arXiv:2305.05071v1 [math.NT] 8 May 2023

通过圆法研究对角超曲面上的有理直线与次凸性

TREVOR D. WOOLEY

Abstract. 固定 k、s 和 $n \in \mathbb{N}$，并考虑非零整数 c_1、.....、c_s，它们不全同号。在满足 $s \geqslant k(k+1)$ 的条件下，我们证明了存在整数坐标直线位于由方程 $c_1x_1^k+\ldots+c_sx_s^k = n$ 定义的仿射对角超曲面上的海瑟原理。这一结论突破了该问题中相当于平方根抵消极限的传统凸性障碍。

1. Introduction

对代数簇上有理线性空间的研究，是 Brauer [6] 和 Birch [2] 为确立完全交上存在有理点而采用归纳策略的关键步骤。上世纪中叶的这项开创性工作，近年来在 Parsell [11, 12] 和 Brandes [4], 的研究中进一步发展，纳入了定量考量。本文同样研究有理直线的丰度，不过对象是仿射对角超曲面。通过应用 Hardy-Littlewood（圆）法，我们推导出关于超曲面上存在具有整数坐标的直线的某种海瑟原理。我们所用方法的一个显著特点是，它超越了圆法的凸性极限；所谓凸性极限，是指通常将该方法限制在可用变量数超过内在次数两倍的问题中的平方根障碍。

为了更精确地描述我们的结论，我们必须引入一些记号。我们固定自然数 $k \geqslant 2$ 和 s，并考虑由对角方程定义的仿射超曲面

$$c_1x_1^k + \ldots + c_sx_s^k = n, \tag{1.1}$$

其中，$c_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}(1 \leqslant i \leqslant s)$ 和 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 是固定的。特别地，我们假设系数 c_i 并非全为正数，也并非全为负数。对于每个指数 k，通过圆法的常规应用，可以确认存在一个正数 $s_0(k)$，使得只要满足 $s \geqslant s_0(k)$，方程 (1.1) 的解就具有弱逼近性质。事实上，根据早期学者的研究成果及其方法，当 $2 \leqslant k \leqslant 15$ 时，有 $s_0(k) \leqslant t_0(k)$，其中 $t_0(k)$ 按照下文的表1定义（必要的思路见 [9, 10, 13, 14, 16, 17, 22] ）。与此同时，作者与 Br¨udern [9] 最近的研究成果可以直接应用，从而确认 $s_0(k) \leqslant \lceil k(\log k + 4.20032)\rceil$。此外，在满足实数域和 p-进可解性假设的条件下，同样可以在相同条件下推出该结论。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11D45、11D72、11P55。

Key words and phrases. 哈代–李特尔伍德方法、丢番图方程、有理直线。作者获得了美国国家科学基金会（NSF）资助，项目编号为 DMS-1854398 和 DMS-2001549。

方程（1.1）有大量整数解，其中对于每个 $r \geqslant 1$，不存在满足 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant s$ 的索引 r 元组 $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$，且

$$c_{i_1} x_{i_1}^k + c_{i_2} x_{i_2}^k + \ldots + c_{i_r} x_{i_r}^k = 0.$$

今后，我们将后者称为不存在子和为零的条件，并特别指出，这意味着没有任何变量 x_i 等于 0。

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t_0(k)$	4	7	12	17	24	31	39	47	55	63	72	81	89	97

当 $2 \leqslant k \leqslant 15$ 时，$s_0(k)$ 的上界。

本文关注方程 (1.1) 是否存在形如 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + t\mathbf{z}$ 的线性解空间，其中 $\mathbf{y} \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^s$，且 $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$。在满足局部可解条件及假设 $s \geqslant s_0(k)$ 的前提下，由上述讨论可知，存在一个 s 元组 $\mathbf{y} \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^s$，满足方程

$$c_1 y_1^k + \ldots + c_s y_s^k = n. \tag{1.2}$$

固定该解后，我们用 $N_{s,\,k}(B; \mathbf{y})$ 表示满足方程的整数 s 元组 $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^s \cap [-B, B]^s$ 的数量

$$c_1(y_1 + tz_1)^k + \ldots + c_s(y_s + tz_s)^k = n \tag{1.3}$$

作为关于 t 的多项式恒等成立。利用二项式定理展开 (1.3) 中的幂，并回顾 (1.2)，可知这些 s 元组所满足的条件，等价于要求 $\mathbf{z}$ 满足方程组

$$\sum_{i=1}^{s} c_i y_i^{k-j} z_i^j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{1.4}$$

本文着重讨论 $k \geqslant 3$ 的情形。$k = 1$ 的情形属于线性代数范畴，而 $k = 2$ 的情形则可借助二次型理论处理。事实上，通过消去 (1.4) 中线性方程与二次方程之间的一个变量可知，确定 $N_{s,\,2}(B; \mathbf{y})$ 的问题，等价于经典的计数问题：求满足同余条件的 $s - 1$ 个变量齐次二次方程的整数解；对于所有 s，这个问题都已得到充分理解。

定理 1.1. 设 s 和 k 为自然数，且满足 $k \geqslant 3$ 和 $s \geqslant k(k+1)$。再设 c_1、……、c_s 和 n 为固定的非零整数，其中 c_1、……、c_s 既不全为正，也不全为负。假设 y_1、……、y_s 是满足方程 (1.2) 的非零整数。那么，只要方程组 (1.4) 对每个素数 p 都有非奇异的实数域解和 p-进解，就存在一个正数 $\mathscr{C}_{s,\,k}(\mathbf{y})$，使得

$$N_{s,k}(B; \mathbf{y}) = \mathscr{C}_{s,k}(\mathbf{y}) B^{s-k(k+1)/2} + o(B^{s-k(k+1)/2}). \tag{1.5}$$

关于定理 1.1 所给结论的性质，有几点值得说明。首先，由于对所有自然数 k，$s_0(k) \leqslant k(k+1)$，上述讨论保证，只要局部可解条件允许得出这样的结论，就会有大量解 $\mathbf{y} \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^s$ 满足方程 (1.2)。显然，当大部分系数 c_i 都能被 p 整除，而 n 不能被其整除时，可能存在阻碍 p-进可解性的因素。然而，人们可以将这种情况视为……

将该定理的第一个重要假设视为基本上无害的。接下来，正如我们将在第 7 节中所证明的，在两种通常出现的简单情形下，方程组 (1.4) 的非奇异实数解和 p-进解均存在。首先，如果方程 (1.2) 的解 $\mathbf{y} \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^s$ 满足不存在消失子和这一条件，那么方程组 (1.4) 在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Q}_p$ 上的任意解 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ 都自动是非奇异的。其次，只需满足 y_1、……、y_s是满足方程 (1.2) 的非零整数这一条件，当 $z_i \neq 0$ 对 $1 \leqslant i \leqslant s$成立时，方程组 (1.4) 在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Q}_p$ 上的任意解 $\mathbf{z}$ 都是非奇异的。

最后，正如读者所预料的那样，可以将渐近公式 (1.5) 中出现的系数$\mathscr{C}_{s,\,k}(\mathbf{y})$ 解释为局部密度的乘积，其具体描述需要一些准备。当 p 是一个素数且 $h \in \mathbb{N}$时，记 $M_p(h)$ 为满足方程组 (1.4) 且 $\mathbf{z} \in (\mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z})^s$ 的解 $\mathbf{z}$ 的个数。此外，当 $\eta > 0$时，用 $M_\infty(\eta)$ 表示由下列不等式定义的$[-1,1]^s$ 子集的体积

$$\left| \sum_{i=1}^{s} c_i y_i^{k-j} z_i^j \right| < \eta \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

那么这些极限

$$\sigma_\infty = \lim_{\eta \to 0+} (2\eta)^{-k} M_\infty(\eta) \quad \text{and} \quad \sigma_p = \lim_{h \to \infty} p^{h(k-s)} M_p(h),$$

若存在，则分别定义方程组 (1.4) 的实密度和 p-进密度。我们在 §5 中证明，在定理 1.1 的陈述所给出的假设下，这两个极限都存在，并且有 $\mathscr{C}_{s,\,k}(\mathbf{y}) = \sigma_\infty \prod_p \sigma_p$，其中乘积遍及所有素数 p。此外，还有 $1 \ll \mathscr{C}_{s,\,k}(\mathbf{y}) \ll 1$。

定理 1.1 的结论表明，在满足自然的局部可解条件及约束 $s \geqslant k(k+1)$ 的前提下，超曲面 (1.1) 上每个符合条件的整点都经过大量具有整数系数的仿射直线。在 $s = k(k+1)$ 的情形下，定理 1.1 的结论克服了圆法中的凸性障碍，因为变量的数量恰好是定义方程组 (1.4) 的多项式次数之和的两倍。考察相关的指数和，可以更清楚地看出这一超凸性结论。当 $k \geqslant 3$ 和 X 是一个较大的实数时，定义 $f(\boldsymbol{\alpha}) = f_k(\boldsymbol{\alpha};\, X)$ 如下：

$$f_k(\boldsymbol{\alpha}; X) = \sum_{|x| \leqslant X} e(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k), \tag{1.6}$$

其中，照例记 $e(z) = e^{2\pi i z}$。我们引入哈代–利特尔伍德剖分以便于讨论。写作 $L = X^{1/(8k^2)}$。那么，当

$$1 \leqslant q \leqslant L, \quad 0 \leqslant \mathbf{a} \leqslant q \quad \text{and} \quad (q, \mathbf{a}) = 1,$$

