可解子群定理、长度函数与拓扑熵

Shengkui Ye

2023年5月10日

arXiv:2305.05131v1 [math.DS] 9 May 2023

摘要

我们利用长度函数证明了一个一般性的可解子群定理。作为应用，我们得到了动力系统中的一个可解子群定理：任何作用于光滑流形、且拓扑熵一致为正的有限 Hirsch 长度可解群都必然虚拟地是 $\mathbb{Z}^n$.

0.1 引言

可解子群定理在数学的许多领域中均已得到确立，例如，Gromoll-Wolf、Lawson-Yau 针对光滑流形，Bridson-Haefliger [3] 针对 CAT(0)空间，Gersten-Short [7] 针对双自动群，Conner [5] 针对由左不变度量导出的稳定范数，Prytu la [15] 针对长度谱复形，等等。基本而言，这些定理指出，在良好空间上良好作用的可解群具有特殊性质（例如，虚阿贝尔或虚拟阿贝尔-阿贝尔群）。在动力系统理论中，Hu-Shi-Wang[10] 证明了作用于光滑黎曼流形上的海森堡群具有约束性，即中心元素的李雅普诺夫指数和拓扑熵必须为零。在本文中，我们在动力系统理论中得到了一个一般的可解子群定理。回顾一下，如果某个有限指数子群具有性质 P.，则称一个群虚拟地具有性质 P。

定理0.1 设 G 是由闭黎曼流形 M 上的 C^∞-微分同胚组成的群，并且每个非恒等元都具有正的拓扑熵（分别地，正的最小李雅普诺夫指数）。那么，每个具有有限虚上同调维数（例如，具有有限Hirsch长度）的可解子群 $H < G$ 都是虚阿贝尔-阿贝尔群。此外，若拓扑熵（分别地，李雅普诺夫指数）具有统一的正下界，则 H 是虚有限生成阿贝尔群 $\mathbb{Z}^n$.。

证明基于作者在 [18] 中定义的长度函数的研究。设 G 为一个群。称实值函数 $l: G \to [0, \infty)$ 为长度函数，如果

(1) $l(g^n) = |n| l(g)$ 对任意 $g \in G$ 和 $n \in \mathbb{Z}$ 均成立；(2) $l(hgh^{-1}) = l(g)$ 对任意 h、$g \in G$ 均成立；以及 (3) $l(ab) \leq l(a) + l(b)$ 对于交换元素 a、b. 均成立

长度函数存在于数学的许多分支中，例如稳定词长、稳定范数、光滑测度论熵、CAT(0)空间和 Gromov δ-双曲空间上的平移长度、拟余循环的稳定范数、圆周同胚的旋转数、双有理映射的动力次数、Margulis 不变量的绝对值

（参见 [18], 第 2 节）以及填充体积（参见 [2]）。若长度函数 l 满足：对于每个无挠元 $g.$，$l(g) > 0$，则称其为纯正的。若存在常数 $c > 0$, 使得对于任意非零的 l（g），都有 $l(g) > c$，则称长度函数 l 为离散的。若群G 上存在具有相应性质的长度函数 l，则称群G 为纯正的或离散的。

定理 0.2 设 G 是一个带有纯正长度函数的有限生成可解群。假设 G 几乎无挠，并且任意阿贝尔子群 A 的 $\dim_{\mathbb{Q}}(A \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) < +\infty$有限。那么 G 在有限扩张意义下要么是阿贝尔群, 要么是某个整数 n 以及某个有限生成 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]$-模 H.所对应的非幂零 $\mathbb{C}$-线性子群 $H \rtimes \mathbb{Z}^n$

定理 0.3 离散纯正群中每个虚上同调维数有限的可解子群，都是 $\mathbb{Z}^n$.的有限扩张

以下问题由 Hu-Shi-Wang [10] 提出（问题 1.3）。

问题 0.4 设 $H = \langle f, g, h \mid fh = hf, gh = hg, [f, g] = h \rangle$ 为海森堡群，作用于一个紧致的 C^∞-黎曼流形 M，并保持一个博雷尔概率测度μ. 。范数 $\|Dh_x^n\|$ 是否被某个 $\varepsilon > 0$ 所界定，或者甚至被关于 n 的一个多项式所界定，其中μ-几乎处处的 $x \in M$?

对于指数函数的情形，我们对这个问题给出了肯定的回答。

定理 0.5 存在常数 $K, C > 0$ 使得

$$\log \|Dh_x^n\| \leq K\sqrt{n} + C$$

对于任意 $x \in M.$

1 半直积

设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 是一个矩阵，且 $G = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ 是半直积。

引理 1.1 任意长度函数 $l : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 都可以扩展为连续长度函数 $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，并满足以下性质:

1)（次可加） $l(r_1 + r_2) \leq l(r_1) + l(r_2)$, 对任意 $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^n$.2)（齐次） $l(ar) = |a|l(r)$, 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 和 $r \in \mathbb{R}^n$.3)（共轭不变） $l(r) = l(Ar)$, 对任意 $r \in \mathbb{R}^n.$

