4.8.6. 如果两个物种族 $\{\Phi_i^+\}, \{\Phi_i^-\}$ 都是可求和的，则虚物种族 $\{\Phi_i\}$ 是可求和的。在这种情况下，

$$\sum_i \Phi_i = \sum_i \Phi_i^+ - \sum_i \Phi_i^-.$$

定理 4.8.7. 设 G 是一个结构物种，满足 $G(0) = 1$。那么 G 的乘法逆元为

$$G^{-1} = \frac{1}{G} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k (G_+)^k$$

其中 $-1 = (0-1)$ 是物种1 的加法逆元，且 $G_+ = G - 1$。

证明。 由于 $G = 1 + G_+$，我们有 $G^{-1} = (1+G_+)^{-1} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k (G_+)^k$。要使其有意义，我们必须证明虚物种族 $\{(-1)^k (G_+)^k\}$ 是可求和的。这很容易由物种族 $\{(G_+)^k\}$ 是可求和这一事实得出。

□

第5章

树状结构

本章将介绍研究某些结构的技巧；乍看之下，这些结构像是具有某种特殊附加性质的树结构。我们首先介绍富化树，它们在稍后求解某类特定微分方程时会派上用场。接着，我们将展示一种通过非对称性定理关联树与有根树的有趣方法，并研究该方法在枚举中的一些具体应用。

5.1 富化树

熟悉分析学的读者或许还记得拉格朗日反演公式：若$f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$且 $f(0) = 0 \neq f'(0)$，则

$$f^{\langle -1\rangle}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{t}{f(t)}\right)^n \Big|_{t=0} \frac{x^n}{n!},$$

其中，$f^{\langle -1\rangle}(x)$表示 $f(x)$的复合逆，也就是满足$f(f^{\langle -1\rangle}(x)) = x$且 $f^{\langle -1\rangle}(f(x)) = x$的唯一级数。

为方便记号，我们用 $A(x) := f^{\langle -1\rangle}(x)$表示$f(x)$的复合逆，并令 $R(x) = \overline{f}^{x}(x)$。那么级数 $A(x)$由函数方程$A(x) = \overline{xR}(A(x))$确定，同时也由

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \text{ with } a_n = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[R(t)]^n \Big|_{t=0}. \tag{5.1}$$

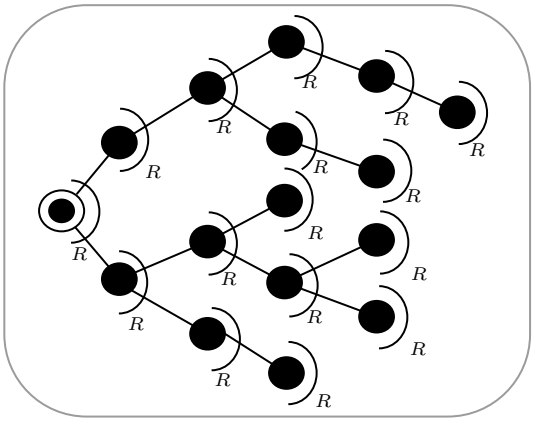
我们已经见过一个满足类似于 $A(x) = xR(A(x))$ 的方程的物种的特殊例子，即有根树的物种 $\mathcal{A}$。事实上，由例 4.5.4 可知，$\mathcal{A} = X \cdot E(\mathcal{A})$。正如我们将要看到的，形如 $F = X \cdot R(F)$ 的组合方程（其中 R 是任意给定的物种）总有唯一解 F。

定义 5.1.1. 设 R 是一个结构物种。在有限集 U上，一个 R-富化有根树定义如下：

i) U上的一棵有根树；

ii) 在这棵有根树的每个顶点 u 的纤维上定义一个 R结构，

其中，顶点 u 的纤维定义为与 u相连的顶点集合，但不包括离根最近的顶点。下图将使这个定义更加清晰。



有根树的叶子恰好是纤维为空的那些顶点。由于 R-富化有根树的空纤维也配有一个 R-结构，因此合理的做法是施加假设 $R(0) \neq 0$ （否则便不存在任何 R-富化有根树）。

定理 5.1.2。设 R 是一个满足 $R(0) \neq 0$的结构物种。 R-富化有根树的物种 $\mathcal{A}_R$ 由组合方程$\mathcal{A}_R = X \cdot R(\mathcal{A}_R)$唯一确定（在同构意义下）。

证明。 $\mathcal{A}_R$ 满足该方程这一事实由构造可知。唯一性则是隐式物种定理的推论（参见 [Lab85, Th. 2.1]）。 □

我们有一种枚举 R-富化有根树的方法。自然地，这是通过应用公式 5.1 完成的。不过，值得注意的是，利用结构物种代数，可以不使用拉格朗日反演来枚举 R-富化有根树，从而得到公式 5.1 的组合证明（参见 [BLL98, Section 3.1]）。

例 5.1.3. 当 $R = E$ 时，我们有 $\mathcal{A}_E = \mathcal{A}$，即有根树的物种。接着可以利用拉格朗日反演来计数有根树：

$$|\mathcal{A}[n]| = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{nt}\Big|_{t=0} = n^{n-1} e^{nt}\Big|_{t=0} = n^{n-1},$$

这与例 4.6.11 中得到的结果一致。

例 5.1.4. 当 $R = L$ （线性序的物种）时， $\mathcal{A}_L$ 是平面有根树的物种。由 $\mathcal{A}_L = X \cdot L(\mathcal{A}_L)$，我们得到

$$\mathcal{A}_L(x) = \frac{x}{1 - \mathcal{A}_L(x)},$$

解出相应的二次方程后，我们得到

$$\mathcal{A}_L(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

比较系数（或使用拉格朗日反演），我们可以推得

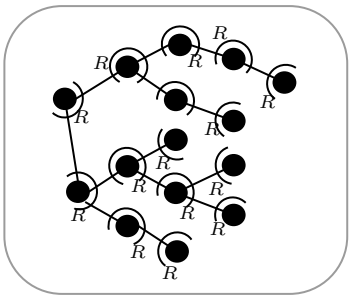
$$|\mathcal{A}_L[n]| = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}.$$

到目前为止，我们一直在研究有根树的一种推广。那么，人们或许会想，树的概念该如何推广？接下来我们就来探讨这个问题。

定义 5.1.5. 有限集 U 上的 R-富化树由以下内容给出

- 一个定义在 U 上的树；
- 树中每个顶点的相邻顶点集合上的一个 R-结构。

下面的图示将使这一点更加清楚。

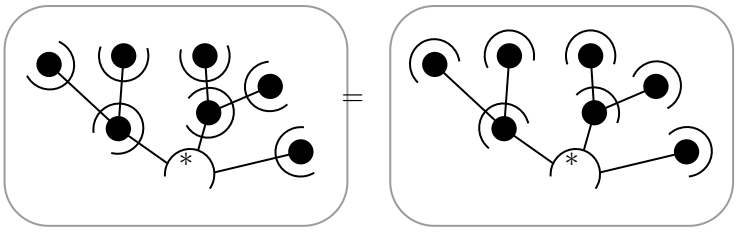


记号 5.1.6. 用 $\mathfrak{a}_R$ 表示 R-富化树的物种。

有根树的物种 $\mathcal{A}$ 与树的物种 $\mathfrak{a}$ 由组合方程 $\mathfrak{a}' = E(\mathcal{A})$ 和 $\mathfrak{a}^\bullet = \mathcal{A}$ 联系起来。不幸的是，这些方程不适用于 R-富化树的情形，不过仍有一对类似的方程。

定理 5.1.7。 设 R 是一个结构物种。那么 $\mathfrak{a}'_R = R(\mathcal{A}_{R'})$ 和 $\mathfrak{a}^\bullet_R = X \cdot R(\mathcal{A}_{R'})$，其中 $\mathcal{A}_{R'} = X \cdot R'(\mathcal{A}_{R'})$ 是 R'-丰富有根树的物种。

证明。 设 U 是一个有限集，并取 U 上的一个 $\mathfrak{a}'_R$-结构，即一个 $U \sqcup \{*\}$ 上的 $\mathfrak{a}_R$-结构。下图展示了如何将其与一个由 $\mathcal{A}_{R'}$-结构组成的 R-组装配对。



因此我们得到等式 $\mathfrak{a}'_R = R(\mathcal{A}_{R'})$。方程 $\mathfrak{a}^\bullet_R = X \cdot R(\mathcal{A}_{R'})$ 是直接推论。

□

5.2 非对称性定理

在本节中，我们将研究另一种建立树与有根树之间联系的方法。为此，我们必须首先定义中心的概念。

定义 5.2.1。 树的中心是由离心率最小的顶点生成的子图，其中，顶点的离心率是该顶点到树上任何其他顶点的最大距离。

容易看出，任意树的中心由一个顶点或两个相连的顶点构成。这就产生了典范指向的概念。

定义 5.2.2. 如果一棵树指向其中心，就称它为典范指向的；也就是说，如果中心是一个顶点，这棵树就指向该顶点；如果中心是一对相连的顶点，这棵树就指向连接这两个顶点的边。

有了这些定义，我们就可以证明树的非对称性定理。

定理 5.2.3（树的非对称性定理）。 树物种 $\mathfrak{a}$ 与有根树物种 $\mathcal{A}$ 的关系为 $\mathcal{A} + E_2(\mathcal{A}) = \mathfrak{a} + \mathcal{A}^2$。

证明。 方程左边枚举的是指向某个顶点（$\mathcal{A} = \mathfrak{a}^\bullet$）或某条边的树；每棵这样的树都与一对有根树配对，其根分别是原先由指定边连接的顶点，因此得到 $E_2(\mathcal{A})$。

