arXiv:2305.05134v1 [econ.TH] 9 May 2023

选择人工智能还是不选择人工智能，购买本地产品还是不购买本地产品：实际价格的数学理论 *

Huan Cai † Catherine Xu ‡ Weiyu Xu §

2023年5月10日

摘要

在过去几十年中，世界经济日益全球化。另一方面，也有一些理念倡导践行“购买本地产品”，即人们购买本地生产的商品和服务，而非在距离更远的地方生产的商品和服务。本文建立了一套实际价格的数学理论，用于确定代理人的最优全球与本地支出，从而实现代理人在支出与获得效用之间的最优权衡。我们的实际价格理论依赖于与生产者和消费者网络相关的马尔可夫链转移概率矩阵的渐近分析。我们证明，可以根据相关的马尔可夫链矩阵确定某种产品或服务的实际价格，而且该价格可能与产品的标价存在显著差异。具体而言，我们证明，产品和服务的标价往往并非“真实的”或能够直接体现“效用”的：对于能够提供相同短视效用的两种产品，标价较低的产品未必能够提供更高的渐近效用。该理论表明，产品和服务的全球化程度或本地化程度确实会对顾客的支出与效用之间的权衡产生不同影响。所建立的实际价格数学理论可以从经济学角度用于判断是否应当采用某些人工智能（AI）技术。

关键词：购买本地产品、马尔可夫链、价格、经济学、贸易、全球化、人工智能（AI）、平方和、多项式优化、半定规划

1 引言

随着全球投资、贸易和电子商务活动的发展，世界经济日益紧密地联系在一起[2, 3, 7]。这些全球经济活动已成为现代社会不可或缺的一部分。另一方面，也有人提倡“购买本地产品”，即人们购买本地生产的商品和服务，而不是购买那些产自

*Weiyu Xu 共同设计了本研究，并进行了数学建模和推导。Huan Cai 共同设计了本研究，并提供了经济学解释。Catherine Xu 推导了第 4.2.2 节中给出的数学方程，并使用 LaTeX 写下了第 4.2 节中的所有数学方程。

†康奈尔学院，艾奥瓦州芒特弗农，邮编 52314。

‡爱荷华州艾奥瓦市数学圈俱乐部。§爱荷华大学电气与计算机工程系，艾奥瓦州艾奥瓦市，邮编 52242。电子邮箱：weiyu-xu@uiowa.edu

更远地区的产品。“购买本地产品”有时指购买本地种植的农产品，但也可以包括购买其他本地生产的产品和服务。

人们为什么购买本地产品？近期研究聚焦于道德论据或伦理考量，却得出了不同结论。例如，一方面，[1] 认为购买本地食品在道德上优于其他选择，因为这既能在经济上帮助最贫困的食品行业工人，也能减轻食品运输造成的环境影响。另一方面，[9] 分析了现有文献中本地主义消费的主要理由，即环境保护、促进社区发展、扶持小型企业以及促进本地经济繁荣，并指出这些理由都不足以为一般消费者采纳购买本地产品这一做法提供有力的积极伦理依据。

然而，只有少数论文在一般化的理论模型中正式探讨了“购买本地产品”决策的经济影响。例如，[8] 提出了一个理论模型，说明经济外部性和市场势力等市场摩擦因素，即使在某个地区不具备竞争优势的情况下，也能够解释消费者选择购买本地产品的行为。然而，在其模型中，即使不存在市场势力或外部性，购买本地产品仍可能导致无谓损失。此外，[4]提出了一个基于垄断竞争经济的形式化模型，该模型主要建立在互惠和信任的基础上，以解释“购买本地产品”行为。然而，与其他现有文献一样，他们关注的是短期交易中的均衡结果。

本文认为，无需诉诸社会因素或环境考量来推动“购买本地产品”的决定；即使主体的动机纯粹出于自身利益，本地购买也可能有益。我们的研究从理论角度对相互关联的生产者—消费者网络进行了长期分析。

具体而言，我们建立了一套实际价格的数学理论，用以确定代理人的全球与本地支出最优配置，从而实现其在支出与效用之间的最优权衡。从本质上说，实际价格是一种等效的假设价格：顾客购买一单位产品时需支付这一价格，才能获得与其真实渐近平均效用相同的短视效用。我们的实际价格理论建立在对与生产者与消费者网络相关的马尔可夫链转移概率矩阵进行渐近分析的基础上。我们证明，可以通过求解一个涉及底层马尔可夫链平稳分布的优化问题，利用相关马尔可夫链矩阵确定产品或服务的实际价格。实际价格可能与产品的标价大相径庭。具体而言，我们表明，产品和服务的标价往往并非“实际价格”：对于两种提供相同短视效用的产品，标价较低的产品未必能带来更高的渐近效用。这一理论表明，标价相同的产品和服务，无论来自全球还是本地，其地域属性都可能对支出与效用之间的权衡产生不同影响。