证明。对于任意的 $q = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{Q}^n$，令 d为 $x_i.$分母的最小公倍数。定义 $l(q) = \frac{1}{d} l(dq)$。对于任意整数 $k > 0$, 我们有 $l(kq) = \frac{1}{|k|d} l(dkq)$ 和 $l(q) = \frac{1}{k} l(kq)$。因此，对于任意有理数 r 和任意元素$q \in \mathbb{Q}^n.$，有 $l(rq) = |r|l(q)$。假设 $\{q_i\} \subset \mathbb{Q}^n$ 是一个柯西序列。对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $k, m > N$时，我们有

$$\| q_k - q_m \| < \varepsilon.$$

假设第 i 个分量 $(q_k)_i = \frac{r_{ki}}{s_{ki}}$ 对于互素整数 r_{ki}, s_{ki}. 记 $\{e_1, ..., e_n\}$ 为 $\mathbb{Z}^n$. 的标准基。然后

$$\begin{aligned}
|l(q_k) - l(q_m)| &= |\frac{1}{\mathrm{lcm}(s_{k1}, s_{k2}, ..., s_{kn})} l(\mathrm{lcm}(s_{k1}, s_{k2}, ..., s_{kn})(\frac{r_{k1}}{s_{k1}}, \frac{r_{k2}}{s_{k2}}, ..., \frac{r_{kn}}{s_{kn}})) - l(q_m)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} l((\frac{r_{ki}}{s_{ki}} - \frac{r_{mi}}{s_{mi}})e_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |\frac{r_{ki}}{s_{ki}} - \frac{r_{mi}}{s_{mi}}| l(e_i) \\
&< n\varepsilon Max\{l(e_1), ..., l(e_n)\}.
\end{aligned}$$

这证明了 $\{l(q_i)\}$ 是一个柯西序列。对于任意 $r \in \mathbb{R}^n$，取一个有理数列 $q_i \to r$ $l\ r\ =\ l\ q_i\ .$ $r_1\ r_2 \in \mathbb{R}^n$ $q_{1i} = \frac{r_{1i}}{s_{1i}} \to$ 并定义 ( ) lim ( )。对 r_1 $r_{1i}\ r_{2i} \in \mathbb{Z}^n\ s_{1i}\ s_{2i} \in \mathbb{Z}$ 于任意 , , 取有理数列 , $q_{2i} = \frac{r_{2i}}{s_{2i}} \to r_2$ (这里 , , ,)。我们有

$$\begin{aligned}
l(q_{1i} + q_{2i}) &= l(\frac{r_{1i}}{s_{1i}} + \frac{r_{2i}}{s_{2i}}) \\
&= l(\frac{r_{1i}s_{2i} + r_{2i}s_{1i}}{s_{1i}s_{2i}}) = \frac{1}{s_{1i}s_{2i}} l(r_{1i}s_{2i} + r_{2i}s_{1i}) \\
&\leq \frac{1}{s_{1i}s_{2i}} (l(r_{1i}s_{2i}) + l(r_{2i}s_{1i})) \\
&= l(\frac{r_{1i}}{s_{1i}}) + l(\frac{r_{2i}}{s_{2i}}) = l(q_{1i}) + l(q_{2i}).
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
l(r_1 + r_2) &= \lim l(q_{1i} + q_{2i}) \\
&\leq \lim l(q_{1i}) + \lim l(q_{2i}) = l(r_1) + l(r_2).
\end{aligned}$$

这证明了 l 在 $\mathbb{R}^n$. 上的次可加性。根据定义，我们显然有 2)。由于 A 对 $\mathbb{Z}^n$ 的作用是线性的，该作用显然可延拓至 $\mathbb{R}^n$，从而得到 3)。 ■

类似的证明可得以下结论。

引理 1.2 任意长度函数 $l: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}_{>0}$ 都可以唯一延拓为连续长度函数 $l': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0}$.

证明。存在性的证明与引理 1.1 的证明相同。换言之，对于任意 $q = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{Q}^n$，令 d 为 x_i. 的分母的最小公倍数。定义 $l(q) = \frac{1}{d} l(dq)$。对于任意 $r \in \mathbb{R}^n$，取一个有理数列 $q_i \to r$ 并定义 $l(r) = \lim l(q_i)$。l' 的唯一性源于这样一个事实：定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数仅由其在 $\mathbb{Q}^n$ 上的像决定。 ■

引理 1.3 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 是一个（$\mathbb{C}$-）可对角化矩阵，且没有范数为 1 的特征值。那么，l 在 $\mathbb{Z}^n$. 上的任意 $G = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ 长度函数都为零。

证明。考虑实若尔当标准形

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix}$$

其中 A 的 A_i 要么是实若尔当块，要么是

$$a\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix},$$

其中 $a \neq 1$ 是一个正实数。选择来自对应的 A_i-不变子空间、与之对应的基 $\{v_1, .., v_n\}$，用于 $\mathbb{R}^n.$。如果对 $|\lambda_i| \neq 1$ 有 $Av_i = \lambda_i v_i$，那么 $l(v_i) = \lambda_i l(v_i)$ 意味着 $l(v_i) = 0.$。否则，

$$l(v_i) = l(A^k v_i) = a^k l((\frac{1}{a}A_i)^k v_i)$$

对于任意整数 $k.$。由于 $\frac{1}{a}A_i$ 是一个旋转矩阵，且 l（由引理 1.1 可知是连续函数）在紧集上有界，因此当 $a \neq 1.$ 时，我们得到 $l(v_i) = 0$。这表明长度函数 l 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个基上为零，因此根据引理 1.1，它在整个 $\mathbb{R}^n$ 上都为零。∎

