arXiv:2305.05096v1 [math.CO] 8 May 2023

关于 Blecher 和 Knopfmacher 整数分拆不动点的研究

Brian Hopkins 和 James A. Sellers

2023年5月10日

摘要

近期，Blecher 和 Knopfmacher 探讨了整数分拆中不动点的概念，并对含有不动点与不含不动点的分拆数量之比提出了假设。我们通过将不动点纳入一系列不断扩展且相互关联的分拆统计量，解决了他们提出的悬而未决的问题；这些统计量涉及弗罗贝尼乌斯符号、Dyson 的 crank 以及 mex（最小未出现部分）。此外，我们推广了不动点的定义，并将这一扩展后的概念与 Hopkins、Sellers 和 Stanton 定义的 mex$_j$，以及 Hopkins、Sellers 和 Yee 定义的 j-Durfee 矩形联系起来。

1 引言

给定一个正整数 n，n 的一个分拆是由正整数组成的集合$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_j)$，其中 $\sum \lambda_i = n$。我们用记号 $\lambda \vdash n$ 表示 λ 是 n的一个分拆。这些 λ_i称为部分，并按 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_j$的顺序排列。记$p(n)$为 n的分拆数。

最近，Blecher 和 Knopfmacher 在第 4]节 [5, 中引入了整数分拆中的不动点这一概念。

定义 1.1. 若分拆 λ 存在一个指标 i 使得$\lambda_i = i$，则称其有一个不动点。

例如，在 15 的分拆中，$\alpha =$ (5, 3, 3, 3, 1) 有一个不动点，因为 $\alpha_3 = 3$；而 $\beta =$ (4, 4, 4, 2, 1) 没有不动点。

由于我们要求分拆的部分按非递增顺序排列，因此一个分拆至多有一个不动点。设 $f(n)$ 为有不动点的n 分拆数，$g(n)$ 为没有不动点的分拆数。作者提出了这两个数量之间的如下关系。

猜想 1.2（Blecher–Knopfmacher）。对于所有 $n > 2$，没有不动点的 n 的分拆数多于有不动点的 n 的分拆数。也就是说，对于 $n > 2$，$g(n) > f(n$。

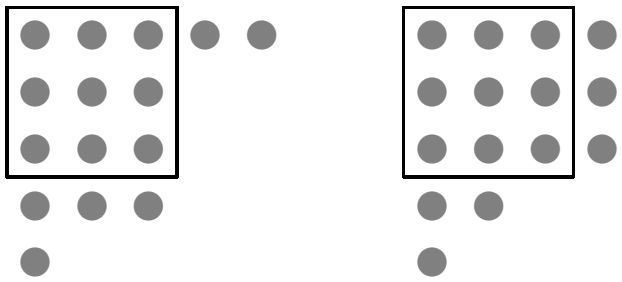


图1： $\alpha = (5, 3, 3, 3, 1)$ 和 $\beta = (4, 4, 4, 2, 1)$ 的费雷尔图，两者都具有如图所示的 3×3 杜菲方块。

（实际上，他们对 $n \geq 2$ 陈述了这个猜想；但由于分拆 (2) 没有不动点，而 (1, 1) 有，因此 $g(2) = 1 = f(2)$。）

在下一节中，我们将通过把不动点与下文定义的一组不断扩展、彼此相关的分拆统计量联系起来，证实他们（修正后的）猜想。我们先介绍两个源自19世纪的概念。

定义 1.3。给定一个分拆 λ，令 $d(\lambda)$ 表示满足$\lambda_i \geq i$的部分数。这个参数是杜菲方块的边长，也就是包含在 λ 的费雷尔图中的最大方块的边长；费雷尔图是分拆的一种可视化表示，其中第 i 行有 λ_i 个点。

对于前面提到的示例分拆，$d(\alpha) = d(\beta) = 3$。这些分拆的费雷尔图和杜菲方块见图1。

定义 1.4. 给定一个分拆 λ，其弗罗贝尼乌斯符号是一个由非负整数构成的 $2 \times d(\lambda)$ 数组

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{d(\lambda)} \\ b_1 & b_2 & \cdots & a_{d(\lambda)} \end{pmatrix}$$

其中 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{d(\lambda)} \geq 0$ 和 $b_1 > b_2 > \cdots > b_{d(\lambda)} \geq 0$；参照 λ 的 Ferrers 图，每个 a_i 表示杜菲方块对角线右侧第 i 行中的点数，每个 b_i 表示对角线下方第 i 列中的点数。

