arXiv:2305.05123v1 [math-ph] 9 May 2023

量子纯态集合上的非扩张和非压缩映射*

MichiyaMori† 和 Peter ˇSemrl‡

摘要

维格纳定理刻画了希尔伯特空间上所有秩一投影集合的等距映射。在度量几何中，非扩张映射和非压缩映射是对等距映射研究得较为深入的推广。我们证明，在一定条件下，维格纳对称性可以被刻画为所有秩一投影集合上的非扩张映射或非压缩映射。这类刻画所需的假设是单射性或满射性，并且在有限维情形与无限维情形中有所不同。受近期获得的乌尔霍恩推广的维格纳定理的最优版本启发，我们还描述了满足一个远弱于满射性条件的非扩张映射。这类映射不必是维格纳对称性。所有所述结果的最优性均通过反例得以证明。

美国数学学会分类：47B49，81P05。

关键词：维格纳对称、纯态、非扩张映射、非压缩映射。

1 引言与主要结果陈述

在本文中， H 是一个复希尔伯特空间， $\mathcal{P}(H)$表示 H上的秩一投影集合。我们始终假设 $\dim H \geq 2$。在量子力学的数学基础中，秩一投影表示量子系统的纯态，而 $\mathrm{tr}\,(PQ)$，即 PQ, $P, Q \in \mathcal{P}(H)$的乘积的迹，就是两个纯态之间所谓的跃迁概率。著名的 Wigner 酉-反酉定理 [11]

*第一作者获得日本学术振兴会科研费项目（编号：22K13934）的资助。第二作者获得斯洛文尼亚研究机构 ARRS 的项目 J1-2454 和 P1-0288 资助。

†东京大学数理科学研究科，日本东京目黑区驹场 3-8-1，邮编 153-8914，mmori@ms.u-tokyo.ac.jp；理化学研究所跨学科理论与数学科学项目（iTHEMS），日本埼玉县和光市广泽 2-1，邮编 351-0198

‡数学、物理与力学研究所，斯洛文尼亚卢布尔雅那 Jadranska 19，邮编 SI-1000，peter.semrl@fmf.uni-lj.si

描述了保持跃迁概率的 $\mathcal{P}(H)$ 上双射变换的一般形式。

我们可以用等距映射来表述维格纳定理。回顾一下，从度量空间 (X,d) 到自身的映射ϕ 称为等距映射，若

$$d(\phi(x),\phi(y))=d(x,y),\quad x,y\in X.$$

在本文中，我们考虑 $\mathcal{P}(H)$ 中的距离 $d(P,Q)=\|P-Q\|$，其中 $\|\cdot\|$表示算子范数。容易验证，对于任意一对 $P,Q\in\mathcal{P}(H)$，均有$\|P-Q\|=\sqrt{1-\mathrm{tr}(PQ)}$ 成立。因此，维格纳定理可以表述如下：设 $\phi:\mathcal{P}(H)\to\mathcal{P}(H)$ 是一个双射，满足

$$\|\phi(P)-\phi(Q)\|=\|P-Q\|,\quad P,Q\in\mathcal{P}(H).$$

那么存在酉算子或反酉算子 $U:H\to H$，使得

$$\phi(P)=UPU^*,\quad P\in\mathcal{P}(H).$$

这种形式的每个映射都称为维格纳对称。总而言之，维格纳定理指出，从 $\mathcal{P}(H)$ 到其自身的每个满射等距映射都是维格纳对称。更一般地，维格纳定理的非双射版本指出，从 $\mathcal{P}(H)$ 到其自身的每个等距映射都具有 $\phi(P)=UPU^*$,$P\in\mathcal{P}(H)$ 的形式，其中 $U:H\to H$ 是某个线性或共轭线性等距映射（例如，参见[3]）。关于维格纳定理的更详细说明、众多其他参考文献以及一些近期进展，请参见[2, 4, 5, 6, 7, 8, 9]。

本文将探讨这样一个问题：如果在维格纳定理中将等距映射替换为非扩张映射或非压缩映射，会发生什么。回想一下，若映射 ϕ 从度量空间 (X,d) 到自身满足以下条件，则称其为非扩张（分别称为非压缩）：

$$d(\phi(x),\phi(y))\le d(x,y)\quad(\text{resp. }d(\phi(x),\phi(y))\ge d(x,y)),\quad x,y\in X.$$

以下是度量几何中的一个众所周知的事实 [1, 定理 1.6.14 和 1.6.15]。

定理 1.1。设 (X,d) 是一个紧致度量空间。

1. 从 X 到其自身的非压缩映射是满射等距映射。2. 从 X 到其自身的满射非扩张映射是等距映射。

推论 1.2。假设 $\dim H<\infty$。映射 $\phi:\mathcal{P}(H)\to\mathcal{P}(H)$ 是维格纳对称，如果满足以下条件之一。

1. ϕ是非压缩的。
2. ϕ 是满射且非扩张。
3. ϕ是单射且非扩张。

证明。若 $\dim H < \infty$，则 $\mathcal{P}(H)$ 是紧的。因此，若 ϕ 满足前两个条件之一，则由定理 1.1 和维格纳定理可知，ϕ 是维格纳对称。为考察第三个条件，设 ϕ: $\mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 是一个单射非扩张映射。于是，ϕ 是从紧致连通流形 $\mathcal{P}(H)$ 到其自身的单射连续映射。根据域不变性定理，其像是开集。由连续性可知，其像是紧的。因此，ϕ 是满射并满足第二个条件，所以它是维格纳对称。

□

我们研究了在各种附加假设下 $\mathcal{P}(H)$ 的非扩张或非压缩映射，包括 $\dim H = \infty$ 的情形。我们首先给出一个关于非压缩映射的结果。

定理 1.3。设 $\phi: \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 是一个满射，使得

$$\|\phi(P) - \phi(Q)\| \geq \|P - Q\|$$

对于每一对 P、$Q \in \mathcal{P}$（H），则 ϕ 是一种维格纳对称。

观察推论 1.2 的第一项，在有限维情形下，我们看到即使没有满射假设，同样的结论仍然成立。然而，在无限维情形下，满射假设是必不可少的（例 4.1）。

接下来我们考虑非扩张映射。

定理 1.4. 设 $\phi: \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 为一个满射，使得

$$\|\phi(P) - \phi(Q)\| \leq \|P - Q\|$$

对于每一对 P、$Q \in \mathcal{P}$（H），则 ϕ 是一种维格纳对称。

相反，我们将在例 4.2 中看到，$\mathcal{P}(H)$ 的一个单射非扩张映射在 $\dim H = \infty$ 时可能与维格纳对称相去甚远。

对于 P、$Q \in \mathcal{P}$（H），如果 $PQ = 0$，我们记作 $P \perp Q$，这等价于 $\|P-Q\| =1$。对于每个范数为一的向量 $x \in H$，我们将投影到 x 的线性张成空间上的秩一投影记作 P_x。如果子集 $\{P_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{P}$（$H$）满足只要 $\alpha \neq \beta$ 就有 $P_\alpha \perp P_\beta$，我们称其为秩一投影正交系（OSP）；如果它是一个 OSP，并且不存在与每个 P_α 都正交的秩一投影 Q，我们称其为完备秩一投影正交系（COSP）。如果对于某些单位向量 x_α、$\alpha \in \mathcal{J}$ 有 $P_\alpha = P_{x_\alpha}$，那么 $\{P_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{P}$（$H$）是 COSP，当且仅当 $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$ 是 H 的标准正交基。