右边的项 $\mathfrak{a}$ 则标识出那些典范指向的树。剩下要做的就是证明，指向其他位置的树与有序根树对之间存在一个同构。

i) 如果树以一个不同于中心的顶点 u 为标记点，则令 v 为与 u 相邻且距离中心最近的顶点（如果中心是一条边，且 u 是其一个顶点，则取 v 为中心的另一个顶点）。切断连接 u 和 v 的边，并将剩下的两棵有根树配对，使根为 u 的那棵树位于左侧。参见图 5.1 中的第一幅图。

ii) 如果树指向一条不同于中心的边，令 u 为这条边上距离中心最近的顶点。切断这条边，并将剩下的两棵有根树配对，使带有 u 的那棵位于左侧。参见图 5.1 中的第二幅图。

反过来，给定一个 $\mathcal{A}^2$-结构，用一条边连接两棵树的根，并找出新形成的树的中心。如果中心来自原始对的右侧，或者中心恰好是新添加的边，那么我们处于第一种情况，左侧树的根被标记。否则，如果中心来自左侧树，我们处于第二种情况，新添加的边被标记。

□

为了将此定理推广到 R-富化树，我们必须先引入一些记号。

记号 5.2.4. 用 $\mathfrak{a}_R^-$ 表示带有一条指定边的 R-富化树物种，用 $\mathfrak{a}_R^\rightarrow$ 表示带有一条指定定向边的 R- 富化树物种。

很容易看出，$\mathfrak{a}_R^- = E_2(\mathcal{A}_{R'})$ 和 $\mathfrak{a}_R^\rightarrow = \mathcal{A}_{R'}^2$。有鉴于此，我们可以证明非对称性定理的推广版本。

定理 5.2.5（R-富化树的非对称性定理）。 设 R 是一个满足$R'(0) \neq 0$的物种。则 $\mathfrak{a}_R = XR(\mathcal{A}_{R'}) + E_2(\mathcal{A}_{R'}) - \mathcal{A}_{R'}^2$。

证明。 注意，这个方程可以改写为 $\mathfrak{a}_R^\bullet + \mathfrak{a}_R^- = \mathfrak{a}_R + \mathfrak{a}_R^\rightarrow$。证明与定理 5.2.3 的证明类似。

□

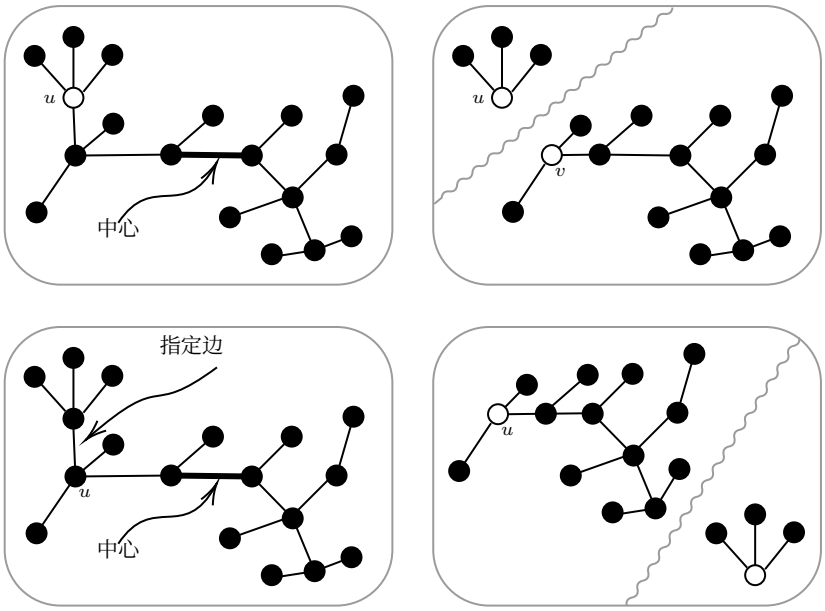
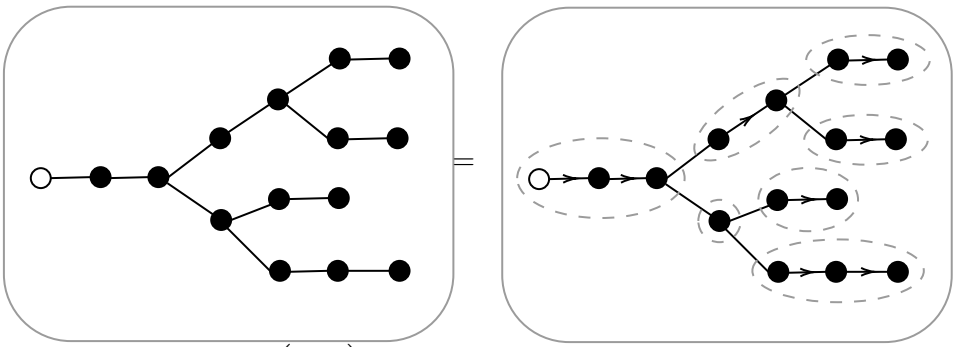


图 5.1：树与有序根树对之间的两种配对

现在来看一些富化树及其枚举示例。

例 5.2.6. 记 $\mathfrak{h}$ 为同胚不可约树物种，即不含度为 2 的顶点的树。这些是 R-富化树，其中 $R = E - E_2$。注意，$R' = (E - E_2)' = E - X$，并记 $\mathcal{H} = \mathcal{A}_{R'}$ 为同胚不可约根树物种，即不含基数为 1 的纤维的有根树。注意，$\mathcal{H} \neq \mathfrak{h}^\bullet$。我们有 $\mathcal{H} = XE(\mathcal{H}) - X\mathcal{H}$，且 $\mathfrak{h} = X(E - E_2)(\mathcal{H}) + E_2(\mathcal{H}) - \mathcal{H}^2$。

在任意有根树中，可以将纤维基数为 1 的连续顶点链归并在一起，并将其视为一个序，由此得到 $\mathcal{A} = \mathcal{H}\left(\frac{X}{1-X}\right)$，如 $\frac{X}{1-X} = L - L_0$。



对代入进行求逆，得到 $\mathcal{H} = \mathcal{A}\left(\frac{X}{1+X}\right)$。由非对称性定理，$\mathfrak{a} = (X + E_2 - X^2) \circ \mathcal{A}$，且 $X(E - E_2)(\mathcal{H}) = \mathcal{H} + X\mathcal{H} - XE_2(\mathcal{H})$，我们得到

$$\mathfrak{h} = X(E - E_2)(\mathcal{H}) + E_2(\mathcal{H}) - \mathcal{H}^2 = \mathcal{H} + X\mathcal{H} - XE_2(\mathcal{H}) + E_2(\mathcal{H}) - \mathcal{H}^2$$

$$= (X + E_2 - X^2) \circ \mathcal{H} + X\mathcal{H} - XE_2(\mathcal{H}) = \mathfrak{a}\left(\frac{X}{1+X}\right) + X\mathcal{A}\left(\frac{X}{1+X}\right) - XE_2\left(\mathcal{A}\left(\frac{X}{1+X}\right)\right)$$

A经过计算，可以枚举无标号同胚不可约树 .

$$\widetilde{\mathfrak{h}}(x) = x + x^2 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 4x^8 + 5x^9 + 10x^{10} + 14x^{11} + 26x^{12} + 42x^{13} + \ldots$$

例 5.2.7。 有向树是指每条边都赋予了一个定向的树。将有向树的物种记为 $\mathfrak{o}$，有根有向树的物种记为 $\mathcal{O} = \mathfrak{o}^\bullet$。这些结构的带标号计数非常简单，因为每条 $n-1$ 边都有两种不同的定向方式，因此得到 $|\mathfrak{o}[n]| = 2(2n)^{n-2}$ 和 $|\mathcal{O}[n]| = (2n)^{n-1}$。

现在，考虑一个固定的 $\mathcal{O}$-结构。它可以分解为一个单元素集合（根），以及一对由 $\mathcal{O}$-结构组成的集合（分别是向内连接的集合和向外连接的集合）。由此得到方程 $\mathcal{O} = XE^2(\mathcal{O})$，进而有 $\widetilde{\mathcal{O}}(x) = x\exp\left(2\sum_{k\geq 1}\widetilde{\mathcal{O}}\binom{x^k}{k}\right)$。通过递归计算，便可得出

$$\widetilde{\mathcal{O}}(x) = x + 2x^2 + 7x^3 + 26x^4 + 107x^5 + 458x^6 + 2058x^7 + 9498x^8 + 44947x^9 + \ldots$$

对于有向树，非对称性定理的形式优美而简洁。

定理 5.2.8（有向树非对称性定理）。 物种 $\mathfrak{o}$（有向树）与$\mathcal{O}$（有根有向树）之间满足方程 $\mathcal{O} = \mathfrak{o} + \mathcal{O}^2$。

证明。 首先，注意到 $\mathcal{O}^2$ 被视为一种有向树物种，其中一条有向边被特别标记。现在将有向树的中心定义为：若对应的无向树的中心是顶点，则它就是该顶点；若该树的中心是一条边，则它就是该有向边的起点。现在考虑一棵有根有向树。若根是这棵有向树的中心，则将它与一棵有向树规范地配对。否则，标记一条指向中心且起点为根的有向边，并将其与一个 $\mathcal{O}^2$-结构关联。

□

推论 5.2.9。 无标号有向树的枚举可通过方程 $\widetilde{\mathfrak{o}}(x) = \widetilde{\mathcal{O}}(x) - \widetilde{\mathcal{O}}^2(x)$，直接由无标号有根有向树的枚举得到，因此

$$\widetilde{\mathfrak{o}}(x) = x + x^2 + 3x^3 + 8x^4 + 27x^5 + 91x^6 + 350x^7 + 1376x^8 + 5743x^9 + \ldots$$

第6章

微分方程

在本章中，我们将介绍在结构物种的背景下研究和求解微分方程的一种方法。首先，我们考察虚物种的情形。然后，我们研究线性有序集——进而研究线性物种——以解决虚意义下微分方程的解所涉及的一个问题。最后，我们提供一种描述线性物种上某类微分方程的解的方法。