我们示例中的弗罗贝尼乌斯符号分别为 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$（对应 α）和 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$（对应 β）；见图2。

下一个统计量是整数分拆研究中最重要的统计量之一。与拉马努金同余式相关的 crank 是 Dyson 在 1944 [6] 中提出的，最终由 Andrews 和 Garvan 于 1988 [2]中找到。

定义 1.5. 对于一个分拆 λ，令 $\omega(\lambda)$ 表示 λ 中部分 1 的数量，令 $\mu(\lambda)$ 表示大于 $\omega(\lambda)$ 的部分的数量。λ 的 crank 是

$$\operatorname{crank}(\lambda) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{if } \omega(\lambda) = 0, \\ \mu(\lambda) - \omega(\lambda) & \text{if } \omega(\lambda) > 0. \end{cases}$$

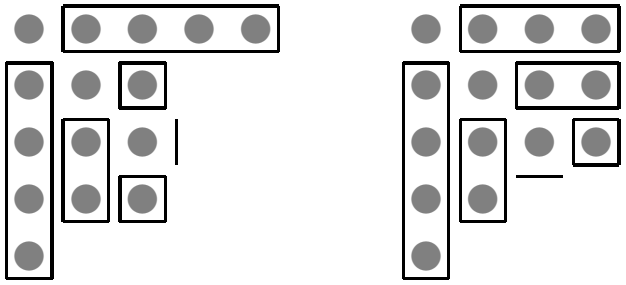


图2：确定 $\alpha = (5,3,3,3,1)$ 和 $\beta = (4,4,4,2,1)$ 的弗罗贝尼乌斯符号。

对于我们的示例，$\text{crank}(\alpha) = \text{crank}(\beta) = 4 - 1 = 3$。我们使用记号$M(m,n)$表示crank为 m的 n 的分拆数。

一种较新且非常简单的分拆统计量是 mex（源自 minimal excluded，意为最小未出现值）。

定义 1.6。给定一个分拆 λ，mex 是不属于 λ 的最小正整数。

对于我们的例子，$\text{mex}(\alpha) = 2$，因为 (5, 3, 3, 3, 1) 有一个部分 1，却没有部分 2；而 $\text{mex}(\beta) = 3$，因为 (4, 4, 4, 2, 1) 有部分 1 和 2，却没有部分 3。

在后面的章节中，我们将推广不动点的概念。这些结果用到了近期研究中引入的两个概念。首先，我们定义 Hopkins、Sellers 和 Stanton 给出的 mex 的一种推广 [8, 定义 1]。

定义 1.7. 给定一个分拆 λ 和一个非负整数 j，令 $\text{mex}_j(\lambda)$ 表示大于 j 且不是 λ 的部分的最小整数。

例如，$\alpha = (5,3,3,3,1)$ 的 $\text{mex}_1(\alpha) = 2$ 为 $= 4$，而 $\text{mex}_2(\alpha) = 4$。未带下标的 mex 对应于 $j = 0$ 情况。

请注意，这与 [8, 定义 1], 不同，后者还要求 j 是 λ的一个部分。因此，下面给出 [8, 定理 2] 的修订版本，该定理将 mex_j 与具有有界 crank 的分拆联系起来。

定理 1.8（Hopkins、Sellers、Stanton）。给定 $n \geq 2$ 和 $j \geq 0$,

$$\sum_{m \geq j} M(m,n) = \#\{\mu \vdash n \mid \text{mex}_j - j \equiv 1 \bmod 2 \text{ and } j \text{ is a part of } \mu\}$$
$$= \#\{\nu \vdash n - j \mid \text{mex}_j - j \equiv 1 \bmod 2\}$$

第一个等式是原始结果。第二个等式通过从 μ 中移除一部分 j 得出。

我们将使用的第二个概念是由 Hopkins、Sellers 和 Yee [9, page 3] 定义的杜菲方块的一种推广。

定义 1.9. 给定一个分拆 λ 和一个整数 j，令 $d_j(\lambda)$ 表示满足 $\lambda_i \geq i + j$ 的部分数目。 j-Durfee 矩形，即最大的 $d \times (d + j)$