在附加假设 $\dim H \geq 3$ 下，乌尔霍恩对维格纳定理的改进 [10] 指出，每个双射 $\phi: \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$，若对任意一对 $P, Q \in \mathcal{P}(H)$ 都有 $P \perp Q \iff \phi(P) \perp \phi(Q)$，则它是一个维格纳对称。这个结果还可以进一步改进。最近得到的一个最优版本 [9] 如下：假设 H 是可分的，且$\phi: \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 是一个映射，并且对任意一对 $P, Q \in \mathcal{P}(H)$ 都有$P \perp Q \Rightarrow \phi(P) \perp \phi(Q)$。假设存在一个 COSP $\{P_1, P_2, \ldots\} \subset \mathcal{P}(H)$

使得 $\{\phi(P_1)\ \phi(P_2)\ \ldots\} \subset \mathcal{P}(H)$ 是一个 COSP。那么 ϕ 是一个维格纳对称。特别地，若 $3 \leq \dim H < \infty$，则每个映射 $\phi\colon \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$，若对任意一对 $P, Q \in \mathcal{P}(H)$ 都有 $P \perp Q \Rightarrow \phi(P) \perp \phi(Q)$，则它是一个维格纳对称。

注意，每个非压缩映射 $\phi\colon \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 都满足 $P \perp Q \Rightarrow \phi(P) \perp \phi(Q)$，$P, Q \in \mathcal{P}(H)$。由此可知，在可分情形下，若希尔伯特空间 $\mathcal{P}(H)$ 上的非压缩映射 ϕ 具有这样的性质：存在一个正交投影系，经 ϕ 映射后成为某个正交投影系，那么该映射必为维格纳对称。如下所述，当我们考察非扩张映射时，情况就有趣得多。

我们先选取并固定希尔伯特空间 H 中的一个标准正交基 $\{e_\alpha\colon\ \alpha \in \mathcal{J}\}$。对于每个投影 $P \in \mathcal{P}(H)$（其像为 $\mathbb{C}(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha e_\alpha)$），我们定义 $\Phi(P)$ 为投影到 $\mathbb{C}(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} |c_\alpha| e_\alpha)$ 上的投影。显然，Φ 定义良好，并且将正交投影系 $\{P_{e_\alpha}\colon\ \alpha \in \mathcal{J}\}$ 的每个元素映射到自身。我们断言，$\Phi\colon \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 是一个非扩张映射。等价地，我们需要证明

$$\operatorname{tr}(\Phi(P)\Phi(Q)) \geq \operatorname{tr}(PQ), \quad P, Q \in \mathcal{P}(H).$$

这可以通过不等式轻松验证

$$\sqrt{\operatorname{tr}(P_v P_w)} = \left|\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} v_\alpha \overline{w_\alpha}\right| \leq \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} |v_\alpha||w_\alpha| = \sqrt{\operatorname{tr}(\Phi(P_v)\Phi(P_w))}$$

对于每一对单位向量 $v = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} v_\alpha e_\alpha, w = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} w_\alpha e_\alpha \in H$。现在我们陈述本文的主要结果。

定理 1.5。假设 $\dim H \geq 3$。设 $\phi\colon \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 是满足以下条件的映射

$$\|\phi(P) - \phi(Q)\| \leq \|P - Q\|, \quad P, Q \in \mathcal{P}(H),$$

并假设存在一个 COSP $\{Q_\alpha\colon\ \alpha \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{P}(H)$，使得 $\{\phi(Q_\alpha)\colon \alpha \in \mathcal{J}\}$ 在 $\mathcal{P}(H)$ 中是一个 COSP。那么，要么 ϕ 是维格纳对称，要么存在酉算子 $U, V\colon H \to H$，使得

$$\phi(P) = V\Phi(UPU^*)V^*, \quad P \in \mathcal{P}(H). \tag{1}$$

事实上，我们将证明一个更强的结果（命题 3.3），该结果适用于任意像中包含 COSP 的非扩张映射 $\phi\colon \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$。若 H 是有限维的，$\dim H = n$，则我们将 H 与 $\mathbb{C}^n$ 等同，并将 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ 视为所有幂等厄米秩一 $n \times n$ 矩阵的集合。此时，相对于 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基，映射 $\Phi\colon \mathcal{P}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ 可由“逐元素绝对值”给出

$$\Phi(P) = [\,|p_{ij}|\,]_{1\leq i,j\leq n} \quad \text{for} \quad P = [p_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n). \tag{2}$$

每个非扩张映射 $\phi\colon \mathcal{P}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$，只要 $\phi(\mathcal{P}(\mathbb{C}^n))$ 包含一个 COSP，就必定是维格纳对称，或具有形式 (1)。令人有些意外的是，假设 $n \geq 3$ 不可或缺。在 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ 上满足 $\phi(\mathcal{P}(\mathbb{C}^2))$ 包含一个 COSP 的非扩张映射 ϕ 的一般形式，将在命题 2.7 中说明。

下一节将介绍一些辅助结果。第三节将给出主要结果的证明。最后一节将通过反例说明我们主要定理的最优性。

2 预备结果

在下文中，我们偶尔会用到以下一些基本事实。它们众所周知且易于验证，因此我们省略证明。

引理 2.1. 秩一 2×2 投影具有以下形式

$$\begin{bmatrix} p & z\sqrt{p(1-p)} \\ \overline{z}\sqrt{p(1-p)} & 1-p \end{bmatrix}$$

对于某些实数 p、$0 \le p \le 1$，以及某个模为 1 的复数 z。

引理 2.2. 设 v、$w \in H$ 为单位向量。那么 P_v 和 P_w 分别是 $\mathcal{P}(H)$ 中投影到 $\mathbb{C}v$ 和 $\mathbb{C}w$ 上的投影，满足

$$\operatorname{tr}(P_v P_w) = |\langle v, w\rangle|^2, \quad \|P_v - P_w\| = \sqrt{1 - |\langle v, w\rangle|^2}.$$

我们从 $\mathcal{P}(H)$ 上非扩张映射的一个基本性质开始。

引理 2.3. 设 $\phi\colon \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 是一个映射，使得

$$\|\phi(P) - \phi(Q)\| \le \|P - Q\|, \quad P, Q \in \mathcal{P}(H), \tag{3}$$

并设 n 是一个正整数。假设 $\{P_1, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{P}(H)$ 是包含于 ϕ 的像中的正交投影系。如果 $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{P}(H)$ 满足 $\phi(Q_j) = P_j$, $j = 1, \ldots, n$，那么 $\{Q_1, \ldots, Q_n\} \subset \mathcal{P}(H)$ 也是一个正交投影系。此外，对每个 $Q \in \mathcal{P}(H)$，我们有

$$Q \le Q_1 + \cdots + Q_n \Rightarrow \phi(Q) \le P_1 + \cdots + P_n.$$

证明. 对于 $1 \le i < j \le n$，我们知道

$$1 = \|P_i - P_j\| = \|\phi(Q_i) - \phi(Q_j)\| \le \|Q_i - Q_j\| \le 1,$$

这意味着 $\{Q_1, \ldots, Q_n\} \subset \mathcal{P}(H)$ 是一个正交投影系。

假设 $Q \le Q_1 + \cdots + Q_n$。那么 $Q = Q(Q_1 + \cdots + Q_n)$，因此，

$$1 = \operatorname{tr} Q = \operatorname{tr}(QQ_1) + \cdots + \operatorname{tr}(QQ_n). \tag{4}$$

设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是一个正交归一集，其中包含向量 $P_j = P_{e_j}$、$j = 1$、...、n。那么，相对于直和分解

$$H = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\} \oplus \{e_1, \ldots, e_n\}^{\perp}$$