既有的实际价格数学理论，也可从经济学角度用于判断是否采用某些人工智能（AI）技术。人工智能在进一步自动化许多过去完全或部分由人类完成的任务方面，前景十分广阔 [6]。总体而言，借助人工智能（AI）技术实现自动化，可以大幅提高社会整体的生产效率。例如，使用人工智能执行某项任务的标价，可能远低于采用其他方式完成同一任务的标价。然而，我们的理论表明，尽管人工智能（AI）技术的标价可能较低，但对于采用这些技术的社区而言，其“实际价格”可能高于非人工智能技术的替代方案。从经济学角度看，采用人工智能（AI）技术所带来的益处，取决于技术提供者与技术消费者网络的结构，也取决于这些人工智能（AI）技术对采用它们的社区而言是否具有“本地性”。

本文结构安排如下。第2节建立一个基于马尔可夫链的数学模型，以研究如何优化本地和全局支出的相关问题。第3节构建一个多项式优化问题，以优化主体的支出模式，实现其支出与效用权衡的最优结果。第4节介绍实际价格的概念，并推导支出网络中的实际价格公式。第5节给出数值结果，表明我们的优化支出策略显著优于直接标签价格支出策略。第6节总结全文，并提出未来的研究方向。

2 数学模型

我们考虑 n 个主体，其中 n 是一个正整数。每个主体既可以充当生产者，也可以充当消费者。我们考虑一个支出矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其中 P 是一个马尔可夫链转移概率矩阵。我们将 P 中第 i行、第 j列的元素记为 $P_{i,\ j}$。对于矩阵P，对于每个 $1 \le j \le n$，均有 $\sum_{i=1}^{n} P_{i,\ j} = 1$。数值 $P_{i,\ j}$ 表示第 j个代理人的货币中，由第 j个代理人用于购买第 i个代理人所提供的服务和产品的比例。

我们用 $x^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ 表示时间索引为 t时的货币向量，其中 $t \ge 0$ 是一个整数。我们假设 x^t 的每个元素均为非负数，表示各代理人在时间索引为 t时持有的货币。我们将每个时间索引称为一个回合。我们还有一个效用矩阵$U \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其元素均为非负数。我们将 U 中第 i 行、第 j 列的元素记为 $U_{i,\ j}$，它表示如果第 j 个代理人从主体 i 购买一单位产品或服务，第 i 个代理人会为第 j 个代理人提供的效用。我们还有一个价格矩阵 $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其中$C_{i,\ j}$表示 C中第 i 行、第 j 列的元素，即第 i 个代理人为向第 j 个代理人提供一单位服务或产品所收取的价格。我们假设随着时间推移，没有代理人会改变其支出模式，即每个代理人维持对各代理人支出的相对比例。

表面上看，为了最大化第 j 个代理人的效用，第 j 个代理人应将其全部货币花在提供最低价格和最高单位产品效用的代理人身上，即具有最大 $\frac{U_{i,\ j}}{C_{i,\ j}}$ 的代理人 i。然而，出乎意料的是，我们认为事实并非如此，最优支出做法应取决于生产者与消费者网络的结构。事实上，我们将在下一节给出一种优化建模，为每个代理人提供最优支出模式。

我们注意到，在时间索引 $(t+1)$ 处，货币向量更新为

$$x^{t+1} = Px^t.$$

3 支出模式优化

不失一般性，我们聚焦于代理1，并尝试确定其最优支出策略，即确定矩阵 P 的第一列。我们的目标是最大化代理1随时间获得的效用。

我们假设矩阵 P 是不可约马尔可夫链的转移矩阵。记为“CD'”的充分条件是，要使 P 不可约，以下两个条件必须同时成立：(1) 对每个 j，$1 \le j \le n$，子矩阵 $P_{/j,/j}$ 是不可约的，其中$P_{/j,/j}$ 是 the

P的子矩阵，不包含第 j行和第 j列；(2) 对每个 j、 $1 \leq j \leq n$，都存在一个代理人 $k \neq j$ 使得$P_{j,\ k} > 0$ 并且存在一个代理人 $l \neq k$ 使得$P_{l,\ j} > 0$。

假设矩阵 P 满足条件“CD''。根据 $x^{t+1} = Px^t$，随着时间索引 t 增加，货币向量各元素之和保持不变。通过将 x^t 缩放为 $(x')^t$，使得 $(x')^t$ 的元素之和等于 1，我们可以将向量 $(x')^t$ 视为概率分布向量。我们可以将 P 视为马尔可夫链的转移概率矩阵。由于这条马尔可夫链具有不可约性，因此它有唯一的平稳分布。如果这条马尔可夫链还是非周期的，那么 $(x')^t$ 将收敛到唯一的平稳概率分布向量 x'，满足 $Px' = x'$。随后，货币向量 x 将收敛到唯一的平稳货币向量 x，满足 $Px = x$。即使这条马尔可夫链不是非周期的，根据不可约马尔可夫链遍历定理，我们知道，随着时间索引增加，无论初始分布 $(x')^0$ 为何，马尔可夫链在每个状态上停留的时间比例都会以高概率收敛到该唯一的平稳分布。因此，当马尔可夫链不可约时，我们总能用其唯一的平稳分布来计算每个回合的渐近效用。