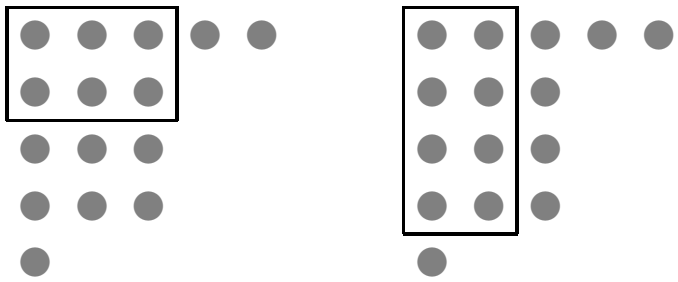


图 3： $\alpha = (5, 3, 3, 3, 1)$ 的 1-Durfee 矩形和 -2-Durfee 矩形。

包含于 λ 的 Ferrers 图中的矩形，具有 $d_j(\lambda)$ 行和 $d_j(\lambda) + j$ 列。

例如， $\alpha = (5, 3, 3, 3, 1)$ 有 1-Durfee 矩形 2×3，以及 -2-Durfee 矩形 4×2; 见图 3。杜菲方块对应于 $j = 0$ 情形。

我们的许多证明都用到生成函数。我们回顾一下 Pochhammer 符号的常用记法: 对于 $n \geq 1$,

$$(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}) \text{ and } (a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty}(a;q)_n.$$

1-Durfee 矩形在证明一个关于有界 crank 分拆的新生成函数时发挥了关键作用 [9, 定理 8]。为求完整起见，我们在此重述该结果。

定理 1.10（Hopkins、Sellers、Yee）。对于任意整数 j,

$$\sum_{m\geq j}\sum_{n\geq 0} M(m,n)q^n = \sum_{i\geq 0}\frac{q^{(i+1)(i+j)}}{(q;q)_i(q;q)_{i+j}}.$$

在下一节中，我们通过将不动点统计量与 Frobenius 符号联系起来，并回顾关于 Frobenius 符号、mex 和 crank 的近期研究，轻松验证猜想 1.2。在第 3 节和第 4 节中，我们推广不动点的概念，并看到 Blecher 和 Knopfmacher 猜想的一个更精确版本，是一系列关于 crank 落在某个取值范围内的 n 的计数结果中的第一个情形。第 5 节提出了一些未来研究的想法。

2 验证 Blecher 和 Knopfmacher 的猜想

我们通过将不动点分拆统计量与 Frobenius 符号、mex 和 crank 联系起来，证实了猜想 1.2。我们用 $\#S$ 表示集合 S 中元素的个数。

定理 2.1. 对于每个 $n \geq 2$，以下各量相等。

(i). $f(n)$，含有不动点的 n 的分拆数；(ii). #$\{\lambda \vdash n \mid$ Frobenius 符号的顶行包含 $0\}$；(iii). #$\{\lambda \vdash n \mid \mathrm{mex}(\lambda) \equiv 0$模 $2\}$；(iv). $\sum_{m \geq 1} M(m,n)$。

在相同条件下，以下数量也相等。

(v). $g(n)$，不含不动点的 n 的分拆数，

(vi). #$\{\lambda \vdash n \mid$ Frobenius 符号的顶行不包含 $0\}$，

(vii). #$\{\lambda \vdash n \mid \mathrm{mex}(\lambda) \equiv 1$模 $2\}$，

(viii). $\sum_{m \geq 0} M(m,n)$.

证明。为联系 (i) 和 (ii)，设 λ 有 $\lambda_i = i$。由于对于任意 $j < i$，$\lambda_j \geq i$，且对于任意 $j > i$，$\lambda_j \leq i$，这意味着杜菲方块的边长 $d(\lambda) = i$。因此，λ 的 Frobenius 符号顶行中的最后一项是 $\lambda_i - i = 0$。

反过来，假设分拆 λ 具有 $d(\lambda) = i$，且其 Frobenius 符号的顶行中包含 0。这个 0 必然位于顶行的最后一个位置，因此 $\lambda_i = i$，所以 λ 属于由 $f(n)$ 计数的分拆。

(v) 与 (vi) 相等，这由互补性可得。

其余结果都可由先前的工作推出。特别是，Andrews [1,定理 4] 表明 (vi) 与 (vii) 相等，因此 (ii) 和 (iii) 可由互补性推出。Hopkins 和 Sellers [7, 推论 2] 表明 (iii) 与 (iv) 相等（另见 Andrews 和 Newman [4, 定理 2]同期独立得出的结果）。最后，(vii) 与 (viii) 相等，既用到了互补性，也用到了 Andrews 和 Garvan [2,方程 1.9],中的 crank 对称性结果，即 $M(m,n) = M(-m,n)$。