我们将主弧 $\mathfrak{P}(q, \mathbf{a})$ 定义为

$$\mathfrak{P}(q, \mathbf{a}) = \{\boldsymbol{\alpha} \in [0,1)^k : |\alpha_j - a_j/q| \leqslant LX^{-j} \ (1 \leqslant j \leqslant k)\}.$$

本文以下为简洁起见，采用扩展向量记号。因此，我们用 $0 \leqslant \mathbf{a} \leqslant q$ 表示 $0 \leqslant a_j \leqslant q$ for$1 \leqslant j \leqslant k$，并用 $(q, \mathbf{a})$ 表示 q和 $a_1, \ldots, a_k$的最大公因数 $(q, a_1, \ldots, a_k)$。容易验证，弧 $\mathfrak{P}(q, \mathbf{a})$ 两两不相交。令 $\mathfrak{P}$ 表示它们的并集，并设 $\mathfrak{p} = [0,1)^k \setminus \mathfrak{P}$。

我们通过以下结论，展示证明定理 1.1 所依据的方法所能得到的次凸性估计。

定理 1.2. 设 k 和 s 为满足 $k \geqslant 3$ 的自然数。假设 $c_1, \dots, c_s$ 是满足以下性质的非零整数：

$$c_1 + \dots + c_s \neq 0. \tag{1.7}$$

那么，只要 $1 \leqslant s < k(k+1)$，就有

$$\int_{[0,1)^k} f_k(c_1\boldsymbol{\alpha}; X) \cdots f_k(c_s\boldsymbol{\alpha}; X)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \ll X^{(s-1)/2+\varepsilon}. \tag{1.8}$$

与此同时，当 $s = k(k+1)$ 时，有

$$\int_{\mathfrak{p}} f_k(c_1\boldsymbol{\alpha}; X) \cdots f_k(c_s\boldsymbol{\alpha}; X)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \ll X^{(s-\delta)/2+\varepsilon}, \tag{1.9}$$

其中 $\delta = 1/(4k^3)$，而当 $s > k(k+1)$ 时，有

$$\int_{\mathfrak{p}} f_k(c_1\boldsymbol{\alpha}; X) \cdots f_k(c_s\boldsymbol{\alpha}; X)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \ll X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)-\frac{1}{2}\delta+\varepsilon}. \tag{1.10}$$

鉴于平凡估计 $|f_k(\boldsymbol{\alpha}; X)| \leqslant 2X+1$，显然，界 (1.8) 和 (1.9) 超出了平方根抵消所能得到的范围，因此构成了次凸性估计，其含义如我们与 Br¨udern [7] 合作的论文中所述。在此我们指出，只要付出更多努力，就有可能以更大的 δ 建立估计 (1.9)。本文选择采用更简洁的论述，以得出合理的定性结果，而不寻求可能达到的最强定量结果。

我们简要概述定理 1.1 证明所采用的策略，并将讨论范围限定在定理 1.2 重点关注的较简单情形。这里，根据正交性，平均值

$$\Upsilon = \int_{[0,1)^k} \prod_{i=1}^{s} f_k(c_i\boldsymbol{\alpha}; X)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$$

(1.8) 左边统计的是该方程组的整数解数量

$$\sum_{i=1}^{s} c_i x_i^j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{1.11}$$

对于 $|x_i| \leqslant X$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$。对于每个这样的解 $\mathbf{x}$，以及每个满足 $1 \leqslant y \leqslant X$ 的整数 y，由二项式定理可得

$$\sum_{i=1}^{s} c_i (x_i + y)^j = -c_0 y^j \quad (1 \leqslant j \leqslant k),$$

其中我们记 $c_0 = -(c_1 + \dots + c_s)$。注意，关于系数 c_i 的假设 (1.7) 确保了 $c_0 \neq 0$。因此，对于每个满足 $|y| \leqslant X$ 的整数 y，由 Υ 计数的方程组 (1.11) 的整数解数不超过以下方程的整数解数

$$c_0 y^j + \sum_{i=1}^{s} c_i z_i^j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k),$$

其中 $|z_i| \leqslant 2X$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$。对这些 y 值取平均并利用正交性，我们由此得出

$$\int_{[0,1)^k} \prod_{i=1}^{s} f_k(c_i\boldsymbol{\alpha}; X)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \leqslant X^{-1} \int_{[0,1)^k} \prod_{j=0}^{s} f_k(c_j\boldsymbol{\alpha}; 2X)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}. \tag{1.12}$$

与平均值 (1.8) 相比，我们现在在 (1.12) 中多了一个可供取平均的变量，正是这一点使我们能够实现次凸性。我们指出，为了分析仅限于小弧的平均值 (1.9)，我们采用了此前在工作 [19] 中使用的一些调和分析思想；该工作致力于研究华林问题的渐近公式。

本文组织如下。我们在 §2 中根据刚才描述的策略推导基本引理。这项工作已经足以迅速证明定理 1.2 中给出的第一个次凸估计 (1.8)。在 §3 中，我们开始证明定理 1.2 中给出的更一般形式的小弧估计 (1.9)，为定理 1.1 的证明奠定基础。在 §4 中，我们将这一初步的小弧估计转化为更便于应用传统哈代–李特尔伍德方法的形式。随后在 §5 中，我们处理完成定理 1.1 证明所需的主弧分析。我们在 §6 中完成定理 1.1 和定理 1.2 的证明。最后，在 §7 中，我们讨论定理 1.1 中隐含的非奇异性条件，并证明存在方程组 (1.4) 的非奇异解可由我们已经指出的条件推出。

全文中，字母 ε 表示一个正数。我们约定，每当 ε 出现在某个陈述中，无论是隐含还是明确出现，都表示该陈述对每个 $\varepsilon > 0$ 均成立。我们的基本参数为 X 或 B，其中 B 是一个充分大的正数。此外，我们用 $\ll$ 和 $\gg$ 表示维诺格拉多夫众所周知的记号，其隐含常数至多依赖于 k、s 和 ε，以及上下文中显而易见的其他相关参数。最后，对于 $\theta \in \mathbb{R}$，我们定义 $\|\theta\|$ 为 $\|\theta\| = \min\{|\theta - n| : n \in \mathbb{Z}\}$。

历史说明：本文的第一个版本写于 2014 年，其动机是作者于 2014 年 1 月证明了维诺格拉多夫平均值定理三次情形的主猜想（见 [21], ，该文最初以 arXiv:1401.3150 发表）。作者感谢 Julia Brandes、Simon Rydin Myerson、Per Salberger 等人在 2014 至 2016 年间，随着相关思想逐步发展，在作者于华威大学、伦敦国王学院、牛津大学和哥德堡所作的相关报告中提出意见。这些思想后来在希尔伯特—卡姆克问题中得出了次凸性结论（见 [26]），并应用于维诺格拉多夫平均值定理的仿射变体（见 [24, 25]，另请参见 [5]）。

2. An averaged mean value

我们首先将引言末尾概述的策略应用于一种未必具有丢番图解释的平均值，并据此加以阐释。这将得出一个相当一般的结论，对我们后续的讨论很有用。我们始终假设 s、k、y 和 n 均为定理 1.1 陈述前言中所规定的固定对象。当 $y \in \mathbb{Z}$ 时，我们通过令 $\beta_j(y) = \beta_j(\boldsymbol{\alpha}; y)$ 来定义

$$\beta_j(\boldsymbol{\alpha}; y) = y^{k-j}\alpha_j \quad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{2.1}$$

在下一个引理的证明及其引言中，当 $j \in \{k-1, k\}$ 时，为了行文简洁，我们将微分 $\mathrm{d}\alpha_1 \dots \mathrm{d}^{\alpha_j}$ 简写为 $\mathrm{d}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_j$。然后，当

$\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$ 是可测的，我们引入平均值

$$I_s(\mathfrak{B}; X) = \int_{\mathfrak{B}} \int_{[0,1)^{k-1}} \prod_{i=1}^{s} f(c_i \boldsymbol{\beta}(y_i)) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k, \tag{2.2}$$

其中， $f(\boldsymbol{\theta}) = f_k(\boldsymbol{\theta}; X)$ 由 (1.6) 定义。注意，由正交性可得$N_{s,k}(B; \mathsf{y}) = I_s([0,1); B)$。我们使用与维诺格拉多夫平均值定理相关的技术。鉴于此，当 $t, k \in \mathbb{N}$，参数 X 为正且 $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$ 可测时，我们定义

$$\mathfrak{J}_{t,k}(\mathfrak{B}; X) = \int_{\mathfrak{B}} \int_{[0,1)^{k-1}} |f_k(\boldsymbol{\alpha}; X)|^t \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k. \tag{2.3}$$

引理 2.1. 设 $\mathsf{c}, \mathsf{y} \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^s$，并定义

$$c_0 = -(c_1 y_1^k + \ldots + c_s y_s^k). \tag{2.4}$$

假设 $c_0 \neq 0$。那么，只要 $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$ 可测，就有

$$I_s(\mathfrak{B}; X) \ll X^{-1} (\log X)^{s+1} \prod_{i=0}^{s} \mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i \mathfrak{B}; X)^{1/(s+1)}.$$

这里，维诺格拉多夫记号中隐含的常数可能依赖于 y。

证明。我们利用平均值 (2.2) 背后的丢番图方程组经爆破版本所具有的平移不变性。设时时彩官网

$$\psi(u; \boldsymbol{\theta}) = \theta_1 u + \ldots + \theta_k u^k. \tag{2.5}$$

首先注意，对于每个指标 i 以及每个积分平移 z，由此可推出 onehas (1.6)

$$f(\boldsymbol{\beta}(y_i); X) = \sum_{|x - y_i z| \leqslant X} e(\psi(x - y_i z; \boldsymbol{\beta}(y_i))). \tag{2.6}$$