为了在平稳货币向量下最大化第 j 个代理人的效用，我们建立如下优化问题：

$$\begin{aligned} \underset{x,\ P_{:,j}}{\text{minimize}}\ & x_j \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{i,j} U_{i,j}}{C_{i,j}} \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \\ & Px = x, \\ & \|x\|_1 = \|x^0\|_1, \\ & P{:}, j \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $P_{:,\ j}$ 是 j的第 P 列，$\|x\|_1$ 表示 ℓ_1 的 x范数，即 x中各元素绝对值之和。为简单起见，我们约束 x 的元素均为非负数。在这种情况下，向量 x 表示概率转移矩阵 P的缩放后的平稳分布。由于系统达到缩放后的平稳概率分布，我们必须满足第二个约束 $Px = x$。由于 x 中各元素之和不会随时间变化，因此有 $\|x\|_1 = \|x^0\|_1$。由于 x_j 是代理人 j 在平稳分布下所持有的平稳货币数量，因此目标函数如式（1）所示。

不失一般性，我们可以假设 $\|x^0\|_1 = 1$。在此假设下，我们可以将式（1）改写为：

$$\begin{aligned} \underset{x,\ P_{:,j}}{\text{minimize}}\ & x_j \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{i,j} U_{i,j}}{C_{i,j}} \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \\ & Px = x, \\ & \|x\|_1 = 1, \\ & P{:}, j \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

我们注意到，(2) 是一个非线性优化问题，因为目标函数涉及 x 中的元素与 P中的元素的乘积。为了数值求解 (2)，我们可以将 (2) 视为一个

多项式优化问题，将其转化为平方和优化形式 [5]及相关的半定规划，并使用半定规划算法求得最优的 x 和支出策略（分配）$P_{:,\ j}$。

我们进一步观察到（2）在固定 x_1的某个值时，会转化为关于x 的其他元素以及 P的各元素的线性规划问题。这一观察带来了以下数值算法，避免在多项式优化中使用半定规划：对于较大的 n，半定规划可能耗时较长。在我们的算法中，我们通过搜索2中 x_1 的可能取值来求解（ x_1，例如网格搜索）。对于每个考察的 x_1值，我们求解相应的线性规划问题。然后，在 x_1的所有取值中，我们选择使目标函数值最高的取值。由于我们只对一维变量 x_1 进行网格搜索（或其他类型的搜索），且其取值被限制在0和1之间，因此该算法能够以相对较低的复杂度运行。

4 实际价格与标价

本节给出在给定支出模式下，从代理人 j 的视角看到的代理人 k的产品和服务的实际价格定义。本质上，代理人 i 以该实际价格花费一定数量的货币从代理人 k 处购买产品和服务，将获得即时效用（在单个回合内），该效用等于“如果代理人 j 以相同数量的货币按标价购买代理人 k的产品和服务时，每个回合的渐近效用”。

4.1 固定支出模式下的实际价格

我们将代理人 j 的固定支出模式定义为这样一种支出模式：代理人 j 将固定比例的支出分配给各代理人提供的产品和服务。根据上述表述可知，如果相关的马尔可夫链不可约，系统就会达到平稳分布。

假设代理人 j 在初始时间索引（$t = 0$）额外支出 Δa，用于购买代理人 k 提供的产品和服务，同时保持固定支出模式（这意味着代理人 j 用于购买其他代理人提供的产品和服务的支出也按比例增加）。

我们知道，固定支出模式下每个回合的渐近效用为

$$W = \sum_{i=1}^{n} \|x^0\|_1 \frac{x_j U_{i,j}}{C_{i,j}},$$

其中， x 是平稳分布向量。

因此，由于代理人 j 对代理人 k 的额外支出，每个回合的渐近效用增量为

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{n} (x_j \Delta a) \frac{U_{i,j}}{C_{i,j}}.$$

这种额外的每个回合的渐近效用，等价于代理人 j 在第 0 个回合直接将 Δa 花费在代理人 k的产品和服务上、以新价格获得的效用

$X(\Delta a)$（作为 Δa 的函数），其中

$$\sum_{i=1}^{n}(x_j\Delta a)\frac{U_{i,j}}{C_{i,j}} = \frac{\Delta a U_{k,j}}{X(\Delta a)}.$$

求解 $X(\Delta a)$，我们得到

$$X(\Delta a) = \frac{U_{k,j}}{\sum_{i=1}^{n} x_j \frac{U_{i,j}}{C_{i,j}}}.$$

我们将 $X(\Delta a)$ 称为实际价格。它等同于经济学中常见的边际价格，但这里是通过对马尔可夫链进行渐近分析得到的。

定义 4.1。（代理人 j 从代理人 k 购买产品和服务时，代理人 k 的产品和服务的实际价格）假设代理人 j 在初始时间索引（$t = 0$）额外花费 Δa 货币购买代理人 k 提供的产品和服务，并假设所涉及的矩阵链是不可约马尔可夫链。假设当 $t \to \infty$ 增加 ΔW 时，每个回合的渐近效用。我们将代理人 j 所看到的代理人 k 的产品和服务的实际价格定义为

$$RP(\Delta a) = \frac{U_{k,j}\Delta a}{\Delta W}.$$

我们进一步将瞬时实际价格定义为

$$RP = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{U_{k,j}\Delta a}{\Delta W}.$$

例如，我们可以看到，当我们保持代理人 j 的固定支出比例时，从代理人 j 的角度看，代理人 k 的产品和服务的实际价格为

$$RP = \lim_{\Delta a \to 0} X(\Delta a) = \frac{1}{x_j}\frac{U_{k,j}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{U_{i,j}}{C_{i,j}}}.$$