秩一投影 P_j, $j = 1, \ldots, n$, 具有矩阵表示。

$$P_j = \phi(Q_j) = \begin{bmatrix} E_{jj} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

这里， E_{jj} 表示一个 $n \times n$ 矩阵，其所有矩阵元素均为零，唯有第（j, j）个矩阵元素等于 1。令

$$\phi(Q) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} & A \\ A^* & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & A \\ A^* & B \end{bmatrix}$$

表示秩一投影 $\phi(Q)$的相应矩阵表示。

显然， $\mathrm{tr}\,(\phi(Q)\phi(Q_j)) = q_{jj}$。由（3）可推得 $\mathrm{tr}\,(QQ_j) \leq \mathrm{tr}\,(\phi(Q)\phi(Q_j))$， $j = 1$， ....., n。因此，由（4）可得

$$1 \leq \mathrm{tr}\,(\phi(Q)\phi(Q_1)) + \cdots + \mathrm{tr}\,(\phi(Q)\phi(Q_n)) = q_{11} + \cdots + q_{nn} \leq \mathrm{tr}\,\phi(Q) = 1,$$

因此， $q_{11} + \cdots + q_{nn} = 1$。这进一步意味着 B是迹为零的正算子，从而 $B = 0$。利用 $\phi(Q)$为正这一事实，我们得出 $A = 0$。因此， R 是一个秩一投影，并且

$$\phi(Q) = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P_1 + \cdots + P_n.$$

□

由引理的第一部分，我们立即得到以下结论。

推论 2.4. 设 ϕ: $\mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$是一个非扩张映射。则以下两个条件等价。

- ϕ 将 $\mathcal{P}(H)$ 的某个正交投影系映射到 $\mathcal{P}(H)$ 的一个 COSP。
- $\mathcal{P}(H)$ 中存在一个 COSP，它包含于 ϕ 的像中。

此外，若 $\dim H < \infty$，则上述条件也等价于以下条件： ϕ 将 $\mathcal{P}(H)$ 的某个 COSP 映射到 $\mathcal{P}(H)$ 的一个 COSP。

令 S^1 表示模为 1 的所有复数的集合。我们考虑 S^1 上的一个非扩张映射，即满足以下条件的函数 g: $S^1 \to S^1$

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in S^1.$$

显然，这个条件等价于

$$\mathrm{Re}\,(g(z_1)\overline{g(z_2)}) \geq \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}), \quad z_1, z_2 \in S^1. \tag{5}$$

我们给出一个简单的引理。

引理 2.5. 设 g ： $S^1 \to S^1$ 为非扩张映射。则以下情形之一成立：

- 存在 $c \in S^1$ 使得 $g(z) = cz$, $z \in S^1$。
- 存在 $c \in S^1$ 使得 $g(z) = c\overline{z}$, $z \in S^1$。
- 像 $g(S^1) \subset S^1$ 是紧的、连通的，并且包含于某个闭半圆中。

证明。若 g 是满射，则定理 1.1 的第二项表明 g是满射等距映射。因此， g 满足前两种情形之一。假设 g 不是满射。由 g 的连续性可知， $g(S^1)$是紧且连通的。不失一般性，通过旋转可假设 $g(1) = 1$ 且 $g(S^1) = \{e^{i\theta} : \ 0 \le \theta \le \theta_0\}$ ，其中 $0 \le \theta_0 < 2\pi$。对于 S^1中的每个点z ，都存在一条从 1 到 z 、位于 S^1 中的路径，其长度至多为 π。因此，假设 g 是非扩张的，便可推出 $\theta_0 \le \pi$。

□

下面的推论将在命题 3.1 的证明中用到。

推论 2.6. 设 $g : S^1 \to S^1$ 是非扩张的。若进一步假设 g 是群同态，即 $g(zw) = g(z)g(w)$, $z, w \in S^1$，则以下情形之一成立：

- $g(z) = z$, $z \in S^1$。
- $g(z) = \overline{z}$, $z \in S^1$。
- $g(S^1) = \{1\}$。

证明. 引理 2.5 中前两种情形显然成立。若引理 2.5 中第三种情形成立，则 $g(S^1)$ 是连通的，且包含于某个闭半圆中。结合附加假设，显然可得 $g(S^1) = \{1\}$。

□

设 g: $S^1 \to S^1$ 是一个非扩张映射。我们按以下方式定义映射 τ : $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$: 首先令

$$\tau(E_{11}) = E_{11} \quad \text{and} \quad \tau(E_{22}) = E_{22}.$$

设 P是任意一个秩一投影，满足 $P \neq E_{11}, E_{22}$。根据引理 2.1,

$$P = \begin{bmatrix} p & z\sqrt{p(1-p)} \\ \overline{z}\sqrt{p(1-p)} & 1-p \end{bmatrix}$$

对于某个实数 p, $0 < p < 1$, 且 $z \in S^1$, 对于这样的 P，我们定义

$$\tau(P) = \begin{bmatrix} p & g(z)\sqrt{p(1-p)} \\ \overline{g(z)}\sqrt{p(1-p)} & 1-p \end{bmatrix}.$$

任何此类映射都称为 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ 的标准非扩张映射。

我们声称，每个这样的映射都满足

$$\|\tau(P_1)-\tau(P_2)\| \le \|P_1-P_2\|, \quad P_1,P_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2).$$

等价地，我们需要证明的是

$$\operatorname{tr}(\tau(P_1)\tau(P_2)) \ge \operatorname{tr}(P_1P_2), \quad P_1,P_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2). \tag{6}$$

如果 P_1、P_2 中任意一个等于 E_{11}、E_{22} 中任意一个，则上述不等式显然成立。如果

$$P_j = \begin{bmatrix} p_j & z_j\sqrt{p_j(1-p_j)} \\ \overline{z_j}\sqrt{p_j(1-p_j)} & 1-p_j \end{bmatrix}, \quad j=1,2,$$

取 $0<p_j<1$、$z_j \in S^1$、$j=1$ 和 2，则通过直接计算可知，验证 (6) 可归结为 (5)。

注意，如果引理 2.5 中的前两种情况之一成立，则 τ 是维格纳对称。如果第三种情况成立，则 τ 不是单射，也不是满射。

命题 2.7. 设 ϕ：$\mathcal{P}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ 是一个满足以下条件的映射。

$$\|\phi(P)-\phi(Q)\| \le \|P-Q\|, \quad P,Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2),$$

并假设存在一个 ϕ 的像中所包含的 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ 的 COSP。那么存在 2×2 酉矩阵 U、V 以及一个标准非扩张映射 τ：$\mathcal{P}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$，使得

$$\phi(P) = V\tau(UPU^*)V^*, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2).$$

为证明该命题，我们首先由推论 2.4 得知，存在一个 COSP$\{Q_1,Q_2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$，使得 $\{P_1,P_2\}$ 也是一个 COSP，其中 $\phi(Q_j)=P_j$, $j=1,2$。因此，存在 2×2 酉矩阵 U 和 V，使得 $U^*E_{jj}U=Q_j$ 和 $V^*P_jV=E_{jj}$, $j=1,2$。由此可知，映射 $P \mapsto V^*\phi(U^*PU)V, P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ 将矩阵 E_{11} 和 E_{22} 映射到自身。因此，命题 2.7 可归结为

命题 2.8. 设 ϕ：$\mathcal{P}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ 是一个满足以下条件的映射

$$\|\phi(P)-\phi(Q)\| \le \|P-Q\|, \quad P,Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2),$$

