arXiv:2305.05083v1 [math.DG] 8 May 2023

四维凯勒流形上的正交坐标

DAVID L. JOHNSON

摘要。正交局部坐标的存在，是流形共形平坦这一性质的推广。利用几何法坐标或等温坐标，总能在二维流形上构造正交坐标。1984年，Dennis DeTurck 和 Dean Yang [4] 证明了任意黎曼三维流形上都存在正交坐标。因此，有些流形虽然具有正交坐标，却并非共形平坦，因为 Cotton 张量阻碍了三维情形下的共形平坦性。他们还证明，当维数至少为4时，正交坐标的存在似乎受到某种阻碍：若曲率分量具有 R_{ijkl}这种形式，即四个指标各不相同，且对应的方向为正交坐标方向，那么这些分量就会消失。因此，在高维情形下，正交坐标的存在意味着黎曼曲率张量具有某种稀疏性。最近，Paul Gauduchon 和 Andrei Moroianu 证明了 [5]，若 $n > 1$，则 $\mathbb{CP}^n$ 或 $\mathbb{HP}^n$上不存在正交坐标。

本文的主要结果是：不存在任何非平凡的自对偶凯勒四维流形（实维数为 4）能够支持正交局部坐标；此外，也不存在任何非平凡的 Ricci 平坦 Kähler 4-流形能够支持正交坐标。第一个结果采用了 Gauduchon 和 Moroianu 在 $\mathbb{CP}^2$ 配备 Fubini-Study度量这一特殊情形下所发展的相同技巧，而第二个结果则纯粹采用代数方法。

1. 引言

黎曼流形 M上的局部坐标图 $\{x_1, \ldots, x_n\}$若满足如下条件，便称为正交 坐标：当 $i \neq j$时，$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ =0。在这种情况下，黎曼度量可写为 $g = a_1^2 dx_1^2 + \cdots + a_n^2 dx_n^2$，当然还满足 $a_i = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle}$。在二维情形，正交坐标的存在性是经典结果，其源头可追溯至沿曲线构造测地法坐标，以及等温坐标 [2]。DeTurck 和 Yang [4] 证明，任何三维流形都有正交坐标系，即使它们并非共形平坦。

在高于 3 维的维数中，正交坐标的存在性意味着，在这些坐标的方向上，$R_{ijkl} = 0$ 当所有指标均不同时 [4], 因此，在高维中，曲率算子会呈现某种稀疏性。

尤其是在凯勒流形上，正交坐标的存在似乎受到极大限制，因为凯勒结构往往会阻碍微分几何方面的限制条件 [6]。Gauduchon 和 Moroianu [5] 的结果表明，特别是，$\mathbb{CP}^n$，配备 Fubini-Study度量的 $n \geq 2$不允许存在正交坐标。很容易证明，不存在正交的全纯坐标（见下文）；但更困难的问题在于证明不存在实正交坐标，而 Gauduchon 和 Moroianu 确实证明了这一点。他们还表明，由黎曼曲面局部直积构成的平凡例子并非唯一支持正交坐标的凯勒流形。

日期：2023 年 5 月 10 日。2000 数学主题分类。53B20、53B35、53C25。关键词和短语。正交坐标、自对偶凯勒流形、K3-曲面。作者谨此感谢 Vincent Borrelli 提出的诸多有益意见和建议，同时感谢 Andrei Moroianu 建议采用一种更为优雅的方法来描述复结构张量。

正交坐标的存在是流形共形平坦这一性质的推广，因为在这种情况下，存在局部坐标图，使度量具有$g_{ij} = a\delta_{ij}$的形式；换言之，对于所有 i，坐标都是关于$a_i = a_j$正交的。共形平坦的凯勒流形已由 [11, 10], 分类；在四维情形下，它们必定是平坦的，或者是一个常曲率黎曼曲面与一个具有相反常曲率的黎曼曲面 [11]的乘积。在至少六维的情形下，Yano 和 Mogi [14] 证明，共形平坦的凯勒流形必定是平坦的。

在实维数 4 中，利用 Atiyah-Hitchen-Singer、Singer-Thorpe 和 Claude LeBrun 提出的曲率张量的优美分解 [1, 9, 8], ，我们对 Gauduchon 和 Moroianu 的结果作了轻微推广，证明不存在具有正交坐标的自对偶四维 Kähler 流形。该结果的证明方法归功于 Gauduchon 和 Moroianu [5]。

我们还能够证明，不存在支持正交坐标的非平坦 Kähler 4-流形。Ricci 平坦的 Kähler 4-流形是 K3 曲面，即四维 Calabi-Yau 流形。

在本文中，即使流形是复流形，我们也将其维数称为实维数。我们将局部正交移动标架 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 称为该空间（某邻域）的标架 。对于带有复结构张量 J: $T_*(M) \to T_*(M)$ 的复流形 M，若 $Je_{2k+1} = e_{2k+2}$且 $Je_{2k+2} = -e_{2k+1}$ $k \in \{0, \dots, m-1\}$，则称标架 $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ 酉 。

2. 正交坐标

定义 2.1。 具有黎曼度量 〈 的黎曼流形 M^n 〉，若在邻域 U $\{x_1, \dots, x_n\}$ 中，对于每个点 $x \in U$， $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = 0$只要$i \neq j$，便称其具有正交坐标 。如果 M 的每个点都在某个邻域内具有正交坐标，则称 M 具有正交坐标 或支持正交坐标。按照 [5] 中的记号，我们记为 $a_i = \sqrt{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle} > 0$。 ————

给定一个正交坐标系，其关联 标架 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 定义为$e_i := \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$。根据协变导数和黎曼曲率张量的定义，Gauduchon 和 Moroianu 在约定$R_{XY}Z := \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X (\nabla_Y Z) + \nabla_Y (\nabla_X Z)$ 以及（相对于关联标架） $R_{ijkl} = \langle R_{e_i e_j} e_k, e_l \rangle$的情况下，给出了以下有用结果 [5] 。这里的记号与 [5], 略有不同，但两者是等价的。

命题 2.1. [命题 2.5 的 [5]] 设 M 是一个黎曼流形，在坐标图 U 上具有正交坐标，并配有相应的标架 $\{e_1, \dots, e_n\}$。那么，