引理 1.4 设 $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个长度函数。如果限制 $l|_{\mathbb{Z}^n}$ 离散且处处为正，那么 l 处处为正。

证明。根据 Tao 等人 [6], ，存在一个巴拿赫空间 $(B, \|\|)$ 和一个可加群同态 $f : \mathbb{R}^n \to B$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^n.$，都有 $l(x) = \| f(x) \|$。如果对某个 $x \neq 0$ 有 $l(x) = 0$，则核 $\ker f$ 非平凡，且 $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^m, m < n.$。由于 $l|_{\mathbb{Z}^n}$ 离散且处处为正，群 $\mathbb{Z}^n$ 在 $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^m.$ 上自由且适当不连续地作用。这意味着 $m = n$，矛盾。因此，l 处处为正。∎

注 1.5 若不要求 $l|_{\mathbb{Z}^n}$ 是离散的，引理 1.4 就不成立。例如，令 $v_1 = (1, \sqrt{2})$ $v_2 = (-\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^2.$ 对于分解 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}v_1 \bigoplus \mathbb{R}v_2$，令 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为到第一个分量的投影。由 $l(x) = |f(x)|$ 定义的长度函数 l 在 $\mathbb{Z}^2$ 上是纯正的，因为直线 $\mathbb{R}v_1$ 的斜率是无理数。

引理 1.6 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$。若群 $G = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ 存在离散纯正长度函数函数 l，则 G 是虚阿贝尔的。

证明。由引理 1.1，我们有一个延拓 $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.的长度函数 $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。假设 $l|_{\mathbb{Z}^n}$ 是离散纯正的。引理 1.4 表明 $l|_{\mathbb{R}^n}$ 是纯正的。考虑实若尔当标准形

$$\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r\end{bmatrix}$$

A 的，其中 A_i 要么是实若尔当块，要么是

$$a\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix},$$

对于某个实数 $a > 0.$ 若 $Av = \lambda v$ 对于一个单位特征向量 v 和一个特征值 λ 满足 $|\lambda| \neq 1$，则 $l(v) = l(Av) = \lambda l(v)$，这意味着 $l(v) = 0.$。因此，所有特征值都具有

范数为 1。假设存在一个非平凡的若尔当块

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \\ & 1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{k\times k}$$

其中 $k \geq 2.$ 令 $\{e_1, ..., e_k\}$ 为特征子空间 $\mathbb{R}^k$ 的一组基，在此基下， A 的限制的表示矩阵具有如下形式： $J.$ 对于任意正整数 m，我们有

$$J^m e_2 = me_1 + e_2$$

and

$$ml(e_1) \leq l(J^m e_2) + l(e_2) = 2l(e_2).$$

由于 m 是任意的，我们得到 $l(e_1) = 0.$ 因此，所有实若尔当块都是 A ，且为对角矩阵。假设 $a \neq 1.$ 。对于 A_i 所对应的子空间中的任意 v_i ，我们有

$$l(v_i) = l(A^k v_i) = a^k l((\frac{1}{a}A_i)^k v_i)$$

对于任意整数 $k.$ ，由于 $\frac{1}{a}A_i$ 是旋转矩阵，且 l 在紧集上有界，因此我们得到 $l(v_i) = 0.$ 。因此， $a = 1$ ，并且 A 与旋转矩阵及 $1s$ 的块和共轭。由于 A 是整数矩阵，所有旋转矩阵的阶数均为有限阶。这证明了 A 是有限阶的，且 G 是虚阿贝尔的。 ■

另一方面，Conner [5] （例7.1）给出了一个具有纯正词长的例子 $\mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

是一个具有范数为 1 的特征值的不可约矩阵。回顾一下，如果一个整数矩阵$A_{n\times n}$ 在 $\mathbb{Z}^n.$ 中没有真非平凡不变子群，则称其为不可约矩阵。运用 Conner [5], 所采用的相同思路，我们可以证明以下结果。

引理1.7 设 $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ 是一个具有范数为 1 的特征值的不可约矩阵。则半直积 $\mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ 上的稳定词长是纯正的。

证明。设 $\mathbb{C}^n > \mathbb{Z}^n$ 是一个赋范向量空间，定义为

$$\|a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n\| = a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 + \cdots + a_n\bar{a}_n,$$