□

有关不动点与杜菲方块的示例见图 4。

现在，我们用一个精确表达式确认 Blecher 和 Knopfmacher 的猜想，该表达式给出了对于 $n > 2$，$g(n)$ 超出 $f(n)$ 的量。

推论 2.2. 对所有 $n \geq 2$,

$$g(n) - f(n) = M(0,n) \tag{1}$$

$$= p(n) + 2\sum_{j \geq 1} (-1)^j \, p\left(n - \frac{j(j+1)}{2}\right). \tag{2}$$

因此，对于 $n > 2$，$g(n) > f(n)$。

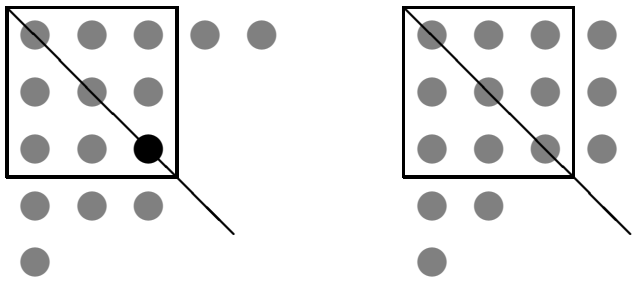


图 4：左侧显示了 $\alpha = (5, 3, 3, 3, 1)$ 的 Ferrers 图及其杜菲方块；对角线上的黑点表示不动点。右侧显示了 $\beta = (4, 4, 4, 2, 1)$ 的对应图像，它没有不动点。

证明。crank 等式 (1) 可由定理 2.1 得出，而以 $p(n)$ 表示的表达式 (2) 已由 Hopkins、Sellers 和 Stanton 在 [8, 第 5]页讨论。由于对于每个 $n \geq 3$， n 都至少有一个 crank 0 分拆，因此猜想 1.2 得到证实。 □

有关 crank 0 分拆数量的数据，请见下文表 1。

有趣的是，Blecher 和 Knopfmacher 的猜想与 Shen 的一项结果密切相关；Shen 证明了

$$\#\{\lambda \vdash n \mid \operatorname{mex}(\lambda) \equiv 1 \bmod 2\} \geq \#\{\lambda \vdash n \mid \operatorname{mex}(\lambda) \equiv 0 \bmod 2\}$$

对于 $n > 1$ [11, 定理 1]。Hopkins 和 Sellers 建立了 mex 与 crank 之间的联系，并据此给出了一个简单得多的证明，证明了

$$\#\{\lambda \vdash n \mid \operatorname{mex}(\lambda) \equiv 1 \bmod 2\} > \#\{\lambda \vdash n \mid \operatorname{mex}(\lambda) \equiv 0 \bmod 2\}$$

对于 $n > 2$ [7, 推论 3], 一个与推论 2.2 等价的结果。

3 不动点的推广与正情形

现在我们将 Blecher 和 Knopfmacher 的不动点分拆统计量加以推广。

定义 3.1. 给定一个整数 k，若存在一个指标 i 使得 $\lambda_i = i + k$，则分拆 λ 有一个 k-不动点。

例如， $\alpha = (5, 3, 3, 3, 1)$ 有一个 1-不动点，因为 $\alpha_2 = 2 + 1$ ，而$\beta = (4, 4, 4, 2, 1)$ 有一个 -2-不动点，因为 $\beta_4 = 4 - 2$。定义 1.1 中的不动点统计量是 $k = 0$ 情形。和之前一样，对于每个 k，一个分拆至多有一个 k-不动点。

在本节中，我们研究 $k \geq 0$ 的 k-不动点。令 $f_k(n)$表示具有 k-不动点的 n 的分拆数量， $g_k(n)$表示不具有此类不动点的分拆数量。

我们的下一个结果推广了定理 2.1。注意，涉及 crank 的 (viii) 是下面两族相关结果 (xvii) 和 (xviii) 的初始情形。

定理 3.2. 对于 $k \geq 0$ 和 $n \geq 2$，以下各量相等。

(ix). $f_k(n)$，具有 k-不动点的 n 的分拆数；(x). $\#\{\lambda \vdash n \mid$ Frobenius 符号的顶行包含 k$\}$；(xi). $\#\{\lambda \vdash n \mid \mathrm{mex}_k(\lambda) - k \equiv 0$ 模 $2\}$；(xii). $\sum_{m \geq k+1} M(m,n)$.