这通常不同于每个代理人所提供的产品和服务的标价。事实上，提供较低标价的代理人可能对应着较高的实际价格，这意味着实际上并不值得从提供较低标价的代理人处购买。

4.2 动态支出模式下的实际价格

在本小节中，我们考虑代理人 j 单独多花费 Δa 货币，在 $t = 0$购买代理人 k 的产品和服务这一情形。在此，我们不增加代理人 j 用于购买其他代理人的产品和服务的货币金额。不失一般性，我们假设 $j = 1$。我们将总货币量（支出增加之前）记为 $T = \|x^0\|_1$，将新的货币总量（支出增加之后）记为 $T' = \|x^0\|_1 + \Delta a$。这笔新增支出会使代理人 j 在 $t = 0$形成新的支出模式。我们假设，随着时间索引 t 增加，代理人 j 会在 $t = 0$保持其新的初始支出模式，即使时间索引 t不断增加。

4.2.1 主体数量 $n = 3$

我们考虑 $n = 3$ 的情形，之后将把它推广到一般的 n。作为 $t \to \infty$，假设我们已经得到了平稳货币向量 x。也就是说，我们有

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ \frac{a_2}{a_1+a_2+a_3} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ \frac{a_3}{a_1+a_2+a_3} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

and

$$x_1 + x_2 + x_3 = \|x^0\|_1,$$

其中， a_1、 a_2和 a_3 分别表示代理人 j 在 $t = 0$和 $a_1 + a_2 + a_3 = x_1^0$时为各主体的产品和服务所支出的货币金额。

现在我们将 a_2 改为 $a_2 + \Delta a_2$。因此，我们有

$$x_1 + x_2 + x_3 = \|x^0\|_1 + \Delta a_2,$$

and

$$a_1 + a_2 + a_3 = x_1^0 + \Delta a_2.$$

假设代理人 $j = 1$ 每回合总效用的变化为 ΔW。我们旨在求出瞬时实际价格

$$RP = \lim_{\Delta a_2 \to 0} \frac{U_{k,j} \Delta a_2}{\Delta W},$$

其中， $k = 2$ 和 $j = 1$。

首先 综上，通过对平稳分布的方程求全导数，我们得到以下关系： $\Delta a_2 \to 0$

平稳分布的方程

平稳分布:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = \Delta a_2$$

$$-\frac{a_1}{(a_1+a_2+a_3)^2}\Delta a_2 x_1 + \frac{a_1}{(a_1+a_2+a_3)}\Delta x_1 + P_{1,2}\Delta x_2 + P_{1,3}\Delta x_3 = \Delta x_1$$

$$[\frac{1}{a_1+a_2+a_3} - \frac{a_2}{(a_1+a_2+a_3)^2}]\Delta a_2 x_1 + \frac{a_2}{a_1+a_2+a_3}\Delta x_1 + P_{2,2}\Delta x_2 + P_{2,3}\Delta x_3 = \Delta x_2$$

$$-\frac{a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2}\Delta a_2 x_1 + \frac{a_3}{a_1+a_2+a_3}\Delta x_1 + P_{3,2}\Delta x_2 + P_{3,3}\Delta x_3 = \Delta x_3$$

重新整理后，我们得到以下方程组:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = \Delta a_2$$

$$\left(\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3} - 1\right)\Delta x_1 + P_{1,2}\Delta x_2 + P_{1,3}\Delta x_3 = \frac{a_1}{(a_1+a_2+a_3)^2} x_1 \Delta a_2$$

$$\frac{a_2}{a_1+a_2+a_3}\Delta x_1 + (P_{2,2} - 1)\Delta x_2 + P_{2,3}\Delta x_3 = -[\frac{1}{a_1+a_2+a_3} - \frac{a_2}{(a_1+a_2+a_3)^2}] x_1 \Delta a_2$$

$$\frac{a_3}{a_1+a_2+a_3}\Delta x_1 + P_{3,2}\Delta x_2 + (P_{3,3}-1)\Delta x_3 = \frac{a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2}x_1\Delta a_2.$$

由于马尔可夫链转移概率矩阵P中每一列的元素之和均为 1，因此四个方程中有一个是冗余的。根据上述四个方程，我们可以求出比值 $\frac{\Delta x_1}{\Delta a_2}$、 $\frac{\Delta x_2}{\Delta a_2}$和 $\frac{\Delta x_3}{\Delta a_2}$。进一步可得

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{3}\Delta\left(x_1\frac{a_i}{a_1+a_2+a_3}\frac{U_{i,1}}{C_{i,1}}\right) \tag{3}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{U_{i,1}}{C_{i,1}}\Delta\left(x_1\frac{a_i}{a_1+a_2+a_3}\right)\right] \tag{4}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\frac{U_{i,1}}{C_{i,1}}\left[\Delta x_1\frac{a_i}{a_1+a_2+a_3} + x_1\Delta\left(\frac{a_i}{a_1+a_2+a_3}\right)\right] \tag{5}$$

$$= \sum_{i=1,i\neq 2}^{3}\frac{U_{i,1}}{C_{i,1}}\left[\Delta x_1\frac{a_i}{a_1+a_2+a_3} - x_1\frac{a_i}{(a_1+a_2+a_3)^2}\Delta a_2\right] \tag{6}$$

$$+ \frac{U_{i=2,1}}{C_{i=2,1}}\left[\Delta x_1\frac{a_i}{a_1+a_2+a_3} + x_1\left[\frac{1}{a_1+a_2+a_3}\Delta a_2 - \frac{a_2}{(a_1+a_2+a_3)^2}\Delta a_2\right]\right] \tag{7}$$