其中每个 $a_i \in \mathbb{C}$ 和 $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ 都是标准基。对于每个

$$g = (z, t^i) \in \mathbb{C}^n \rtimes_A \mathbb{Z},$$

其中 t 是 $\mathbb{Z}$的一个生成元，令

$$L(g) = \inf\{\sum_{j=1}^{k}(\|z_j\| + |i_j|) : g = (z_1, t^0)(0, t^{i_1})(z_2, t^0)(0, t^{i_2}) \cdots (z_k, t^0)(0, t^{i_k})\}$$

for some $z_1, z_2, ..., z_k \in \mathbb{C}^n$ 以及整数 $i_1, i_2, ..., i_k\}$. 根据定义，我们有

$$L(gh) \leq L(g) + L(h)$$

并且对于任意 $g, h \in \mathbb{C}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$，有 $L(g) = L(g^{-1})$。定义 $l(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{L(g^n)}{n}$。注意，当 $g \in \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$. 时，$l(g)$ 就是稳定词长。由于 A 不可约，A 在 $\mathbb{C}$. 上可对角化。设 v 为单位特征向量，使得 $Av = v$.。由于 A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化，补空间 $(\mathbb{C}v)^\perp$ 也是 A-不变的。我们有包含关系 $\mathbb{C}v \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$。对于每个 $g = (z, t^i) \in \mathbb{C}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$，将 $z = z_v + z'_v$ 写成 $z_v \in \mathbb{C}v$ 和 $z'_v \in (\mathbb{C}v)^\perp$.。对于任意 $z \in \mathbb{C}v$，若 $(z, 1) = (z_1, t^{i_1})(z_2, t^{i_2}) \cdots (z_k, t^{i_k})$，则有

$$\begin{aligned} z &= (z, 1) = (z_1, t^{i_1})(z_2, t^{i_2}) \cdots (z_k, t^{i_k}) \\ &= (z_{1v}, t^{i_1})(z_{2v}, t^{i_2}) \cdots (z_{kv}, t^{i_k}) = z_{1v} + z_{2v} + \cdots + z_{kv} \end{aligned}$$

与每个 $z_i = z_{iv} + z'_{iv}$. 的分解一起。这意味着 $L(z) = \|z\|$.

Let

$$I = \{g \in \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z} : l(g) = 0\}.$$

对于任意 $g = (z, t^i)$，我们有 $L(g) \geq |i|$. 这意味着 $I < \mathbb{Z}^n$. 由于 l 在共轭下不变且是齐次的，因此 I 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个 A-不变直和项。由于 A 是不可约的，我们有 $I = \mathbb{Z}^n$ 或 $I = 0$.。但如果 $I = \mathbb{Z}^n$，我们将得到 l 在 $\mathbb{C}^n$ 上恒为零，这可通过注意到 $\{x \in \mathbb{C}^n \rtimes_A \mathbb{Z} : l(g) = 0\}$ 是 $\mathbb{C}^n$. 的一个 $\mathbb{C}$-向量子空间来得出。这意味着 $I = 0$ 且 l 是纯正的。

■

结合引理 1.3 和引理1.7，我们得到如下结论。

推论 1.8 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 是一个不可约矩阵。当且仅当 A. 存在一个模为 1 的特征值时，半直积 $\mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ 是纯正的。

2 定理的证明

引理 2.1（*[18],* 推论 4.7）纯正的有限生成幂零群是虚阿贝尔群。

注记 2.2 不满足有限生成条件时，引理 2.1 并不成立。对于每个整数 $n \geq 2$，令 H_n 为由所有元素属于 $\mathbb{Z}/n$. 的严格上三角矩阵组成的群 3×3。令 $G = (\bigoplus_{n\geq 2} H_n) \times \mathbb{Z}$。群 G 是幂零群，其具有由投影 $G \to \mathbb{Z}$导出的纯正长度函数。然而，G 并非虚阿贝尔群。

引理 2.3 设 G 为一个配备纯正长度函数 l. 的可解群。令 A 为 G 的极大阿贝尔正规子群。假设 A 是无挠的。那么 $C_G(A) = A$，其中 $C_G(A)$ 是 A 在 G. 中的中心化子。

证明。注意，$C_G(A)$ 是 G 的正规子群。实际上，对于任意 $x \in C_G(A)$ $t \in G, a \in A$，我们有 $txt^{-1}a = txt^{-1}t(t^{-1}at)t^{-1} = tx(t^{-1}at)t^{-1} = t(t^{-1}at)xt^{-1} = atxt^{-1}$.假设 $C_G(A) \neq A$. 令 B/A 为可解群 $C_G(A)/A$ 的极大阿贝尔特征子群。注意，B/A 非平凡，因为它可以包含 $C_G(A)/A$. 的导出列中的最后一个非平凡项。由于 $C_G(A)/A$ 是 G/A 的正规子群，群 B/A 是 G/A. 的正规子群。令 $B < G$ 为与 B/A. 对应的正规子群。由于换位子子群 $1 \neq [B, B] < A$，存在元素 $b_1, b_2 \in B$ 使得

换位子 $1 \neq [b_1, b_2] \in A$. 但是子群 $\langle b_1, b_2 \rangle < B$ 是一个海森堡群。引理 2.1 表明， $\langle b_1, b_2 \rangle$ 的任何长度函数在中心 $[b_1, b_2]$上都为零，这是矛盾的。