且 $\phi(E_{11})=E_{11}$, $\phi(E_{22})=E_{22}$。那么，ϕ 是一个标准非扩张映射。

证明。由 $\|\phi(P)-\phi(Q)\| \le \|P-Q\|$、$P$ 和 $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$，我们推得 $\operatorname{tr}(\phi(P)\phi(Q)) \ge \operatorname{tr}(PQ)$。令 P 为满足 $P \ne E_{11}$、E_{22} 的任意秩一投影。根据引理 2.1，

$$P = \begin{bmatrix} p & z\sqrt{p(1-p)} \\ \overline{z}\sqrt{p(1-p)} & 1-p \end{bmatrix} \tag{7}$$

对于某个实数 p、$0<p<1$ 以及某个复数 $z \in S^1$。记为

$$Q = \phi(P) = \begin{bmatrix} q & w\sqrt{q(1-q)} \\ \overline{w}\sqrt{q(1-q)} & 1-q \end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中 $0 \le q \le 1$ 和 $w \in S^1$。我们有

$$q = \operatorname{tr}(\phi(P)\phi(E_{11})) \ge \operatorname{tr}(PE_{11}) = p,$$

类似地，$1 - q \ge 1 - p$，从而 $p = q$。

特别地，存在一个函数 $g\colon S^1 \to S^1$，使得

$$\phi(T_u) = T_{g(u)}, \quad \text{where } T_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}\overline{u} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{for every } u \in S^1.$$

From

$$\operatorname{tr}(T_{g(u_1)}T_{g(u_2)}) = \operatorname{tr}(\phi(T_{u_1})\phi(T_{u_2})) \ge \operatorname{tr}(T_{u_1}T_{u_2}), \quad u_1, u_2 \in S^1,$$

由此可推得 $g\colon S^1 \to S^1$ 是非扩张的。

取(7)和(8)中的 P、Q（因此 $p = q$），并应用

$$\operatorname{tr}(T_{g(z)}\phi(P)) = \operatorname{tr}(\phi(T_z)\phi(P)) \ge \operatorname{tr}(T_z P),$$

我们得出 $w = g(z)$。也就是说，对于每一对 p、z、$0 < p < 1$、$z \in S^1$，都有

$$\phi\left(\begin{bmatrix} p & z\sqrt{p(1-p)} \\ \overline{z}\sqrt{p(1-p)} & 1-p \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p & g(z)\sqrt{p(1-p)} \\ \overline{g(z)}\sqrt{p(1-p)} & 1-p \end{bmatrix}.$$

证明完毕。 □

注 2.9。在下一节中，我们将需要以下直接推论。设 $\phi\colon \mathcal{P}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ 是一个非扩张映射，且 $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ 是任意一个秩一投影。进一步设 r 是一个正整数，$1 \le r < n$。我们将 P 写成分块形式

$$P = \begin{bmatrix} R_1 & N \\ N^* & R_2 \end{bmatrix}$$

其中 R_1 是一个 $r \times r$ 矩阵。由于 R_1 和 R_2 均为正且秩至多为一，并且 P 是一个迹为一的矩阵，因此我们有 $R_1 = \lambda P_1$，且 $R_2 = (1-\lambda)P_2$，其中 P_1 和 P_2 是某些秩一投影，而 λ、$0 \le \lambda \le 1$ 是某些实数。

若存在 $r \times r$ 投影 Q_1，以及一个 $(n-r) \times (n-r)$ 投影 Q_2，使得

$$\phi\left(\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \phi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix},$$

那么，由命题 2.8 和引理 2.3 可得，$\phi(P)$ 是如下形式的矩阵

$$\phi(P) = \begin{bmatrix} \lambda Q_1 & * \\ * & (1-\lambda)Q_2 \end{bmatrix}.$$

3 主要结果的证明

我们首先证明有限维情形下的定理 1.5。因此，我们假设 $n \geq 3$，并考虑一个非扩张映射 $\phi\colon \mathcal{P}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$，它将某个正交投影系映射到一个正交投影系。与命题 2.7 的证明一样，只需证明以下命题。

命题 3.1. 设 $n \geq 3$。令 $\phi\colon \mathcal{P}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ 为满足以下条件的映射

$$\|\phi(P) - \phi(Q)\| \leq \|P - Q\|, \quad P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n),$$

并假设 $\phi(E_{jj}) = E_{jj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$。

那么，存在一个 $n \times n$ 对角酉矩阵 U，其 $(1, 1)$ 元为 1，使得以下三种可能性之一成立：

$$\phi(P) = UPU^*, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n),$$

$$\phi(P) = UP^tU^*, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n),$$

其中 A^t 表示矩阵 A的转置，或者

$$\phi(P) = U\Phi(P)U^*, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n),$$

其中 Φ 由式 (2) 给出。

证明。我们首先考虑 $n = 3$ 的情形。由引理 2.3 和命题 2.8 可知，存在一个非扩张映射 $f_{12}\colon S^1 \to S^1$，使得

$$\phi\left(\begin{bmatrix} p & z\sqrt{p(1-p)} & 0 \\ \overline{z}\sqrt{p(1-p)} & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p & f_{12}(z)\sqrt{p(1-p)} & 0 \\ \overline{f_{12}(z)}\sqrt{p(1-p)} & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对每个 $p \in [0, 1]$ 和 $z \in S^1$ 都成立。同理，存在非扩张映射 f_{13}、$f_{23}\colon S^1 \to S^1$，使得

$$\phi\left(\begin{bmatrix} p & 0 & z\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \overline{z}\sqrt{p(1-p)} & 0 & 1-p \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p & 0 & f_{13}(z)\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \overline{f_{13}(z)}\sqrt{p(1-p)} & 0 & 1-p \end{bmatrix}$$

and

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & z\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & \overline{z}\sqrt{p(1-p)} & 1-p \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & f_{23}(z)\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & \overline{f_{23}(z)}\sqrt{p(1-p)} & 1-p \end{bmatrix}$$

对每个 $p \in [0, 1]$ 和 $z \in S^1$ 都成立。

设 $p \in [0, 1]$ 和 $z \in S^1$。利用注 2.9 对这对正交秩一投影

$$\begin{bmatrix} p & z\sqrt{p(1-p)} & 0 \\ \overline{z}\sqrt{p(1-p)} & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad E_{33},$$

我们看到如下结果：对于每个形如以下形式的 $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^3)$

$$\begin{bmatrix} \lambda p & \lambda z\sqrt{p(1-p)} & * \\ \lambda\overline{z}\sqrt{p(1-p)} & \lambda(1-p) & * \\ * & * & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

其中 $0 \le \lambda \le 1$，投影 $\phi(P)$ 的形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda p & \lambda f_{12}(z)\sqrt{p(1-p)} & * \\ \lambda\overline{f_{12}(z)}\sqrt{p(1-p)} & \lambda(1-p) & * \\ * & * & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

用 E_{11} 和 E_{22} 代替 E_{33}，重复相同的论证。由此可得，三个映射 f_{12}、f_{13}、f_{23} 满足

$$\phi\left(\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & z\lambda_1\lambda_2 & w\lambda_1\lambda_3 \\ \overline{z}\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 & \overline{z}w\lambda_2\lambda_3 \\ \overline{w}\lambda_1\lambda_3 & z\overline{w}\lambda_2\lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & f_{12}(z)\lambda_1\lambda_2 & f_{13}(w)\lambda_1\lambda_3 \\ \overline{f_{12}(z)}\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 & f_{23}(\overline{z}w)\lambda_2\lambda_3 \\ \overline{f_{13}(w)}\lambda_1\lambda_3 & \overline{f_{23}(\overline{z}w)}\lambda_2\lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