6.1 虚物种上的微分方程

我们先来考察虚物种的情形。首先注意到，在通常的微积分中我们视为理所当然的一条性质，在这里并不成立。

定理 6.1.1. 在虚物种的背景下，微分方程 $\Phi' = 0$ 有无穷多个非恒定解。

证明。 对于 $n \geq 2$，我们取 $\Phi_n = n\mathcal{C}_n - X^n$。由于 $\mathcal{C}_n' = L_{n-1}$，我们有

$$\Phi_n' = n\mathcal{C}_n' - (X^n)' = nL_{n-1} - nL_{n-1} = 0.$$

□

接下来我们将证明，每个虚物种都有许多反导数。

定理 6.1.2. 设 Ψ 是一个虚物种。那么方程 $\Phi' = \Psi$ 有解$\Phi = \Omega + \int \Psi$，其中

$$\int \Psi = E_1\Psi - E_2\Psi' + E_3\Psi'' - \ldots + (-1)^{n+1}E_n\Psi^{(n-1)} + \ldots$$

而且 Ω 是$\Omega' = 0$的任意一个解。

证明。 只需证明 $(\int \Psi)' = \Psi$。回忆一下， $E_n' = E_{n-1}$ ，并且导数的乘积法则在虚物种的语境中成立。因此，

$$\begin{aligned}\left(\int \Psi\right)' &= E_1'\Psi + E_1\Psi' - E_2'\Psi' - E_2\Psi'' + E_3'\Psi'' + E_3\Psi''' + \ldots \\ &= \Psi + E_1\Psi' - E_1\Psi' - E_2\Psi'' + E_2\Psi'' + E_3\Psi''' - \ldots = \Psi\end{aligned}$$

□

这表明，在虚物种的语境中，微分方程通常有解，但这些解几乎从不由初始条件唯一确定。幸运的是，只要给组合结构的底集赋予一个线性序，就可以消除这一麻烦。这便将我们带入线性物种的领域。

6.2 线性物种

本节将介绍线性物种及其上的一些运算。

定义 6.2.1. 线性有序集是一个有序对 $\ell = (U, \leq)$，其中 U 是有限集，$\leq$ 是定义在 U 上的一个 L-结构。我们称 U 为 ℓ 的底集，称 $\leq$ 为 ℓ 的序。

N记号 6.2.2. 当 U 是 ℓ 的底集时，我们用 $u \in \ell$ 代替 $u \in U$。

记号 6.2.3. 设 $u, v \in \ell$。若按照 ℓ 的序，u 小于或等于 v，则记作 $u \leq v$；当 $u \leq v$ 和 $u \neq v$ 时，记作 $u < v$。

记号 6.2.4. 我们用 $\min \ell$ 表示按照 ℓ 的序最小的元素。

考虑一个线性有序集 $\ell = (U, \leq)$。对于每个 $V \subseteq U$，我们都可以定义一个线性有序集 $\ell_V = (V, \leq_V)$，其中 $\leq_V$是 $\leq$ 在 V上的限制。这为我们提供了一种分解线性有序集的方法。

定义 6.2.5. 设 $\ell = (U, \leq)$ 为一个线性有序集，且 $U_1 \sqcup \ldots \sqcup U_k = U$ 是 U 的一个划分。定义 $\ell_i = (U_i, \leq_i)$ 为一个线性有序集，其序 $\leq_i$ 是通过将 $\leq$ 限制在 U_i 上而得到的。于是我们称 $\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ 是 ℓ 的一个划分，并记作 $\ell_1 \sqcup \ldots \sqcup \ell_k = \ell$。我们用 $\mathsf{Par}[\ell]$ 表示 ℓ 的所有划分构成的集合。

线性有序集合 $\ell = (U, \leq)$ 的每个划分 $\pi = \{p_1, \ldots, p_k\}$ 都可以转换为线性有序集合 $\ell_\pi = (\pi, \leq_\pi)$，其中 $p_i \leq_\pi p_j \iff \min p_i \leq \min p_j$。

记号 6.2.6。用 $\emptyset$ 表示空线性有序集，即二元组 $(\emptyset, \leq_\emptyset)$，其中 $\leq_\emptyset$ 是 $L[0]$ 中的唯一元素。同样地，用 $\mathbf{1}$ 表示线性有序集 $1 = ([1], \leq_1)$，其中 $\leq_1$ 是 $L[1]$ 中的唯一元素。此外，对于 $n \geq 1$，用 $[n]$ 表示线性有序集 $([n], \leq)$，其中 $\leq$ 是由 $\mathbb{Z}$ 上的自然序诱导的序。

定义 6.2.7。设 $\ell_1 = (U_1, \leq_1)$ $\ell_2 = (U_2, \leq_2)$ 是两个线性有序集。那么，序和 $\ell_1 \oplus \ell_2$ 定义为 $\ell = (U, \leq)$，其中 $U = U_1 \sqcup U_2$，新的线性序定义为

$$u \leq v \iff \begin{cases} u \leq_1 v, \text{ if } u, v \in \ell_1; \\ u \in \ell_1, v \in \ell_2; \\ u \leq_2 v, \text{ if } u, v \in \ell_2. \end{cases}$$

特别地，$1 \oplus \ell$ 是通过向 ℓ 添加一个新的极小元素而得到的线性有序集。

定义 6.2.8. 设 $\ell_1 = (U_1, \leq_1)$ $\ell_2 = (U_2, \leq_2)$ 是两个线性有序集。若对于 $u, v \in \ell_1$, $u \leq_1 v$，$f(u) \leq_2 f(v)$，则称函数$f\colon U_1 \to U_2$为递增函数。

注意，对于任意基数为 n 的线性有序集 ℓ，都存在一个从 $[n]$ 到 ℓ 的唯一递增双射。

现在我们已经具备定义线性物种及其运算所需的工具。

定义 6.2.9。线性物种是一个函子 F，从由线性有序集和递增双射构成的范畴 $\mathbb{L}$ 到由有限集和双射构成的范畴 $\mathbb{B}$。我们将线性物种称为 $\mathbb{L}$-物种，将常规物种称为 $\mathbb{B}$-物种。

注意，任何 $\mathbb{B}$-物种 F都可以导出一个 $\mathbb{L}$-物种，也记作 F，其定义为：对任意线性有序集 $\ell = （U, \leq）$，令 $F[\ell] = F[U]$；结构的传递则通过限制到递增双射来获得。

$\mathbb{L}$物种的结构同构和同构类型概念，与 $\mathbb{B}$物种的定义方式相同。然而，由于从一个线性有序集合到自身的唯一递增双射就是恒等双射，$\mathbb{L}$物种的任何结构都只有一个自同构，并且任意两个不同的结构都不同构。因此，在 $\mathbb{L}$物种的语境中，同构类型生成级数和循环指标的概念都无关紧要：唯一相关的级数是（指数）生成级数。

如果两个物种自然同构，就称它们组合相等。与 $\mathbb{B}$-物种理论不同，两个 $\mathbb{L}$-物种组合相等，当且仅当它们等势。换句话说，如果 F 和 G 是两个线性物种，那么 $F = G$ 当且仅当 $F(x) = G(x)$。特别地，在视为线性物种的语境下，物种 L 和 $\mathcal{S}$（组合）相等。

现在让我们来定义线性物种上的运算。

定义 6.2.10。设 F 和 G 为线性物种，且 $\ell = (U, \leq)$ 为线性有序集。于是我们定义以下运算（在每种情况下，结构的传递均以显然的方式定义）：

- 和：
$$(F + G)[\ell] = F[\ell] \sqcup G[\ell]$$
- 笛卡儿积：
$$(F \times G)[\ell] = F[\ell] \times G[\ell]$$
- 乘积：
$$(F \cdot G)[\ell] = \sum_{\ell_1 \sqcup \ell_2 = \ell} F[\ell_1] \times G[\ell_2]$$
- 复合（$G(0) = 0$）：
$$(F \circ G)[\ell] = \sum_{\pi \in \mathrm{Par}[\ell]} \left[F[\ell_\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[\ell|_p] \right]$$
- 导数：
$$\frac{d}{dX} F(X)[\ell] = F'[\ell] = F[1 \oplus \ell]$$

- 积分：

$$\left(\int_0^X F(T)\,\mathrm{d}T\right)[\ell] = \left(\int F\right)[\ell] = \begin{cases} \emptyset, \text{ if } \ell = \emptyset; \\ F[\ell \setminus \{\min \ell\}], \text{ otherwise} \end{cases}$$

- 序数乘积：

$$(F \otimes G)[\ell] = \sum_{\ell_1 \oplus \ell_2 = \ell} F[\ell_1] \times G[\ell_2]$$

- 卷积：

$$(F * G)[\ell] = (F \otimes X \otimes G)[\ell]$$

不难看出，将 $\mathbb{L}$-物种转化为生成级数的过程保留了其运算。此外，可以验证，

$$\int F' = F_+ = F - F_0 \quad \text{and} \quad \left(\int F\right)' = F.$$

现在来看一些线性物种的例子。

例 6.2.11. 回想一下，对于物种 F，连通 F-结构的（虚）物种 F^c 由方程 $F = E(F^c)$ 定义。在线性物种的语境中，我们可以给出连通列表的一个简单定义。一个 L^c-结构，也就是一个连通列表，是一个非空列表，其开头是其底层线性有序集的最小元素。自然地，$L = E(L^c)$，因为任意列表都可以切分成若干块，每块都以从左到右的极小值开头。例如，列表 (3 4 1 2 5) 可以与列表集合 {(3 4)，(1 2 5)} 配对。这给出了一种与置换的循环分解等价的列表。