■

定理 2.4 设 G 是一个具有纯正长度函数 $l.$ 的可解群。假设 G 具有有限虚上同调维数。存在一个有限指数子群 $K < G$ ，使得

1） K 要么是阿贝尔群，要么 2）存在阿贝尔群 A、 B ，使其构成正合列

$$1 \to A \to K \to B \to 1$$

满足 B 对 $A \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的作用是有效的，并且 B 的每个非单位元在 $\mathrm{Aut}(A \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中都是非幺幂的。特别地， G 要么是虚阿贝尔，要么是虚非幂零的阿贝尔群扩张阿贝尔群。

证明。设 $H < G$ 是一个具有有限上同调维数的有限指数子群。设 A 是 $H.$ 的极大阿贝尔正规子群。由于 H 是无挠的， A 是无挠的。商群 H/A 通过共轭作用于 A 。由引理 2.3，该作用是有效的。注意到，对于某个整数 $n.$， A 嵌入 $A \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^n$ 。群 H/A 同构于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的一个子群，这是通过考察其在 $A.$ 上的共轭作用得到的。因此， H/A 具有一个有限指数子群 K/A （其中 $K < G$），该子群共轭于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中上三角矩阵的一个子群。对于每个幺幂元 $g \in K/A$（例如 $g \in [K/A, K/A]$, 即导群），子群 $\langle A, g \rangle$ 同构于幂零群 $A \rtimes_g \mathbb{Z}.$。对于任意有限子集 $S \subset A$，由 S、 g 生成的子群 $\langle S, g \rangle$ 仍然是幂零的。引理 2.1 蕴含 $\langle S, g \rangle$ 是虚阿贝尔的。因此， $g = 1.$。这证明了 K/A （同构于 $(\mathbb{C}^*)^n$ 的一个子群）是阿贝尔的。如果 K/A 是有限的，则 H 是虚阿贝尔的。如果 K/A 是无限的，则 H 是虚拟阿贝尔-阿贝尔群。在后一种情况下，取 $B = K/A$ 即可完成证明。

■

定理 0.2 的证明。设 K 是 $G.$ 的一个有限指数无挠子群。令 A 为 $K.$ 的极大正规阿贝尔群。由于 K/A 在 A 上有效作用，我们知道 K/A 同构于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的一个子群。 K/A 有一个有限指数子群 K_1/A ，它可上三角化。任何幺幂元素 $\gamma \in K_1/A$ （例如 $\gamma \in [K_1/A, K_1/A]$ 导群中的元素）都会给出一个幂零子群 $\langle A, \gamma \rangle = A \rtimes_\gamma \mathbb{Z}$; 这是不可能的，因为任何长度函数在幂零群的中心上都为零（见 [18], 引理 5.2）。因此， K_1/A 是阿贝尔群，且有限指数子群 $K_1 < G$ 是亚交换群。一个经典定理（参见 [14], 11.3.3，第 252 页）表明，对于某个有限生成的 $\mathbb{Z}[(K_1)_{\mathrm{ab}}]$-模 H， K_1 可嵌入 $H \rtimes (K_1)_{\mathrm{ab}}$ ；该模定义在 $K_1.$ 的阿贝尔化的整群环上。由于 K_1 是有限生成的，阿贝尔化 $(K_1)_{\mathrm{ab}}$ 含有一个有限指数子群 $\mathbb{Z}^n$ 。注意， H 也是有限生成的 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]$-模。群 K_1 是一个有限生成无挠亚交换群。因此，根据 Levi˘c [13] 和 Remeslennikov [16]，它是 $\mathbb{C}$-线性的。

■

定理 2.5 设 G 是一个带有纯正长度函数的可解群。假设 G 几乎无挠，且任意阿贝尔子群 A 均为有限生成。那么 G几乎同构于以下形式的 $\mathbb{Z}^n$ 或非幂零群 B：

$$1 \to \mathbb{Z}^m \to B \to \mathbb{Z}^k \to 1$$

其中 整数 $n, m, k.$ 这里 $\mathbb{Z}^k$ 通过非幺幂矩阵有效地作用于 $\mathbb{Z}^m$ 。

定理 2.5 的证明。我们使用定理 0.2 的证明中的记号。根据假设， $A = \mathbb{Z}^m$ 对于某个 n. 由于群 $K_1/A < \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 是可解的，因此它是多循环群。特别地， K_1/A是有限生成阿贝尔群，并且存在一个有限指数子群 $\mathbb{Z}^k$ ，其中某个 k. 令 $B < K_1$ 为 $\mathbb{Z}^k < K_1/A$ 的原像，从而完成证明。如果 B 是虚阿贝尔群，则属于第一种情况。如果 B 不是虚阿贝尔群，则根据引理 2.1，它不可能是幂零群。这意味着 $\mathbb{Z}^k$ 中的每个非恒等元都通过一个非幺幂可逆矩阵作用。

■

定理 0.3 的证明。设 G是这样一个离散的纯正可解群，且其虚上同调维数有限。由于 G 的虚上同调维数有限，我们假设 G 本身是无挠的。设 A 是一个极大正规阿贝尔子群。由于 G 具有离散长度函数， A 不可整除。由于 A 的上同调维数有限，我们知道 A 同构于 $\mathbb{Z}^n$. 。根据引理 2.3，商群 G/A在 A. 上有效作用。这意味着 G/A 同构于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 的一个子群。引理 1.6 表明 G/A是一个挠群。然而， $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 的每个可解子群都是多循环的（参见 [17], 第 26 页，推论 1）。因此， G/A是一个多循环挠群，因而是有限群。