写出

$$\mathfrak{f}_{i,z}(\boldsymbol{\alpha}; \gamma) = \sum_{|x| \leqslant 2X} e\left(\psi(x - y_i z; \boldsymbol{\beta}(y_i)) + \gamma(x - y_i z)\right). \tag{2.7}$$

此外，定义

$$K(\gamma) = \sum_{|w| \leqslant X} e(-\gamma w), \tag{2.8}$$

并令

$$\Lambda = \min_{1 \leqslant i \leqslant s} |y_i|^{-1}.$$

然后由（2.6）通过正交性可推出，当 $|z| \leqslant \Lambda X$ 时，有

$$f(\boldsymbol{\beta}(y_i); X) = \int_0^1 \mathfrak{f}_{i,z}(\boldsymbol{\alpha}; \gamma) K(\gamma) \, \mathrm{d}\gamma. \tag{2.9}$$

接下来，定义

$$\mathfrak{F}_z(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\gamma}) = \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{f}_{i,z}(c_i \boldsymbol{\alpha}; \gamma_i). \tag{2.10}$$

然后，将 (2.9) 代入 (2.2)，可得对每个满足$|z| \leqslant \Lambda X$的整数 z ，都有

$$I_s(\mathfrak{B}; X) = \int_{[0,1)^s} \mathscr{I}(\boldsymbol{\gamma}; z) \widetilde{K}(\boldsymbol{\gamma}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}, \tag{2.11}$$

其中

$$\mathscr{I}(\boldsymbol{\gamma};z)=\int_{\mathfrak{B}}\int_{[0,1)^{k-1}}\mathfrak{F}_z(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\gamma})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k \tag{2.12}$$

and

$$\widetilde{K}(\boldsymbol{\gamma})=\prod_{i=1}^{s}K(\gamma_i). \tag{2.13}$$

根据正交性，可得

$$\int_{[0,1)^{k-1}}\mathfrak{F}_z(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\gamma})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}=\sum_{|\mathbf{x}|\leqslant 2X}\Delta(\alpha_k,\boldsymbol{\gamma},z), \tag{2.14}$$

其中 $\Delta(\theta,\boldsymbol{\gamma},z)$ 等于

$$e\left(\theta\sum_{i=1}^{s}c_i(x_i-y_iz)^k+\sum_{i=1}^{s}(x_i-y_iz)\gamma_i\right),$$

when

$$\sum_{i=1}^{s}c_iy_i^{k-j}(x_i-y_iz)^j=0\quad(1\leqslant j\leqslant k-1), \tag{2.15}$$

否则， $\Delta(\theta,\boldsymbol{\gamma},z)$ 等于 0。

应用二项式定理并回忆 (2.4)，可知只要 s 元组 x 满足方程组 (2.15)，那么

$$c_0z^j+\sum_{i=1}^{s}c_iy_i^{k-j}x_i^j=0\quad(1\leqslant j\leqslant k-1),$$

因此

$$\sum_{i=1}^{s}c_i(x_i-y_iz)^k=c_0z^k+\sum_{i=1}^{s}c_ix_i^k.$$

然后，回顾（2.5），由（2.14）可得

$$\int_{[0,1)^{k-1}}\mathfrak{F}_z(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\gamma})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}=e(-z\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{y})\int_{[0,1)^{k-1}}\mathfrak{F}_0(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\gamma})e(c_0\psi(z;\boldsymbol{\alpha}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}.$$

由此，根据关系式（2.12），我们得到公式

$$\mathscr{I}(\boldsymbol{\gamma};z)=e(-z\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{y})\int_{\mathfrak{B}}\int_{[0,1)^{k-1}}\mathfrak{F}_0(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\gamma})e(c_0\psi(z;\boldsymbol{\alpha}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k.$$

回顾记号（1.6），至此我们可以得出结论： t

$$\sum_{|z|\leqslant\Lambda X}\mathscr{I}(\boldsymbol{\gamma};z)=\int_{\mathfrak{B}}\int_{[0,1)^{k-1}}\mathfrak{F}_0(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\gamma})f(c_0\boldsymbol{\alpha}-\widetilde{\boldsymbol{\gamma}};\Lambda X)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k, \tag{2.16}$$

其中， $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ 由令 $\widetilde{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{y}$ 和 $\widetilde{\gamma}_j=0$ $(2\leqslant j\leqslant k)$ 定义。

此时，令 $y_0=1$ 并像推导（2.9）时那样应用正交性较为方便。因此，回顾（2.7），可知

$$f(\boldsymbol{\alpha};\Lambda X)=\int_0^1\mathfrak{f}_{0,0}(\boldsymbol{\alpha};\gamma)K_0(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma,$$

其中

$$K_0(\gamma)=\sum_{|z|\leqslant\Lambda X}e(-\gamma z). \tag{2.17}$$

因此，通过将赫尔德不等式应用于 (2.16)，并回顾 (2.10)，我们得到

$$\Big| \sum_{|z| \leqslant \Lambda X} \mathscr{I}(\boldsymbol{\gamma}; z) \Big| \leqslant \int_0^1 \Big(\prod_{i=0}^{s} \Omega_i \Big)^{1/(s+1)} |K_0(\gamma_0)| \, \mathrm{d}\gamma_0, \tag{2.18}$$

其中

$$\Omega_0 = \int_{\mathfrak{B}} \int_{[0,1)^{k-1}} |\mathfrak{f}_{0,0}(c_0 \boldsymbol{\alpha} - \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}; \gamma_0)|^{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k$$

and

$$\Omega_i = \int_{\mathfrak{B}} \int_{[0,1)^{k-1}} |\mathfrak{f}_{i,0}(c_i \boldsymbol{\alpha}; \gamma_i)|^{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k \quad (1 \leqslant i \leqslant s).$$

通过变量代换并利用模 1 周期性，由 (2.1) 和 (2.7) 可得，对于 $0 \leqslant i \leqslant s$，有

$$\Omega_i = \int_{\mathfrak{B}} \int_{[0,1)^{k-1}} |\mathfrak{f}_{i,0}(c_i \boldsymbol{\alpha}; 0)|^{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k = c_i^{-1} \int_{c_i \mathfrak{B}} \int_{[0,1)^{k-1}} |\mathfrak{f}_{i,0}(\boldsymbol{\alpha}; 0)|^{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k.$$

因此，由 (2.3) 通过正交性可知 $\Omega_i = c_i^{-1} \mathfrak{J}_{s+1,\, k}(c_i \mathfrak{B}; X)$。于是由 (2.18) 推得

$$\Big| \sum_{|z| \leqslant \Lambda X} \mathscr{I}(\boldsymbol{\gamma}; z) \Big| \leqslant \Big(\prod_{i=0}^{s} \mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i \mathfrak{B}; X) \Big)^{1/(s+1)} \int_0^1 |K_0(\gamma_0)| \, \mathrm{d}\gamma_0.$$

将此估计代入 (2.11)，并回顾 (2.13)，即可得到

$$\begin{aligned} I_s(\mathfrak{B}; X) &\leqslant (2\Lambda X)^{-1} \int_{[0,1)^s} \Big| \sum_{|z| \leqslant \Lambda X} \mathscr{I}(\boldsymbol{\gamma}; z) \widetilde{K}(\boldsymbol{\gamma}) \Big| \, \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma} \\ &\ll X^{-1} \prod_{i=0}^{s} \Big(\mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i \mathfrak{B}; X)^{1/(s+1)} \int_0^1 |K_i(\gamma_i)| \, \mathrm{d}\gamma_i \Big), \end{aligned} \tag{2.19}$$

其中我们采取了简便做法：当 $1 \leqslant i \leqslant s$ 时，将 $K(\gamma_i)$ 写作 $K_i(\gamma_i)$。回顾 (2.8) 和 (2.17)。那么，熟知的初等界 $K_i(\gamma) \ll \min\{X, \|\gamma\|^{-1}\}$ 表明

$$\int_0^1 |K_i(\gamma_i)| \, \mathrm{d}\gamma_i \ll \log X \quad (0 \leqslant i \leqslant s).$$

因此，由 (2.19) 可得

$$I_s(\mathfrak{B}; X) \ll X^{-1} (\log X)^{s+1} \prod_{i=0}^{s} \mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i \mathfrak{B}; X)^{1/(s+1)}.$$

这里，我们强调，维诺格拉多夫记号中隐含的常数可能依赖于 y。至此，引理的证明完成。□

引理 2.1 的一个几乎直接的推论给出了定理 1.2 的第一个结论。

引理 2.2. 设 s 和 k 为自然数，且 $1 \leqslant s < k(k+1)$。假设 $\mathsf{c}, \mathsf{y} \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^s$ 和 $c_1 y_1^k + \ldots + c_s y_s^k \neq 0$。则有

$$I_s([0,1); X) \ll X^{(s-1)/2+\varepsilon}.$$

证明。令 $c_0 = -(c_1y_1^k + \ldots + c_sy_s^k)$。应用引理 2.1，得到如下界估计。

$$I_s([0,1);X) \ll X^{\varepsilon-1}\prod_{i=0}^{s}\mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i[0,1);X)^{1/(s+1)}. \tag{2.20}$$