(1) 若 $i \neq j$，则 $\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{a_i} e_j(a_i)\, e_i$，因此 $[e_i, e_j] = \frac{1}{a_i} e_j(a_i)\, e_i - \frac{1}{a_j} e_i(a_j)\, e_j$。
(2) $\nabla_{e_i} e_i = -\sum_{j \neq i} \frac{1}{a_i} e_j(a_i)\, e_j$。
(3) 对于任意 $i \neq j$,

$$\begin{aligned} R_{e_i e_j} e_i &= -\frac{1}{a_j} e_i e_i(a_j)\, e_j - \frac{1}{a_i} e_j e_j(a_i)\, e_j - \sum_{l \neq i,j} \left(\frac{1}{a_i} e_j e_l(a_i)\, e_l \right) \\ &\quad + \sum_{l \neq i,j} \left(\frac{1}{a_i} e_j(a_i) \frac{1}{a_j} e_l(a_j)\, e_l \right) - \sum_{l \neq i,j} \left(\frac{1}{a_i} e_l(a_i) \frac{1}{a_j} e_l(a_j)\, e_j \right). \end{aligned}$$

（4）若 i、 j、 k 各不相同，

$$R_{e_ie_j}e_k = \frac{1}{a_i}\nabla_{e_j}(da_i)(e_k)e_i - \frac{1}{a_j}\nabla_{e_i}(da_j)(e_k)e_j,$$

特别地，如果 i、 j、 k、 l 互不相同，则 $R_{ijkl} := \left\langle R_{e_ie_j}e_k, e_l\right\rangle = 0$。

注 2.1。 此结果的陈述 (4) 最初由 DeTurck 和 Yang 证明 [4] .

3. 四维

现在假设 M 的（实）维数为 4。在这种情况下，曲率算子有一个特别优美的分解。按照 [9], , 任意黎曼流形的曲率都分解为不变分量。维数为 n 时，所有此类代数曲率算子 构成的空间是空间 $\mathcal{R}_n := \Lambda_2(\mathbb{R}^n) \circ \Lambda_2(\mathbb{R}^n)$，即作用于 $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ 上的对称算子，其内积取为 $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ 上的标准内积，且 $\left\langle R_{(v_1,v_2)}v_3, v_4\right\rangle = \langle R(v_1 \wedge v_2)\ v_3 \wedge v_4\rangle$。

$SO(n)$ 在此空间上的作用由其在 $\mathbb{R}^n$ 上的自然作用诱导；根据 Weyl[13], , $\mathcal{R}_n$ 分解为不变子空间的正交直和，这一点在 [9] 中被证明为

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{I} \oplus \mathcal{RIC}_0 \oplus \mathcal{W} \oplus \mathcal{S},$$

其中， $\mathcal{I}$ 均为恒等算子的倍数， $\mathcal{RIC}_0$ 对应里奇张量的无迹部分， $\mathcal{W}$ 是Weyl张量分量，而 $\mathcal{S}$ 是与比安基映射 b 的核正交的张量： $\mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n$ 定义为 $b(R)_{(v_1,v_2)}\ v_3 = R_{(v_1,v_2)}v_3 + R_{(v_2,v_3)}v_1 + R_{(v_3,v_1)}v_2$，因此，任何可实现为流形黎曼曲率张量的算子都满足$b(R) = 0$。 $\mathcal{S}$ 很容易看出与 $\Lambda_4(\mathbb{R}^n)$同构。

记 $\rho\colon \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}^n \circ \mathbb{R}^n$ 为里奇缩并 $\langle \rho(R)\ v, w\rangle = \sum_{i=1}^n \langle R(v \wedge e_i)\ \ w \wedge e_i\rangle$，其中 $\{e_1, \ldots, e_n\}$为任意正交标架。此缩并在 $SO(n)$ 的自然作用下是等变映射，因此其核及其正交补都是不变子空间，其中 $\mathcal{I} \oplus \mathcal{RIC}_0$ 是 ρ的核的正交补。Singer 和 Thorpe 还定义了映射 $s\colon \mathbb{R}^n \circ \mathbb{R}^n \to \mathcal{R}_n$，它是 ρ 的右逆，定义如下。

$$\begin{aligned} s(T)_{(u_1,u_2)}(u_3) &= \frac{1}{n-2}\left(\langle u_1, u_3\rangle T(u_2) - \langle u_2, u_3\rangle T(u_1) + \langle T(u_1), u_3\rangle u_2 - \langle T(u_2), u_3\rangle u_1\right) \\ &\quad - \frac{1}{(n-2)(n-1)}\mathrm{tr}(T)\left(\langle u_1, u_3\rangle u_2 - \langle u_2, u_3\rangle u_1\right), \end{aligned}$$

或者，更简单地说，给定一个由 T 的特征向量组成的标架 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，其对应的特征值为 $\{\lambda_i\}$，作为一个算子，

$$s(T)(e_i \wedge e_j) = \frac{1}{n-2}\left(\lambda_i + \lambda_j - \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}(T)\right)e_i \wedge e_j. \tag{3.1}$$

在四维空间中，由于 [1, 8], 这一分解具有特别简单的形式。在该维数下，Hodge星算子 $\star$: $\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right) \to \Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ 是一个曲率算子；特别地，它构成了与 ker (b)正交的算子空间 $\mathcal{S}$ 的一组基。算子 $\star$ 在任意定向正交标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 上定义为 $\star(e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_4$, $\star(e_1 \wedge e_3) = -e_2 \wedge e_4$, 以及$\star(e_1 \wedge e_4) = e_2 \wedge e_3$。 由于 $\star^2 = Id$, 它将 $\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ 分解为两个3维子空间$\Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right)$ 和 $\Lambda_2^-\left(\mathbb{R}^4\right)$, 它们分别由 $\star$的 ± 1-特征子空间组成,

$$\Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right) = \mathrm{Span}\left\{e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3\right\}$$

and

$$\Lambda_2^-\left(\mathbb{R}^4\right) = \mathrm{Span}\left\{e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3\right\}.$$

这些空间在定向改变时会发生切换。

注记 3.1. 凯勒曲率算子也有类似的分解 [7], , 但在这里我们将继续使用实分解, 即使对于凯勒流形也是如此。里奇映射和比安基映射在 [7] 中保持不变（当然, 凯勒流形的里奇张量将是复线性的）。

引理 3.1. 若 $T \in \mathbb{R}^4 \circ \mathbb{R}^4$ 具有 迹（T） $=0$, 则 s（T）： $\Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right) \to \Lambda_2^-\left(\mathbb{R}^4\right)$.