■

定理0.1的证明。令 $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ 表示 M. 的微分同胚群。对于任意 $f, g \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ 和整数 n，众所周知，拓扑熵满足$h_{\mathrm{top}}(f^n) = |n|h_{\mathrm{top}}(f)$，以及 $h_{\mathrm{top}}(f) = h_{\mathrm{top}}(gfg^{-1})$（参见 [11],Cor. 3.14 和 Prop. 3.1.7，第111页）。Hu [9]（定理 C）证明了，当 $fg = gf$. 时， $h_{\mathrm{top}}(fg) \leq h_{\mathrm{top}}(f) + h_{\mathrm{top}}(g)$。这表明拓扑熵 h_{top} 是群 $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ 上的长度函数。根据定理 2.4，群 H 虚拟地是阿贝尔群或亚阿贝尔群。在任何情况下， H 都是虚拟阿贝尔 - 阿贝尔群。如果拓扑熵存在一个统一的下界，则该长度函数是离散的。定理 0.3 蕴含 H 是一个虚拟有限生成阿贝尔群 $\mathbb{Z}^n$.。

对于李雅普诺夫指数，注意到对于任意 $x \in M, u \in T_xM, f \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$，李雅普诺夫指数

$$\chi(x, u, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \|D_x f^n u\|}{n} \leq \sup_{x\in M} \lim_{n\to\infty} \frac{\log \|D_x f^n\|}{n}.$$

实际上，

$$l(f) := \max\{\sup_{x\in M} \lim_{n\to\infty} \frac{\log \|D_x f^n\|}{n}, \sup_{x\in M} \lim_{n\to-\infty} \frac{\log \|D_x f^n\|}{n}\}$$

是 $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ 上的长度函数（见 [18], 引理 2.5）。类似的论证即可完成证明。

■

定理 2.6 设 G 是一个具有纯正长度函数的可解群。假设 G 的虚上同调维数为 $vcd(G) \leq 3$ ，且任意阿贝尔子群 A 均为有限生成群。那么，对于某个整数 $n \leq 3.$， G 是 $\mathbb{Z}^n$ 的有限扩张。

定理 2.6 的证明。由定理 2.5，群 G 在有限指数意义下或者是 $\mathbb{Z}^n$ ，或者是形如以下形式的非幂零群 B

$$1 \to \mathbb{Z}^m \to B \to \mathbb{Z}^k \to 1$$

对于某些非负整数 $n, m, k.$，只需排除第二种情况。由于 B的上同调维数至多为 3，我们可知 $m+k \leq 3.$当 $m = 1$或 $m = 3$时，

群 B 是虚阿贝尔的，因为 $\mathbb{Z}^k$ 在 $\mathbb{Z}^m$上有效作用。当 $m = 2$时，群$B = \mathbb{Z}^2 \rtimes_\phi \mathbb{Z}$是某个 $\phi \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 的半直积。考虑 ϕ. 的若尔当标准形。若 ϕ 的所有特征值 λ_1, λ_2 的范数都不等于 1，根据引理 1.3，任意长度函数在 $\mathbb{Z}^2$ 上都为零。否则， $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$ 或 $\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ 是范数为 1 的共轭复数。若 ϕ 可 $\mathbb{C}$对角化，则 ϕ 是有限阶的，此时 B是虚阿贝尔的。否则， ϕ 在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中共轭于

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

在这种情况下，矩阵 ϕ有重特征值 1 或 -1. 。我们可以选择一组基$\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{Q}^2$ ，使得 ϕ 关于基 $\{v_1, v_2\}$ 的表示矩阵 $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ 具有如下形式

$$J = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ or } L = \begin{bmatrix} -1 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其中 x、 $y \in \mathbb{Q}$. 非零。注意，根据引理 1.1， $\mathbb{Z}^2 \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ 上的纯正长度函数可以扩展为 $\mathbb{Q}^2$ 上的纯正长度函数。对于任意正偶整数 m，我们有

$$\begin{aligned} J^m v_2 &= mxv_1 + v_2, \text{ or} \\ L^m v_2 &= -myv_1 + v_2 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} m|x|l(v_1) &\leq l(J^m v_2) + l(v_2) = 2l(v_2), \text{ or} \\ m|y|l(v_1) &\leq l(J^m v_2) + l(v_2) = 2l(v_2). \end{aligned}$$

由于 m 是任意的，我们得到 $l(v_1) = 0$. 这与 l 是纯正的这一事实矛盾。证明完毕。

■

注 2.7 Conner 针对由群上的半范数导出的长度函数，得到了定理 2.4 和定理 2.4 的若干版本。然而，许多长度函数并非由半范数导出（见 *[18],* 第 2 节，或本文最后一节）。