在相同条件下，以下各量也相等。

(xiv). $g_k(n)$，没有 k-不动点的 n 的分拆数；

(xv). $\#\{\lambda \vdash n \mid$ Frobenius 符号的顶行不包含 k$\}$；

(xvi). $\#\{\lambda \vdash n \mid \mathrm{mex}_k(\lambda) - k \equiv 1$ 模 $2\}$,

(xvii)。 $\displaystyle\sum_{m \geq -k} M(m,n)$,

(xviii)。 $\displaystyle\sum_{m \geq k} M(m,n+k)$。

证明。为连接 (ix) 和 (x)，假设 λ 具有 $\lambda_i = i + k$。由于对任意 $j < i$ 都有 $\lambda_j \geq i + k$，且对任意 $j > i$都有 $\lambda_j \leq i + k$，这意味着 k-杜菲矩形有 $d_k(\lambda)$ 个 $= i$ 行。 λ 的 Frobenius 符号顶行中的第 i 列元素是 $\lambda_i - i = k$。（注意，杜菲方块参数 $d(\lambda)$ 必须满足$d(\lambda) \geq d_k(\lambda)$，这样 Frobenius 符号才至少有 i 列。）

反过来，假设分拆 λ 满足 $d_k(\lambda) = i$，且其 Frobenius 符号的顶行中包含 k。根据 k-杜菲矩形的极大性， $\lambda_i = i + k$，因此 λ 属于由 $f_k(n)$ 计数的分拆。

互补性使 (xiv) 和 (xv) 相等。

在讨论其他等式之前，我们先求出 $f_k(n)$ 和 $g_k(n)$ 的生成函数。如上所述，一个满足 $\lambda_i = i + k$ 的分拆 λ 有一个大小为 $i \times (i + k)$ 的 k-Durfee 矩形。令 β' 表示 λ 的 Ferrers 图中位于 k-Durfee 矩形右侧的部分；见图 5。作为一个分拆，β' 至多有 $i - 1$ 个部分，否则 $\lambda_i > i + k$。这意味着，所示分拆的共轭分拆 β 由严格小于 i 的部分组成。 α 在 k-Durfee 矩形下方，其最大部分不超过 $i + k$，因为 $\lambda_i = i + k$。因此

$$\sum_{n \geq 0} f_k(n) q^n = \sum_{i \geq 1} \frac{q^{i(i+k)}}{(q;q)_{i+k} (q;q)_{i-1}}. \tag{3}$$

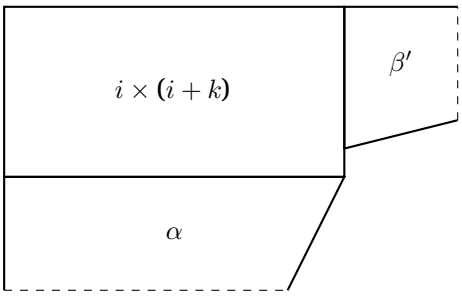


图 5：具有 k-不动点的分拆，按其 k-杜尔菲矩形分解。

现在，根据各个分拆的 k-Durfee 矩形，可得 n 的所有分拆的一个表达式：

$$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \sum_{i\geq 0} \frac{q^{i(i+k)}}{(q;q)_{i+k}(q;q)_i}. \tag{4}$$

（注意，这个求和从 $k = 0$ 开始，因为例如，分拆 (1, 1) 的 2-杜尔菲矩形是 0×2。）因此， $g_k(n) = p(n) - f_k(n)$ 的生成函数为

$$\sum_{n\geq 0} g_k(n)q^n = \sum_{i\geq 0} \frac{q^{i^2+ik+i}}{(q;q)_{i+k}(q;q)_i}. \tag{5}$$

为了证明 (xiv) 和 (xvii) 相等，注意根据定理 1.10,

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq -k}\sum_{n\geq 0} M(m,n)q^n &= \sum_{i\geq k} \frac{q^{i^2-ik+i-k}}{(q;q)_i(q;q)_{i-k}} \quad (\text{as we need } i-k\geq 0)\\ &= \sum_{h\geq 0} \frac{q^{h^2+hk+h}}{(q;q)_{h+k}(q;q)_h} \quad (\text{letting } h = i-k)\end{aligned}$$