证明。这直接由方程（3.1）得出。 □

若 $W \in \mathcal{W}$, 则 W可分解为 $W = W^+ + W^-$, 其中 W^+： $\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right) \to \Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right)$和$W^-$： $\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right) \to \Lambda_2^-\left(\mathbb{R}^4\right)$ 是 W到所示子空间的正交投影。由于对于任意无迹的 T, $W^{\pm} \perp s$（T）, W^+: $\Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right) \to \Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right)$且 W^-: $\Lambda_2^-\left(\mathbb{R}^4\right) \to \Lambda_2^-\left(\mathbb{R}^4\right)$。同样, 空间 $W^{\pm}$在定向改变下互换。

给定任意标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 对于 $\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)$的任意正交标架$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 我们将使用适配标架, 作为

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3\right),\right.$$
$$\left., \sum_j a_{ij}^2 = 1\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3\right)\right\}.$$

然后, 我们有,

命题 3.1。 [1, 9, 8] 任何 $R \in \mathcal{R}_4$ 满足比安基恒等式的对象都分解为分块形式,

$$R = \left[\begin{array}{c|c} W^+(R) + \frac{r}{12}Id & s\left(\rho(R) - \frac{r}{4}I\right)^{\pm} \\ \hline s\left(\rho(R) - \frac{r}{4}I\right)^{\mp} & W^-(R) + \frac{r}{12}Id \end{array}\right]$$

相对于任意 正交标架 $\{e_1, \ldots, e_4\}$ 的适配标架, 其中 $r = 2\mathrm{tr}(R)$ 是标量曲率 $r = \mathrm{tr}(\rho(R))$。

证明。 由于 R可分解为 $R = \frac{r}{12}Id + W(R) + s\left(\rho(R) - \frac{r}{4}I\right) = \frac{r}{12}Id + W^+(R) + W^-(R) + s\left(\rho(R) - \frac{r}{4}Id\right)$, 因此结论由 $\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)$的标架选择得出。 □

用分量 $\{R_{ijkl}\}$, $W^+(R)$ 表示, $+\frac{r}{12}Id$为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} (R_{1212} + R_{3434} + 2R_{1234}) & (R_{1213} + R_{3413}) - (R_{1224} + R_{3424}) & (R_{1214} + R_{3414}) + (R_{1223} + R_{3423}) \\ (R_{1312} - R_{2412}) + (R_{1334} - R_{2434}) & (R_{1313} + R_{2424} - 2R_{1324}) & (R_{1314} - R_{2414}) + (R_{1323} - R_{2423}) \\ (R_{1412} + R_{2312}) + (R_{1434} + R_{2334}) & (R_{1413} + R_{2313}) - (R_{1424} + R_{2324}) & (R_{1414} + R_{2323} + 2R_{1423}) \end{bmatrix},$$

$W^-(R)$ 为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} (R_{1212} + R_{3434} - 2R_{1234}) & (R_{1213} - R_{3413}) + (R_{1224} - R_{3424}) & (R_{1214} - R_{3414}) - (R_{1223} - R_{3423}) \\ (R_{1312} + R_{2412}) - (R_{1334} + R_{2434}) & (R_{1313} + R_{2424} + 2R_{1324}) & (R_{1314} + R_{2414}) - (R_{1323} + R_{2423}) \\ (R_{1412} - R_{2312}) - (R_{1434} - R_{2334}) & (R_{1413} - R_{2313}) + (R_{1424} - R_{2324}) & (R_{1414} + R_{2323} - 2R_{1423}) \end{bmatrix},$$

且 $s\left(\rho(R) - \frac{r}{4}I\right)^{\pm}$由下式给出

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} (R_{1212} - R_{3434}) & (R_{1213} + R_{3413}) + (R_{1224} + R_{3424}) & (R_{1214} + R_{3414}) - (R_{1223} + R_{3423}) \\ (R_{1312} - R_{2412}) - (R_{1334} - R_{2434}) & (R_{1313} - R_{2424}) & (R_{1314} - R_{2414}) - (R_{1323} - R_{2423}) \\ (R_{1412} + R_{2312}) - (R_{1434} + R_{2334}) & (R_{1413} + R_{2313}) + (R_{1424} + R_{2324}) & (R_{1414} - R_{2323}) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (R_{1212} - R_{3434}) & (\rho(R)_{23} - \rho(R)_{14}) & (\rho(R)_{24} + \rho(R)_{13}) \\ (\rho(R)_{23} + \rho(R)_{14}) & (R_{1313} - R_{2424}) & (\rho(R)_{34} - \rho(R)_{12}) \\ (\rho(R)_{24} - \rho(R)_{13}) & (\rho(R)_{34} + \rho(R)_{12}) & (R_{1414} - R_{2323}) \end{bmatrix}$$

4. 凯勒条件

若 M 是一个 Kähler 流形，则复结构张量 J 在每个 $T_*(M,m)\cong\mathbb{R}^{2k}$ 上都是正交变换，满足 $J^2=-Id$，因此 J也是斜对称的。将$o(2k)$与 $\Lambda_2\left(\mathbb{R}^{2k}\right)$对应起来，记作 $I\in\Lambda_2\left(\mathbb{R}^{2k}\right)$ 以避免混淆；相对于任意标架，$I\in\Lambda_2\left(\mathbb{R}^{2k}\right)$ 是凯勒形式 $I=\sum_{i<j}a_{ij}e_i\wedge e_j$ 的度量对偶。在四维中，当 $I\in\Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right)$时，定向与复结构一致，因此对于任意定向标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，$I=a_{12}(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)+a_{13}(e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4)+a_{14}(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3)$，其中 $a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2=1$。我们将始终采用这一种定向；请注意，[8]中采用的是相反定向。我们可以在不改变定向的情况下对标架重新排序，使得 $a_{12}>0$,$a_{13}\geq 0$ 且 $a_{14}\geq 0$。除非 $a_{12}=1$，我们同样可以通过重新排序假定 $a_{13}>0$。因此，作为切空间上的一个算子，

$$\begin{aligned}J(e_1) &= a_{12}e_2+a_{13}e_3+a_{14}e_4\\ J(e_2) &= -a_{12}e_1+a_{14}e_3-a_{13}e_4\\ J(e_3) &= -a_{13}e_1-a_{14}e_2+a_{12}e_4\\ J(e_4) &= -a_{14}e_1+a_{13}e_2-a_{12}e_3.\end{aligned}$$