这里，鉴于定义 (2.3)，我们有

$$\mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i[0,1);X) = |c_i|\int_{[0,1)^k}|f_k(\boldsymbol{\alpha};X)|^{s+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

由于我们关于 s 的假设确保了 $s+1 \leqslant k(k+1)$，因此我们可以从维诺格拉多夫平均值定理中的主猜想（现已得到证实，参见 [3, 21, 23]）推导出

$$\mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i[0,1);X) \ll X^{\varepsilon}(X^{(s+1)/2} + X^{s+1-k(k+1)/2}).$$

因此，将这一估计代入 (2.20)，我们得出结论：

$$I_s([0,1);X) \ll X^{\varepsilon}(X^{(s-1)/2} + X^{s-k(k+1)/2}).$$

引理的结论现在显而易见。 □

为了得到上界 (1.8)，我们只需令 $y_1 = \ldots = y_s = 1$，即可由 (2.2) 和引理 2.2 得出，当 $1 \leqslant s < k(k+1)$ 时，有

$$\int_{[0,1)^k} f_k(c_1\boldsymbol{\alpha};X)\cdots f_k(c_s\boldsymbol{\alpha};X)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \ll X^{(s-1)/2+\varepsilon}.$$

在下一个引理中，以及本文余下部分，我们假设$k \geqslant 3$且 $\mathbf{c}, \mathbf{y} \in (\mathbb{Z}\setminus\{0\})^s$。此外，令 $c_0 = -(c_1y_1^k + \ldots + c_sy_s^k)$，我们假设 $c_0 \neq 0$。接下来，我们利用引理 2.1 得到一个小弧型估计。当$1 \leqslant Q \leqslant X$时，我们定义如下的一维哈代–利特尔伍德剖分。我们将大弧集合 $\mathfrak{M}(Q)$ 定义为以下弧的并集

$$\mathfrak{M}(q,a) = \{\alpha \in [0,1) : |q\alpha - a| \leqslant QX^{-k}\},$$

其中 $0 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q$ 且 $(a,q) = 1$，然后将相应的小弧集合记作 $\mathfrak{m}(Q) = [0,1) \setminus \mathfrak{M}(Q)$。

接下来，当 k 是满足 $k \geqslant 2$的整数时，我们通过取下式来定义指数 $\sigma = \sigma(k)$

$$\sigma(k)^{-1} = \begin{cases} 2^{k-1}, & \text{when } 2 \leqslant k \leqslant 5,\\ k(k-1), & \text{when } k \geqslant 6.\end{cases}$$

于是，当 $k \geqslant 2$ 且 $1 \leqslant Q \leqslant X$时，有

$$\sup_{\alpha_k\in\mathfrak{m}(Q)}\sup_{\boldsymbol{\alpha}_{k-1}\in[0,1)^{k-1}}|f_k(\boldsymbol{\alpha}_k;X)| \ll X^{1+\varepsilon}Q^{-\sigma(k)}. \tag{2.21}$$

读者可参见 [26, 引理 2.2] ，其中给出了这一结论的证明，并运用了标准文献中的结果。

引理 2.3. 当 $1 \leqslant Q \leqslant X$ 且 $s \geqslant k(k+1)$时，有

$$I_s(\mathfrak{m}(Q);X) \ll X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)+\varepsilon}Q^{-\sigma(k)}.$$

证明。我们应用引理 2.1 得到如下界

$$I_s(\mathfrak{m}(Q);X) \ll X^{\varepsilon-1}\prod_{i=0}^{s}\mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i\mathfrak{m}(Q);X)^{1/(s+1)}. \tag{2.22}$$

这里，根据定义 (2.3)，我们有

$$\mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i\mathfrak{m}(Q);X)=\int_{c_i\mathfrak{m}(Q)}\int_{[0,1)^{k-1}}|f_k(\boldsymbol{\alpha};X)|^{s+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k.$$

一个初等练习可以验证 $c_i\mathfrak{m}(Q)\subseteq\mathfrak{m}(Q/|c_i|)\ (\mathrm{mod}\ 1)$，因此由 (2.21) 可得

$$\sup_{\alpha_k\in c_i\mathfrak{m}(Q)}\sup_{\boldsymbol{\alpha}_{k-1}\in[0,1)^{k-1}}|f_k(\boldsymbol{\alpha}_k;X)|\ll X^{1+\varepsilon}Q^{-\sigma(k)}.$$

因此，我们发现，

$$\mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i\mathfrak{m}(Q);X)\ll X^{1+\varepsilon}Q^{-\sigma(k)}\int_{[0,1)^k}|f_k(\boldsymbol{\alpha};X)|^s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_k.$$

因此，通过再次应用维诺格拉多夫平均值定理中（现已得到证实的）主猜想（见 [3, 21, 23]），我们得出结论：

$$\mathfrak{J}_{s+1,k}(c_i\mathfrak{m}(Q);X)\ll X^{1+\varepsilon}Q^{-\sigma(k)}(X^{s/2}+X^{s-k(k+1)/2}).$$

The co 引理的证明可通过将此上界代入 (2.22) 得出。

□

引理 2.3 的结论单独来看，既不足以推出定理 1.2 的界 (1.9)，也不足以提供定理 1.1 所需的关键小弧输入。不过，它确实为小弧中最难处理的区域给出了一个界。我们在第 3 节和第 4 节的目标，是处理哈代–利特尔伍德剖分中小弧的其余部分。

3. A generalised minor arc estimate

本节的目标是为应用哈代–利特尔伍德方法奠定基础，以期得到定理 1.2 的估计 (1.9)，以及定理 1.1 的结论。为此，我们引入哈代–利特尔伍德剖分。首先，作为式 (2.2) 中引入的平均值 $I_s(\mathfrak{B};X)$ 的近亲，对于可测集 $\mathfrak{A}\subseteq[0,1)^k$，我们定义平均值 $T_s(\mathfrak{A})=T_s(\mathfrak{A};X)$，其定义如下：

$$T_s(\mathfrak{A};X)=\int_{\mathfrak{A}}f(c_1\boldsymbol{\beta}(y_1))\cdots f(c_s\boldsymbol{\beta}(y_s))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.\tag{3.1}$$

接下来，当 $1\leqslant Z\leqslant X$ 时，我们用 $\mathfrak{K}(Z)$ 表示主弧的并集

$$\mathfrak{K}(q,\mathbf{a};Z)=\{\boldsymbol{\alpha}\in[0,1)^k:|\alpha_j-a_j/q|\leqslant ZX^{-j}\ (1\leqslant j\leqslant k)\},$$

其中 $1\leqslant q\leqslant Z$，$0\leqslant a_j\leqslant q$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ 和 $(q,\mathbf{a})=1$，并且我们通过令 $\mathfrak{k}(Z)=[0,1)^k\setminus\mathfrak{K}(Z)$ 来定义小弧的补集。我们已经将 $[0,1)$ 的一维哈代–利特尔伍德剖分定义为弧集 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(Q)$ 和 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}(Q)$。现在固定 $L=X^{1/(8k^2)}$ 和 $Q=L^k$，并通过取 $\mathfrak{N}=\mathfrak{K}(Q^2)$ 和 $\mathfrak{n}=\mathfrak{k}(Q^2)$ 来定义k维弧集。我们还需要大弧的窄集 $\mathfrak{P}=\mathfrak{K}(L)$，以及小弧的补集$\mathfrak{p}=\mathfrak{k}(L)$。在这最后一种剖分中，将 $\mathfrak{K}(q,\mathbf{a};L)$ 简记为 $\mathfrak{P}(q,\mathbf{a})$ 会更方便。注意，这最后一组大弧和小弧与定理 1.2 陈述前言中定义的集合相同。

我们将位于 $[0,1)^k$ 中的点集 $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ 划分为四个互不相交的子集，即

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_1 &= [0,1)^{k-1}\times\mathfrak{m},\\ \mathfrak{W}_2 &= ([0,1)^{k-1}\times\mathfrak{M})\cap\mathfrak{n},\\ \mathfrak{W}_3 &= ([0,1)^{k-1}\times\mathfrak{M})\cap(\mathfrak{N}\setminus\mathfrak{P}),\\ \mathfrak{W}_4 &= \mathfrak{P}.\end{aligned}$$

注意到 $\mathfrak{P}\subseteq[0,1)^{k-1}\times\mathfrak{M}$，由此可得 $[0,1)^k=\mathfrak{W}_1\cup\ldots\cup\mathfrak{W}_4$。因此，由正交性可推得

$$N_{s,k}(X;\mathbf{y}) = T_s([0,1)^k) = \sum_{i=1}^{4} T_s(\mathfrak{W}_i), \tag{3.2}$$

并且进一步可得

$$\int_{\mathfrak{p}} f(c_1\boldsymbol{\beta}(y_1))\cdots f(c_s\boldsymbol{\beta}(y_s))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} T_s(\mathfrak{W}_i). \tag{3.3}$$

第 §2 节的工作已经使我们能够给出 (3.2) 和 (3.3) 中弧集 $\mathfrak{W}_1$ 的贡献的一个令人满意的上界。

引理 3.1. 当 $s\geqslant k(k+1)$ 时，有

$$T_s(\mathfrak{W}_1)\ll X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)-1/(8k^3)}.$$

证明. 我们注意到

$$T_s(\mathfrak{W}_1) = I_s(\mathfrak{m}(Q);X).$$

因此，将 $Q=X^{1/(8k)}$ 代入引理 2.3，并注意到 $\sigma(k)>1/k^2$ 当$k\geqslant 3$时，引理的结论便显而易见。□