这正是 (5)。

证明 (xiv) 和 (xviii) 相等的方法类似。根据定理 1.10,

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq k}\sum_{n\geq 0} M(m,n+k)q^{n+k} &= \sum_{i\geq 0} \frac{q^{i^2+ik+i+k}}{(q;q)_i(q;q)_{i+k}}\\ &= q^k \sum_{i\geq 0} \frac{q^{i^2+ik+i}}{(q;q)_i(q;q)_{i+k}}\\ &= \sum_{n\geq 0} g_k(n)q^{n+k}\end{aligned}$$

再次使用（5）。

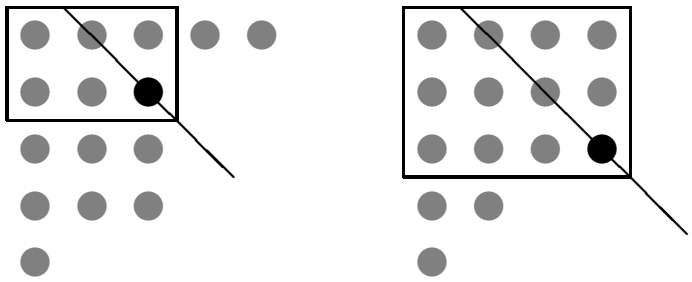


图 6：左侧展示了带有 1-Durfee 正方形的 $\alpha = (5,3,3,3,1)$；对角线上的黑点表示不动点。右侧展示了 $\beta = (4,4,4,2,1)$ 的对应图像，它也有一个 1-不动点。注意，对角线相对于图 4 的位置。

最后，将定理 1.8 应用于 $n+k$ 的分拆可知，（xviii）与（xvi）相等。（ix）、（xi）和（xii）相等，则由互补性和 crank 对称性可得。

□

图 6 给出了 1-不动点与 1-Durfee 矩形相关的示例。

注意，也可以利用 Hopkins、Sellers 和 Stanton 的另一项结果 [8, 定理 7], ，证明定理 3.2 中 (xviii) 和 (xv) 相等；但在下一节中，我们将需要本证明所推导出的 $f_k(n)$ 的生成函数。

推论 2.2 的类似结果表明，我们对猜想 1.2 的解决是关于 crank 位于以 0 为中心的范围内的 n 的分拆数量的一族无限计数结果中的首个结果。

推论 3.3。对于 $k \geq 0$ 和 $n \geq 2$,

$$g_k(n) - f_k(n) = \sum_{m=-k}^{k} M(m,n) \tag{6}$$

$$= p(n) + 2\sum_{j\geq 1}(-1)^j\, p\left(n - \frac{j(j+2k-1)}{2}\right). \tag{7}$$

证明。crank 等式 (6) 由定理 3.2 的 (xii) 和 (xvii) 得出。关于 $p(n)$ 的表达式 (7) 可由 Hopkins、Sellers 和 Stanton [8,推论 4] 得出。

□

表 1 列出了较小的 n 和 k 下，具有 $-k \leq \text{crank}\,\lambda \leq k$ 的 λ n 分拆数量。请注意，对于固定的 n 和足够大的 k，crank 值的范围涵盖了 n 的所有分拆，因此每一列最终都会稳定在 $p(n)$。截至本文撰写时，在这些数列中，只有 n 的 crank 0 分拆数量被收录在整数数列在线大全 [10, A064410] 中。

$k\backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	1	1	1	1	2	2	4	4	7	7	11	12
1	0	1	1	3	3	5	6	8	10	14	17	23	29	38
2	2	1	3	3	5	7	10	12	18	22	29	37	49	60
3	2	3	3	5	7	9	12	18	22	30	39	51	65	84
4	2	3	5	5	9	11	16	20	28	36	49	61	81	102
5	2	3	5	7	9	13	18	24	32	42	55	73	93	120

表 1：$\#\{\lambda \vdash n \mid -k \leq \text{crank}(\lambda) \leq k\}$ 在 $0 \leq k \leq 5$ 和 $2 \leq n \leq 15$时的值。

4 广义不动点的负情形

定义 3.1 允许参数为负数的广义不动点。令 $k \geq 0$。本节将重点讨论 $-k$-不动点。它们与参数为正数的不动点存在重要差异。

首先，一个具有 $-k$-不动点的分拆 λ 至少必须有 $k+1$ 个部分，因为条件 $\lambda_i = i-k$ 要求部分 λ_i 满足 $i \geq k+1$，使其为正整数。与上文一样，令 $f_{-k}(n)$ 表示具有 $-k$-不动点的 n 的分拆数量。