4.1. 凯勒四维流形曲率。 若 M^4 是厄米的，则复结构张量 J可扩展为代数曲率算子 $J:\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)\to\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)$，定义为 $J(v\wedge w):=J(v)\wedge J(w)$。与 Hodge星算子 $\star$一样，J是幂等的，$J^2=Id$。对于任意正交标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$,

$$\begin{aligned}J(e_1\wedge e_2-e_3\wedge e_4) &= J(e_1)\wedge J(e_2)-J(e_3)\wedge J(e_4)\\ &= e_1\wedge e_2-e_3\wedge e_4,\end{aligned}$$

等等，因此 $J|_{\Lambda_2^-(\mathbb{R}^4)}:\Lambda_2^-\left(\mathbb{R}^4\right)\to\Lambda_2^-\left(\mathbb{R}^4\right)$ 是 $\Lambda_2^-\left(\mathbb{R}^4\right)$上的恒等映射。此外，$J(I)=I$。但是，利用酉标架可以很容易看出，$J:\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)\to\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ 对于特征值 1 有一个 4 维特征子空间，对于特征值 -1有一个 2 维特征子空间，因此 I 在 $\Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right)$ 中的正交补必定是 (-1)-特征子空间，由以下向量张成。

$$\{a_{13}(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)-a_{12}(e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4),a_{14}(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)-a_{12}(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3)\}.$$

如果 R 是与 Kähler 4-流形相对应的曲率算子，那么 $RJ=JR=R$，因此$R|_{\Lambda_2^+(\mathbb{R}^4)}:\Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right)\to\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ 至少有一个二维核，其中包含

$$I^\perp\cap\Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right) = \{\xi|\,J\xi=-\xi\}\subset\Lambda_2^+\left(\mathbb{R}^4\right).$$

R 成为 Kähler 的条件于是简化为

$$\begin{aligned}0 &= R(a_{12}(e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4)-a_{13}(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)),\ \text{and}\\ 0 &= R(a_{12}(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3)-a_{14}(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)),\end{aligned}$$

展开为

$$
\begin{aligned}
0 &= a_{12}\left(\left(R_{1213}-R_{4243}\right)+\left(R_{2124}-R_{3134}\right)\right)-a_{13}\left(\left(R_{1212}+R_{3434}\right)+2R_{1234}\right)\\
0 &= a_{12}\left(\left(R_{1214}-R_{3234}\right)-\left(R_{2123}-R_{4143}\right)\right)-a_{14}\left(\left(R_{1212}+R_{3434}\right)+2R_{1234}\right)\\
0 &= a_{13}\left(\left(R_{1213}-R_{4243}\right)+\left(R_{2124}-R_{3134}\right)\right)-a_{12}\left(\left(R_{1313}+R_{2424}\right)-2R_{2413}\right)\\
0 &= a_{13}\left(\left(R_{1314}-R_{2324}\right)-\left(R_{4142}-R_{3132}\right)\right)-a_{14}\left(\left(R_{1313}+R_{2424}\right)-2R_{1324}\right)\\
0 &= a_{14}\left(\left(R_{1214}-R_{3234}\right)-\left(R_{2123}-R_{4143}\right)\right)-a_{12}\left(\left(R_{1414}+R_{2323}\right)+2R_{1423}\right)\\
0 &= a_{14}\left(\left(R_{1314}-R_{2324}\right)+\left(R_{3132}-R_{4142}\right)\right)-a_{13}\left(\left(R_{1414}+R_{2323}\right)+2R_{1423}\right)\\
0 &= a_{12}\left(\rho\left(R\right)_{23}+\rho\left(R\right)_{14}\right)-a_{13}\left(R_{1212}-R_{3434}\right)\\
0 &= a_{12}\left(\rho\left(R\right)_{24}-\rho\left(R\right)_{13}\right)-a_{14}\left(R_{1212}-R_{3434}\right)\\
0 &= a_{13}\left(\rho\left(R\right)_{23}-\rho\left(R\right)_{14}\right)-a_{12}\left(R_{1313}-R_{2424}\right)\\
0 &= a_{13}\left(\rho\left(R\right)_{34}+\rho\left(R\right)_{12}\right)-a_{14}\left(R_{1313}-R_{2424}\right)\\
0 &= a_{14}\left(\rho\left(R\right)_{24}+\rho\left(R\right)_{13}\right)-a_{12}\left(R_{1414}-R_{2323}\right)\\
0 &= a_{14}\left(\rho\left(R\right)_{34}-\rho\left(R\right)_{12}\right)-a_{13}\left(R_{1414}-R_{2323}\right).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

于是，这些凯勒恒等式意味着

$$
\frac{1}{a_{12}^{2}}\left(\left(R_{1212}+R_{3434}\right)+2R_{1234}\right) = \frac{1}{a_{13}^{2}}\left(\left(R_{1313}+R_{2424}\right)-2R_{2413}\right)=\frac{1}{a_{14}^{2}}\left(\left(R_{1414}+R_{2323}\right)+2R_{1423}\right),
$$

因此，标量曲率满足

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{2}{a_{12}^{2}}\left(R_{1212}+R_{3434}+2R_{1234}\right)\\
&= \frac{2}{a_{13}^{2}}\left(R_{1313}+R_{2424}-2R_{1324}\right)\\
&= \frac{2}{a_{14}^{2}}\left(R_{1414}+R_{2323}+2R_{1423}\right).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