例 6.2.12. 令 E_e 和 E_o 分别表示基数为偶数和奇数的集合物种。则 $E_e(x) = \cosh(x)$，且 $E_o(x) = \sinh(x)$。我们有 $E_e^2 = 1 + E_o^2$，这个方程显然在 $\mathbb{B}$-物种的语境下不成立。事实上，若 $\ell = (U, \leq)$ 是一个满足 $U \neq \emptyset$ 的线性有序集，那么给定 U 的一个划分，使其分成两个基数均为偶数的集合，从包含元素 $\min \ell$ 的部分中移除该元素，并将其加入互补部分，便得到 U 的一个划分，使其分成两个基数均为奇数的集合；这显然定义了一个从 E_e^2 到 E_o^2的双射。转到生成函数，我们得到熟知的恒等式

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

例 6.2.13. 递增有根树的线性物种 $\mathcal{A}^\uparrow$ 定义如下：在线性有序集 $\ell = (U, \leq)$ 上的一个 $\mathcal{A}^\uparrow$-结构，是 U 上的一棵有根树，且从根到叶的任意路径上的顶点均按递增顺序排列。更一般地，用 $\mathcal{A}_R^\uparrow$ 表示 R-富化递增有根树的物种。

在继续研究微分方程之前，我们先将线性物种的概念扩展到多排序情形。

定义 6.2.14。 k-(多重)类型线性物种是从范畴 $\mathbb{L}^k$ 线性有序的 k-(多重)集合及递增双射多值函数到范畴 $\mathbb{B}$ 有限集及双射的函子。我们遵循以下约定：类型 i 的每个元素都小于类型 $i+1$的所有元素；等价地，可以说，一个线性有序的 k-集合（ℓ_1，.....，ℓ_k）会产生一个线性有序集合 $\ell_1 \oplus \ldots \oplus \ell_k$。

这个定义使我们能够自然地将运算从 $\mathbb{L}$-物种推广到多排序语境。例如，二类物种 F 的偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial X}F[\ell, m] = F[1 \oplus \ell, m] \qquad \frac{\partial}{\partial Y}F[\ell, m] = F[\ell, 1 \oplus m].$$

（指数）生成级数也可用自然的方式导出，其中

$$F(x, y) = \sum_{k,n\in\mathbb{N}} F[k, n]\frac{x^k}{k!}\frac{y^n}{n!},$$

其中 $[k, n]$ 表示有序集对 $([k], [n])$。

6.3 线性物种的微分方程

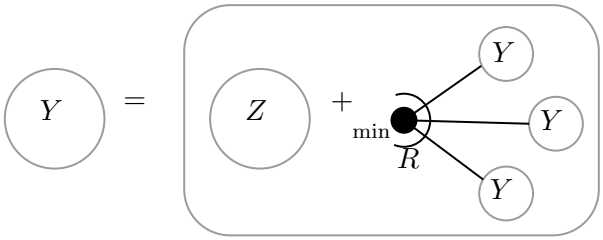
本节将介绍一种求解类型为 $Y' = R(Y)$ 的微分方程的方法，其中 R 是一个线性物种。我们先来看一个例子。

例 6.3.1. 考虑方程 $Y' = E(Y)$，其初始条件为 $Y(0) = 0$。容易看出， $\mathcal{A}^{\uparrow}$ 是这个微分方程的一个解。事实上，从一个 $\mathcal{A}^{\uparrow}$-结构中移除极小元素（即 根），会得到一个由 $\mathcal{A}^{\uparrow}$-结构组装而成的结构。这与例 4.6.7 类似。现在， $y' = e^y$ 的解析解为 $y(x) = -\log(1 - x)$，由此得到 $\mathcal{A}^{\uparrow}(x) = -\log(1 - x)$，但也有 $L = E(\mathcal{A}^{\uparrow})$。

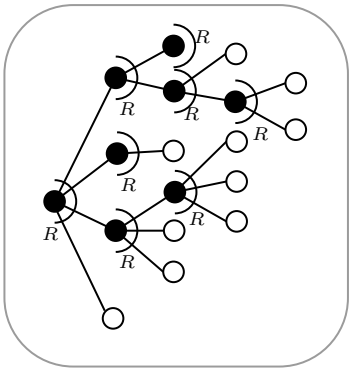
有了这个例子，我们可以继续求解更一般的微分方程。考虑微分方程 $Y' = R(Y)$，其初始条件为 $Y(0) = Z$。我们可以将 Z 看作表示第二种元素的变量。因此，该微分方程的解是一个二类型 $\mathbb{L}$-物种 $Y = Y(X, Z)$。 积分后，我们得到一个等价的（积分）方程

$$Y(X, Z) = Z + \int_0^X R(Y(T, Z))dT,$$

其可视化如下：



对这一分解进行迭代，对于任意一对线性有序集 (ℓ, m)，我们得到如下图所示的 R-富集递增有根树。类型为 X 的顶点（黑点）称为可育顶点，它们都带有 R-结构（定义在其后代集合上）；类型为 Z 的元素（白点）总是作为树的叶子出现，并且不带有 R-结构。我们将 R-富集递增有根树的二类型 $\mathbb{L}$-物种记为 $\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z)$。



显然， $\mathcal{A}_R^{\uparrow}(0, Z) = Z$ ，而任意结构 $s \in \mathcal{A}_R^{\uparrow}[\ell, m]$（其中 $\ell \neq \emptyset$）都可分解为一个极小元素和一个由 $\mathcal{A}_R^{\uparrow}$-结构组成的 R-组装，这给出了一个同构

$$\alpha : \frac{\partial}{\partial X}\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z) \to R(\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z)).$$

因此，二元组（$\mathcal{A}_R^{\uparrow}$， α）构成方程 $Y' = R(Y)$ 在 $Y(0) = Z$ 条件下的一个解。

现在，设另一个二元组（$\mathcal{B}$， β）也是方程 $Y' = R(Y)$ 在$Y(0) = Z$ 条件下的一个解。我们将证明，存在唯一的同构 Φ： $\mathcal{A}_R^{\uparrow} \to \mathcal{B}$ ，使得下图交换（其中， $\frac{\partial}{\partial X}\Phi$ 和 $R(\Phi)$ 以显然的方式定义）：

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial X}\mathcal{A}_R^{\uparrow} & \xrightarrow{\alpha} & R(\mathcal{A}_R^{\uparrow}) \\ {\scriptstyle \frac{\partial}{\partial X}\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R(\Phi)} \\ \frac{\partial}{\partial X}\mathcal{B} & \xrightarrow[\beta]{} & R(\mathcal{B}) \end{array} \tag{6.1}$$

由于 $\mathcal{A}_R^{\uparrow}(0, Z) = \mathcal{B}(0, Z) = Z$，我们必须将 $\Phi_{0,\,[n]}$ 定义为对所有 $n \in \mathbb{N}$ 的恒等 $Z[n] \to Z[n]$。设对于 $n \geq 0$，对于任意一对满足 $|h| \leq n$ 的线性有序集（h， s），自然双射 $\Phi_{h,\,s}$ 已以唯一方式定义。设（ℓ， m）是一对满足 $|\ell| = n + 1$ 的线性有序集。不失一般性，假设 $\ell = 1 \oplus \ell^-$，其中 $\ell^- = \ell \setminus \{\min \ell\}$。于是我们有双射

$$\mathcal{A}_R^{\uparrow}[\ell, m] = \mathcal{A}_R^{\uparrow}[1 \oplus \ell^-, m] = \frac{\partial}{\partial X}\mathcal{A}_R^{\uparrow}[\ell^-, m] \overset{\alpha_{\ell^-,m}}{\longrightarrow} R(\mathcal{A}_R^{\uparrow})[\ell^-, m]$$

and

$$\mathcal{B}[\ell, m] = \mathcal{B}[1 \oplus \ell^-, m] = \frac{\partial}{\partial X}\mathcal{B}[\ell^-, m] \overset{\beta_{\ell^-,m}}{\longrightarrow} R(\mathcal{B})[\ell^-, m].$$

在 (ℓ^-, m) 上的 $R(\mathcal{A}_R^{\uparrow})$-结构，是由 (h, s) 这对线性有序集上的 $\mathcal{A}_R^{\uparrow}$-结构组成的 R-组装，使得 $|h| \leq n$。现在，归纳假设保证在该 R-组装的每个成员上都存在双射$\Phi_{h,s}$： $\mathcal{A}_R^{\uparrow}[h, s] \to \mathcal{B}[h, s]$ ，因此我们得到一个诱导双射 $R(\Phi)_{\ell^-,m}$： $R(\mathcal{A}_R^{\uparrow})[\ell^-, m] \to R(\mathcal{B})[\ell^-, m]$。接着我们设

$$\Phi_{\ell,m} = \frac{\partial}{\partial X}\Phi_{\ell^-,m} = \beta_{\ell^-,m}^{\langle -1 \rangle} \circ R(\Phi)_{\ell^-,m} \circ \alpha_{\ell^-,m}$$

于是我们得到一个从 $\mathcal{A}_R^{\uparrow}[\ell, m]$ 到 $\mathcal{B}[\ell, m]$ 的双射，而这正是使图表 6.1 交换的唯一选择。

最后，我们以以下结果作结。

定理 6.3.2。设 R 是一个线性物种，并考虑微分方程 $Y' = R(Y)$，其中 $Y(0) = Z$。那么，$\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z)$ 是该方程的唯一解，其含义是：若$\mathcal{B}(X, Z)$ 是另一个解，则存在唯一的同构 $\Phi : \mathcal{A}_R^{\uparrow} \to \mathcal{B}$，使图表 *6.1* 交换。