3 稳定范数

遵循 [5, 4], 实值函数 $L : G \to [0, \infty)$，定义在群 G 上，若满足 $L(gh) \leq L(g) + L(h)$ $L(g) = L(g^{-1})$，对任意 $g, h \in G.$，则称其为（半）范数。众所周知，稳定范数

$$\mathrm{sL}(g) := \lim_{n \to \infty} \frac{L(g^n)}{n}$$

是一个长度函数（参见 [18]）。本节研究海森堡群上的稳定范数

$$\begin{aligned} H &= \langle a, b, c \mid ac = ca, bc = cb, [a, b] = c \rangle \\ &= \{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

取 $S=\{a,b,a^{-1},b^{-1}\}$ 为生成集，并令 $|g|_S$ 为由 S 定义的词长

$$g=\begin{bmatrix}1 & x & z\\ & 1 & y\\ & & 1\end{bmatrix}\in H.$$

称 $d(x,y,z)=|g|_S$为词长。Blachere [1] 证明了，对于任意 $x,y,z\in\mathbb{Z}$， $d(x,y,z)=d(-x,y,-z)=d(x,-y,-z)=d(-x,-y,z)=d(y,x,z)$。以下内容摘自 [1]的定理 2.2。

引理 3.1 假设 $z\geq 0, x\geq 0, x\geq y\geq -x.$ 当 $y\geq 0, x\leq\sqrt{z}$ 时，我们有$d(x,y,z)=2\lceil 2\sqrt{z}\rceil-x-y.$ 当 $y\geq 0, x\geq\sqrt{z}$且 $xy>z$ 时，我们有 $d(x,y,z)=x+y.$

引理 3.2 设 $L:H\to[0,\infty)$ 是海森堡群 $H.$ 上的一个半范数。存在常数 $K,C\geq 0$，使得

$$L(c^n)\leq K\sqrt{n}+C$$

对任意整数 $n\geq 0.$

证明。令 $|x|_S$ 为 $x\in H$ 关于生成集 $S=\{f,g,f^{-1},g^{-1}\}.$的词长。假设 $x=s_1s_2\cdots s_{|x|_S}$且每个 $s_i\in S.$。显然，

$$\begin{aligned}L(x) &\leq L(s_1)+L(s_2)+\cdots+L(s_{|x|_S})\\ &\leq |x|_S\max\{L(s):s\in S\}.\end{aligned}$$

取一个整数 k，使得 $k^2\leq n<(k+1)^2.$。我们有

$$\begin{aligned}L(c^n) &\leq |c^n|_S\max\{L(s):s\in S\}\\ &= 2\lceil 2\sqrt{n}\rceil\max\{L(s):s\in S\}\\ &\leq K\sqrt{n}+C\end{aligned}$$

对于 $K=4\max\{L(s):s\in S\}, C=2\max\{L(s):s\in S\}+2.$。注意，根据引理 3.1，词长$|c^n|_S=2\lceil 2\sqrt{n}\rceil$是 $2\sqrt{n}$上界整数的两倍。 ■

定理 0.5 的证明。对于任意光滑微分同胚 f_1，我们有

$$\|Df_{1x}\|\leq\max\{\sup_{x\in M}\|Df_{1x}\|,\sup_{x\in M}\|Df_{1x}^{-1}\|\}.$$

令 $L(f_1)=\log\max\{\sup_{x\in M}\|Df_{1x}\|,\sup_{x\in M}\|Df_{1x}^{-1}\|\}.$。不难验证，对于任意微分同胚 $f_1,f_2.$，有 $L(f_1f_2)\leq L(f_1)+L(f_2)$，且 $L(f_1)=L(f_2^{-1})$。引理 3.2 完成证明。 ■

推论 3.3 对于任意

$$g=\begin{bmatrix}1 & x & z\\ & 1 & y\\ & & 1\end{bmatrix}\in H,$$

我们有稳定词长

$$\mathrm{swl}_S(g)=|x|+|y|.$$

证明。对于任意

$$g = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{bmatrix} \in H,$$

由于 swl 是在 $H.$ 的中心上为零的长度函数，因此对于 $g_0 = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{bmatrix}$，我们有

$\mathrm{swl}(g) = \mathrm{swl}(g_0)$。对于每个正整数 n，我们有

$$g_0^n = \begin{bmatrix} 1 & nx & \frac{n(n-1)xy}{2} \\ & 1 & ny \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

将 g_0 替换为 g_0^{-1} 后，我们总可以假设 $x \geq 0.$。当 $x \geq y \geq 0$ 时，引理 3.1 蕴含

$$\begin{aligned} |g_0^n| &= nx + ny, \\ \mathrm{swl}(g_0) &= x + y. \end{aligned}$$

当 $y > x$ 时，我们有

$$\begin{aligned} |g_0^n| &= d(nx, ny, \frac{n(n-1)xy}{2}) = d(ny, nx, \frac{n(n-1)xy}{2}) \\ &= ny + nx, \\ \mathrm{swl}(g_0) &= ny + nx. \end{aligned}$$

当 $0 \geq y > -x$ 时，我们有

$$\begin{aligned} |g_0^n| &= d(nx, ny, \frac{n(n-1)xy}{2}) = d(nx, n|y|, \frac{n(n-1)x|y|}{2}) \\ &= nx + n|y|. \end{aligned}$$