其次，补集内部还有一些子类型。显然，α =(5, 3, 3, 3, 1)没有 -2-不动点，而 β = (4, 4, 4, 2, 1)有，因为$\beta_4 = 4-2$。分拆 γ = (3)也没有 -2-不动点，不过可以认为，在放宽各种定义后，它确实有不动点：说一个分拆附加了若干个 0 部分并不少见，例如 $\gamma_1 = 3$、$\gamma_2 = 0$、$\gamma_3 = 0$等。这样一来，$\gamma_2 = 2-2$ 看起来确实像是某种 -2-不动点。见图 7。我们不说 γ 有 -2-不动点，而是根据 $-k$-不动点将分拆分为三类。

令 $g'_{-k}(n)$ 计数满足 $\lambda_i \neq i-k$ 且至少有 k 个部分的分拆

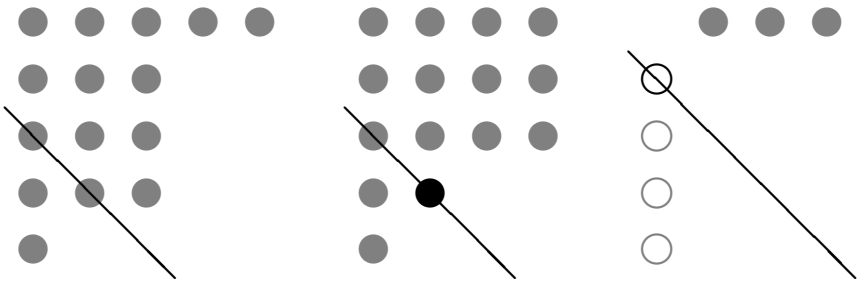


图 7：左侧显示 α = (5, 3, 3, 3, 1)，它没有 -2-不动点。中间显示 β = (4, 4, 4, 2, 1)，它确实有一个由黑点标示的 -2-不动点。右侧显示 γ =(3)，标准 Ferrers 图左侧的圆圈表示隐含的部分 0。请注意对角线相对于图 4 和图 6 的位置。

对所有 i 均成立。记 $p(n,k-1)$ 为 n 中至多有 $k-1$ 个部分的分拆。我们有

$$p(n)=f_{-k}(n)+p(n,k-1)+g'_{-k}(n).$$

或许令人惊讶的是，$-k$ 情形与第3节的情况并没有更相似。部分原因在于不动点定义的不对称性：它只与杜菲方块右侧的子分拆有关，而与其下方的子分拆无关。当 k-杜菲矩形的高度大于宽度时，也就是说，图中标示不动点的对角线从第一行下方开始时，就会出现关于至多有 $k-1$ 个部分的分拆的歧义。

以下结果进一步说明了采用这种更精细分组的理由。

定理 4.1. 对于 $k\geq 0$ 和 $n\geq 2$,

(xviii). $f_{-k}(n)+p(n,k-1)=\sum_{m\geq -k+1} M(m,n),$

(xix). $g'_{-k}(n)=\sum_{m\geq k} M(m,n).$

证明. 定理 3.2 的证明中推导 f_k（n）生成函数的过程仍然适用，但需作如下修改：$i-k$ 必须至少为 1，即,

$$\sum_{n\geq 0} f_{-k}(n)q^n=\sum_{i-k\geq 1}\frac{q^{i(i-k)}}{(q;q)_{i-k}(q;q)_{i-1}}.$$

p（$n,k-1$）的生成函数为 $1/$（$q;\ q$）$_{k-1}$，因此 (xviii) 左侧的生成函数为

$$\begin{aligned}\sum_{i-k\geq 1}\frac{q^{i(i-k)}}{(q;q)_{i-k}(q;q)_{i-1}}+\frac{1}{(q;q)_{k-1}}&\\ =\sum_{h\geq 1}\frac{q^{h(h+k)}}{(q;q)_h(q;q)_{h+k-1}}+\frac{1}{(q;q)_{k-1}}&\quad(\text{letting } h=i-k)\\ =\sum_{h\geq 0}\frac{q^{h(h+k)}}{(q;q)_h(q;q)_{h+k-1}}&\end{aligned}$$