对于任意非负实数 λ_1、λ_2、λ_3，满足 $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1$ 和 z、$w \in S^1$。由于右端属于 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^3)$，我们得到

$$f_{12}(z)f_{23}(\overline{z}w) = f_{13}(w), \quad z, w \in S^1.$$

将 z 替换为 1，可得 $f_{12}(1)f_{23}(w) = f_{13}(w)$；将 w 替换为 1，可得 $f_{12}(z)f_{23}(\overline{z}) = f_{13}(1)$。因此，$f_{13}(1)f_{23}(\overline{z})f_{23}(\overline{z}w) = f_{12}(1)f_{23}(w)$。由此，对于任意一对 z、$w \in S^1$，~~我们~~得到 $g(zw) = g(z)g(w)$，其中 $g(z) := f_{13}(1)f_{12}(1)f_{23}(z)$，$z \in S^1$。换言之，$g\colon S^1 \to S^1$ 是一个群同态。

由于 f_{23} 是非扩张的，g也如此。因此，推论 2.6 表明，以下三种情况之一成立：对于每个 $z \in S^1$，$g(z) = z$；对于每个 $z \in S^1$，$g(z) = \overline{z}$；或者 $g(S^1) = \{1\}$。现在可以直接得出

若前两种情况之一成立，则 $\bullet\ \phi$ 是由一个对角酉矩阵诱导的维格纳对称，该矩阵的 (1,1) 元为 1；而

若第三种情况成立，则存在一个对角酉矩阵 U，其 (1, 1) 元为 1，使得对于每个 $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^3)$，都有 $\phi([p_{ij}]_{1\le i,j\le 3}) = U[\,|p_{ij}|\,]_{1\le i,j\le 3}U^*$。

这就完成了 $n = 3$这一特殊情形的证明。

现在我们通过对 n 进行归纳法来考虑一般情况。假设定理对 $n-1$、$n \ge 4$ 成立。根据引理 2.3 和归纳假设，不失一般性，我们可以假设以下两种情况之一成立：

$$\phi\left(\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{n-1}), \tag{9}$$

or

$$\phi\left(\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \Phi(P) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{n-1}). \tag{10}$$

这里，我们用同一个符号 Φ 表示两个不同的映射：一个定义在 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{n-1})$ 上，另一个定义在 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ 上。它们都会将任意秩一投影 P 映射为一个秩一投影 Q，其矩阵元素是 P 对应矩阵元素的绝对值。

再次应用引理 2.3 和归纳假设，我们看到存在一个对角的（$n-1$）$\times$（$n-1$）酉矩阵 U，其 $(1,1)$ 矩阵元素为 1，使得以下三种情况之一成立：

$$\phi\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & UPU^*\end{bmatrix}, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{n-1}), \tag{11}$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & UP^tU^*\end{bmatrix}, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{n-1}),$$

or

$$\phi\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & U\Phi(P)U^*\end{bmatrix}, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{n-1}). \tag{12}$$

考虑形如

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & P & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

对于 $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{n-2})$，我们看到 (9) 蕴含 (11)，而 (10) 蕴含 (12)。此外，在这两种情况下，U的对角矩阵元素除（$n-1$，$n-1$）矩阵元素外均为 1。因此，考虑映射

$$P \mapsto \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & U^*\end{bmatrix}\phi(P)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & U\end{bmatrix}$$

来代替 ϕ，我们还可以假设 $U = I$。

令$P = [p_{ij}]_{1\le i,\ j\le n} \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ 为任意秩一投影。那么可以取一个投影 $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{n-1})$，使得

$$P = \begin{bmatrix}(1-p_{nn})Q & *\\ * & p_{nn}\end{bmatrix}.$$

若 (9) 成立，则有

$$\phi\left(\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

因此，注 2.9 结合假设 $\phi(E_{nn}) = E_{nn}$ 表明

$$\phi(P) = \phi\left(\begin{bmatrix}(1-p_{nn})Q & *\\ * & p_{nn}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}[p_{ij}]_{1\le i,j\le n-1} & *\\ * & p_{nn}\end{bmatrix}. \tag{13}$$

同样，我们得到

$$\phi(P) = \begin{bmatrix}p_{11} & *\\ * & [p_{ij}]_{2\le i,j\le n}\end{bmatrix} \tag{14}$$

因为 $\phi(E_{11}) = E_{11}$，且 (11) 对 $U = I$ 成立。由于 $\phi(P)$ 是秩一投影，(13) 和 (14) 意味着，对于每个带有 $P \not\leq E_{11} + E_{nn}$ 的 $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$，$\phi(P) = P$ 都成立。根据 ϕ 的连续性，我们看到，对于每个$P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$，$\phi(P) = P$ 都成立。

类似地，如果式 (10) 成立，则有

$$\phi(P) = \begin{bmatrix} [\,|p_{ij}|\,]_{1\leq i,j\leq n-1} & * \\ * & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & * \\ * & [\,|p_{ij}|\,]_{2\leq i,j\leq n} \end{bmatrix}$$

对于每个 $P = [p_{ij}]_{1\leq i,\ j\leq n} \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$。这将导出对于每个$P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$，$\phi(P) = \Phi(P)$。 □

注 3.2. 以下事实很容易验证。

命题 3.1 陈述中的酉矩阵 U 是唯一的。不可能出现命题 3.1 中的两种不同可能性同时得到满足的情况。

设 U 是对角 $n\times n$ 酉矩阵。定义 $V\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，使得 $Vx = U\overline{x}$,$x \in \mathbb{C}^n$，其中 $\overline{x} = (\overline{x_i})_{1\leq i\leq n}$ 对于 $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$。那么 V 是一个满足以下条件的反酉算子

$$UP^tU^* = VPV^*, \quad P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n).$$

设 $\phi\colon \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 是一个非扩张映射。假设存在一个正交投影系 $\{Q_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{P}(H)$，使得 $\{P_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{P}(H)$ 是一个 COSP，其中 $P_\alpha = \phi(Q_\alpha)$，$\alpha \in \mathcal{J}$。推论 2.4 表明，当且仅当某个 COSP 包含在 ϕ的像中时，此假设成立。注意，后一条件比 ϕ 的满射性弱得多。

对每个 $\alpha \in \mathcal{J}$，我们取一个单位向量 $e_\alpha \in P_\alpha H$。那么 $\{e_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{J}\}$ 是 H 的标准正交基。若存在复数 $\{z_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{J}\} \subset S^1$，使得对每个 $\alpha \in \mathcal{J}$ 都有 $Ve_\alpha = z_\alpha e_\alpha$，则称酉算子 $V\colon H \to H$ 关于标准正交基 $\{e_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{J}\}$ 是对角的。对于到 $\mathbb{C}(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha e_\alpha)$ 上的每个投影 $P \in \mathcal{P}(H)$，$\Phi(P)$ 表示到 $\mathbb{C}(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} |c_\alpha| e_\alpha)$ 上的投影。对于闭子空间 $K \subset H$，我们以自然方式将 $\mathcal{P}(K)$ 视为 $\mathcal{P}(H)$ 的子集。