当 $y \leq -x$ 时，我们有

$$\begin{aligned} |g_0^n| &= d(nx, ny, \frac{n(n-1)xy}{2}) = d(nx, n|y|, \frac{n(n-1)x|y|}{2}) \\ &= d(n|y|, nx, \frac{n(n-1)x|y|}{2}) = n|y| + nx. \end{aligned}$$

无论哪种情况，我们都有 $\mathrm{swl}(g) = |x| + |y|.$ ■

不难看出，swl 在由 a 的像生成的阿贝尔化 $H/\langle c \rangle$ 上给出了一个范数，$b.$

推论 3.4 设 $L\colon\ H \to \mathbb{R}$ 是一个半范数，即 $L(gh) \leq L(g) + L(h)$ $L(g) = L(g^{-1})$，对任意 $g, h \in H.$，存在常数 K 使得

$$\mathrm{sL}(g) \leq K(|x| + |y|)$$

对于任意
的

$$g = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{bmatrix} \in H.$$

证明。对于每个整数 k，将 $g^k = s_1 s_2 ... s_n$ 写成某个 $s_i \in S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ 和$n = |g^k|_S$. 那么我们有

$$\begin{aligned} L(g^k) &\leq |g^k|_S \max\{L(s) : s \in S\}, \\ \mathrm{sL}(g) &= \lim \frac{L(g^k)}{k} \leq \mathrm{swl}(g) \max\{L(s) : s \in S\}. \end{aligned}$$

选择 $K = \max\{L(s) : s \in S\}$，并应用推论 3.3 完成证明。 ■

推论 3.5 在 H 上存在不是稳定范数的长度函数。

证明。令

$$g_{1,n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & n \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

对每个整数 $n \geq 1.$，定义 $l : H \to \mathbb{R}$，使得 $l(g_{1,\ n}) = n^2$，$l(g_{1,\ n}^k) = |k| l(g_{1,\ n})$, 并将所有其他元素映射为 0。这是一个定义良好的长度函数（见 [18], 定理 5.3）。但是l 呈二次增长，而根据前一个推论，任何稳定范数相对于矩阵元素都呈线性增长。 ■

参考文献

[1] S. Blachere, 《离散海森堡群上的词距离》, Colloq. Math.95 no. 1 (2003), 21–36.[2] F. Bertolotti, R. Frigerio, 《映射类群上的长度函数与映射环面的单纯形体积》, arXiv:2205.10846, 即将在 Annales de l'Institut Fourier 发表。[3] M. Bridson and A. Haefliger, 《非正曲率度量空间》, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag, 柏林, 1999.[4] D. Calegari, M. Freedman, 《变换群中的扭曲》, Geometry & Topol- ogy 10 (2006) 267–293.[5]G. Conner, 《可解群中平移数的离散性》, J. Group Theory 3 (2000), no. 1, 77-94.[6] T. Fritz, S. Gadgil, A. Khare, P. Nielsen, L. Silberman and T. Tao, 《群上的齐次长度函数》, Algebra and Number Theory, 12 (2018), 1773-1786.[7] S. M. Gersten and H. B. Short, 《双自动群的有理子群》, Ann. of Math. (2) 134 (1991), no. 1, 125-158.[8] D. Gromolland J. Wolf, 《非正曲率流形中基本群的度量结构与代数结构之间的若干关系》, Bul. Amer. Math. Soc. 4 (1971), 545-552.[9] H. Hu, 《交换微分同胚的若干遍历性质》, Ergodic Theory Dy- nam. Systems 13 (1993), no. 1, 73–100.[10] H. Hu, E. Shi, Z. Wang, 《离散海森堡群作用的若干遍历性质与刚性性质》, Israel Journal of Mathematics 228 (2018), 933-972.

[11] A. Katok and B. Hasselblatt, 《动力系统现代理论导论》, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 54, 剑桥大学出版社, 1995.[12] H. Lawson and S. T. Yau, 《非正曲率紧流形》, 《微分几何杂志》7 (1972), 211-228.[13] E. M. Leviˇc, 《零特征域上可解群的矩阵表示》（俄文）。《苏联科学院院报》188 (1969), 520-21.[14] J. C. Lennox and D. J. S. Robinson, 《无限可解群理论》, 牛津大学出版社, 2004.[15] T. Prytu la, 《单纯形非正曲率的可解子群定理》, 《代数与计算国际期刊》28 (4) (2018), pp. 605-611.[16] V. N. Remeslennikov, 《有限生成亚交换群的矩阵表示》（俄文）。《代数与逻辑》8 (1969), 72–5.[17] D. Segal. 多循环群。Cambridge Tracts inMath.（剑桥大学出版社，1983）。[18] S. Ye, 《群上的长度函数与刚性》, arXiv:2101.08902，即将在《超越双曲性/阿廷群、CAT(0)几何及相关主题会议论文集》中发表。

中国上海市浦东新区杨思西路567号，纽约大学上海分校，邮编200124。中国上海市中山北路3663号，纽约大学上海分校纽约大学—华东师范大学数学科学研究所，邮编200062。电子邮箱：sy55@nyu.edu