4. Further minor arc estimates

接下来，我们估计 (3.2) 和 (3.3) 中由弧集 $\mathfrak{W}_2$ 和 $\mathfrak{W}_3$产生的贡献。首先，对指数和 $f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))$ $(1\leqslant i\leqslant s)$给出一个魏尔型估计。

引理 4.1. 设 $1\leqslant i\leqslant s$ 和 $c_iy_i\neq 0$。则

$$\sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathfrak{n}}|f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|\ll X^{1-1/(6k^2)} \quad \textit{and} \quad \sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathfrak{p}}|f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|\ll X^{1-1/(12k^3)}.$$

证明。我们先验证第一个界。设 $\tau=1/(6k^2)$，且 $\delta=1/(5k)$。由于 $\tau^{-1}>4k(k-1)$且 $\delta>k\tau$，由 [18,定理 1.6]可知，只要$|f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|\geqslant X^{1-\tau}$，就存在 $q\in\mathbb{N}$和一个 $\in\mathbb{Z}^k$，使其具有如下性质:

$$1\leqslant q\leqslant X^{\delta} \qquad \text{and} \qquad |c_iq\beta_j(y_i)-a_j|\leqslant X^{\delta-j} \quad (1\leqslant j\leqslant k).$$

写

$$r=|c_iy_i^{k-1}|q \quad \text{and} \quad b_j=\frac{a_j|c_iy_i^{k-1}|}{c_iy_i^{k-j}} \quad (1\leqslant j\leqslant k).$$

然后，回顾（2.1）可知，我们有 $\beta_j(y_i)=y_i^{k-j}\alpha_j$ $(1\leqslant j\leqslant k)$，由此可见，当 X 相对于 $\mathbf{y}$ 足够大时，有

$$|r\alpha_j-b_j|\leqslant|y_i|^{j-1}X^{\delta-j}\leqslant X^{\delta'-j} \quad (1\leqslant j\leqslant k),$$

其中我们记 $\delta' = 1/(4k)$。特别地，我们看到 $r \leqslant Q^2$ 和 $|\alpha_j - b_j/r| \leqslant Q^2X^{-j}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$，从而 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{N}$ （模 1）。因此我们推断，只要 X 相对于 k 足够大，且 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{n}$，就必有 $|f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))| \ll X^{1-\tau}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$，引理的第一个结论遂得证。

为了确认第二个界，我们令 $\tau = 1/(12k^3)$ 和 $\delta = 1/(10k^2)$。我们仍有 $\tau^{-1} > 4k(k-1)$ 和 $\delta > k\tau$，因此同样的论证经相应调整后仍然适用。因此，每当 $|f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))| \geqslant X^{1-\tau}$ 时，便可推出 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{P}$（模 1）。于是，当 X 相对于 k 和 y 足够大，且 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{p}$ 时，必有 $|f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))| \ll X^{1-\tau}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$。这得出了第二个结论，并完成了该引理的证明。□

通过将此韦伊型估计与引理 2.1 的结论相结合，并利用 $\mathfrak{W}_2$ 的测度较小这一观察，我们得到了关于 $T_s(\mathfrak{W}_2)$ 的令人满意的估计。

引理 4.2. 当 $c_iy_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 且 $s \geqslant k(k+1)$ 时，有

$$T_s(\mathfrak{W}_2) \ll X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)-1/(16k)}.$$

证明。当 $\alpha_k \in \mathfrak{M}$ 时，定义

$$\mathfrak{L}(\alpha_k) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \in [0,1)^{k-1} : \boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{W}_2\}.$$

然后应用 H¨older 不等式，由 (3.1) 可得上界。

$$T_s(\mathfrak{W}_2) \leqslant \prod_{i=1}^{s}\Big(\int_{\mathfrak{M}} I_i(\alpha_k)\,\mathrm{d}\alpha_k\Big)^{1/s}, \tag{4.1}$$

其中

$$I_i(\alpha_k) = \int_{\mathfrak{L}(\alpha_k)} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|^s\,\mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_{k-1}.$$

注意到 $\mathfrak{W}_2 \subseteq \mathfrak{n}$，应用平凡估计 $|f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))| \leqslant 2X+1$，并令$v = k(k-1)/2$，我们推导出

$$I_i(\alpha_k) \ll X^{s-k(k+1)}\Big(\text{上确界}_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathfrak{n}}|f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|^{2k}\Big)\int_{[0,1)^{k-1}} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|^{2v}\,\mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_{k-1}. \tag{4.2}$$

由正交性可知，此处的平均值计算的是方程组的整数解

$$c_iy_i^{k-j}\sum_{l=1}^{v}(x_l^j - y_l^j) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k-1),$$

其中 $1 \ll x, y \leqslant X$，每个解均按单模权重计数 t

$$e(c_i\alpha_k(x_1^k - y_1^k + \ldots + x_v^k - y_v^k)).$$

因此，应用维诺格拉多夫平均值定理中的主猜想（现已得到证明；见 [3, 21, 23]），我们得到如下界

$$\int_{[0,1)^{k-1}} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|^{2v}\,\mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_{k-1} \ll \mathfrak{J}_{2v,k-1}([0,1);X) \ll X^{v+\varepsilon},$$

关于 α_k 一致成立。

利用后一个界，我们通过引理 4.1 从 (4.2) 推得

$$I_i(\alpha_k) \ll X^{s-k(k+1)}\left(X^{1-1/(6k^2)}\right)^{2k}X^{v+\varepsilon}.$$

此外，我们有 $\mathrm{mes}(\mathfrak{M}) \ll Q^2X^{-k}$。因此，我们推得

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{M}} I_i(\alpha_k)\,\mathrm{d}\alpha_k &\ll X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)+\varepsilon}(X^{k-1/(3k)})(Q^2X^{-k})\\ &\ll X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)+\varepsilon}(Q^2X^{-1/(3k)}).\end{aligned}$$

由于 $Q^2 = X^{1/(4k)}$，我们得出

$$\int_{\mathfrak{M}} I_i(\alpha_k)\,\mathrm{d}\alpha_k \ll X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)-1/(16k)}.$$

将此界代入 (4.1)，即可得到引理的结论。 □

对弧集 $\mathfrak{W}_3$ 的分析需要用到维诺格拉多夫平均值定理理论中的标准主弧估计。

L引理 4.3. 假设 $u > \frac{1}{2}k(k+1) + 2$ 且 $c_iy_i \neq 0$，其中 $1 \leqslant i \leqslant s$。该 n

$$\int_{\mathfrak{N}} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|^u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \ll X^{u-k(k+1)/2}.$$

证明。S 假设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{N}$。那么存在 $q \in \mathbb{N}$ 和一个 $\in \mathbb{Z}^k$，使得 (q,a) $= 1$ ，

$$1 \leqslant q \leqslant Q^2 \quad \text{and} \quad 0 \leqslant a_j \leqslant q \quad (1 \leqslant j \leqslant k),$$

并且满足

$$|\alpha_j - a_j/q| \leqslant Q^2X^{-j} \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

在这种情况下，有

$$|c_iy_i^{k-j}\alpha_j - c_iy_i^{k-j}a_j/q| \leqslant |c_iy_i^{k-j}|Q^2X^{-j}.$$

因此，当 X 相对于 y 足够大时，我们看到 $c_i\boldsymbol{\beta}(y_i) \in \mathfrak{K}(Q^{2+\varepsilon})$（模 1）。于是，应用模 1 周期性，我们有

$$\int_{\mathfrak{N}} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|^u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \ll \int_{\mathfrak{K}(Q^{2+\varepsilon})} |f(\boldsymbol{\beta})|^u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}.$$

由此，我们可以应用 [20, 引理 7.1]，，注意到主弧集合$\mathfrak{K}(Q^{2+\varepsilon})$是该文献中所用大弧的子集。因此，特别地，有

$$\int_{\mathfrak{K}(Q^{2+\varepsilon})} |f(\boldsymbol{\beta})|^u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta} \ll X^{u-k(k+1)/2},$$

引理的结论由此得证。 □

引理 4.4。当 $c_iy_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 且 $s \geqslant k(k+1)$ 时，有

$$T_s(\mathfrak{W}_3) \ll X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)-1/(12k^2)}.$$

证明。应用 H¨older 不等式，可由 (3.1) 得到上界

$$T_s(\mathfrak{W}_3) \leqslant \prod_{i=1}^{s} J_i^{1/s}, \tag{4.3}$$

其中

$$J_i = \int_{\mathfrak{W}_3} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|^s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

由于 $\mathfrak{W}_3 \subseteq \mathfrak{N} \setminus \mathfrak{P}$，我们从引理 4.1 得知

$$\sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathfrak{W}_3} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))| \leqslant \sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathfrak{p}} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))| \ll X^{1-1/(12k^3)}.$$

因此，取 $u = s-k$ 并注意到 $u \geqslant \frac{1}{2}k(k+1) + 3$，由引理 4.3 可得

$$\begin{aligned} J_i &\leqslant \Big(\sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathfrak{p}} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|\Big)^k \int_{\mathfrak{N}} |f(c_i\boldsymbol{\beta}(y_i))|^u \,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \\ &\ll \big(X^{1-1/(12k^3)}\big)^k X^{u-k(k+1)/2}. \end{aligned}$$