因为倒数第二个等式中的第二项正是最后一个求和式的 $h=0$ 项。

由定理 1.10，(xviii) 右侧的生成函数为

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq -k+1}\sum_{n\geq 0}M(m,n)q^n=\sum_{j\geq k-1}\frac{q^{(j+1)(j-k+1)}}{(q;q)_j(q;q)_{j-k+1}}&\quad(\text{as we need } j-k+1\geq 0)\\ =\sum_{\ell\geq 0}\frac{q^{\ell(\ell+k)}}{(q;q)_\ell(q;q)_{\ell+k-1}}&\quad(\text{letting } \ell=j-k+1)\end{aligned}$$

由此我们得出，(xviii) 两边相等。

由互补性和 crank 对称性可得结果（xix）。 □

请注意，对于 $-k$-不动点，已不再存在通过广义 mex 或 Frobenius 符号中的项来直接解释的方式。

推论 3.3 的类似结果表明，表 1 中的 crank 范围同样描述了 $-k$-不动点之间的差。

推论 4.2. 对于 $k \geq 0$ 和 $n \geq 2$,

$$f_{-k}(n) + p(n, k-1) - g'_{-k}(n) = \sum_{m=-k+1}^{k-1} M(m, n) \tag{8}$$

$$= p(n) + 2\sum_{j\geq 1} (-1)^j \, p\left(n - \frac{j(j+2k-3)}{2}\right). \tag{9}$$

证明。crank 等式 (8) 由定理 4.1 得出。用 p（n）表示的式 (9) 则由 Hopkins、Sellers 和 Stanton 的 [8, 推论 4] 得出。 □

结合推论 3.3 和推论 4.2，可得下面这个将广义不动点与正、负参数联系起来的奇妙恒等式。

$$g_{k-1}(n) - f_{k-1}(n) = f_{-k}(n) + p(n, k-1) - g'_{-k}(n). \tag{10}$$

5 后续研究的若干思路

如果能为本文通过解析方法证明的结果给出组合证明，将会很有意思。特别是，定理 3.2 中 (xvii) 和 (xviii) 的等式，即

$$\#\{\lambda \vdash n \mid \mathrm{crank}(\lambda) \geq -k\} = \#\{\mu \vdash n+k \mid \mathrm{crank}(\mu) \geq k\}, \tag{11}$$

需要对 crank 至少为 $-k$ 的 n 分拆的 Ferrers 图进行操作，以生成 crank 至少为 k 的 $n+k$ 分拆的 Ferrers 图。

此外，是否存在某些分拆统计量，可以取代 mex$_j$ 和 Frobenius 符号条件，使得关于负参数下不动点的定理 4.1，能够像关于非负参数下不动点的定理 3.2 一样涵盖尽可能多种不同的分拆统计量?

最后，将奇 mex 分拆进一步划分为 mex 模 4 同余于 1 和 mex 模 4 同余于4 [8, 9]的两类，这种做法已被证明富有成效。对于具有（广义）不动点的分拆，是否存在有趣的细化方式?

参考文献

[1] G. E. Andrews. 凹组合. Electron. J. Combin. 18 (2011) P6.

[2] G. E. Andrews，F. G. Garvan。分拆的 Dyson 的 crank。《美国数学会公报》18（1988）167–171。

[3] G. E. Andrews，D. Newman。分拆与最小未出现数。《组合学年刊》23（2019）249–254。[4] G. E. Andrews，D. Newman。整数分拆中的最小未出现数。《整数数列杂志》23（2020）20.2.3。[5] A. Blecher，A. Knopfmacher。分拆中的不动点与匹配点。《Ramanujan 数学杂志》58（2022）23–41。[6] F. Dyson。分拆理论中的一些猜想。《Eureka》8（1944）10–15。[7]B. Hopkins，J. A. Sellers。转动分拆 crank。《美国数学月刊》127（2020）654–657。[8] B. Hopkins，J. A. Sellers，D. Stanton。整数分拆的 Dyson 的 crank 与 mex。《组合理论杂志》A辑185（2022）105523。[9] B. Hopkins，J. A. Sellers，A. J. Yee。关于 crank 与 mex 分拆统计量的组合学视角。《电子组合学杂志》29（2022）P2.9。[10] N. J. A. Sloane，编。《整数数列在线大全》。oeis.org，2023年。[11] Y. Shen。按最小缺失部分分类的分拆。《Ramanujan 数学杂志》49（2019）411–419。