命题 3.3. 设 $\dim H \geq 3$，且 $\phi\colon \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ 是一个映射，满足

$$\|\phi(P) - \phi(Q)\| \leq \|P - Q\|$$

对每一对 P、$Q \in \mathcal{P}(H)$。设 $\{Q_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{P}(H)$ 是一个正交投影系，使得 $\{P_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{P}(H)$ 是一个 COSP，其中 $P_\alpha = \phi(Q_\alpha)$、$\alpha \in \mathcal{J}$。设 $K := (\bigvee_{\alpha\in\mathcal{J}} Q_\alpha)H$，并令 Φ 与上文相同。则以下情况之一成立：

- $K = H$ 和 ϕ 是维格纳对称。
- 存在双射线性等距映射 $U\colon K \to H$ 以及对角酉算子 $V\colon H \to H$，使得对于所有 $P \in \mathcal{P}(K)$，$\phi(P) = V\Phi(UPU^*)V^*$。

证明。令 $\{f_\alpha:\ \alpha\in\mathcal{J}\}$ 为 K 的一组标准正交基，使得每个 Q_α 的像均由 f_α 张成；再令 $\{e_\alpha:\ \alpha\in\mathcal{J}\}$ 为 H 的一组标准正交基，使得每个 P_α 的像均由 e_α张成。我们首先定义线性双射等距映射 U: $K\to H$，使其满足 $Uf_\alpha=e_\alpha,\alpha\in\mathcal{J}$。注意，对每个 $\alpha\in\mathcal{J}$，$UQ_\alpha U^*=P_\alpha=\phi(Q_\alpha)$ 均成立。我们选取并固定互不相同的元素 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathcal{J}$。利用命题 3.1 和引理 2.3（另见注 3.2），我们看到，对于满足 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathcal{K}$ 的每个有限子集 $\mathcal{K}\subset\mathcal{J}$，以下二者之一成立

- 存在唯一确定的酉算子或反酉算子 $V_\mathcal{K}$：张成空间 $\{e_\alpha:\ \alpha\in\mathcal{K}\}\to$张成空间 $\{e_\alpha:\ \alpha\in\mathcal{K}\}$，使得 $V_\mathcal{K}e_{\alpha_1}=e_{\alpha_1}$且$\phi(Q)=V_\mathcal{K}UQU^*V_\mathcal{K}^*$对每个满足 $Q\le\sum_{\alpha\in\mathcal{K}}Q_\alpha$的 $Q\in\mathcal{P}(K)$ 都成立；或者
- 存在唯一确定的酉算子 $V_\mathcal{K}$：张成空间$\{e_\alpha:\alpha\in\mathcal{K}\}\to$张成空间$\{e_\alpha:\alpha\in\mathcal{K}\}$，使得 $V_\mathcal{K}e_{\alpha_1}=e_{\alpha_1}$ 且 $\phi(Q)=V_\mathcal{K}\Phi(UQU^*)V_\mathcal{K}^*$对每个满足 $Q\le\sum_{\alpha\in\mathcal{K}}Q_\alpha$的 $Q\in\mathcal{P}(K)$ 都成立。

显然，如果 $\mathcal{K}_1$、$\mathcal{K}_2\subset\mathcal{J}$ 是满足 α_1、α_2、$\alpha_3\in\mathcal{K}_1\subset\mathcal{K}_2$ 的有限子集，那么对这两个集合，要么都符合上述第一种情况，即 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$；要么都符合第二种情况。在这两种情况下，$V_{\mathcal{K}_1}$ 都是算子 $V_{\mathcal{K}_2}$的限制。因此，要么

- 存在一个双射线性或共轭线性等距映射 W：$K\to H$使得 $\phi(P)=WPW^*$ 对于每个 $P\in\mathcal{P}(K)$，其被 $\{Q_\alpha$ 中有限多个投影之和所支配：$\alpha\in\mathcal{J}\}$；或

- 存在一个对角酉算子 V：$H\to H$ 使得 $\phi(P)=V\Phi(UPU^*)V^*$对于 $\{Q_\alpha$ 中被有限多个投影之和支配的每个 $P\in\mathcal{P}(K)$：$\alpha\in\mathcal{J}\}$。

由 ϕ 的连续性可知，对于每个 $P\in\mathcal{P}$（K），上述可能性之一成立。

假设第一种情况成立且 $K\neq H$。令 $v\in K$ 和 $w\in K^\perp$为单位向量，且 $0<c\le1$ 为一个实数。于是我们可以取唯一的投影 $Q\in\mathcal{P}(K)$，使得 $\phi(P_{cv+\sqrt{1-c^2}w})=\phi(Q)$。对于每个满足 $Qu=0$ 的单位向量$u\in K$，投影 $\phi(P_u)=WP_uW^*$ 与 $WQW^*=\phi(Q)=\phi(P_{cv+\sqrt{1-c^2}w})$ 正交。由于 ϕ 是非扩张的，我们看到 P_u 与 $P_{cv+\sqrt{1-c^2}w}$ 正交。因此 u 与 v 正交。因为这对每个满足 $Qu=0$ 的 $u\in K$ 都成立，我们得出 $Q=P_v$，从而 $\phi(P_{cv+\sqrt{1-c^2}w})=\phi(P_v)$。

由于当 c 趋于零时，$P_{cv+\sqrt{1-c^2}w}$ 收敛到 P_w，且 $v\in K$和 $w\in K^\perp$ 是任意的单位向量，因此我们可以看出，ϕ 在 $\mathcal{P}(K^\perp)$的每一点都不连续。这与我们的假设矛盾，因此得到 $K=H$。由此我们证明了 ϕ 是一个维格纳对称。□

定理 1.5 的证明。在定理 1.5 的表述中，标准正交基$\{e_\alpha:\ \alpha\in\mathcal{J}\}$ 是预先固定的。在命题 3.3 中，标准正交基$\{e_\alpha:\ \alpha\in\mathcal{J}\}$ 是利用给定的标准正交基确定的。因此，为了证明定理 1.5 可由命题 3.3 推出，我们只需验证：如果$\{e_\alpha:\ \alpha\in\mathcal{J}\}$ 和 $\{e'_\alpha:\ \beta\in\mathcal{J}'\}$ 是 H 的两个标准正交基，并且 Φ 和 Φ'

是相应的非扩张映射，那么存在一个酉算子W： $H \to H$，使得 $W\Phi(P)W^* = \Phi'(WPW^*)$， $P \in \mathcal{P}(H)$。存在一个双射 τ： $\mathcal{J} \to \mathcal{J}'$。直接验证可知，由 $We_\alpha = e'_{\tau(\alpha)}$、 $\alpha \in \mathcal{J}$给出的酉算子W具有所需的性质。 □

定理 1.4 的证明。若 $\dim H = 2$，则推论 1.2 的第二项可得所需结论。以下假设 $\dim H \geq 3$。 ϕ 的满射性与推论 2.4 一起表明， ϕ 满足命题 3.3 的假设。

假设 ϕ 具有命题 3.3 陈述中第二种情形所示的形式。本证明的目标是说明 ϕ 不可能是满射。从现在起，我们采用命题 3.3 中相同的符号。将映射 ϕ 替换为 $P \mapsto V^*\phi(P)V$, $P \in \mathcal{P}(H)$ 后，不妨假设 $V = I$。固定三个指标 α_1、 α_2、 $\alpha_3 \in \mathcal{J}$。任取模为一的复数 c_1、 c_2、 $c_3 \in \mathbb{C}$，使得 $0 \in \mathbb{C}$ 包含于 $\{c_1, c_2, c_3\}$ 的凸包内部。例如，我们可以选取 1 的立方根。