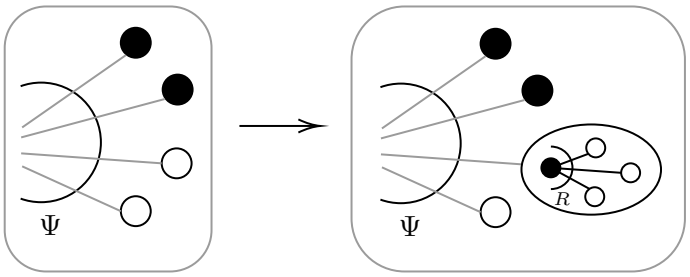
到目前为止，我们已经引入了物种 $\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z)$，并且看到它们是某种特定微分方程的解。在下一个定理中，我们将以另一种方式描述 $\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z)$。为了让读者充分理解证明中使用的记号，我们建议阅读 [BLL98, 第 2 节6]。

定理 6.3.3. 设 R 是一个线性物种。那么，物种 $\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z)$ 可表示为$\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z) = \exp(XR(Z)\frac{\partial}{\partial Z})Z$，更明确地说，

$$\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{D}^n(Z) E_n(X)$$

其中 $\mathcal{D} = R(Z)\frac{\partial}{\partial Z}$。

证明。将类型为 X 的元素染成黑色，将类型为 Z 的元素染成白色，并设 $\Psi(X, Z)$ 是一个二类型线性物种。一个 $X\mathcal{D}\Psi$-结构可以看作一个经过羽化的 Ψ-结构，也就是说，其最小白色点被一个 $XR(Z)$-结构所取代；该结构由一个黑色点（称为羽化点）以及其后的一个白色点的 R-组装构成。下面的图将使羽化这一概念更加清晰。



对于 $n \geq 0$，一个 $(X\mathcal{D})^n\Psi$-结构由一个 Ψ-结构经过 n 次扩展构造而成。扩展的先后顺序十分重要，因此应始终注明。显然，为一个 $(X\mathcal{D})^n\Psi$-结构的 n 个扩展点标记，共有 $n!$ 种方法。若标记顺序与扩展顺序一致，我们称之为有序标记。由此，我们可以将一个 $\frac{(X\mathcal{D})^n}{n!}\Psi$-结构理解为一个带有有序标记的 $(X\mathcal{D})^n\Psi$-结构。我们还可以将 $\exp(X\mathcal{D})$ 简单地定义为

$$\exp(X\mathcal{D}) := \sum_{n \geq 0} \frac{(X\mathcal{D})^n}{n!}$$

其中，$\exp(X\mathcal{D})\Psi$-结构是某个 $n \in \mathbb{N}$ 的 $\frac{(X\mathcal{D})^n}{n!}\Psi$-结构。

现在，取 $\Psi(X, Z) = Z$，即一个 Ψ-结构仅由一个白色点构成，而一个 Ψ-结构经过一次萌发后成为一个 $XR(Z)$-结构。经过多次萌发后，我们得到一棵以黑色可育顶点和白色叶子构成的 R-富化有根树。此时，所有黑色点都是萌发点；而在有序标记的情形下，也就是说，对于一个 $\exp(X\mathcal{D})\Psi$-结构，标记沿着从根到叶子的方向递增，因为这自然就是萌发发生的方向。由此我们得出 $\mathcal{A}_R^{\uparrow}(X, Z) = \exp(XR(Z)\frac{\partial}{\partial Z})Z$。

由于算子 $\mathcal{D}$ 与乘以 X 的运算可交换，且 $E_n(X) = \frac{X^n}{n!}$，我们得出 $\mathcal{A}^{\uparrow}_{R}(X,\ Z) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{D}^n(Z)E_n(X)$。这也可以从方程右侧的含义推导出来：它告诉我们只考虑白色点进行开边操作，即执行 $\mathcal{D}^n(Z)$，然后按照开边发生的顺序添加黑色点。

□

第 7 章

一般微分算子

本章中，我们将重新研究（k类） $\mathbb{B}$物种。更确切地说，我们将给出 $\Omega(X, D)$ 的组合解释，其中 Ω 是一个二类物种，而 $D = \frac{d}{dX}$ 是微分算子。随后，我们将把这个定义推广到 Ω 为单类物种的情形，并借此将第一章与物种的概念联系起来：我们将以更广义的结构物种的观点，诠释有限差分算子。

7.1 定义与运算

定义 7.1.1. 设 $\Omega(X, T)$ 为一个二类物种。对于每个有限集 A（其类型为 X），我们定义一个单类物种 Ω_A，如下所示：

- $\Omega_A[U] = \Omega[(A, U)]$ 对于每个有限集 U；
- 对于给定的有限集之间的双射 $\tau\colon U \to V$，我们定义 $\Omega_A[\tau] = \Omega[(id_A, \tau)]$。

注意，每个有限集（类型为 X）之间的双射 $\sigma : A \to B$ 都会产生一个自然同构 $\sigma = \{\sigma_U := \Omega[(\sigma, id_U)]\}_{U \in \overline{\mathbf{Ob}}(\mathbb{B})}$，其将 Ω_A 映射到 Ω_B；也就是说，下列形式的所有图表都可交换：

$$\begin{array}{ccc} \Omega_A[U] & \xrightarrow{\overline{\sigma}_U} & \Omega_B[U] \\ {\scriptstyle \Omega_A[\tau]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega_B[\tau]} \\ \Omega_A[V] & \xrightarrow[\overline{\sigma}_V]{} & \Omega_B[V] \end{array}$$

因此，$s_1 \in \Omega_A[U]$ 和 $s_2 \in \Omega_A[V]$ 是物种 Ω_A 的同构结构，当且仅当 $\sigma_U[s_1]$ 和 $\sigma_V[s_2]$ 是物种 Ω_B 的同构结构。换言之，自然同构 σ 在物种 Ω_A 的结构的（可能无限的）同构类型集合与物种 Ω_B 的结构的同构类型集合之间诱导出一个双射。

定义 7.1.2. 我们称二类物种 $\Omega(X, T)$ 关于 T 是有限型的，当且仅当对于每个由类型 X 的元素组成的有限集 U，对所有充分大的集合 V，集合对 (U, V) 上都不存在 Ω-结构。如果 $\Omega(X, T)$ 关于 T 是有限型的，我们可以按以下规则定义一个新的单类物种 $\Omega(X, 1)$（也记作 $[\Omega(X, T)]|_{T:=1}$）：

- 有限集 A 上的 Ω(X,1)-结构是物种 Ω_A 的结构的同构类型；

- 沿双射 σ 的传输： $A \to B$ (A, B 有限集) 是由自然同构 σ 诱导的。

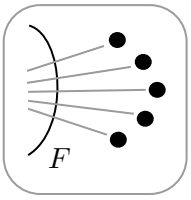
在物种 Ω(X,1) 的这一形式定义背后，隐藏着一个非常简单的想法：有限集 A 上的 Ω(X, 1)-结构，无非就是由类型 X 的（带标签）元素集合 A 上的一个 Ω-结构，以及由类型 T 的任意无标签元素集合构成。以下公式给出了这一记号选择的理由，它用 Ω 的循环指标 来表示 Ω(X,1) 的循环指标：

$$Z_{\Omega(X,1)}(x_1, x_2, \ldots) = [Z_\Omega(x_1, x_2, \ldots; t_1, t_2, \ldots)]|_{t_j=1} = Z_\Omega(x_1, x_2, \ldots; 1, 1, \ldots).$$

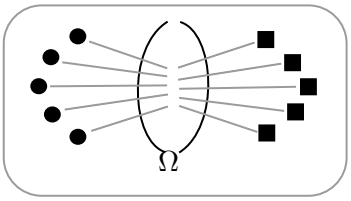
在定义一般微分算子之前，我们先约定图形表示法。我们将采用 Labelle 和 Lamathe 在 [LL09] 中使用的表示法。

记号 7.1.3。

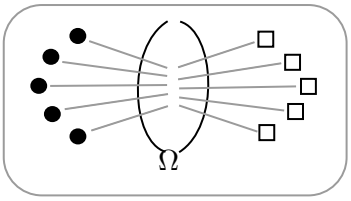
i) 对于单类物种 $F(X)$，我们沿用前几章的相同图形约定，用黑色圆圈表示类型 X 的元素。



ii) 对于二类物种 Ω(X, T)，我们将用黑色圆圈表示类型为 X 的元素，用黑色方块表示类型为 T 的元素。



iii) 对于物种 Ω(X,1)，通过令 $T := 1$ 得到，其中类型 T 的元素没有标签，我们将这些无标签元素表示为白色方块。再次指出，只有当 Ω 关于 T 是有限型时，才能进行这种替换。



我们还需要为二类物种定义另一种运算：偏笛卡尔积 t.