因此，瞬时实际价格为:

$$RP = \lim_{\Delta a_2\to 0}\frac{U_{k,j}\Delta a_2}{\Delta W},$$

由于已知$\frac{\Delta x_1}{\Delta a_2}$、 $\frac{\Delta x_2}{\Delta a_2}$和 $\frac{\Delta x_3}{\Delta a_2}$，因此可以计算得出。

4.2.2 主体的一般数量 n

我们考虑一般的 n。根据 $t\to\infty$，我们已经得到了平稳货币向量 x。也就是说，我们有

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sum_{i=1}^n a_i} & P_{1,2} & P_{1,3} & \dots & P_{1,n} \\ \frac{a_2}{\sum_{i=1}^n a_i} & P_{2,2} & P_{2,3} & \dots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{a_n}{\sum_{i=1}^n a_i} & P_{n,2} & P_{n,3} & \dots & P_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

and

$$x_1 + x_2 + \dots x_n = \|x^0\|_1,$$

其中， a_1、 a_2、.....、 a_n 分别表示代理人 j 在 $t=0$ 用于购买各主体产品和服务的货币数量，而 $a_1+a_2+\dots+a_n = x_1^0$。

现在我们将 a_2 改为 $a_2+\Delta a_2$，因此，变更后我们得到

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \|x^0\|_1 + \Delta a_2,$$

and

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = x_1^0 + \Delta a_2.$$

假设代理人 $j = 1$ 每回合总效用的变化为 ΔW，我们的目标是求出瞬时实际价格

$$RP = \lim_{\Delta a_2 \to 0} \frac{U_{k,j} \Delta a_2}{\Delta W},$$

其中 $k = 2$ 和 $j = 1$。注意，如果 $j \neq 1$ 或 $k \neq 2$，总可以对矩阵 P 进行列交换或行交换，使感兴趣的主体的索引为 $k = 2$ 和 $j = 1$。

首先，通过求全导数，我们得到以下关系： $\Delta a_2 \to 0$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = \Delta a_2$$

$$-\frac{a_1}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} \Delta a_2 x_1 + \frac{a_1}{\sum_{i=1}^n a_i} \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n P_{1,i} \Delta x_i = \Delta x_1$$

$$[\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} - \frac{a_2}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}] \Delta a_2 x_1 + \frac{a_2}{\sum_{i=1}^n a_i} \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n P_{2,i} \Delta x_i = \Delta x_2$$

$$-\frac{a_3}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} \Delta a_2 x_1 + \frac{a_3}{\sum_{i=1}^n a_i} \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n P_{3,i} \Delta x_i = \Delta x_3$$

$$\vdots$$

$$-\frac{a_n}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} \Delta a_2 x_1 + \frac{a_n}{\sum_{i=1}^n a_i} \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n P_{n,i} \Delta x_i = \Delta x_n$$

重新整理后，我们得到以下方程组：

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = \Delta a_2$$

$$\left(\frac{a_1}{\sum_{i=1}^n a_i} - 1 \right) \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n P_{1,i} \Delta x_i = \frac{a_1}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} x_1 \Delta a_2$$

$$\frac{a_2}{\sum_{i=1}^n a_i} \Delta x_1 - P_{2,2} \Delta x_2 + \sum_{i=2}^n P_{2,i} \Delta x_i = -[\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} - \frac{a_2}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}] x_1 \Delta a_2$$

$$\frac{a_3}{\sum_{i=1}^n a_i} \Delta x_1 - P_{3,3} \Delta x_3 + \sum_{i=2}^n P_{3,i} \Delta x_i = \frac{a_3}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} x_1 \Delta a_2.$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_n}{\sum_{i=1}^n a_i} \Delta x_1 - P_{n,n} \Delta x_n + \sum_{i=2}^n P_{n,i} \Delta x_i = \frac{a_n}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} x_1 \Delta a_2.$$

其中一个 $n+1$ 方程是冗余的，因为马尔可夫链转移概率矩阵 P中每一列的元素之和为 1。根据上述 $n+1$ 方程，我们可以确定比值 $\frac{\Delta x_1}{\Delta a_2}, \frac{\Delta x_2}{\Delta a_2}, \ldots, \frac{\Delta x_n}{\Delta a_2}$。

因此，代理人 $j=2$ 在每个回合中的效用变化等于：

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{n} \Delta \left(x_1 \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \frac{U_{i,1}}{C_{i,1}} \right) \tag{8}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{U_{i,1}}{C_{i,1}} \Delta \left(x_1 \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \right) \right] \tag{9}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{U_{i,1}}{C_{i,1}} \left[\Delta x_1 \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + x_1 \Delta \left(\frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \right) \right] \tag{10}$$

$$= \sum_{i=1, i\neq 2}^{n} \frac{U_{i,1}}{C_{i,1}} \left[\Delta x_1 \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} - x_1 \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2} \Delta a_2 \right] \tag{11}$$

$$+ \frac{U_{i=2,1}}{C_{i=2,1}} \left[\Delta x_1 \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + x_1 \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \Delta a_2 - \frac{a_2}{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2} \Delta a_2 \right] \right] \tag{12}$$