我们可以找到 $\varepsilon > 0$，使得 $D(0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \varepsilon\}$ 包含在 $\{c_1, c_2, c_3\}$ 的凸包中。于是，存在 $\delta > 0$，使得对于满足 $|c'_j - c_j| < \delta$ 的所有复数 c'_1、 c'_2、 c'_3， $D(0, \varepsilon/2)$ 都包含在 $\{c'_1, c'_2, c'_3\}$ 的凸包中。

令 $P \in \mathcal{P}(H)$ 表示到 $\mathbb{C}(c_1e_{\alpha_1} + c_2e_{\alpha_2} + c_3e_{\alpha_3})$ 的投影。我们可以找到 $\eta > 0$，使得若 $P' \in \mathcal{P}(H)$ 满足 $\|P - P'\| < \eta$，则我们可以取 c'_1、 c'_2、 $c'_3 \in \mathbb{C}$ 和 $v \in \{e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3}\}^\perp$，使得 P' 是到$\mathbb{C}(c'_1e_{\alpha_1} + c'_2e_{\alpha_2} + c'_3e_{\alpha_3} + v)$ 的投影，并且

$$|c'_j - c_j| < \delta \quad \text{and} \quad \|v\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $P' \in \mathcal{P}(H)$ 是一个满足 $\|P - P'\| < \eta$ 的投影，并设 c'_1、 c'_2、 $c'_3 \in \mathbb{C}$ 和 $v \in \{e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3}\}^\perp$ 如上。再设 $\{a_\alpha : \ \alpha \in \mathcal{J} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\}$ 是任意一族满足 $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}\setminus\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}} a_\alpha^2 < 1$ 的非负实数。那么

$$\left| \left\langle v, \sum_{\alpha \in \mathcal{J}\setminus\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}} a_\alpha e_\alpha \right\rangle \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，我们可以找到 a_{α_1}、 a_{α_2}、 $a_{\alpha_3} > 0$，使得 $a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + a_{\alpha_3} = 1$，并且

$$a_{\alpha_1}c'_1 + a_{\alpha_2}c'_2 + a_{\alpha_3}c'_3 = -\left\langle v, \sum_{\alpha \in \mathcal{J}\setminus\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}} a_\alpha e_\alpha \right\rangle$$

保持。因此，投影 E 到 $\mathbb{C}\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} a_\alpha e_\alpha\right)$ 与P'正交。注意，以下结论成立：对于任意一族复数 $\{b_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$，若对所有 $\alpha \in \mathcal{J}$都有 $|b_\alpha| = a_\alpha$，则投影 F 到 $\mathbb{C}\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} b_\alpha f_\alpha\right)$满足 $\phi(F) = E$。根据假设， ϕ 是非扩张的，因此我们看到，这样的 F 与 $\phi^{-1}(P')$ 中的任意投影都正交。

$\{a_\alpha\colon\ \alpha\in\mathcal{J}\setminus\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\}$ 和 $\{b_\alpha\colon\ \alpha\in\mathcal{J}\}$ 的任意性确保，$\phi^{-1}(P')$ 中任意投影的一维像实际上都与 K正交。由此可得 $\phi^{-1}(\{P'\in\mathcal{P}(H):\ \|P-P'\|<\eta\})\subset\mathcal{P}(K^\perp)$。$\phi$ 的连续性意味着左侧在 $\mathcal{P}(H)$ 中是开集。然而，$\mathcal{P}(K^\perp)$ 在 $\mathcal{P}(H)$ 中的内部为空。因此，我们得到 $\phi^{-1}(\{P'\in\mathcal{P}(H):\ \|P-P'\|<\eta\})=\emptyset$。特别地，$\phi$ 不是满射。 □

定理 1.3 的证明。显然，ϕ 是双射。根据定理 1.4，ϕ 的逆映射是维格纳对称。因此，ϕ 是维格纳对称。 □

4 结果的最优性

满射假设是定理 1.3 中不可或缺的。

例 4.1. 假设 $\dim H=\infty$。那么存在一个非压缩映射 $\phi:\mathcal{P}(H)\to\mathcal{P}(H)$，使得不存在满足以下条件的线性或共轭线性等距映射 $U\colon\ H\to H$：对每个 $P\in\mathcal{P}(H)$，$\phi(P)=UPU^*$。

证明。注意，无限维希尔伯特空间 H 可以视为两个 H、$H\equiv H\oplus H$ 的正交直和。于是，$\mathcal{P}(H)$ 上的映射 ϕ 可视为从 $\mathcal{P}(H)$ 到 $\mathcal{P}(H\oplus H)$ 的映射。我们用 2×2 算子矩阵表示 $\mathcal{P}(H\oplus H)$ 中的算子。选取并固定 $\emptyset\neq\mathcal{A}\subsetneq\mathcal{P}(H)$。容易验证，映射 $\phi\colon\ \mathcal{P}(H)\to\mathcal{P}(H\oplus H)$ 定义为

$$\phi(P)=\begin{bmatrix}P&0\\0&0\end{bmatrix},\quad P\in\mathcal{P}(H)\setminus\mathcal{A},$$

and

$$\phi(P)=\begin{bmatrix}0&0\\0&P\end{bmatrix},\quad P\in\mathcal{A}$$

是非压缩的，但不存在满足对每个 $P\in\mathcal{P}(H)$ 都有 $\phi(P)=UPU^*$ 的线性或共轭线性等距映射 $U:H\to H\oplus H$。 □

下面给出一个单射非扩张映射的例子。

例 4.2. 设 H 是一个无限维可分希尔伯特空间。存在一个单射非扩张映射 $\phi:\mathcal{P}(H)\to\mathcal{P}(H)$，使得不存在满足对每个 $P\in\mathcal{P}(H)$ 都有 $\phi(P)=UPU^*$ 的线性或共轭线性等距映射 $U\colon\ H\to H$。

证明。我们将 $\mathcal{P}(H)$ 与希尔伯特空间 H 上的射影空间 $\mathbb{P}(H)=\{[x]\colon\ x\in H\setminus\{0\}\}$ 等同。这里，$[x]$ H 表示由 x 张成的一维子空间。当然，我们将秩一投影与其像等同。根据引理 2.2，我们需要找到一个单射映射 $\phi\colon\ \mathbb{P}(H)\to\mathbb{P}(H)$，使得对于任意单位向量 x、$y\in H$，以及任意单位向量 $u\in\phi([x])$ 和 $v\in\phi([y])$，都有

$$|\langle u,v\rangle|\geq|\langle x,y\rangle|,\tag{15}$$

但不存在满足 $\phi([x]) = [Ux]$ 的线性等距映射或共轭线性等距映射 $U\colon H \to H$，使得该等式对每个单位向量 $x \in H$ 都成立。

我们选取并固定一个序列 $(P_n) \in \mathcal{P}(H)$，使得集合$\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathcal{P}(H)$中稠密。令 $(x_n) \subset H$ 为一列单位向量，使得 P_n的像是 x_n、 $n = 1$、2、.....的线性张成空间。接下来，我们在 H中选取并固定一个正交归一集 $\{e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots\}$。对于任意单位向量 $x \in H$，令 $|\langle x, x_n\rangle| = t_n$、 $n = 1$、2、.....，并定义

$$\phi([x]) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{2^{n/2}} e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-t_n^2}}{2^{n/2}} f_n\right].$$

显然， ϕ 是良定义的。

令 x、 $y \in H$为任意单位向量。置 $|\langle x, x_n\rangle| = t_n$以及 $|\langle y, x_n\rangle| = s_n$、$n = 1$、2、.....。记

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{2^{n/2}} e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-t_n^2}}{2^{n/2}} f_n$$

and

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^{n/2}} e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-s_n^2}}{2^{n/2}} f_n.$$