定义 7.1.4. 设 $\Phi(X,T)$ 和 $\Omega(X,T)$ 为两个二类物种。那么， Φ 与 Ω 关于类型 T 的偏笛卡尔积，记作 $\Phi(X,T) \times_T \Omega(X,T)$，定义如下：在一对集合 (U,V) 上的一个 $\Phi \times_T \Omega$-结构 s，是一个有序对 $s=(f,w)$，其中 f 是定义在 (U_1,V) 上的一个 Φ-结构， w 是定义在 (U_2,V) 上的一个 Ω-结构， $U_1 \cup U_2 = U$ 且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$。不难看出， $\Phi \times_T \Omega$ 的循环指标可描述如下：

$$Z_{\Phi\times_T\Omega}(x_1,x_2,\ldots;t_1,t_2,\ldots) = \sum_{n_1,n_2,\ldots} \omega_{\Phi,n_1,n_2,\ldots}(x_1,x_2,\ldots)\omega_{\Omega,n_1,n_2,\ldots}(x_1,x_2,\ldots)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}\ldots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\ldots},$$

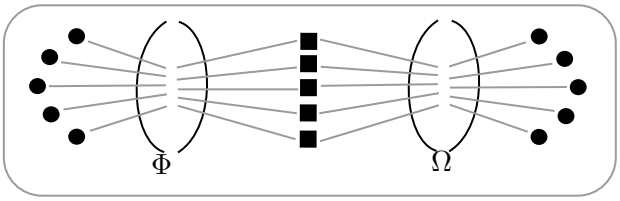
其中，系数 $\omega_{\Phi,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\ldots}$ 以及 $\omega_{\Omega,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\ldots}$ 由下式给出

$$Z_\Phi(x_1,x_2,\ldots;t_1,t_2,\ldots) = \sum_{n_1,n_2,\ldots} \omega_{\Phi,n_1,n_2,\ldots}(x_1,x_2,\ldots)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}\ldots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\ldots}$$

$$Z_\Omega(x_1,x_2,\ldots;t_1,t_2,\ldots) = \sum_{n_1,n_2,\ldots} \omega_{\Omega,n_1,n_2,\ldots}(x_1,x_2,\ldots)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}\ldots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\ldots}$$

这个表示 $Z_{\Phi\times_T\Omega}$ 的方程右端记作 $Z_\Phi \times_{\mathbf{t}} Z_\Omega$，称为 Z_Φ 和 Z_Ω 关于 $\mathbf{t}=(t_1,\ t_2,\ \ldots\ldots)$ 的阿达玛积。

下图给出了部分笛卡儿积的图示。

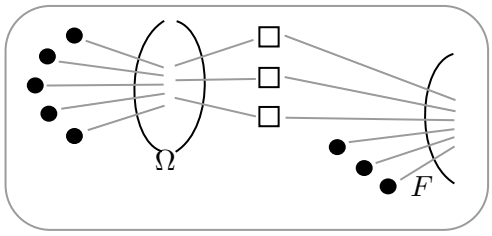


现在我们已经具备定义一般微分算子所需的工具。

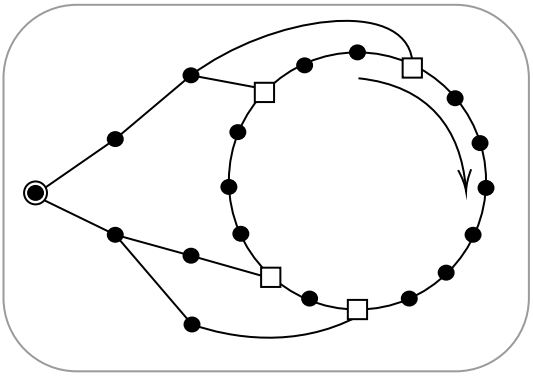
定义 7.1.5。设 $F(X)$ 是一个单类物种，$\Omega(X,\ T)$ 是一个二类物种。如果 F 在 X 中是有限次数的，或者 Ω 在 T 中是有限型的，则 $\Omega(X,\ D)F(X)$ 定义为

$$\Omega(X,D)F(X) := [\Omega(X,T) \times_T F(X+T)]|_{T:=1}$$

下图展示了一个 $\Omega(X,\ D)F(X)$-结构。



注意，假设中的限制是必要的。例如，下图展示了一个$\mathcal{A}(X,\ D)\mathcal{C}_{16}(X)$-结构，其中 $\mathcal{A}(X,\ T)$ 是内部顶点类型为 X、叶子类型为 T 的有根树物种，而 $\mathcal{C}_{16}$ 是长度为 16 的循环物种。请注意， $\mathcal{A}(X,\ D)\mathcal{C}(X)$ 并不是定义良好的物种，因为在任意一个由类型为 X 的元素组成的有限集上，都可能存在无穷多个这样的结构。从现在起，我们将默认定义中的假设均已满足。



现在让我们看看这种一般的微分如何影响幂级数。

定理 7.1.6。 设 F（X） 是一个单类物种，且 Ω（X, T） 是一个二类物种。记 G（X） =Ω（X, D）F（X）。则

$$G(x) = \sum_{n_1,n_2,\ldots} \omega_{n_1,n_2,\ldots}(x,0,0,\ldots)\left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2}\ldots}{n_1!n_2!\ldots}Z_F\right](x,0,0,\ldots)$$

$$\widetilde{G}(x) = \sum_{n_1,n_2,\ldots} \omega_{n_1,n_2,\ldots}(x,x^2,x^3,\ldots)\left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2}\ldots}{n_1!n_2!\ldots}Z_F\right](x,x^2,x^3,\ldots)$$

$$Z_G(x_1,x_2,x_3,\ldots) = Z_\Omega(x_1,x_2,x_3,\ldots;\tfrac{\partial}{\partial x_1},2\tfrac{\partial}{\partial x_2},3\tfrac{\partial}{\partial x_3},\ldots)Z_F(x_1,x_2,x_3,\ldots)$$

其中 $\omega_{n_1,\ n_2}$.....来源于

$$Z_\Omega(x_1,x_2,x_3,\ldots;t_1,t_2,t_3,\ldots) = \sum_{n_1,n_2,\ldots}\omega_{n_1,n_2,\ldots}(x_1,x_2,x_3,\ldots)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}t_3^{n_3}\ldots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!3^{n_3}n_3!\ldots}$$

证明。只需证明 Z_G 的方程。我们有

$$
\begin{aligned}
&Z_G(x_1,x_2,\dots) = [Z_\Omega(x_1,x_2,\dots;t_1,t_2,\dots)\times_{\mathbf{t}} Z_F(x_1+t_1,x_2+t_2,\dots)]|_{t_j=1}\\
&= \left[Z_\Omega(x_1,x_2,\dots;t_1,t_2,\dots)\times_{\mathbf{t}} \sum_{n_1,n_2,\dots} f_{n_1,n_2,\dots}\frac{(x_1+t_1)^{n_1}(x_2+t_2)^{n_2}\dots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\dots}\right]_{t_j=1}\\
&= \left[Z_\Omega \times_{\mathbf{t}} \sum_{n_1,n_2,\dots} f_{n_1,n_2,\dots}\frac{\left(\sum_{i_1=0}^{n_1}\binom{n_1}{i_1}x_1^{n_1-i_1}t_1^{i_1}\right)\left(\sum_{i_2=0}^{n_2}\binom{n_2}{i_2}x_2^{n_2-i_2}t_2^{i_2}\right)\dots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\dots}\right]_{t_j=1}\\
&= \left[Z_\Omega \times_{\mathbf{t}} \sum_{n_1,n_2,\dots} f_{n_1,n_2,\dots}\left(\sum_{i_1=0}^{n_1}\frac{x_1^{n_1-i_1}}{1^{n_1}(n_1-i_1)!}\frac{t_1^{i_1}}{i_1!}\right)\left(\sum_{i_2=0}^{n_2}\frac{x_2^{n_2-i_2}}{2^{n_2}(n_2-i_2)!}\frac{t_2^{i_2}}{i_2!}\right)\dots\right]_{t_j=1}\\
&= \left[Z_\Omega \times_{\mathbf{t}} \sum_{i_1,i_2,\dots}\frac{t_1^{i_1}t_2^{i_2}\dots}{i_1!i_2!\dots}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2}\dots\left(\sum_{n_1,n_2,\dots} f_{n_1,n_2,\dots}\frac{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\dots}\right)\right]_{t_j=1}\\
&= \left[Z_\Omega \times_{\mathbf{t}} \sum_{i_1,i_2,\dots}\left(1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}\left(2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2}\dots Z_F(x_1,x_2,\dots)\frac{t_1^{i_1}t_2^{i_2}\dots}{1^{i_1}i_1!2^{i_2}i_2!\dots}\right]_{t_j=1}\\
&= \left[\sum_{i_1,i_2,\dots}\omega_{i_1,i_2,\dots}(x_1,x_2,\dots)\left(1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}\left(2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2}\dots Z_F(x_1,x_2,\dots)\frac{t_1^{i_1}t_2^{i_2}\dots}{1^{i_1}i_1!2^{i_2}i_2!\dots}\right]_{t_j=1}\\
&= \sum_{i_1,i_2,\dots}\omega_{i_1,i_2,\dots}(x_1,x_2,\dots)\frac{\left(1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}\left(2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2}\dots}{1^{i_1}i_1!2^{i_2}i_2!\dots}Z_F(x_1,x_2,\dots)\\
&= Z_\Omega(x_1,x_2,\dots;1\frac{\partial}{\partial x_1},2\frac{\partial}{\partial x_2},\dots)Z_F(x_1,x_2,\dots).
\end{aligned}
$$

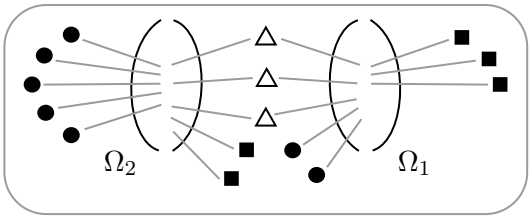
□

现在我们可以继续讨论第二种运算：微分算子的复合 s.