注意，如果某个复结构分量为零，例如 $a_{14}=0$，那么相应的曲率表达式（$R_{1414}+R_{2323}+2R_{1423}$）$=0$ 也为零。如果 M^4 是Kähler流形，那么对于复结构 J所给定定向下的任意 标架$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，

$$
R = \left[\begin{array}{c|c} W^{+}\left(R\right)+\frac{r}{12}Id & s\left(\rho\left(R\right)-\frac{r}{4}Id\right)^{\pm} \\ \hline s\left(\rho\left(R\right)-\frac{r}{4}Id\right)^{\mp} & W^{-}\left(R\right)+\frac{r}{12}Id \end{array}\right]
$$

相对于前面所述 $\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)$的适配标架标架。然而，凯勒条件意味着块 $W^{+}\left(R\right)+\frac{r}{12}Id$、$s\left(\rho\left(R\right)-\frac{r}{4}Id\right)^{\pm}$以及（其转置）$s\left(\rho\left(R\right)-\frac{r}{4}Id\right)^{\mp}$的秩都为1。利用命题（3.1）中的适配标架，曲率张量变为

命题 4.1。 若 M^4 是凯勒流形，具有正交标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，其定向由复结构 J 给定，则在 $\Lambda_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ 的适配标架下，其中 $r=2\mathrm{tr}(R)$ 为标量曲率，曲率算子具有如下形式

$$
R = \left[\begin{array}{c|c} W^{+}\left(R\right)+\frac{r}{12}Id & s\left(\rho\left(R\right)-\frac{r}{4}Id\right)^{\pm} \\ \hline s\left(\rho\left(R\right)-\frac{r}{4}Id\right)^{\mp} & W^{-}\left(R\right)+\frac{r}{12}Id \end{array}\right]
$$

with

$$
s\left(\rho\left(R\right)-\frac{r}{4}Id\right)^{\pm} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{12} & 0 & 0\\ a_{13} & 0 & 0\\ a_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{12}}\left(R_{1212}-R_{3434}\right) & \frac{1}{a_{13}}\left(R_{1313}-R_{2424}\right) & \frac{1}{a_{14}}\left(R_{1414}-R_{2323}\right)\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$W^{+}(R)+\frac{r}{12}Id = \frac{r}{4}\begin{bmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

and

$$\begin{aligned} W^{-}(R)+\frac{r}{12}Id &= \frac{r}{4}\begin{bmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad+\begin{bmatrix} -2R_{1234} & -(R_{2124}-R_{3134}) & (R_{2123}-R_{4143}) \\ -(R_{2124}-R_{3134}) & 2R_{2413} & -(R_{3132}-R_{4142}) \\ (R_{2123}-R_{4143}) & -(R_{3132}-R_{4142}) & -2R_{1423} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

证明。 凯勒恒等式（公式 (4.1)）可直接得出这些表达式。 □

特别地，Weyl张量的两个分量 $W^{+}(R)$ 和 $W^{-}(R)$，即自对偶分量和反自对偶分量，由下式给出。

$$W^{+}(R) = \frac{r}{4}\begin{bmatrix} \left(a_{12}^{2}-\frac{1}{3}\right) & a_{12}a_{13} & a_{12}a_{14} \\ a_{12}a_{13} & \left(a_{13}^{2}-\frac{1}{3}\right) & a_{13}a_{14} \\ a_{12}a_{14} & a_{13}a_{14} & \left(a_{14}^{2}-\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{aligned} W^{-}(R) &= \frac{r}{4}\begin{bmatrix} \left(a_{12}^{2}-\frac{1}{3}\right) & a_{12}a_{13} & a_{12}a_{14} \\ a_{12}a_{13} & \left(a_{13}^{2}-\frac{1}{3}\right) & a_{13}a_{14} \\ a_{12}a_{14} & a_{13}a_{14} & \left(a_{14}^{2}-\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} \\ &\quad+\begin{bmatrix} -2R_{1234} & -(R_{2124}-R_{3134}) & (R_{2123}-R_{4143}) \\ -(R_{2124}-R_{3134}) & 2R_{2413} & -(R_{3132}-R_{4142}) \\ (R_{2123}-R_{4143}) & -(R_{3132}-R_{4142}) & -2R_{1423} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$W^{+}(R)$ 的这个表达式给出了 LeBrun [8] 的结果：任何反自对偶 Kähler 4-流形（采用由复结构确定的定向）都必须具有零标量曲率。

5. 具有 KÄHLER 4-流形的正交坐标

那么，当存在正交坐标时，情况会如何呢？在这种情况下，与上述情况一样，当所有指标互不相同时，必然有$R_{ijkl}=0$，即 $R_{1234}=R_{1324}=R_{1423}=0$，从而使凯勒恒等式（方程（4.1））得到一定程度的简化。

凯勒条件 $\nabla J=0$ 或 $\nabla_X JY=J\nabla_X Y$ 也给出了一些专门的公式，这些公式将在一种特殊情形下使用。利用命题（2.1）中关于正交坐标下协变导数的公式，

(5.1)

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1}Je_1 &= J\nabla_{e_1}e_1 \implies \\ a_1e_1(a_{12}) &= a_{14}e_3(a_1)-a_{13}e_4(a_1) \\ a_1e_1(a_{13}) &= -a_{14}e_2(a_1)+a_{12}e_4(a_1) \\ a_1e_1(a_{14}) &= a_{13}e_2(a_1)-a_{12}e_3(a_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2}Je_1 &= J\nabla_{e_2}e_1 \implies \\ a_2e_2(a_{12}) &= -a_{13}e_3(a_2)-a_{14}e_4(a_2) \\ a_2e_2(a_{13}) &= a_{14}e_1(a_2)+a_{12}e_3(a_2) \\ a_2e_2(a_{14}) &= -a_{13}e_1(a_2)+a_{12}e_4(a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_3} Je_1 &= J\nabla_{e_3} e_1 \implies \\
a_3 e_3(a_{12}) &= a_{13} e_2(a_3) - a_{14} e_1(a_3) \\
a_3 e_3(a_{13}) &= -a_{12} e_2(a_3) - a_{14} e_4(a_3) \\
a_3 e_3(a_{14}) &= a_{13} e_4(a_3) + a_{12} e_1(a_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_4} Je_1 &= J\nabla_{e_4} e_1 \implies \\
a_4 e_4(a_{12}) &= a_{14} e_2(a_4) + a_{13} e_1(a_4) \\
a_4 e_4(a_{13}) &= a_{14} e_3(a_4) - a_{12} e_1(a_4) \\
a_4 e_4(a_{14}) &= -a_{12} e_2(a_4) - a_{13} e_3(a_4).
\end{aligned}$$