将此界代入 (4.3)，即可得到该引理的结论。 □

5. The analysis of the major arc contribution

将引理 3.1、4.2 和 4.4 的结论代入关系式 (3.2)，可得

$$N_{s,k}(X;\mathbf{y}) = T_s(\mathfrak{P}) + O(X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)-1/(8k^3)}). \tag{5.1}$$

本节的目标是求得 $T_s(\mathfrak{P})$ 的一个渐近公式，以充分验证 (1.5)，从而完成定理 1.1 的证明。

我们首先引入生成函数。

$$I(\boldsymbol{\theta};X) = \int_{-X}^{X} e(\theta_1\gamma + \ldots + \theta_k\gamma^k)\,\mathrm{d}\gamma$$

and

$$S(q,\mathbf{a}) = \sum_{r=1}^{q} e_q(a_1r + \ldots + a_kr^k),$$

其中，$e_q(u)$ 表示 $e^{2\pi iu/q}$。回顾记号 (2.1)。当 $1 \leqslant i \leqslant s$ 时，我们定义

$$I_i(\boldsymbol{\theta};X) = I(c_i\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta};y_i);X) \quad \text{and} \quad S_i(q,\mathbf{a}) = S(q,c_i\boldsymbol{\beta}(\mathbf{a};y_i)).$$

然后，当 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{P}(q,\mathbf{a}) \subseteq \mathfrak{P}$ 时，我们记作

$$V_i(\boldsymbol{\alpha};q,\mathbf{a}) = q^{-1}S_i(q,\mathbf{a})I_i(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{a}/q;X).$$

定义函数 $V_i(\boldsymbol{\alpha})$：当 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{P}(q,\mathbf{a}) \subseteq \mathfrak{P}$时，令其等于 $V_i(\boldsymbol{\alpha};q,\mathbf{a})$，否则令其为 0。于是，当 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{P}(q,\mathbf{a}) \subseteq \mathfrak{P}$时，由 [15, 定理 7.2] 可知，

$$f(c_i\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha};y_i)) - V_i(\boldsymbol{\alpha};q,\mathbf{a}) \ll q + X|q\alpha_1 - a_1| + \ldots + X^k|q\alpha_k - a_k| \ll L^2,$$

其中维诺格拉多夫记号中的隐含常数至多依赖于 c_i、y_i 和 k。因此，对于 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{P}$ 一致地，有界估计

$$\prod_{i=1}^{s} f(c_i\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha};y_i)) - \prod_{i=1}^{s} V_i(\boldsymbol{\alpha}) \ll X^{s-1+1/(4k^2)}.$$

撰写

$$T_s^*(\mathfrak{P}) = \int_{\mathfrak{P}} \prod_{i=1}^{s} V_i(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

那么，由于 $\mathrm{mes}(\mathfrak{P}) \ll L^{2k+1}X^{-k(k+1)/2}$，我们可得

$$T_s(\mathfrak{P}) - T_s^*(\mathfrak{P}) \ll X^{s-k(k+1)/2}L^{-1}. \tag{5.2}$$

接下来记

$$\Omega(X;D)=[-DX^{-1},DX^{-1}]\times\cdots\times[-DX^{-k},DX^{-k}].$$

于是可得

$$T_s^*(\mathfrak{P})=\mathfrak{S}(L)\mathfrak{T}(X;L), \tag{5.3}$$

其中

$$\mathfrak{T}(X;D)=\int_{\Omega(X;D)}\prod_{i=1}^{s}I_i(\boldsymbol{\theta};X)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{5.4}$$

and

$$\mathfrak{S}(D)=\sum_{1\leqslant q\leqslant D}\sum_{\substack{1\leqslant \mathbf{a}\leqslant q\\(q,\mathbf{a})=1}}q^{-s}\prod_{i=1}^{s}S_i(q,\mathbf{a}).$$

我们依次考察截断奇异积分 $\mathfrak{T}(X;D)$ 和截断奇异级数 $\mathfrak{S}(D)$。在此背景下，我们回顾定理 1.1 陈述之后续文中给出的实密度 σ_∞ 和 p-进密度 σ_p 的定义。我们先考察积分

$$I(D)=\int_{\Omega(1;D)}\prod_{i=1}^{s}I_i(\boldsymbol{\theta};1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

and

$$I_\infty=\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^{s}I_i(\boldsymbol{\theta};1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}.$$

引理 5.1. 设 $s\geqslant\frac{1}{2}k(k+1)+3$。则极限 $I_\infty=\lim_{D\to\infty}I(D)$ 存在，且有

$$\mathfrak{T}(X;L)=I_\infty X^{s-k(k+1)/2}+O(X^{s-k(k+1)/2}L^{-1/k}).$$

此外，有 $I_\infty=\sigma_\infty$；若方程组 (1.4) 有非奇异实解 $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^s$，则有 $\sigma_\infty>0$。

证明。我们考虑一个满足 $D\geqslant 1$ 的参数 D，并设

$$\Omega^{\mathrm{c}}(D)=\mathbb{R}^k\setminus\Omega(1;D).$$

我们首先对与 (5.4) 互补的平均值应用 Hölder 不等式，得到如下界

$$\int_{\Omega^{\mathrm{c}}(D)}\prod_{i=1}^{s}|I_i(\boldsymbol{\theta};1)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\leqslant\prod_{i=1}^{s}\Big(\int_{\Omega^{\mathrm{c}}(D)}|I_i(\boldsymbol{\theta};1)|^s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\Big)^{1/s}. \tag{5.5}$$

回顾以下界

$$I(\boldsymbol{\theta};1)\ll(1+|\theta_1|+\ldots+|\theta_k|)^{-1/k},$$

该界可由 [15, 定理 7.3] 得到。当 $\boldsymbol{\theta}\in\Omega^{\mathrm{c}}(D)$ 时，对某个满足 $1\leqslant i\leqslant k$ 的指标 i，有 $|\theta_i|>D$。于是根据 $\beta(\boldsymbol{\theta};y_i)$ 的定义 (2.1)，可得

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Omega^{\mathrm{c}}(D)}|I_i(\boldsymbol{\theta};1)|\ll_{\mathbf{y}}D^{-1/k}.$$

因此，今后在维诺格拉多夫记号中省略对 $\mathbf{y}$ 的依赖，我们得到大小规律

$$\int_{\Omega^{\mathrm{c}}(D)}|I_i(\boldsymbol{\theta};1)|^s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\ll(D^{-1/k})^{s-\frac{1}{2}k(k+1)-2}\int_{\mathbb{R}^k}|I_i(\boldsymbol{\theta};1)|^{\frac{1}{2}k(k+1)+2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}. \tag{5.6}$$

当 $t>\frac{1}{2}k(k+1)+1$ 时，积分

$$\int_{\mathbb{R}^k}|I(\boldsymbol{\theta};1)|^t\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

绝对收敛（参见 [1, 定理 1.3]）。因此，通过变量代换可得：

$$\int_{\mathbb{R}^k}|I_i(\boldsymbol{\theta};1)|^t\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\ll\int_{\mathbb{R}^k}|I(\boldsymbol{\theta};1)|^t\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\ll 1.$$

通过次凸性 首先将此界代入 (5.6)，再代入 (5.5)，我们得到估计

$$\int_{\Omega^{\mathrm{c}}(D)}\prod_{i=1}^{s}|I_i(\boldsymbol{\theta};1)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\ll D^{-1/k}.$$

因此可知，积分 I_∞ 绝对收敛，此外还有 $I_\infty-I(D)\ll D^{-1/k}$。此外，通过两次变量替换，由 (5.4) 可得到关系式

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}(X;L)&=X^{s-k(k+1)/2}\int_{\Omega(1;L)}\prod_{i=1}^{s}I_i(\boldsymbol{\theta};1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\\&=X^{s-k(k+1)/2}\left(I_\infty+O(L^{-1/k})\right).\end{aligned}\tag{5.7}$$

此处我们回顾量 $M_\infty(\eta)$ 和 σ_∞ 的定义，它们在定理 1.1 的陈述之后给出。由于奇异积分 I_∞ 绝对收敛，由 [8, §9] 的论证可知，

$$I_\infty=\lim_{\eta\to 0+}(2\eta)^{-k}M_\infty(\eta)=\sigma_\infty.$$

此外显然，只要方程组 (1.4) 有一个非奇异实解，就有 $M_\infty(\eta)\gg\eta^k$，从而 $\sigma_\infty>0$。鉴于我们已经得到结论 (5.7)，引理的证明便告完成。□

在讨论奇异级数之前

$$\mathfrak{S}=\lim_{D\to\infty}\mathfrak{S}(D),$$

我们引入量

$$A(q)=\sum_{\substack{1\leqslant\mathbf{a}\leqslant q\\(q,\mathbf{a})=1}}q^{-s}\prod_{i=1}^{s}S_i(q,\mathbf{a}).$$

因此，有

$$\mathfrak{S}(D)=\sum_{1\leqslant q\leqslant D}A(q),$$

且奇异级数由无穷和给出

$$\mathfrak{S}=\sum_{q=1}^{\infty}A(q).\tag{5.8}$$

引理 5.2. 设 $s \geqslant k(k+1)$。则奇异级数 $\mathfrak{S}$ 绝对收敛。此外，对于每个素数 p，极限 σ_p 存在，对所有素数的乘积 $\prod_p \sigma_p$ 绝对收敛，并且有 $\mathfrak{S} = \prod_p \sigma_p$。此外，有

$$\mathfrak{S}(L) = \prod_p \sigma_p + O(L^{-1-1/(3k)}), \tag{5.9}$$

并且，若方程组 (1.4) 对每个素数 p 都有一个非奇异的 p-进解，则有 $\prod_p \sigma_p \gg 1$。

证明。我们不妨设 $s \geqslant k(k+1)$。令 $t = \frac{1}{2}k(k+1) + \frac{5}{2}$。那么，鉴于我们始终假设 $k \geqslant 3$，可知

$$s - t \geqslant \tfrac{1}{2}k(k+1) - \tfrac{5}{2} \geqslant k + \tfrac{1}{2},$$