定义 7.1.7. 设 $\Omega_1(X,T),\Omega_2(X,T)$ 是两个二类物种。则 Ω_1 与 Ω_2 的复合定义为

$$\Omega_3(X,T) = \Omega_2(X,T)\odot\Omega_1(X,T) := [\Omega_2(X,T+Y)\times_Y \Omega_1(X+Y,T)]|_{Y:=1}$$

微分算子 $\Omega_3(X,\ D)$，记作 $\Omega_2(X,\ D)\odot\Omega_1(X,\ D)$，称为 $\Omega_1(X,\ D)$ 与 $\Omega_2(X,\ D)$ 的复合。下图展示了一个 $[\Omega_2(X,\ T)\odot\Omega_1(X,\ T)]$-结构，其中黑色圆圈表示 X 类元素，黑色方块表示 T 类元素，白色三角形表示未标记的 Y 类元素。



下一个定理解释了为何这种运算称为复合。

定理 7.1.8. 设 $F(X)$ 是一个单类物种。那么

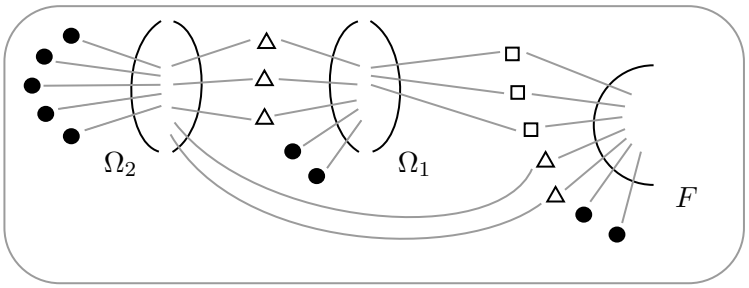
$$[\Omega_2(X,D)\odot\Omega_1(X,D)]F(X)=\Omega_2(X,D)[\Omega_1(X,D)F(X)] \tag{7.1}$$

证明。首先，将 $\Omega_2(X,D)[\Omega_1(X,D)F(X)]$ 写作

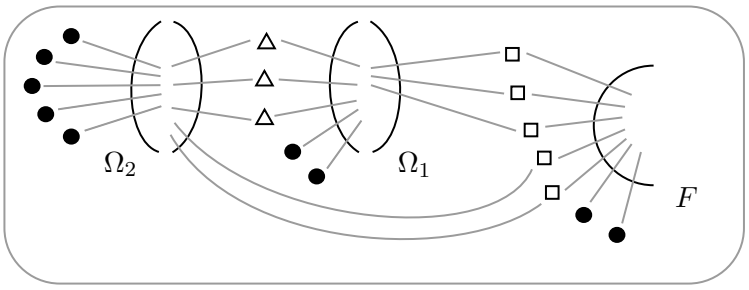
$$\Omega_2(X,D)[\Omega_1(X,T_1)\times_{T_1}F(X+T_1)]_{T_1:=1}$$

$$=\left\{\Omega_2(X,T_2)\times_{T_2}\left[[\Omega_1(X,T_1)\times_{T_1}F(X+T_1)]_{T_1:=1}\right]_{X:=X+T_2}\right\}_{T_2:=1}$$

用方形表示 T_1 类型元素，用三角形表示 T_2 类型元素。这就得到以下图表，表示一个一般的 $\Omega_2(X,\ D)[\Omega_1(X,\ D)F(X)]$-结构。



现在将其与下面的图表进行比较，该图表表示一个 $[\Omega_2(X,D)\ \odot\Omega_1(X,D)]F(X)$-结构。由此便可清楚地看出，方程 7.1 成立。



□

二类物种的复合对循环指标有如下影响。

定理 7.1.9。 设Ω_1,Ω_2 是两个二类物种。那么

$$Z_{\Omega_2\odot\Omega_1}=\sum_{n_1,n_2,\ldots}\frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1}\left(2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2}\ldots Z_{\Omega_1}\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{n_1}\left(2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^{n_2}\ldots Z_{\Omega_2}\right]}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\ldots} \tag{7.2}$$

证明。 以类似于定理 7.1.6 的证明中对 $Z_F(x_1+t_1,\ x_2+t_2,\ \ldots\ldots)$ 所采用的方式，我们有

$$Z_{\Omega_1(X+Y,T)}=\sum_{n_1,n_2,\ldots}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1}\left(2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2}\ldots Z_{\Omega_1(X,T)}\frac{y_1^{n_1}y_2^{n_2}\ldots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\ldots}$$

and

$$Z_{\Omega_2(X,T+Y)}=\sum_{n_1,n_2,\ldots}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{n_1}\left(2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^{n_2}\ldots Z_{\Omega_2(X,T)}\frac{y_1^{n_1}y_2^{n_2}\ldots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!\ldots}$$

因此，方程 7.2 只是对 Y 执行阿达玛积，并计算每个 $y_j:=1$ 的情形。

□

接下来要介绍的运算是 Joyal 标量积，其定义如下。

定义 7.1.10. 设 $F(X)$ $G(X)$ 是两个单类物种。则 Joyal 标量积是双线性型 $\langle\ F(X)\ G(X)\ \rangle$ 定义为

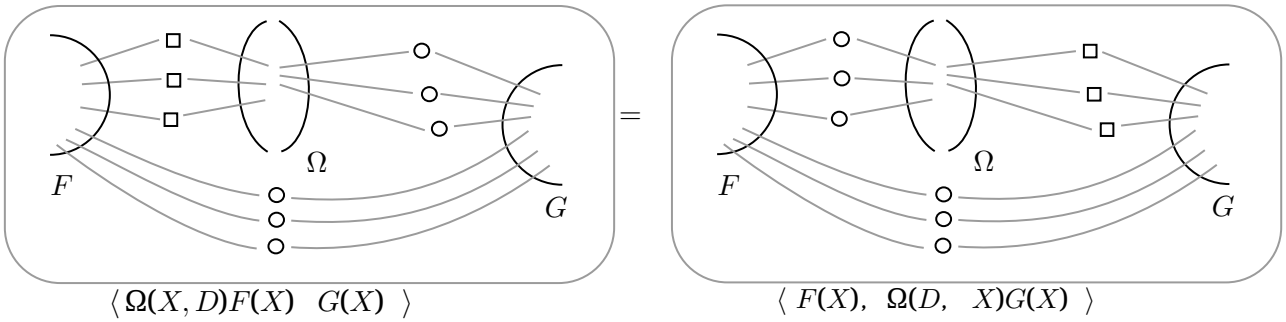
$$\langle\ F(X)\ G(X)\ \rangle = [F(X)\ \times G(X)]|_{X:=1} = \text{未标记的 } (F\times G)\text{-结构的数量，若其有限。}$$

定理 7.1.11. 设 $\Omega(X,T)$ 是一个二类物种。则

$$\langle\ \Omega(X,D)F(X),G(X)\ \rangle = \langle\ F(X),\Omega(D,X)G(X)\ \rangle$$

换言之，$\Omega(X,D)$ 的伴随算子是 $\Omega^*(X,D)\ = \Omega(D,X)$。

证明. 见下图表。



$\langle\ \Omega(X,D)F(X)\quad G(X)\ \rangle$　　$\langle\ F(X),\ \Omega(D,\quad X)G(X)\ \rangle$

□

推论 7.1.12。 设 $\Phi(X,D)$ $\Psi(X,D)$ 是两个一般微分算子。那么

$$[\Phi(X,D)\odot\Psi(X,D)]^* = \Psi^*(X,D)\odot\Phi^*(X,D) = \Psi(D,X)\odot\Phi(D,X)$$

证明。

$$\langle\ [\Phi(X,D)\odot\Psi(X,D)]F(X),G(X)\ \rangle = \langle\ \Phi(X,D)[\Psi(X,D)F(X)],G(X)\ \rangle$$

$$= \langle\ \Psi(X,D)F(X),\Phi(D,X)G(X)\ \rangle = \langle\ F(X),\Psi(D,X)[\Phi(D,X)G(X)]\ \rangle$$

$$= \langle\ F(X),[\Psi(D,X)\odot\Phi(D,X)]G(X)\ \rangle$$

□

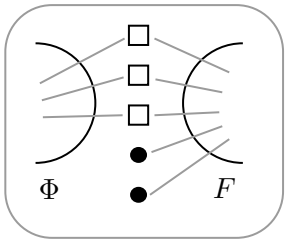
7.2 Hammond 微分算子

本节将简要介绍 Hammond 微分算子的定义及一些例子。

定义 7.2.1. Hammond 微分算子是形如 $\Phi(D)$ 的微分算子，也就是说，它是形如 $\Omega(X,T)\ = \Phi(T)$ 的一般微分算子。注意到

$$\Phi(D)F(X) = [\Phi(T)\times_T F(X+T)]|_{T:=1} = \big\{[E(X)\Phi(T)]\times F(X+T)\big\}\big|_{T:=1}$$