6. 障碍随身碟

如果 M^{2m} 允许取酉正交坐标，即对于坐标 $\{x_1, \ldots, x_{2m}\}$ 的某种排列，标架 $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ $e_i = \frac{1}{a_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ 满足 $Je_{2k+1} = e_{2k+2}$ 和 $Je_{2k+2} = -e_{2k+1}$，那么凯勒条件很容易表明 M 必须局部是黎曼曲面的黎曼乘积。

命题 6.1. 如果 M^{2m} 是一个支持酉正交坐标的 *Kähler 2m* 维流形，那么 M 在局部上是黎曼曲面的黎曼积。

证明。假设 M 具有如上所述的酉正交坐标。分布$\mathcal{D}_k := \text{Span}\ \{e_{2k+1}, e_{2k+2}\}$，显然是可积的，也满足 $J\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k$，因为$\nabla_{e_{2k+1}} e_{2k+2} = \frac{1}{a_{2k+1}} e_{2k+2}(a_{2k+1})$ e_{2k+1}和 $\nabla_{e_{2k+2}} e_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k+2}} e_{2k+1}(a_{2k+2})$ e_{2k+2}都属于 $\mathcal{D}_k$，并且

$$\begin{aligned}
J\left(\nabla_{e_{2k+1}} e_{2k+1}\right) &= \nabla_{e_{2k+1}} Je_{2k+1} \\
&= \nabla_{e_{2k+1}} e_{2k+2} \\
&\in \mathcal{D}_k,
\end{aligned}$$

因此 $\nabla_{e_{2k+1}} e_{2k+1} \in \mathcal{D}_k$，正如 $\nabla_{e_{2k+2}} e_{2k+2}$一样， $\mathcal{D}_k$ 是全测地的。此外，

$$\begin{aligned}
J\left(\nabla_{e_{2k+1}} e_{2k+1}\right) &= \nabla_{e_{2k+1}} e_{2k+2} \implies \\
-\sum_{j \neq 2k+1} \frac{1}{a_{2k+1}} e_j(a_{2k+1}) Je_j &= \frac{1}{a_{2k+1}} e_{2k+2}(a_{2k+1}) e_{2k+1} \implies \\
\sum_{j \neq 2k+1, 2k+2} \frac{1}{a_{2k+1}} e_j(a_{2k+1}) Je_j &= 0,
\end{aligned}$$

因此 a_{2k+1}仅依赖于 x_{2k+1} 和 x_{2k+2}，类似地， a_{2k+2}仅依赖于 x_{2k+1} 和 x_{2k+2}。由于 $\mathcal{D}_k \perp \mathcal{D}_l$，该流形局部上是黎曼曲面的黎曼乘积。□

以下假设 M 是一个支持正交坐标的 4 实维 Kähler 流形。于是，相对于与正交坐标图相关联的定向标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，有以下限制。

命题 6.2. 若 M 是一个支持正交坐标的 *4* 维凯勒流形，那么对于任意由正交坐标导出的标架 $\{e_1, \ldots, e_4\}$，标量曲率 r 满足

$$r = \frac{2}{a_{12}^2}(R_{1212} + R_{3434}) = \frac{2}{a_{13}^2}(R_{1313} + R_{2424}) = \frac{2}{a_{14}^2}(R_{1414} + R_{2323}).$$

$(R_{1212} + R_{3434})$，$(R_{1313} + R_{2424})$，以及 $(R_{1414} + R_{2323})$ 因此都具有相同的符号 .

证明。 第二行由等式 (4.2) 以及 $R_{1234} = R_{1324} = R_{1423} =$0. □ 这一事实得出。

下一个结论　　由 [4.1] 和 $R_{1234} = R_{1324} = R_{1423} = 0$ 这一事实立即得出　　.

命题 6.3. 如果 M^4 是一个具有正交坐标的 *Kähler* 流形，那么对于与正交坐标图相关联的标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，其曲率具有如下形式

$$R = \left[\begin{array}{c|c} W^+(R) + \frac{r}{12}Id & s\left(\rho(R) - \frac{r}{4}I\right)^{\pm} \\ \hline s\left(\rho(R) - \frac{r}{4}I\right)^{\mp} & W^-(R) + \frac{r}{12}Id \end{array}\right]$$

with

$$\begin{aligned} W^-(R) &= \frac{r}{4}\begin{bmatrix} \left(a_{12}^2 - \frac{1}{3}\right) & a_{12}a_{13} & a_{12}a_{14} \\ a_{12}a_{13} & \left(a_{13}^2 - \frac{1}{3}\right) & a_{13}a_{14} \\ a_{12}a_{14} & a_{13}a_{14} & \left(a_{14}^2 - \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & -(R_{2124} - R_{3134}) & (R_{2123} - R_{4143}) \\ -(R_{2124} - R_{3134}) & 0 & -(R_{3132} - R_{4142}) \\ (R_{2123} - R_{4143}) & -(R_{3132} - R_{4142}) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6.1. 自对偶凯勒四维流形。