特别是 $\frac{1}{2}k(k+1) + 2 < t < s$。由 [15, 定理 7.1], 可知，当 $(q, \mathbf{a}) = 1$ 时，有 $S(q, \mathbf{a}) \ll q^{1-1/k+\varepsilon}$。因此，我们推得

$$S_i(q, \mathbf{a}) \ll_{\mathbf{y}} q^{1-1/k+\varepsilon}.$$

再次省略维诺格拉多夫记号中对 $\mathbf{y}$ 的隐含依赖，应用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned} A(q) &\leqslant \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant \mathbf{a} \leqslant q \\ (q,\mathbf{a})=1}} q^{-s} |S_i(q, \mathbf{a})|^s \right)^{1/s} \\ &\ll q^{\varepsilon-(s-t)/k} \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant \mathbf{a} \leqslant q \\ (q,\mathbf{a})=1}} q^{-t} |S_i(q, \mathbf{a})|^t \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

由于我们已安排参数使得 $s - t \geqslant k + \frac{1}{2}$，由 H¨older 不等式可得

$$\sum_{q \geqslant D} |A(q)| \ll D^{-1-1/(3k)} \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{q \geqslant D} \sum_{\substack{1 \leqslant \mathbf{a} \leqslant q \\ (q,\mathbf{a})=1}} q^{-t} |S_i(q, \mathbf{a})|^t \right)^{1/s}. \tag{5.10}$$

通过变量代换可得以下估计

$$\sum_{q \geqslant D} \sum_{\substack{1 \leqslant \mathbf{a} \leqslant q \\ (q,\mathbf{a})=1}} q^{-t} |S_i(q, \mathbf{a})|^t \ll \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leqslant \mathbf{a} \leqslant q \\ (q,\mathbf{a})=1}} q^{-t} |S(q, \mathbf{a})|^t.$$

参见 [1, 定理 2.4], ，此处右侧的和在$t > \frac{1}{2}k(k+1) + 2$时绝对收敛。因此，由 (5.10) 可得上界

$$\sum_{q \geqslant D} |A(q)| \ll D^{-1-1/(3k)}, \tag{5.11}$$

因此，奇异级数 (5.8) 绝对收敛，并且有

$$\mathfrak{S} - \mathfrak{S}(L) \ll L^{-1-1/(3k)}. \tag{5.12}$$

奇异级数的标准理论表明，函数 $A(q)$ 是关于 q 的积性函数（必要的思路见 [15, §2.6] ）。此外，由于 (5.11) 表明，对每个素数 p，都有

$$\sum_{h\geqslant H}|A(p^h)|\ll p^{-H(1+1/(3k))},$$

我们看到极限

$$\lim_{H\to\infty}\sum_{h=0}^{H}A(p^h)$$

存在，且无穷和

$$A_p=\sum_{h=0}^{\infty}A(p^h)$$

以 $A_p=1+O(p^{-1-1/(3k)})$ 绝对收敛。因此，无穷乘积 $\prod_p A_p$ 绝对收敛，且 $\mathfrak{S}=\prod_p A_p$。特别地，由 (5.12) 可得

$$\mathfrak{S}(L)-\prod_p A_p\ll L^{-1-1/(3k)}. \tag{5.13}$$

此外，再次应用奇异级数的标准理论，可得

$$\sum_{h=0}^{H}A(p^h)=p^{H(k-s)}M_p(H),$$

其中 $M_p(H)$ 表示方程组的解数

$$\sum_{i=1}^{s}c_iy_i^{k-j}z_i^j\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^H)\quad (1\leqslant j\leqslant k),$$

由 1 6 z $\leqslant p^H$。因此我们发现， A_p 等于定理 1.1 的陈述之后定义的 p-进密度 σ_p。我们不妨假设，对于每个素数 p，方程组 (1.4) 都有一个非奇异的 p-进解。因此，根据亨泽尔引理，存在一个非负整数 ν_p，使得当 $H\geqslant\nu_p$ 时，有

$$M_p(H)\geqslant p^{(H-\nu_p)(s-k)},$$

由此

$$\sigma_p=\lim_{H\to\infty}p^{H(k-s)}M_p(H)\geqslant p^{-(s-k)\nu_p}>0.$$

然后，回忆 $\sigma_p=1+O(p^{-1-1/(3k)})$，我们发现存在一个正整数 p_0，使得

$$\mathfrak{S}=\prod_p\sigma_p\gg\prod_{p>p_0}(1-p^{-1-1/(4k)})\gg 1,$$

同时 $\mathfrak{S}\ll 1$。注意到由于 $A_p=\sigma_p$，关系式 (5.13) 给出了渐近关系 (5.9)，引理的证明遂告完成。□

现在，我们已具备完成主弧贡献 $T_s(\mathfrak{P})$ 的渐近分析所需的条件。

引理 5.3. 假设 $s \geqslant k(k+1)$，且方程组 (1.4) 有一个非奇异实解，并且对每个素数 p，都有一个非奇异的 p-进解。那么有

$$T_s(\mathfrak{P}) = \sigma_\infty\Big(\prod_p \sigma_p\Big)X^{s-k(k+1)/2} + o(X^{s-k(k+1)/2}),$$

其中实数域和 p-进密度的乘积为正。

证明。将引理 5.1 和 5.2 的结论代入 (5.3)，可得

$$\begin{aligned} T_s^*(\mathfrak{P}) &= \Big(\mathfrak{S} + O(L^{-1-1/(3k)})\Big)\Big(\sigma_\infty X^{s-k(k+1)/2} + O(X^{s-k(k+1)/2}L^{-1/k})\Big) \\ &= \sigma_\infty\Big(\prod_p \sigma_p\Big)X^{s-k(k+1)/2} + O(X^{s-k(k+1)/2}L^{-1/k}). \end{aligned}$$

此外，这里首项渐近项中实数域和 p-进密度的乘积为正。因此，由 (5.2) 可得

$$T_s(\mathfrak{P}) = \sigma_\infty\Big(\prod_p \sigma_p\Big)X^{s-k(k+1)/2} + O(X^{s-k(k+1)/2}L^{-1/k}),$$

引理得证。 □

6. The proof of Theorems 1.1 and 1.2

我们主要定理的证明即将完成，不过关于方程组 (1.4) 的奇点性质，我们留待下一节讨论。

定理 1.1 的证明。回顾 (5.1)，可知当 $s \geqslant k(k+1)$ 且 $c_i y_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 时，有

$$N_{s,k}(X;\mathbf{y}) = T_s(\mathfrak{P}) + o(X^{s-k(k+1)/2}). \tag{6.1}$$

定理 1.1 的假设允许我们设方程组 (1.4) 对每个素数 p 都有非奇异的实解和 p-进解。因此，由引理 5.3 可得

$$T_s(\mathfrak{P}) = \mathscr{C}_{s,k}(\mathbf{y})X^{s-k(k+1)/2} + o(X^{s-k(k+1)/2}),$$

其中 $\mathscr{C}_{s,k}(\mathbf{y}) = \sigma_\infty\prod_p \sigma_p > 0$。将此渐近关系代入 (6.1)，即可得到定理 1.1 的结论。□

定理 1.2 的证明。(1.8) 的上界已在引理 2.2 及其后的讨论中证明。现在转而证明上界 (1.9) 和 (1.10)，设 $k \geqslant 3$ 且 $s \geqslant k(k+1)$。令 $y_j = 1$ 表示 $1 \leqslant j \leqslant s$，并设 $n = c_1 + \ldots + c_s \neq 0$。在这种情况下，由 (3.3) 可得估计

$$\int_{\mathfrak{p}} f_k(c_1\boldsymbol{\alpha};X)\cdots f_k(c_s\boldsymbol{\alpha};X)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} T_s(\mathfrak{W}_i), \tag{6.2}$$

其中，根据引理 3.1、4.2 和 4.4，

$$\sum_{i=1}^{3} T_s(\mathfrak{W}_i) \ll X^{s-\frac{1}{2}k(k+1)-1/(8k^3)}. \tag{6.3}$$

当 $s=k(k+1)$ 时，这里的右侧为 $O(X^{(s-\delta)/2})$，其中 $\delta=1/(4k^3)$；而当 $s>k(k+1)$ 时，则为 $O(X^{s-\frac{1}{2}k_{(k+1)}-\frac{1}{2}\delta})$。因此，无论哪种情况，将 (6.3) 代入 (6.2) 即可得到上界 (1.9) 和 (1.10)。□

7. The non-singularity of non-zero solutions

设方程组 (1.4) 对于给定的素数 p 存在一个非零解 $\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$，且该解属于 $\mathbb{R}^s$ 或 $\mathbb{Q}_p^s$。本节的目标是证明，在定理 1.1 陈述之后所讨论的条件下，这个解实际上是非奇异的。下文始终假设方程 (1.2) 在$n\neq 0$ 和 $c_i\neq 0$ $(1\leqslant i\leqslant s)$的条件下存在一个解 $\mathbf{y}$，且满足 $y_i\neq 0$ $(1\leqslant i\leqslant s)$。于是，如果方程组 (1.4) 在 $\mathbb{R}$ 上或在 $\mathbb{Q}_p$ 上存在一个非零解 $\mathbf{z}$，我们发现 $\mathbf{z}$ 满足方程组

$$\sum_{i=1}^{s}c_iy_i^k\,(z_i/y_i)^j=0\quad(1\leqslant j\leqslant k).\tag{7.1}$$