下图展示了一个 $\Phi(D)F(X)$-结构。

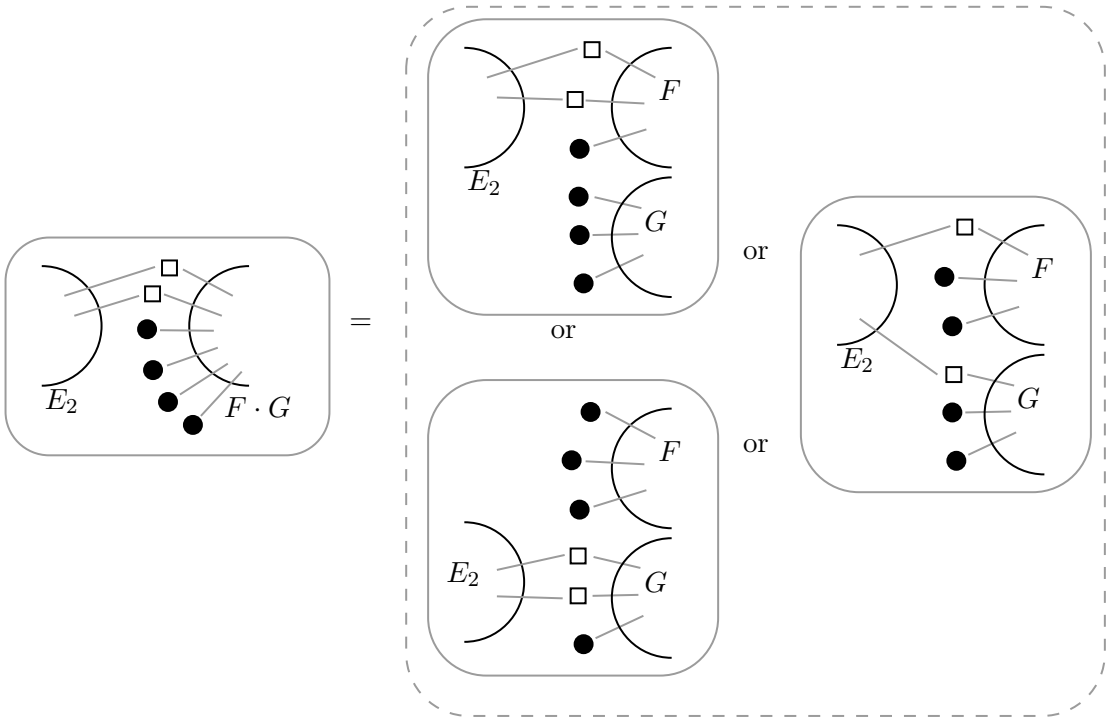


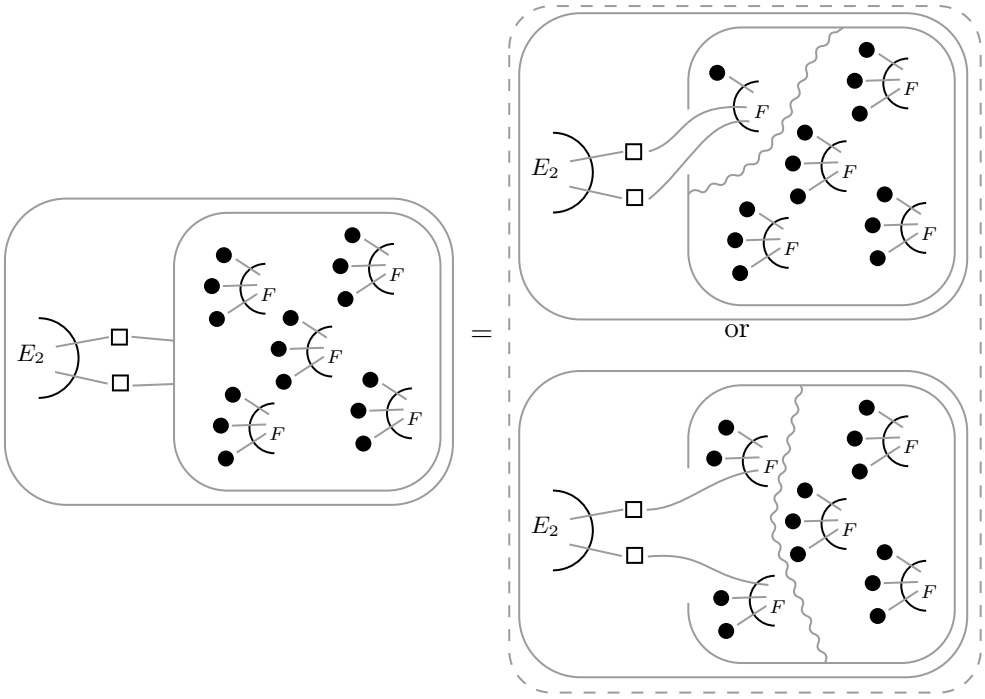
Hammond 算子的复合与乘积运算一致，也就是说，$\Phi(D) \odot \Psi(D) = (\Phi \cdot \Psi)(D)$。因此，限制在 Hammond 算子范围内，复合是可交换的，而一般微分算子的复合则并非如此。此外，Hammond 微分运算 $\Phi(D)$ 的伴随算子为 $\Phi(X)$，也就是说，$\langle\, \Phi(D)F(X)\ G(X)\ \rangle = \langle\!=\, F(X)\ \Phi(X)\ G(X)\ \rangle$。

例 7.2.2。考虑与基数为二的集合的物种E_2 相关联的 Hammond 微分算子 $E_2(D)$。那么，正如从下面的图示中可以看出的，我们有

$$E_2(D)(F \cdot G) = (E_2(D)F) \cdot G + F' \cdot G' + F \cdot (E_2(D)G)$$

$$E_2(D)(E \circ F) = (E \circ F) \cdot (E_2(D)F + E_2(F'))$$





例7.2.3. 考虑 Hammond 微分算子 $T^n(D)$。自然地，有如下关系 $T^n(D) = D^n$，由此得出

$$T^n(D)F(X) = D^nF(X) = \frac{d^nF(X)}{dX^n}$$

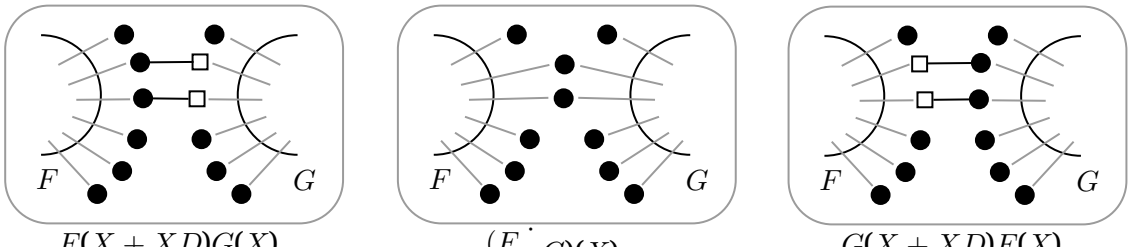
例7.2.4。 一般组合微分算子 $\Omega(X, D)$ 称为自伴算子，当 $\Omega(X, T) = \Omega(T, X)$ 时。例如，给定任意一个单类物种 $\Phi(X)$，算子 $\Phi(X + D)$ 是自伴的。自伴算子的一种重要类型是指点概念的推广。正如读者可能已经回忆起的，指点是由算子 XD 或 $T(XD)$ 定义的运算。由此可以将这一思想推广，提出 Φ-指点的概念，即应用算子 $\Phi(XD)$，其中 Φ 是一个单类物种。指点运算的复合由吻积 $\Phi(XD)\odot\Psi(XD) = (\Phi\dot{\times}\Psi)(XD)$ 给出，其定义如下。

定义 7.2.5。 令 $F(X)$ $G(X)$ 为两个单类物种。则 F 与 G 的吻积为

$$(F\dot{\times}G)(X) = F(X + XD)G(X) = G(X + XD)F(X).$$

（最后一个等式的证明见下图。）这两个正规积 $F \cdot G$和 $F \times G$ 可以看作“空”和“满”的吻积，因此

$$F \cdot G \subset F\dot{\times}G \quad \text{and} \quad F \times G \subset F\dot{\times}G.$$



$F(X + XD)G(X)$ $(F\dot{\times}G)(X)$ $G(X + XD)F(X)$

指点的另一个例子是算子 $T^2(XD) = (XD)^2 = X^2D^2$，它对应于对该 F-结构中两个不同元素进行指点。请注意，这并不等于 $(XD) \odot (XD)$，因为后者等于 $XD + X^2D^2$，其中包含了对同一个元素指点两次的情形。

例 7.2.6. 考虑由 $E(D)$ 给出的 Hammond 算子。于是，根据定义，$E(D)F(X) = [E(T) \times_T F(X+T)]|_{T:=1} = F(X+1)$，这就得到了一个在结构物种意义下与移位算子等价的算子（回忆定义 1.1.8）。此外，由于 $F(X) \subset F(X+1)$，这使我们能够在结构物种意义下定义有限差分算子，而无需涉足虚物种的领域。

定义 7.2.7. 有限差分算子 Δ 可以通过定义 $\Delta F(X) := E_+(D)F(X)$ 扩展到结构物种，其中 $E_+ = E - 1$ 是非空有限集的物种。

例 7.2.8. 设 $L_n = X^n$ 为限制在基数为 n的集合上的线性序物种，并令 $G(X) = \Delta L_n$。由于 $Z_{L_n}(x_1, x_2, \ldots) = x_1^n$并且

$$Z_{E_+}(t_1, t_2, t_3, \ldots) = \left[\sum_{n_1, n_2, \ldots} \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_3^{n_3} \ldots}{1^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2! 3^{n_3} n_3! \ldots} \right] - 1,$$

由定理 7.1.6 可知

$$Z_G(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left[\sum_{n_1, n_2, \ldots} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} \cdots}{n_1! n_2! \ldots} - 1 \right] x_1^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k = (x_1 + 1)^n - x_1^n,$$

因此

$$G(x) = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1} k! \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

将有限差分算子推广到物种领域，使得建立一般组合差分演算理论成为可能，也就是研究形如 $\Omega(X, \Delta)$ 的算子，其中 $\Omega(X, T)$ 如常是一个二类物种。

参考文献

[BLL13] F. Bergeron、G. Labelle 和 P. Leroux。《结构物种理论导论》。蒙特利尔魁北克大学，蒙特利尔，2013。[BLL98] F. Bergeron、G. Labelle 和 P. Leroux。《组合物种与树状结构》。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，1998。isbn：9780521573238。[GL18] A. Garcia 和 Y. Lequain。《代数基础》。第 6 版。IMPA，2018。isbn：978852440450

4.

[Joy81] A. Joyal. “形式幂级数的组合理论”。载于：数学进展42.1 (1981年)，第 1–82 页。[Joy86] A. Joyal. “解析函子与结构物种”。载于：组合枚举。施普林格，1986 年，第 126–159 页。[Lab85] G. Labelle. “隐函数定理背后的组合学”。载于：组合理论杂志 *A* 辑 40.2 (1985)，第 377–393 页。ISSN：0097-3165。DOI：https://doi.org/10.1016/0097-3165(85)90097-4。[Liu68] C. Liu. 组合数学导论。麦格劳-希尔，1968 年。[LL09] G. Labelle 和 C. Lamathe. “一般组合微分算子”。载于：洛林组合学研讨会 61.B61Ag (2009年)。[PRA87] G. Pólya、R. Read 和 D. Aeppli. 群、图与化合物的组合枚举。施普林格纽约，1987 年。ISBN：9783540964131。[Str04] T. Streicher. “范畴论与范畴逻辑导论”。载于：达姆施塔特工业大学讲义 (2004)。[Wag20] C. Wagner。枚举组合学初级教程。纯数学与应用数学本科教材。美国数学会，2020 年。ISBN：9781470459956。