定理 6.1。如果 M^4 是自对偶凯勒四维流形，那么除非它是平坦的，或是两个具有相反常曲率的黎曼曲面的乘积，否则它不能支持正交坐标。

注记 6.1. 关于自对偶凯勒四维流形的讨论，参见 [3] 。

证明。假设 M 关于来自正交坐标图的标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是自对偶的,

$$\begin{aligned} 0 &= W^-(R) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{r}{4}\left(a_{12}^2 - \frac{1}{3}\right) & -(R_{2124} - R_{3134}) + \frac{r}{4}a_{12}a_{13} & (R_{2123} - R_{4143}) + \frac{r}{4}a_{12}a_{14} \\ -(R_{2124} - R_{3134}) + \frac{r}{4}a_{12}a_{13} & \frac{r}{4}\left(a_{13}^2 - \frac{1}{3}\right) & -(R_{3132} - R_{4142}) + \frac{r}{4}a_{13}a_{14} \\ (R_{2123} - R_{4143}) + \frac{r}{4}a_{12}a_{14} & -(R_{3132} - R_{4142}) + \frac{r}{4}a_{13}a_{14} & \frac{r}{4}\left(a_{14}^2 - \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此，要么 $r = 0$，要么 $a_{12}^2 = a_{13}^2 = a_{14}^2 = \frac{1}{3}$。在第一种情况下，也有 $W^+(R) = 0$，因为 $r = 0$和 $W^+(R) = \frac{r}{4}\Pi_I - \frac{r}{12}Id$。因此，该流形必定是共形平坦的，故根据 [11]，它必定是平坦的，或是两个常高斯曲率互为相反数的黎曼曲面的乘积。

在第二个 c　　在这种情况下，再应用公式（5.1），并考虑特殊情形 $a_{12} = a_{13} = a_{14} = \frac{1}{\sqrt{3}}$。

$$\begin{array}{llll} c_1 := & \frac{1}{a_1}e_2(a_1) = & \frac{1}{a_1}e_3(a_1) = & \frac{1}{a_1}e_4(a_1) \\ c_2 := & \frac{1}{a_2}e_1(a_2) = & -\frac{1}{a_2}e_3(a_2) = & \frac{1}{a_2}e_4(a_2) \\ c_3 := & \frac{1}{a_3}e_1(a_3) = & \frac{1}{a_3}e_2(a_3) = & -\frac{1}{a_3}e_4(a_3) \\ c_4 := & \frac{1}{a_4}e_1(a_4) = & -\frac{1}{a_4}e_2(a_4) = & \frac{1}{a_4}e_3(a_4) \end{array} \tag{6.1}$$

此外，按照 [[5], p. 6], 的巧妙论证，由于 $(e_2-e_3)(a_1)=0$ 和 $(e_2-e_4)(a_1)=0$，因此 $[e_2-e_3,e_2-e_4](a_1)=0$，并且由于

$$\begin{aligned}0 &= [e_2-e_3,e_2-e_4](a_1)\\ &= -[e_2,e_4](a_1)+[e_2,e_3](a_1)+[e_3,e_4](a_1)\\ &= \frac{1}{a_2}(e_3-e_4)(a_2)\,e_2(a_1)+\frac{1}{a_4}(e_2-e_3)(a_4)\,e_4(a_1)+\frac{1}{a_3}(e_4-e_2)(a_3)\,e_3(a_1)\\ &= \frac{2}{a_2}e_3(a_2)\,e_2(a_1)+\frac{2}{a_3}e_4(a_3)\,e_3(a_1)+\frac{2}{a_4}e_2(a_4)\,e_4(a_1),\end{aligned}$$

那么，要么 $\left(\frac{2}{a_2}e_3(a_2)+\frac{2}{a_3}e_4(a_3)+\frac{2}{a_4}e_2(a_4)\right)=0$，要么 $e_2(a_1)=0$；或者用 c_j 表示，要么 $(c_2+c_3+c_4)=0$，要么 $c_1=0$。

类似地，方程 (6.1) 中的第二行意味着 $(e_1+e_3)(a_2)=0$ 且 $(e_1-e_4)(a_2)=0$，因此

$$\begin{aligned}0 &= [e_1+e_3,e_1-e_4](a_2)\\ &= (-[e_1,e_4]-[e_1,e_3]-[e_3,e_4])(a_2)\\ &= \left(-2\frac{1}{a_1}e_3(a_1)-2\frac{1}{a_3}e_1(a_3)+2\frac{1}{a_4}e_1(a_4)\right)e_1(a_2),\end{aligned}$$

因此，要么 $\left(-2\frac{1}{a_1}e_3(a_1)-2\frac{1}{a_3}e_1(a_3)+2\frac{1}{a_4}e_1(a_4)\right)=0$，要么 $e_1(a_2)=0$；用 c_j 表示，则要么 $(c_1+c_3-c_4)=0$，要么 $c_2=0$。

由方程 (6.1) 的第三行可知，$(e_1-e_2)(a_3)=0=(e_1+e_4)(a_3)$，

$$\begin{aligned}0 &= [e_1-e_2,e_1+e_4](a_3)\\ &= [e_1,e_4](a_3)+[e_1,e_2](a_3)-[e_2,e_4](a_3)\\ &= \left(2\frac{1}{a_1}e_2(a_1)-2\frac{1}{a_2}e_1(a_2)+2\frac{1}{a_4}e_1(a_4)\right)e_1(a_3),\end{aligned}$$

因此 $c_1-c_2+c_4$ 或 $c_3=0$。最后，由于 $(e_1+e_2)(a_4)=0=(e_1-e_3)(a_4)$，

$$\begin{aligned}0 &= [e_1+e_2,e_1-e_3](a_4)\\ &= -[e_1,e_3](a_4)-[e_1,e_2](a_4)-[e_2,e_3](a_4)\\ &= \left(-2\frac{1}{a_1}e_2(a_1)-2\frac{1}{a_2}e_1(a_2)+2\frac{1}{a_3}e_1(a_3)\right)e_1(a_4).\end{aligned}$$

因此 $(c_1+c_2-c_3)=0$ 或 $c_4=0$。但这样一来，要么

$$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&-1\\1&-1&0&1\\1&1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

要么某些 $c_i=0$。如果某个分量为零，例如 $c_1=0$，那么除非另一个分量也为零，

$$\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

其秩再次达到最大值，因此必有另一项为零，不妨设为 c_2。继续下去，必然所有c_j 都为零。□

在本节讨论正交坐标存在性的障碍时，只有此处用到了比条件 $R_{ijkl}=0$（对于彼此不同的 i、j、k、l）更强的条件。如 [5], 所述，证明中还蕴含着这样一个事实：对于某个标架，代数条件 $R_{ijkl}=0$（对于彼此不同的 i、j、k、l）并不意味着正交坐标存在，即：