为导出矛盾，假设这个解 $\mathbf{z}$ 是奇异的。那么，对于满足 $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant s$ 的任意 k-元自然数组 $(i_1,\ldots,i_k)$，必有

$$\det\left(jc_{i_l}y_{i_l}^{k-j}z_{i_l}^{j-1}\right)_{1\leqslant j,l\leqslant k}=0.\tag{7.2}$$

由于 $c_iy_i\neq 0$ （当 $1\leqslant i\leqslant s$ 时），考察范德蒙德行列式可知，条件 (7.2) 成立当且仅当

$$0=\det\left(\left(\frac{z_{i_l}}{y_{i_l}}\right)^{j-1}\right)_{1\leqslant j,l\leqslant k}=\prod_{1\leqslant j<l\leqslant k}\left(\frac{z_{i_l}}{y_{i_l}}-\frac{z_{i_j}}{y_{i_j}}\right).$$

这一关系意味着

$$\frac{z_{i_l}}{y_{i_l}}=\frac{z_{i_j}}{y_{i_j}},$$

对于某些指标 j 和 l，其中 $1\leqslant j<l\leqslant k$，因此我们不得不得出结论：集合 $\{z_i/y_i:1\leqslant i\leqslant s\}$ 中至多包含 $k-1$ 个不同的值。

通过重新标记指标，我们不妨假设，对于某个满足 $1\leqslant r\leqslant k-1$ 的整数 r，每个有理数

$$\frac{z_1}{y_1},\frac{z_2}{y_2},\ldots,\frac{z_r}{y_r},$$

互不相同，并且只要 $i>r$，就有

$$\frac{z_i}{y_i}\in\left\{\frac{z_1}{y_1},\ldots,\frac{z_r}{y_r}\right\}.$$

我们通过规定 $i\sim j$ 当且仅当$z_i/y_i=z_j/y_j$成立，在指标上定义一个等价关系。于是，令

$$C_i=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\ j\sim i}}c_j\frac{y_j^k}{y_i^k}\quad(1\leqslant i\leqslant r),$$

我们看到，方程 (1.2) 变为

$$C_1y_1^k+\ldots+C_ry_r^k=n,\tag{7.3}$$

而方程 (7.1) 则变换为新的方程组

$$\sum_{i=1}^{r} C_i y_i^k \Big(\frac{z_i}{y_i}\Big)^j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{7.4}$$

满足条件

$$\frac{z_i}{y_i} \neq \frac{z_l}{y_l} \quad (1 \leqslant i < l \leqslant r). \tag{7.5}$$

请注意，由于 $n \neq 0$，由方程 (7.3) 可知，对于某个满足 $1 \leqslant i \leqslant r$ 的指标 i，有 $C_i y_i^k \neq 0$。此外，由于 $(z_1,\dots,z_k) \neq \mathbf{0}$，关系式 (7.5) 确保对于至多一个满足 $1 \leqslant i \leqslant r$ 的指标 i，有 $z_i = 0$；在这种情况下，必有 $r \geqslant 2$。

若 (1.2) 的解 $\mathbf{y}$ 满足不存在消失子和这一条件，则对于 $1 \leqslant i \leqslant r$，有 $C_i \neq 0$。我们假设情况确实如此且 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$，或者 $1 \leqslant i \leqslant s$ 时有 $z_i \neq 0$。在这两种情况下，我们重新标记指标，使得对于 $1 \leqslant i \leqslant R$，有 $C_i z_i \neq 0$，并且对于 $R < i \leqslant r$，有 $C_i z_i = 0$。在这两种情形下，迄今为止的讨论都允许我们假设 $1 \leqslant R < k$。现在，我们从方程组 (7.4) 推得

$$\sum_{i=1}^{R} C_i y_i^k \Big(\frac{z_i}{y_i}\Big)^j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant R).$$

我们将这些关系视为一个线性方程组，其中量 $C_i y_i^k (1 \leqslant i \leqslant R)$ 为变量。由于在所考虑的两种情形下，对于所有满足 $1 \leqslant i \leqslant R$ 的指标 i，都有$C_i y_i^k \neq 0$，因此我们得到

$$\det\left(\left(\frac{z_i}{y_i}\right)^j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant R} = 0.$$

展开范德蒙德行列式后，我们便可得出

$$\left(\prod_{l=1}^{R} \frac{z_l}{y_l}\right) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant R} \left(\frac{z_i}{y_i} - \frac{z_j}{y_j}\right) = 0.$$

然而，假设 (7.5) 确保左端的第二个乘积非零，而我们关于 $1 \leqslant i \leqslant R$ 的假设 $C_i z_i \neq 0$ 确保左端的第一个乘积非零。因此得到矛盾，这说明解 $\mathbf{z}$ 实际上不可能是奇异的。因此，定理 1.1 陈述之后的条件足以保证存在非奇异的实解和 p-进解，正如我们所声称的。

References

[1] G. I Arkhipov、V. N. Chubarikov 和 A. A. Karatsuba, *Trigonometric sums in number theory and analysis* **39**, 2004，De Gruyter数学论丛，Walter de Gruyter，柏林，。[2] B. J. Birch, *Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables*, Mathematika 4 (1957)，102–105。[3] J. Bourgain、C. Demeter 和 L. Guth, *Proof of the main conjecture in Vinogradov's mean value theorem for degrees higher than three* 2 **184** 2016 2, 633 682 ，《数学年刊》( ) ( )，第 – 期。[4] J. Brandes, *Forms representing forms and linear spaces on hypersurfaces*, 《伦敦数学会会刊》(3) 108 (2014)，第4期，809–835。[5] J. Brandes 和 K. Hughes, *On the inhomogeneous Vinogradov system*, 《澳大利亚数学会通报》106 (2022)，第3期，396–403。

[6] R. Brauer, *A note on systems of homogeneous equations*, 《美国数学会通报》51 (1945), 749–755。[7] J. Br
¨
Subconvexity for additive equations: pairs of undenary cubic udern 和 *forms* **696** 2014 31 67
T. D. Wooley, , 《纯粹与应用数学杂志》 ( ), – 。[8] J. Br¨udern 和 T. D. Wooley, *An instance where the major and minor arc integrals meet*, 《伦敦数学会通报》51 (2019), 第6期, 1113–1128。[9] J. Br¨udern 和 T. D. Wooley, *On Waring's problem for larger powers*, 已投稿, 28页; arXiv:2211.10380。[10] T. Estermann, *A new application of the Hardy-Littlewood-Kloosterman method*, 《伦敦数学会会刊》(3) 12 (1962), 425–444。[11] S. T. Parsell, *The density of rational lines on cubic hypersurfaces*, 《美国数学会汇刊》352 (2000), 第11期, 5045–5062。[12] S. T. Parsell, *Asymptotic estimates for rational linear spaces on hypersurfaces*, 《美国数学会汇刊》361 (2009), 第6期, 2929–2957。[13] R. C. Vaughan,
A new iterative method in Waring's problem **162** 1989 1 2, , 《数学
1 71
学报》( ), 第- 期 – 。[14] R. C. Vaughan,
On Waring's problem for cubes II 2 **39** 1989 2, , 《伦敦
205 218
数学会杂志》( ) ( ), 第 – 期。[15] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, 第2版, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1997。[16] R. C. Vaughan 和 T. D. Wooley, *Further improvements in Waring's problem, II: sixth powers*, 《杜克数学杂志》76 (1994), 第3期, 683–710。[17] R. C. Vaughan 和 T. D. Wooley, *Further improvements in Waring's problem*, 《数学学报》174 (1995), 第2期, 147–240。[18] T. D. Wooley, *Vinogradov's mean value theorem via efficient congruencing*, 《数学年刊》(2) 175 (2012), 第3期, 1575–1627。[19] T. D. Wooley, *The asymptotic formula in Waring's problem*, 《国际数学研究通知》IMRN 2012 (2012), 第7期, 1485–1504。[20] T. D. Wooley, *Discrete Fourier restriction via efficient congruencing*, 《国际数学研究通知》2017 (2017), 第5期, 1342–1389。[21] T. D. Wooley, *The cubic case of the main conjecture in Vinogradov's mean value theorem*, 《数学进展》294 (2016), 532–561。[22] T. D. Wooley,
On Waring's problem for intermediate powers **176** 2016 3, , 《算术
241 247
学报》( ), 第 – 期。[23] T. D. Wooley, *Nested efficient congruencing and relatives of Vinogradov's mean value theorem*, 《伦敦数学会会刊》(3) 118 (2019), 第4期, 942–1016。[24] T. D. Wooley, *Subconvexity in the inhomogeneous cubic Vinogradov system*, 《伦敦数学会杂志》(2) 107 (2023), 第2期, 719–817。[25] T. D. Wooley, *Subconvexity in inhomogeneous Vinogradov systems*, 《数学季刊》74 (2023), 第1期, 389–418。[26] T. D. Wooley, *Subconvexity and the Hilbert-Kamke problem*, 已投稿, 13页; arXiv:2201.02699。

Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Street, WestLafayette, IN 47907-2067, USA*Email address*: twooley@purdue.edu