那么，瞬时实际价格为：

$$RP = \lim_{\Delta a_2 \to 0} \frac{U_{k,j} \Delta a_2}{\Delta W},$$

由于我们知道$\frac{\Delta x_1}{\Delta a_2}$、 $\frac{\Delta x_2}{\Delta a_2}$、.....、 $\frac{\Delta x_n}{\Delta a_2}$，因此可以计算得出。

5 数值结果

为简化起见，我们考虑一个三代理人网络（尽管代码适用于一般的 n）。在该网络中，我们专注于优化代理1的支出策略，并假设代理人2和3的支出策略固定不变。我们考虑以下马尔可夫链矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix},$$

其中，我们需要优化$P_{1,\ 1}$、 $P_{2,\ 1}$ 和$P_{3,\ 1}$。在实验中，我们对 P的最后两列采用以下数值：

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \alpha & 0.5 \\ P_{2,1} & 1-\alpha-0.02 & 0.01 \\ P_{3,1} & 0.02 & 0.49 \end{pmatrix},$$

其中， α 是代理2的可调参数。 α 越大，代理2就越愿意花费其货币购买代理1的产品和服务。

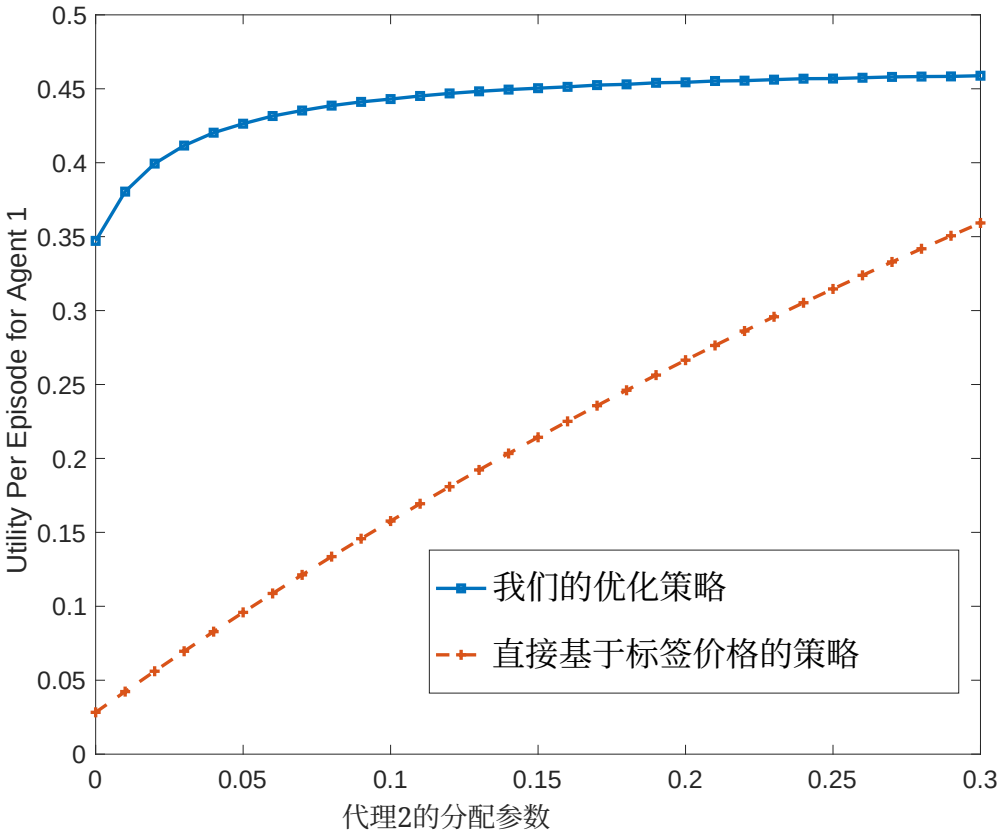