例6.1. 存在一个 $\mathbb{CP}^2$ 的标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，使其配备Fubini-Study度量，并且当 i、j、k、l 各不相同时，$R_{ijkl}=0$。

证明。 从 $\mathbb{CP}^2$上的任意酉标架 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 出发。然后令

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}u_2+\frac{1}{\sqrt{2}}u_3+\frac{1}{\sqrt{6}}u_4 \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}u_2-\frac{1}{\sqrt{2}}u_3+\frac{1}{\sqrt{6}}u_4 \\ e_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}}u_2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_4. \end{aligned}$$

显然，这给出了 $\mathbb{CP}^2$上的一个标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，它满足相对于该标架的复结构张量的条件 $a_{12}=a_{13}=a_{14}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，并且当所有指标互不相同时，$R_{ijkl}=0$。□

6.2. **Ricci平坦**。 紧致的（实）四维凯勒流形若为Ricci平坦，则必为K3曲面，因而是射影流形 [12]。我们的最终结果表明，任何非平凡的Ricci平坦凯勒4-流形都不能支持正交坐标。

定理6.2。 若 M^4 是 *Kähler* 且 *Ricci*平坦，则除非其为平坦流形，否则不支持正交坐标。

证明。 若该流形支持正交坐标且为 Ricci平坦，则相对于上述相关标架，注意到 Ricci平坦性意味着 $r=0$ 及（$R_{2124}-R_{3134}$）$=2R_{2124}$，等等，

$$R = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -2R_{2124} & 2R_{2123} \\ -2R_{2124} & 0 & -2R_{3132} \\ 2R_{2123} & -2R_{3132} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

由于 $\rho(R)=0, W^+(R)+\frac{r}{12}Id=0$，且 $W^+(R)+\frac{r}{12}Id=\begin{bmatrix} -2R_{2124} & 2R_{2123} \\ 0 & -2R_{3132} \\ -2R_{3132} & 0 \end{bmatrix}$，

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4), e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3\rangle \\ &= R_{1214}+R_{1223}+R_{3414}+R_{3423} \\ &= 2(R_{1214}+R_{1223}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4), e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4\rangle \\ &= R_{1213}-R_{1224}+R_{3413}-R_{3424} \\ &= 2(R_{1213}-R_{1224}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R(e_1\wedge e_3 - e_2\wedge e_4), e_1\wedge e_4 + e_2\wedge e_3\rangle \\ &= R_{1314} + R_{1323} - R_{2414} - R_{2423} \\ &= 2(R_{1314} + R_{1323}) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} -2R_{2124} &= \langle R(e_1\wedge e_2 - e_3\wedge e_4), e_1\wedge e_3 + e_2\wedge e_4\rangle \\ 2R_{1224} &= R_{1213} + R_{1224} - R_{3413} - R_{3424} \\ 0 &= R_{1213} - R_{1224} - R_{3413} - R_{3424} \\ 0 &= 2R_{1213} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2R_{2123} &= \langle R(e_1\wedge e_2 - e_3\wedge e_4), e_1\wedge e_4 - e_2\wedge e_3\rangle \\ -2R_{1223} &= R_{1214} - R_{1223} - R_{3414} + R_{3423} \\ 0 &= R_{1214} + R_{1223} - R_{3414} + R_{3423} \\ 0 &= 2R_{1214} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2R_{3132} &= \langle R(e_1\wedge e_3 + e_2\wedge e_4), e_1\wedge e_4 - e_2\wedge e_3\rangle \\ -2R_{1323} &= R_{1314} - R_{1323} + R_{2414} - R_{2423} \\ 0 &= R_{1314} + R_{1323} + R_{2414} - R_{2423} \\ 0 &= 2R_{1314}, \end{aligned}$$

so

$$0 = R_{1213} = R_{1214} = R_{1314} = R_{1323} = R_{1224} = R_{1223},$$

并且该流形是平坦的。 □

参考文献

[1] Atiyah, M., Hitchen, N., and Singer, I. M., 四维黎曼几何中的自对偶性, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences , **362** (1978), 425-461.[2] Chern, Shing-Shen, 曲面上存在等温参数的初等证明, PAMS, **6**(1955), 771-782.[3] Derdzi´nski, Andrej, 自对偶凯勒流形与四维爱因斯坦流形, Compositio Mathematica, **49** (1983), 405-433.[4] DeTurck, D., and Yang, D. 具有给定主应变的弹性形变与三重正交系的存在性, 杜克数学期刊, **51**(2), (1984), 243-260.[5] Gauduchon, Paul and Moroianu, Andrei, 复射影空间和四元数射影空间上不存在正交坐标, J. Geom. Phys. **155** (9), 103770 (2020).[6] Johnson, D., 凯勒浸没与全纯联络, J. Diff. Geo., **15** (1980), 71-79.[7] Johnson, D., 截面曲率与曲率标准形，Michigan Math. J., **27** (1980), 275-294.[8] LeBrun, C. 反自对偶度量与凯勒几何. 收录于：Chatterji, S.D. (编) 数学家国际大会论文集。Birkhäuser，巴塞尔，1995.[9] Singer, I. M., and Thorpe, J., 四维爱因斯坦空间的曲率, 整体分析：献给 K. Kodaira 的论文集，普林斯顿大学出版社。(1969), https://www.jstor.org/stable/j.ctt13x10qw.23[10] Tachibana, Shun-ichi, 关于共形平坦 K空间的自同构, J. Math. Soc. Japan, **13** (1961), 183- 188.[11] Tanno, Shûkichi, 四维共形平坦凯勒流形, Tohoku Math. Journ., **24** (1972), 501-504.[12] Tosatti, V. *K3* 曲面上的里奇平坦度量与动力系统。Boll. Unione Mat. Ital. **14** (2021), 191–209. [13] Weyl, H., 经典群，普林斯顿大学出版社，1939.[14] Yano, Kentaro and Mogi, Isamu, 凯勒流形的实表示, 数学年刊,**61** (1955), 178-197.

现通信地址：数学系，利哈伊大学，17 Memorial Walk，Bethlehem, PA 18015,USA电子邮箱：dlj0@lehigh.edu