直接计算可得， u 和 v 都是单位向量。显然，$[u] = \phi([x])$且 $[v] = \phi([y])$。我们需要证明（15）。有

$$|\langle u, v\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(t_n s_n + \sqrt{1-t_n^2}\,\sqrt{1-s_n^2})$$

因此，只需验证

$$|\langle x, y\rangle| \le t_n s_n + \sqrt{1-t_n^2}\,\sqrt{1-s_n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

设 $z \in H$ 为任意单位向量。记 $w_1 = x - \langle x, z\rangle z$ 和 $w_2 = y - \langle y, z\rangle z$。则

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle| &= |\langle x, z\rangle\overline{\langle y, z\rangle} + \langle w_1, w_2\rangle| \\ &\le |\langle x, z\rangle|\,|\langle y, z\rangle| + \|w_1\|\,\|w_2\| \\ &= |\langle x, z\rangle|\,|\langle y, z\rangle| + \sqrt{1-|\langle x, z\rangle|^2}\,\sqrt{1-|\langle y, z\rangle|^2}. \end{aligned}$$

代入 $z = x_n$ 后，我们得到所需的不等式 (16)。此外，若 $[x] \neq [y]$，则假设 $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathcal{P}(H)$ 中稠密，意味着对于某个 n， $\{x_n, x, y\}$ 线性无关。对于这样的 n 和 $z = x_n$，我们可知 $\{w_1, w_2\}$ 线性无关。因此，(16) 和 (15) 中的不等式均为严格不等式。由此可知，不存在满足以下条件的线性或共轭线性等距映射 U： $H \to H$：对每个单位向量 $x \in H$，均有 $\phi([x]) = [Ux]$。

还需证明 ϕ 是单射。这里我们更倾向于使用 $\mathcal{P}(H)$，而不是 $\mathbb{P}(H)$。因此，设 P 和 Q 是满足 $\phi(P) = \phi(Q)$ 的秩一投影。于是

$$\operatorname{tr}(PP_n) = \operatorname{tr}(QP_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

并且由于 $\{P_n\colon\ n = 1, 2, \ldots\}$ 在 $\mathcal{P}(H)$ 中稠密，我们有

$$\operatorname{tr}(PR) = \operatorname{tr}(QR)$$

对每个 $R \in \mathcal{P}(H)$ 都成立。等价地，对每个 $R \in \mathcal{P}(H)$，$\|P - R\| = \|Q - R\|$ 都成立，因此，$P = Q$，得证。 □

最后一个例子将说明，当命题 3.3 中出现第二种可能时，K 可能是真子空间 H。事实上，设 H 是一个无限维希尔伯特空间，并且 $\{f_\alpha\colon\ \alpha \in \mathcal{J}\}$ 是一个正交归一向量集，使得 ~~$K = \operatorname{span}\{f_\alpha\colon\ \alpha \in \mathcal{J}\}$~~ 是 H 的真子空间。再设 $\{e_\alpha\colon\ \alpha \in \mathcal{J}\}$ 是 H 的标准正交基，$U\colon K \to H$ 是由 $Uf_\alpha = e_\alpha$，$\alpha \in \mathcal{J}$ 定义的双射线性等距映射。对于每个到 $\mathbb{C}(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha e_\alpha)$ 上的投影 $P \in \mathcal{P}(H)$，$\Phi(P)$ 表示到 $\mathbb{C}(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} |c_\alpha| e_\alpha)$ 上的投影。固定一个指标 $\alpha_0 \in \mathcal{J}$，并且对于每个单位向量 $w = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} b_\alpha f_\alpha + v$，$v \in K^\perp$，令 $\phi(P_w)$ 为到 $\mathbb{C}\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}\setminus\{\alpha_0\}} |b_\alpha| e_\alpha + \sqrt{\|v\|^2 + |b_{\alpha_0}|^2}\, e_{\alpha_0}\right)$ 上的投影。记 $P_{f_\alpha} = Q_\alpha$ 和 $P_{e_\alpha} = P_\alpha$，$\alpha \in \mathcal{J}$。显然，$\phi(Q_\alpha) = P_\alpha$，$\alpha \in \mathcal{J}$，且 $\phi(P) = \Phi(UPU^*)$，$P \in \mathcal{P}(K)$。接下来只需证明 ϕ 是一个非扩张映射，也就是说，我们必须验证

$$\operatorname{tr}(\phi(P_w)\phi(P_z)) \geq \operatorname{tr}(P_w P_z)$$

对于每一对单位向量 w、$z \in H$。设

$$w = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} b_\alpha f_\alpha + v \quad \text{and} \quad z = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha f_\alpha + u,$$

$v, u \in K^\perp$，设为这样的向量。将柯西-施瓦茨不等式应用于二维欧几里得空间，我们得到

$$|b_{\alpha_0}|\,|c_{\alpha_0}| + \|v\|\,\|u\| \leq \sqrt{\|v\|^2 + |b_{\alpha_0}|^2}\ \sqrt{\|u\|^2 + |c_{\alpha_0}|^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\sqrt{\operatorname{tr}(P_w P_z)} = |\langle w, z\rangle| &= \left|\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} b_\alpha \overline{c_\alpha} + \langle v, u\rangle\right| \leq \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} |b_\alpha|\,|c_\alpha| + |\langle v, u\rangle| \\
&\leq |b_{\alpha_0}|\,|c_{\alpha_0}| + \|v\|\,\|u\| + \sum_{\alpha\in\mathcal{J}\setminus\{\alpha_0\}} |b_\alpha|\,|c_\alpha| \\
&\leq \sqrt{\|v\|^2 + |b_{\alpha_0}|^2}\ \sqrt{\|u\|^2 + |c_{\alpha_0}|^2} \ + \sum_{\alpha\in\mathcal{J}\setminus\{\alpha_0\}} |b_\alpha|\,|c_\alpha| \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\phi(P_w)\phi(P_z))}.
\end{aligned}$$

参考文献

[1] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov，《度量几何教程》，数学研究生教程第 33 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001 年。[2] A. Fo˘sner、B. Kuzma、T. Kuzma 和 N.-S. Sze，《保持矩阵对零 Jordan 乘积的矩阵对映射》，《线性与多重线性代数》59 (2011)，507-529。[3] G.P. Geh´er，《维格纳定理非双射版本的一个初等证明》，《物理快报 A》378 (2014)，2054-2057。[4] G.P. Geh´er 和 M. Mori，《保持固定量子夹角的全体量子纯态空间映射的结构》，《国际数学研究通报》IMRN (2022)，12003-12029。[5] G.P. Geh´er 和 P. ˘Semrl，《Grassmann 空间的等距映射，II》，《数学进展》332 (2018)，287-310。[6] L. Moln´ar，《维格纳酉-反酉定理在不定内积空间中的推广》，《数学物理通讯》210 (2000)，785-791。[7]M. Pankov，《希尔伯特 Grassmann 流形上的维格纳型定理》，伦敦数学会讲义丛书第 460 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020 年。[8] M. Pankov 和 T. Vetterlein，《维格纳型定理的几何方法》，《伦敦数学会会报》53 (2021)，1653-1662。[9] P. ˘Semrl，《维格纳对称性与 Gleason 定理》，《物理学杂志 A》54 (2021)，315301，共 6 页。[10] U. Uhlhorn，《量子力学中对称变换的表示》，《Ark. Fysik》23 (1963)，307-340。[11]E.P. Wigner，《群论及其在原子光谱量子力学中的应用》，Frederik Vieweg und Sohn，1931 年。