图1：在生产者与消费者构成的三代理人网络中，比较代理1通过我们的最优支出策略与直接基于标签价格的策略所获得的每回合效用。横轴为 α。

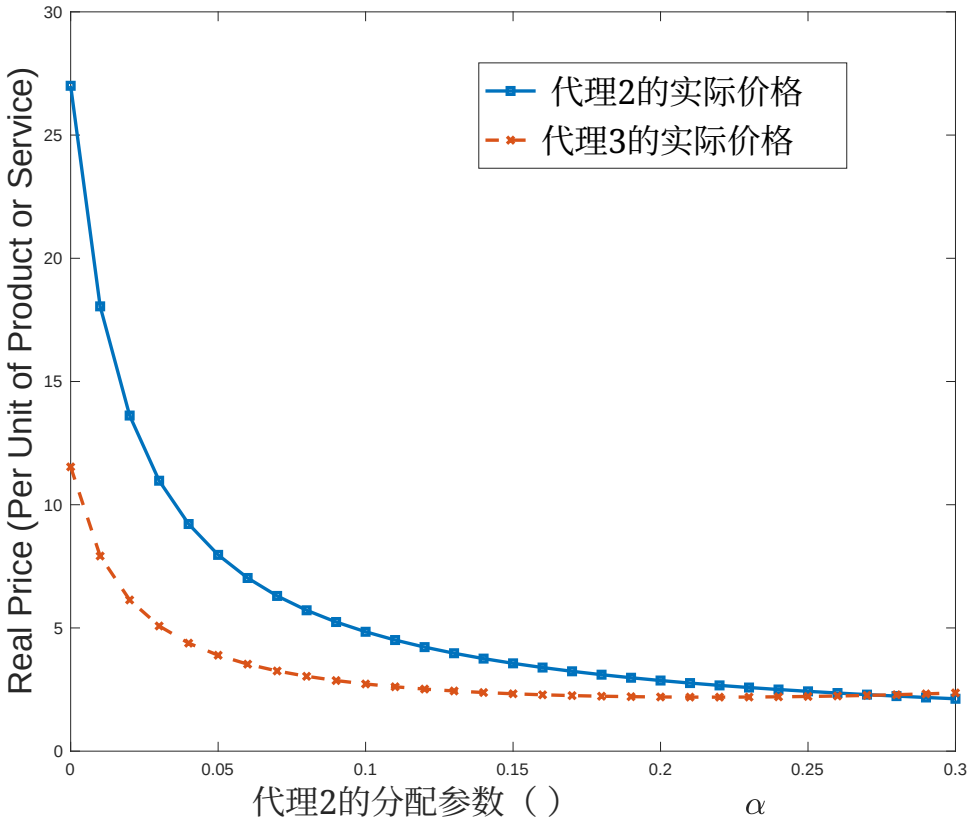

图2：从代理1的视角比较代理2和代理3的实际价格。该比较在一个生产者与消费者组成的三代理人网络中进行。横轴为 α。

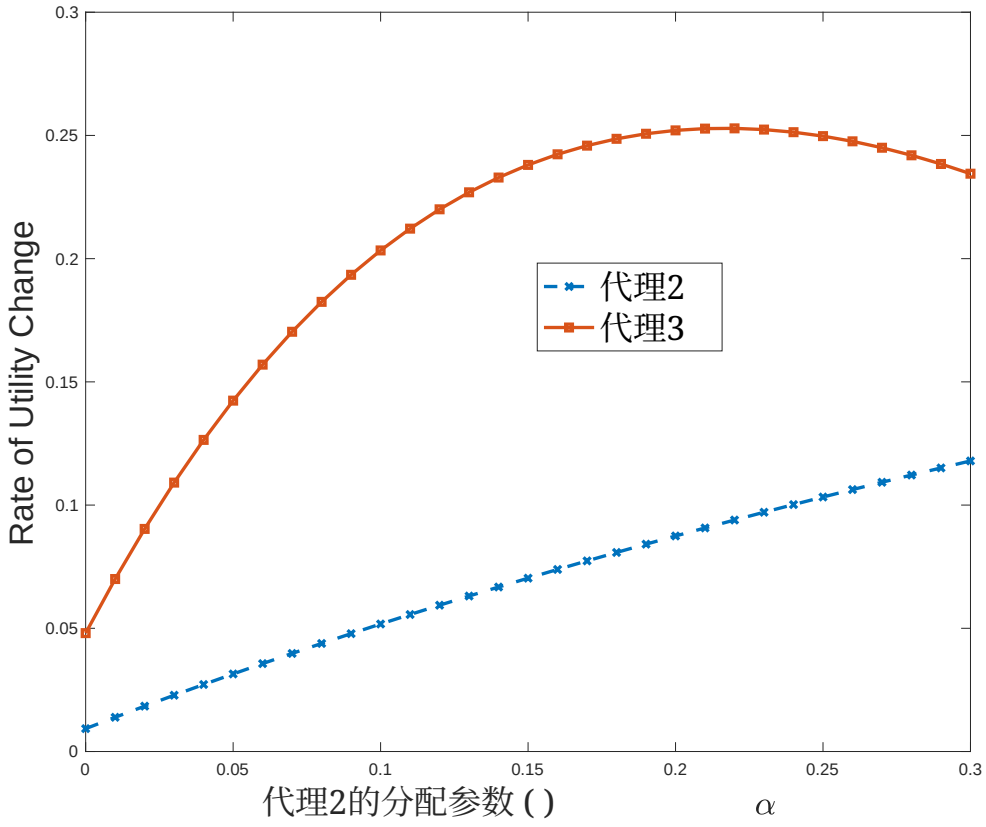

图3：在生产者与消费者构成的三代理人网络中，代理1获得的渐近效用（即边际渐近效用）变化率与 a_2 （代理2）和 a_3 （代理3）的变化之间的比较。横轴为 α。

5.1 优化支出策略与基于直接标签价格的策略比较

我们（随机）生成了以下效用矩阵 U 和价格矩阵 C:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0.3746 & 0.6199 \\ 0.7637 & 0 & 1.0246 \\ 0.5495 & 0.3102 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$C = \begin{pmatrix} 0.1619 & 6.7064 & 0.3463 \\ 0.5000 & 4.6920 & 6.0502 \\ 0.3958 & 0.7562 & 7.1731 \end{pmatrix}.$$

在这样的 U 和 C条件下，代理2为代理1提供的效用价格比最高。因此，采用短视方法时，代理1会把全部货币用于购买代理2提供的产品和服务。与短视方法不同，我们将通过求解优化问题（2），找出代理1的优化支出策略。图 1 展示了代理1每个回合获得的效用如何随 α变化，并将代理1的最优支出策略与基于直接标签价格的策略（选择提供最高效用价格比的生产者）进行比较。

如图 1所示，在 α 值较小时，我们的优化支出策略可使代理1每个回合的渐近效用提高十倍以上。当 α 较小时，代理1可以通过将大部分货币用于购买代理3提供的产品和服务，获得更高的每个回合渐近效用，尽管代理3提供的直接效用价格比较低。出现这一现象的直觉原因是：代理1用于购买代理2提供的产品和服务的货币中，只有较小比例会回流，用于购买代理1提供的产品和服务；因此，在货币的平稳分布中，代理1可用于购买的资金会更少，也就是说，x_2更小。敏锐的读者可能会注意到，代理2会将一部分货币花在自己身上，但这更多是建模技巧所致。实际上，代理2可以将这部分货币花在另一个外部代理人（比如代理4）提供的产品和服务上，而该外部代理人会把全部货币都用于购买代理2提供的产品和服务。在这种情况下，这种建模方式等同于我们所描述的三代理人网络模型，仿佛代理2将这部分货币花在了自己身上。

随着 α 增长，代理2更愿意花费货币向代理1购买产品和服务，而短视方法与我们的优化方法之间的差距也会缩小。

5.2 实际价格的计算

在本小节中，我们考虑数值部分开头所描述的相同问题设置。然而，在本小节中，我们使用一个新的效用矩阵 U 和一个价格矩阵 C:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0.7589 & 0.5426 \\ 0.2507 & 0 & 1.1631 \\ 0.5542 & 0.2726 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$C = \begin{pmatrix} 0.6380 & 0.1850 & 0.4736 \\ 0.5000 & 2.6813 & 0.9683 \\ 1.2161 & 2.5220 & 1.5043 \end{pmatrix}.$$

我们重点研究动态支出模式下的实际价格，即代理1不会按比例增加对其他代理的支出。在计算中，我们假设 $a_1 = 0$、$a_2 = 2$、 $a_3 = 0$ 和 $\|x^0\|_1 = 10$。此外，我们进一步假设矩阵 P 如下所示：

$$P = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1+a2+a_3} & \alpha & 0.5 \\ \frac{a_2}{a_1+a2+a_3} & 1-\alpha-0.02 & 0.01 \\ \frac{a_3}{a_1+a2+a_3} & 0.02 & 0.49 \end{pmatrix},$$

其中， α 是代理2的可调参数。

图2 展示了从代理1的视角看代理2和代理3的产品和服务的实际价格。可以看出，尽管代理2的产品和服务的标价低于代理3，但代理2的实际价格却高得多。

在图3中，我们还绘制了代理1获得的每个回合渐近效用的变化率，分别对应于 a_2 和 a_3的变化。横轴表示模型中的参数 α 。可以看出，改变 a_3 （增加对代理3的支出）对代理1获得的效用有更显著的正面影响，尽管代理3的产品和服务价格更高，效用价格比也更低。

从这些数值结果可以看出，有时向本地供应商（即可能更有意愿向代理1购买的主体）购买，可能会提升代理1的渐近效用，尽管本地供应商的短视价格和效用表面上看起来较差。

6 结论与未来方向

本文建立了一个理论模型，用于确定本地购买或采用某些人工智能技术是否值得。我们的模型基于对主体支出模式所对应的马尔可夫链进行渐近分析，并通过优化马尔可夫链的转移概率来获得优化支出策略。令人惊讶的是，我们证明，产品和服务的标价往往并不能反映购买这些产品和服务是否值得。我们的模型提出了一个涉及马尔可夫链的有趣的数学优化问题。这种表述有望应用于许多领域，并且可以通过多种方式进行扩展。例如，可以将一般效用视为支出的非线性函数，考虑定义得更加精细的产品和服务、动态变化的货币总量、主体之间的竞争与合作、产品和服务的竞争性定价、主体的利润最大化，以及货币时间价值。

参考文献

[1] Benjamin Ferguson 和 Christopher Thompson。《为什么要支持本地消费？》。《应用哲学杂志》，38(1):104–120，2021年。

[2] Caroline L Freund 和 Diana Weinhold。《互联网对国际贸易的影响》。《国际经济学杂志》，62(1):171–189，2004年。[3] David Hummels。《全球化第二阶段中的运输成本与国际贸易》。《经济展望杂志》，21(3):131–154，2007年。[4] George J Mailath、Andrew Postlewaite 和 Larry Samuelson。《本地购买》。《国际经济评论》，57(4):1179–1200，2016年。[5] Pablo A. Parrilo。《平方和规划与多项式不等式》。2004年。[6] Frank Rosenblatt。《神经动力学原理：感知器与脑机制理论》。技术报告，康奈尔航空实验室公司，纽约州布法罗，1961年。[7] Joseph E Stiglitz。《对全球化的过度推销》。《商业经济学》，52:129–137，2017年。[8] Jason Winfree 和 Philip Watson。《“购买本地产品”的福利经济学》。《美国农业经济学杂志》，99(4):971–987，2017年。[9] Carson Young。《你应该购买本地产品吗？》。《商业伦理学杂志》，176(2):265–281，2022年。